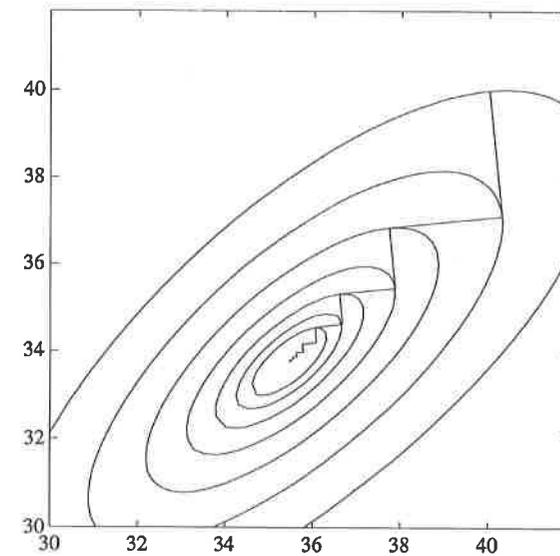


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»  
DE PROFESORES DE MATEMATICAS**



**BOLETIN N.º 42  
FEBRERO DE 1996**

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de E. Roanes Lozano.

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L. - San Pedro, 23 bis - 28917 Leganés (Madrid).  
Teléf.: 611 59 94 - Fax: 611 59 88.

La portada de este número reproduce una de las figuras del artículo titulado «Prácticas de Cálculo Numérico con MATLAB», contenido en este boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS  
Facultad de Educación (despacho 3517)  
Paseo Juan XXIII, s/n  
Ciudad Universitaria  
28040 Madrid.

## ÍNDICE

	<u>Págs.</u>
Convocatoria de la Asamblea General .....	5
XIV Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas .....	6
Noticias sobre Olimpiadas Matemáticas .....	8
Algunos problemas relacionados con los polinomios de Lucas y de Pell, por <i>Juan Bosco Romero Márquez</i> y <i>Benito Hernández Bermejo</i> .....	12
Transformaciones lineales con sistemas de cómputo algebraico por <i>E. Roanes Lozano</i> y <i>E. Roanes Macías</i> .....	28
Prácticas de Cálculo Numérico con MATLAB por <i>Celestino Montes</i> y <i>María de los Angeles Navarro</i> .....	47
La cuarta dimensión: una alternativa al teorema de Fermat por <i>Julián Sanz Pascual</i> .....	65
Corrigenda.....	74
Reseña de libros .....	75
Problemas propuestos.....	81
Problemas resueltos.....	85
Indice de soluciones publicadas .....	92
Instrucciones para el envío de originales para su publicación en este boletín.	93
Relación de otros artículos que han sido admitidos para ser publicados en próximos números de este boletín.....	93

## JUNTA DIRECTIVA

### Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

### Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS

(Madrid)

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

(Castilla-León)

SALVADOR HERRERO PALLARDO

(Castilla-La Mancha)

### Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE

(Redacción de publicaciones)

JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE

(Relaciones institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO

(Gestión de publicaciones)

MARTÍN GARBAYO MORENO

(Actividades y concursos)

### Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

### Vicesecretario:

MIGUEL ANGEL GALLARDO ORTIZ

### Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

### Bibliotecaria:

CARMEN GARCÍA-MIGUEL FERNÁNDEZ

## Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 1996

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas correspondiente a 1996 para el día 27 de abril de 1996, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (edificio nuevo), Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente

### ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos, si procede.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

!!Esperamos tu asistencia!!

# XIV Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Convocado por

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas  
y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras

## BASES

### PRIMERA

Podrán participar en el Concurso los alumnos de B.U.P., E.S.O. y F.P. en tres niveles:

- Primer nivel: alumnos de 1.º B.U.P., 3.º E.S.O. y F.P. I.
- Segundo nivel: alumnos de 2.º B.U.P., 4.º E.S.O. y 1.º de F.P. II.
- Tercer nivel: alumnos de 3.º B.U.P., 1.º Bachillerato y 2.º y 3.º de F.P. II

### SEGUNDA

Las pruebas consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles) y se realizarán en Madrid, en un solo día, el 22 de junio de 1996 a partir de las 10 horas.

### TERCERA

Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.

### CUARTA

Los Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 22 de mayo de 1996, dirigiéndose por carta al presidente de nuestra sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela  
Departamento de Álgebra  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Ciudad Universitaria  
28040-Madrid

En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados.

### QUINTA

Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 1995-96.

Nota: Este Concurso cuenta con la colaboración de Coca Cola España.

## Noticias sobre Olimpiadas Matemáticas

### X OLIMPIADA IBERO-AMERICANA DE MATEMATICAS Chile - 1995

La X Olimpiada Ibero-americana de Matemática se celebró en la ciudad de Valparaíso, en los días 23 al 30 de septiembre de 1995, a continuación del Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas en el Nivel Medio.

Las pruebas de la Olimpiada se realizaron los días 26 y 27 y el día 28 se celebró la competición por equipos, mientras se calificaba la Olimpiada. Los cuatro alumnos españoles fueron acompañados por los profesores don Francisco Bellot Rosado y don José V. Aymerich Miralles. Los estudiantes fueron alojados en el Balneario «El Retiro», próximo a Viña del Mar.

Se propusieron, como de costumbre, seis problemas, cuyos enunciados pueden verse en la sección de **Problemas Propuestos** de este Boletín, para resolverlos en dos sesiones, de cuatro horas y media cada una.

Los organizadores escogieron dos problemas propuestos por Brasil (1.º y 3.º), dos por España (2.º y 5.º), uno por Argentina (el 4.º) y otro por Chile (el 6.º). El problema 5.º resultó el más difícil y solamente fue resuelto por tres concursantes (un peruano, un cubano y un colombiano).

Cada problema fue calificado con una puntuación de 0 a 10, por lo que cada alumno podía obtener un máximo de 60 puntos. Se acordó que a partir de la próxima Olimpiada los problemas se calificarán de 0 a 7 puntos, como en la Internacional.

Desde el principio se supo que la prueba iba a resultar muy difícil y efectivamente la máxima puntuación alcanzada por un participante fue de 43 puntos. Por esa razón, las medallas de oro se otorgaron a partir de los 34 puntos, las de plata a partir de los 21 y las de bronce de 11 en adelante.

Los estudiantes españoles tuvieron los siguientes resultados:

<b>Angel PEREDES GALAN</b>	33 puntos	<b>MEDALLA DE PLATA</b>
<b>Jerónimo ARENAS GARCIA</b>	21 puntos	<b>MEDALLA DE PLATA</b>
<b>Jaume ANDREU PASCUAL</b>	17 puntos	<b>MEDALLA DE BRONCE</b>
<b>Luis FABIANI BENDICHO</b>	10 puntos	

Recordaremos que todos ellos obtuvieron medalla de oro en la última O. M. Española; **Angel Paredes Galán**, clasificado por Santiago de Compostela, obtuvo también medalla de bronce en la XXXVI O. M. Internacional y **Jerónimo Arenas García**, de Sevilla y **Luis Fabiani Bendicho** de Zaragoza, tuvieron mención honorífica en esa Olim-

piada. **Jaume Andreu Pascual**, de Baleares quedó en cuarto lugar entre los españoles en la misma.

Aunque la Olimpiada Ibero-americana es individual, los países que obtuvieron mayores puntuaciones globales fueron Argentina (133), Colombia (102), Brasil (95), Uruguay (87), España (81), Perú (78), Chile (72) y México (46).

La Copa Puerto Rico, que premia al país con mayor progresión en las tres últimas olimpiadas, fue ganada por Uruguay.

La próxima Olimpiada Ibero-americana tendrá lugar en Costa Rica, en septiembre de 1996. La de 1997 se celebrará en Portugal, si este país confirma su aceptación, o de lo contrario, en México.

### XXXII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA Primera Fase (Madrid)

Las pruebas de la PRIMERA FASE de la «XXXII Olimpiada Matemática Española» correspondientes al curso 1995-96 y a los distritos de Madrid, se han celebrado en los días 1 y 2 de diciembre de 1995.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española*, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*. Podían participar en ella los alumnos matriculados en C.O.U., en el último curso de Formación Profesional de segundo grado, 2.º curso del 2.º ciclo de Bachillerato Experimental (Reforma), tercer curso de B.U.P. y 1.º y 2.º curso del bachillerato L.O.G.S.E.

Como es sabido, esta Olimpiada se desarrolla en dos fases: la Primera tiene lugar en los distintos distritos; este año, tres de ellos corresponden a la Comunidad de Madrid, que cuenta con cinco Universidades estatales, además de las privadas; los tres ganadores de cada distrito son propuestos a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio, a través de la R. S. M. E., para la concesión de un premio en metálico y son invitados a participar en la Segunda Fase. Los mejores clasificados en ésta, además de recibir los premios correspondientes, servirán de base para formar los equipos que representarán a España en las próximas olimpiadas internacionales.

La mencionada Segunda Fase se realizará en Tarragona los días 22, 23 y 24 de febrero de 1996.

Como de costumbre, las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de cuatro horas de duración cada una, en las que se propusieron ocho problemas, cuyos enunciados pueden verse en nuestra sección de **Problemas Propuestos** de este mismo Boletín. Estos problemas son los mismos que se propusieron simultáneamente en la mayor parte de los distritos españoles.

Las pruebas de los tres distritos que corresponden este año a todas las Universidades de nuestra Comunidad, se realizaron conjuntamente, y a ellas concurrieron 61 alumnos de los 65 inscritos. Este número es notablemente inferior al registrado en los tres

años anteriores; sólo en el de 1991, en que se dieron circunstancias especiales, se tuvo una participación inferior.

Cada problema se calificó con un máximo de **10 puntos**, por lo que había una posibilidad teórica de obtener **80 puntos**. A la escasa participación se unió un nivel medio de preparación de los asistentes inusualmente bajo, lo que motivó el que más de las dos terceras partes de ellos no superaron los cinco puntos en total. En consecuencia, los tribunales calificadoros se vieron en la obligación de dejar desiertos tres de los nueve premios que les correspondía adjudicar y seleccionar sólo a seis alumnos, en total, para pasar a la segunda fase.

Damos a continuación los nombres de los alumnos premiados en los distritos de Madrid A, B y C, ordenados por puntuaciones decrecientes:

- 1.º A. - D. Tomás PALACIOS GUTIERREZ,**  
del C.O.U. del I. B. «Cardenal Cisneros», de Madrid ..... 30 puntos
- 1.º B. - D. Miguel FARDON PERLINES,**  
del C.O.U. del I. B. «Cardenal Cisneros», de Madrid ..... 27 puntos
- 1.º C - D. Alvaro GRANADA SANZ,**  
del C.O.U. del Colegio «JOYFE» de Madrid ..... 20 puntos
- 2.º A - Dña. Ana Isabel RUIZ GONZALEZ,**  
del C.O.U. del Colegio «Santo Tomás de Aquino» de Alcalá de Henares ..... 19 puntos
- 2.º B - D. Javier Basilio PEREZ RAMAS,**  
del C.O.U. del Colegio ALKOR de Alcorcón (Madrid) ..... 17 puntos
- 2.º C - D. Angel NUÑEZ MENCÍAS,**  
de 3.º de B.U.P. del I. B. Avenida de los Toreros de Madrid ..... 14 puntos

Lamentablemente, no participó en esta Olimpiada ninguno de los ganadores del Concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad de 1994, en su nivel de Tercer Curso. Se presentaron, en cambio, algunos de los ganadores en el nivel de 2.º, que ahora cursan tercero de B.U.P., pero no alcanzaron puntuaciones suficientes para ser premiados. Puede comprobarse que los Centros de procedencia de los alumnos premiados son, en su mayoría, los mismos año tras año, lo que es prueba de que realizan una encomiable labor de estímulo y preparación, que de ser imitada por otros, no tendríamos resultados tan decepcionantes como el que comentamos hoy.

Algunos de los problemas propuestos eran, sin duda, un poco más difíciles que los de otros años, pero eso no explica totalmente los pobres resultados obtenidos. No apareció ninguna solución correcta de los problemas propuestos, salvo del 1.º, que fue resuelto por cuatro alumnos. Damos a continuación las puntuaciones medias alcanzadas, en cada uno de los problemas (el máximo era de 10 puntos), por todos los participantes y por los seis premiados:

Problema n.º	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º
Puntuación media:								
de todos:	0,9	0,5	0,5	0,4	0,5	0,6	1,2	0,7
de los premiados:	4,3	2,5	1,5	0,8	2,8	2,2	5,0	2,0

Nuestra enhorabuena a los premiados y a los profesores que los han preparado.

## Corrigenda

### XXXVI OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS Canadá 1995

Lamentamos el error que, por un fallo en la información, se deslizó en el último número de este Boletín, dando cuenta de que los representantes españoles habían obtenido una **medalla de bronce** y dos **menciones honoríficas**. Afortunadamente el número de menciones honoríficas fue de **tres**, ya que también la recibió **Jaume ANDREU PAS-CUAL**, de Barcelona (4.º clasificado en la XXXI O.M.E.), debiendo añadirse, por tanto «**M. H.**» en la línea correspondiente a ese concursante.

# Algunos problemas relacionados con los polinomios de Lucas y de Pell

Juan Bosco Romero Márquez  
Benito Hernández Bermejo

Instituto de Bachillerato «Isabel de Castilla». Paseo de San Roque s/n. 05001 Avila  
Departamento de Física Fundamental. Universidad Nacional de Educación a Distancia.  
Apartado 60.141. 28080 Madrid

## Resumen

En este artículo recopilamos algunos de los resultados desarrollados en [1] sobre los polinomios de Lucas y de Pell. A su vez, algunas relaciones pueden ser reescritas bien utilizando la función determinante o bien la función permanente de una matriz, según el caso, con los números de Fibonacci, Lucas o Pell.

Este trabajo resume los distintos artículos que aparecen en [1] y generaliza los resultados propuestos sobre los números de Fibonacci y Pell publicados recientemente en este Boletín [2].

## 1. Introducción

Es bien conocido que los números de Fibonacci no sólo son importantes en diferentes tópicos de la Matemática, sino que los mismos también se aplican en diversos campos de las Ciencias Aplicadas y la Ingeniería (ver la Bibliografía). Es, no obstante, notable la falta de referencias que existe a este respecto dentro de la producción matemática española.

A modo de aproximación a este tema, y también como resumen, vamos a utilizar en primer lugar el libro [1] donde encontramos, como un *survey* o recopilación, un conjunto interesante de propiedades sobre los números de Fibonacci, de Pell y, por ende, de Lucas.

### 1.1. Conceptos y resultados previos

El artículo de Nguyen-Hun Bong [1] estudia, siguiendo a Estringer y Slater, el problema de la disseminación de la información a través de las líneas telegráficas.

Para ello se introducen los números  $R(k, n)$  que satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$R(n, k) = kR(k, n-1) + R(k, n-2), \quad R(k, 0) = 0, \quad R(k, 1) = 1, \quad (1)$$

donde  $k \geq 1$  y  $n \geq 2$  son enteros. En particular:

- Para  $k = 1$  tenemos  $R(1, n) = F_n$ , los números de Fibonacci, ya que (1) se reduce a:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = F_2 = 1, \quad F_0 = 0. \quad (2)$$

- Para  $k = 2$  tenemos  $R(2, n) = P_n$ , que son los números de Pell y vienen dados por la relación de recurrencia siguiente:

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad P_0 = 0, \quad P_1 = 1. \quad (3)$$

En todo lo que sigue recopilamos los resultados elementales más relevantes sobre los números  $R(k, n)$ , definidos en (1). Expondremos las interrelaciones entre ellos y una multitud de resultados que se pueden obtener, así como otros resultados particulares sobre los números de Fibonacci, Pell y Lucas.

Comenzamos con el siguiente teorema, que es fundamental en todo lo que sigue:

**Teorema 1** Sean  $k$  y  $n$  enteros,  $k, n \geq 0$ . Entonces:

1. 
$$k \sum_{p=0}^n R(k, p) = R(k, n+1) + R(k, n) - 1. \quad (4)$$

2. 
$$k \sum_{p=0}^n R(k, 2p-1) = R(k, 2n). \quad (5)$$

3. 
$$\sum_{p=0}^n R(k, 2p) = R(k, 2n+1) - 1. \quad (6)$$

4. 
$$R(k, 2n) = \sum_{p=0}^n k^p \binom{n}{p} R(k, p). \quad (7)$$

5.

$$R(k, 2n+1) = k \sum_{p=0}^n R(k, 2n-2p) + R(k, 1), \quad R(k, 0) = 0, \quad R(k, 1) = 1. \quad (8)$$

6.

$$R(k, 2n+1) = 1 + \sum_{p=0}^n k^{p+1} \binom{n+1}{p+1} R(k, p). \quad (9)$$

7.

$$k \sum_{p=0}^n R^2(k, p) = R(k, n)R(k, n+1). \quad (10)$$

Demostración: ver [1], pp. 1-13.

**Corolario 1** Se deducen las siguientes relaciones bien conocidas para los números de Fibonacci y Pell, respectivamente:

1.

$$F_{2n} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} F_p, \quad P_{2n} = \sum_{r=0}^n 2^r \binom{n}{r} P_r \quad (11)$$

2.

$$F_{2n+1} = 1 + \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p+1} F_p, \quad P_{2n+1} = 1 + \sum_{r=0}^n 2^{r+1} \binom{n+1}{r+1} P_r \quad (12)$$

3.

$$\sum_{p=1}^n F_p^2 = F_n F_{n+1}, \quad 2 \sum_{r=1}^n P_r^2 = P_n P_{n+1} \quad (13)$$

## 1.2. Expresión analítica para $R(k, n)$

**Lema 1** Sea  $R_k(t)$  la función generatriz ordinaria para la sucesión  $R(k, n)$ , donde  $k$  es fijo. Entonces:

$$R_k(t) = \frac{t}{1 - kt - t^2}$$

Se comprueba de manera consistente que si ponemos en la última relación  $k = 1$ , obtenemos la función generatriz de los números de Fibonacci.

El resultado anterior se sigue de la relación de recurrencia para  $R(k, n)$  (punto 1 del Teorema 1):

$$R_k(t) = \sum_{n \geq 0} R(k, n)t^n \Rightarrow R_k(t) - t = tkR_k(t) + t^2R_k(t)$$

**Teorema 2**

$$R(k, n) = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} \left[ \left( \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2} \right)^n - \left( \frac{k - \sqrt{k^2+4}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{2^{n-1}} \left[ \binom{n}{1} k^{n-1} + \binom{n}{3} k^{n-3}(k^2+4) + \binom{n}{5} k^{n-5}(k^2+4)^2 + \dots \right] \quad (14)$$

**Nota:** Es claro que podemos considerar a  $R(k, n)$  como un polinomio de grado  $n-1$  sobre el anillo de factorización  $\mathcal{Z}$ .

Podemos probar también las siguientes propiedades:

1. Si ponemos  $k = 2$  en (14), tenemos para  $n \geq 1$  que los números de Pell se escriben también de la forma:

$$R(2, n) = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{3} + 2^2 \binom{n}{5} + \dots \Rightarrow P_n = \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2r+1} 2^r, \quad n \geq 1,$$

donde  $[x]$  denota, como es usual, la parte entera de  $x$ .

2. Tenemos además las fórmulas bien conocidas para los números de Pell y Fibonacci, respectivamente:

$$\begin{aligned} R(k, n) &= \sum_{p=1}^{[(n-1)/2]} \binom{n-p}{p-1} k^{n-2p+1}, \quad \text{ó} \\ R(k, n) &= \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-r-1}{r} k^{n-r-1}. \\ P_n &= \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-r-1}{r} 2^{n-r-1}, \\ F_n &= \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-r-1}{r} \end{aligned} \quad (15)$$

Ahora, sea  $a = (k + \sqrt{k^2+4})/2$ , ( $a > 1$ ). Entonces  $a^{-1} = -(k - \sqrt{k^2+4})/2$ , y (14) se escribe:

$$R(k, n) = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} [a^n + (-1)^{n+1} a^{-n}] \quad (16)$$

$$3. \left( \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{n-2} < R(k, n) < \left( \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{n-1}, \quad n \geq 2, \quad k \geq 1 \quad (17)$$

En particular, tenemos las siguientes acotaciones para los números de Pell y de Fibonacci:

$$(1 + \sqrt{2})^{n-2} < P_n < (1 + \sqrt{2})^{n-1}, \\ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} < F_n < \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

### 1.3. Otras propiedades interesantes de $R(k, n)$

Recopilamos en el teorema que sigue otros resultados sobre  $R(k, n)$  y, en particular, sobre los números de Fibonacci y Pell, los cuales se prueban utilizando las propiedades de recurrencia de los números  $R(k, n)$  y el método de inducción.

**Teorema 3** Se cumplen las siguientes relaciones:

$$1. R(k, 2n) = R(k, 2) \left( \sum_{r=1}^n R(k, 2r-1) \right) = k \sum_{r=1}^n R(k, 2r-1), \quad n \geq 1$$

En concreto esta propiedad se particulariza en las dos ya conocidas para los números de Fibonacci y Pell, respectivamente:

$$F_{2n} = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1}, \quad n \geq 1 \\ P_{2n} = 2(P_1 + P_3 + P_5 + \dots + P_{2n-1}), \quad n \geq 1.$$

$$2. R(k, 3n) = (k^2 + 1) \sum_{r=1}^n k^{n-r} R(k, 3r-2), \quad n \geq 1$$

Particularizando como en el caso anterior, obtenemos expresiones para  $F_{3n}$  y  $P_{3n}$ , respectivamente.

$$3. \text{ Para } p \geq 2: \\ R(k, pn) = R(k, p) \sum_{r=1}^n (R(k, p-1))^{n-r} R(k, pr - (p-1)), \quad (18)$$

y, en particular,

$$F_{pn} = F_p \sum_{r=1}^n F_{p-1}^{n-r} F_{pr-(p-1)}, \quad p \geq 2 \\ P_{sn} = P_s \sum_{r=1}^n P_{s-1}^{n-r} P_{sr-(s-1)}, \quad s \geq 2$$

son los correspondientes resultados para los números de Fibonacci y Pell, respectivamente.

4.  $R(k, p) \mid R(k, pn)$ , y, en particular, para los números de Fibonacci y Pell tenemos que  $F_r \mid F_{nr}$ ,  $P_r \mid P_{nr}$ .

$$5. R(k, n) = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 4}} (a^n - b^n) = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad (19) \\ a = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \quad b = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \\ a + b = k, \quad a - b = \sqrt{k^2 + 4}, \quad 1 + ab = 0.$$

6.  $R^2(k, n) + R^2(k, n-1) = R(k, 2n-1)$ . Particularizando como antes, si hacemos  $k=1$  y  $k=2$ , respectivamente, tenemos las siguientes relaciones conocidas para los números de Pell y Fibonacci:

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}, \quad P_n^2 + P_{n-1}^2 = P_{2n-1}$$

$$7. R^2(k, n+1) - R^2(k, n-1) = kR(k, 2n) \quad (20)$$

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}, \quad P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 = 2P_{2n}$$

$$8. kR(k, 2n-1) = R(k, n)R(k, n+1) - R(k, n-2)R(k, n-1), \quad (21)$$

$$F_{2n-1} = F_n F_{n+1} - F_{n-2} F_{n-1}, \quad 2P_{n-1} = P_n P_{n+1} - P_{n-2} P_{n-1}$$

$$9. R(k, m+n) = R(k, m)R(k, n+1) + R(k, m-1)R(k, n), \quad n \geq 1, \quad (22)$$

$$F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1}, \quad P_{n+m} = P_{n-1} P_m + P_n P_{m+1}$$

$$10. R(k, m+n) > R(k, n)R(k, m), \\ F_{n+m} > F_n F_m, \quad P_{n+m} > P_n P_m \quad (23)$$

$$11. R(k, nm) > R^m(k, n) \quad (24)$$

### 1.4. Región de convergencia para la función generatriz de los números $R(k, n)$

En virtud de la relación de recurrencia (1) por la que se definen los números  $R(k, n)$ , podemos escribir:

$$kR(k, n)R(k, n+2) - kR^2(k, n+1) = \\ -kR(k, n-1)R(k, n+1) - R(k, n-1)R(k, n) + R(k, n+1)R(k, n) \quad (25)$$

Si definimos

$$S(k, n) = kR(k, n-1)R(k, n+1) + R(k, n-1)R(k, n) - R(k, n+1)R(k, n) \quad (26)$$

entonces por la relación de recurrencia de  $R(k, n)$  probamos que:

$$S(k, n) = (-1)S(k, n-1) \implies S(k, n) = (-1)^n k \quad (27)$$

De (25) y (26) tenemos:

$$R(k, n)R(k, n+2) - R^2(k, n+1) = (-1)^{n+1} \quad (28)$$

lo cual prueba que  $(R(k, n), R(k, n+1)) = 1$ , es decir, son coprimos.

En particular, para los números de Fibonacci y Pell tenemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 &= (-1)^{n+1} \implies (F_n, F_{n+1}) = 1 ; \\ P_n P_{n+2} - P_{n+1}^2 &= (-1)^{n+1} \implies (P_n, P_{n+1}) = 1 . \end{aligned}$$

Se cumple además la siguiente acotación:

$$1 < \frac{R(k, n+1)}{kR(k, n)} < 2 \quad (29)$$

verificándose, asimismo, la relación:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(k, n+1)}{kR(k, n)} > 0 \quad ,$$

donde

$$\alpha - 1 = \frac{1}{k^2 \alpha} \quad , \quad k^2 \alpha^2 - k^2 \alpha - 1 = 0 \quad , \quad \alpha = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad \alpha = \frac{a}{k} .$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{R(k, n+1)t^{n+1}}{R(k, n)t^n} \right| = a \quad |t| < 1 \quad , \quad |t| < a^{-1} = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

En particular,

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n < \infty \quad , \quad |t| < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad , \\ P(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n < \infty \quad , \quad |t| < \sqrt{2} - 1 . \end{aligned}$$

## 2. Los números de Lucas y algunas propiedades de $R(k, n)$

Consideremos ahora la sucesión siguiente: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29... , que verifica la relación de recurrencia:

$$L_{n+1} = L_{n-1} + L_{n-2} \quad , \quad L_0 = 2 \quad , \quad L_1 = 1 . \quad (30)$$

Si ahora comparamos esta sucesión, que define a los números de Lucas  $L_n$ , con la sucesión que define a los números de Fibonacci  $F_n$ : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... , entonces tenemos:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad , \quad n \geq 1 \quad , \quad L_0 = 2 \quad ,$$

resultado éste que puede ser probado de forma inmediata poniendo

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2} \quad , \quad n \geq 2 \quad ,$$

y derivando desde la relación de recurrencia de los números de Fibonacci que

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2} \quad , \quad G_0 = 2 \quad , \quad G_1 = 1 .$$

Podemos definir, para  $k \geq 1$ ,

$$L(k, n) = R(k, n-1) + R(k, n+1) \quad , \quad n \geq 1 . \quad (31)$$

Entonces, por (1) y (31), obtenemos la siguiente relación de recurrencia, para  $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} L(k, n) &= kL(k, n-1) + L(k, n-2) \quad , \quad n \geq 2 \quad , \quad y \\ L(k, 0) &= 2 \quad , \quad L(k, 1) = k . \end{aligned} \quad (32)$$

Como antes, sabemos que:

$$R(k, n) = \frac{a^n - b^n}{a - b} \quad ,$$

donde

$$a = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad , \quad b = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad ,$$

y (32) se escribe en la forma

$$\begin{aligned} L(k, n) &= \frac{1}{a-b} [a^{n-1}(1+a^2) - b^{n-1}(1+b^2)] = a^n + b^n \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r \geq 0} \binom{n}{2r} k^{n-2r} (k^2 + 4)^r. \end{aligned} \quad (33)$$

Por tanto, en particular para  $k = 1$ :

$$L_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{[n/2]} \binom{n}{2r} 5^r. \quad (34)$$

Se pueden probar también los siguientes resultados:

1.

$$\begin{aligned} L^2(k, n) - (k^2 + 4)R^2(k, n) &= 4(-1)^n \quad (35) \\ (L(k, n), R(k, n)) &= 1, \quad n \geq 1, \quad L(k, n), R(k, n) \text{ impares y coprimos.} \\ (L(k, n), R(k, n)) &= 2, \quad n \geq 1, \quad L(k, n), R(k, n) \text{ pares.} \end{aligned}$$

2. Si  $m$  y  $n$  son enteros, y  $d = (m, n) = \text{m.c.d.}(m, n) = rm + sd$ , entonces:

$$(R(k, m), R(k, n)) = R(k, d). \quad (36)$$

En particular, si  $m$  y  $n$  son coprimos, esto es, primos entre sí,  $d = 1$ , entonces se verifican las siguientes relaciones:

1.

$$(R(k, m), R(k, n)) = R(k, 1), \quad (37)$$

2.

$$R(k, m)R(k, n) \mid R(k, mn). \quad (38)$$

Más aún, se tienen los siguientes resultados sobre la divisibilidad de los números de Pell y Fibonacci, respectivamente:

$$\begin{aligned} (P_m, P_n) &= 1, \quad P_m P_n \mid P_{mn}, \quad (m, n) = 1. \\ (F_m, F_n) &= 1, \quad F_m F_n \mid F_{mn}, \quad (m, n) = 1. \end{aligned}$$

### 3. Conclusiones, generalizaciones, comentarios y problemas

#### 3.1. Algunas conclusiones y generalizaciones

Como primera conclusión tenemos:

$$\begin{aligned} R(k, n) &= kR(k, n-1) + R(k, n-2), \quad n \geq 2 \\ R(k, 0) &= 0, \quad R(k, 1) = 1, \end{aligned} \quad (39)$$

en la forma:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= x r_{n-1}(x) + r_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \\ r_0(x) &= 0, \quad r_1(x) = 1, \end{aligned} \quad (40)$$

cuya solución es, por (15), el polinomio

$$r_n(x) = \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-p-1}{p} x^{n-p-1}, \quad (41)$$

que como puede verse es un polinomio de Fibonacci.

Estos números se utilizan en diferentes partes de las Ciencias Aplicadas e Ingeniería, ver [1], y constituyen una generalización útil, en cuanto a su estudio y propiedades, de los números de Fibonacci, Lucas y Pell, con los que están íntimamente relacionados, dado que éstos son casos particulares de aquéllos.

Por otra parte, J. Riordan considera un polinomio similar al definido en (41), y que denota como sigue:

$$u_n(x) = \sum_{p=0}^{[n/2]} \binom{n-p}{p} x^p, \quad (42)$$

debido a su asociación con las relaciones de Chebyshev:

$$u_n(x) = \frac{\text{sen}(n+1)\theta}{\text{sen}\theta}, \quad x = \cos\theta. \quad (43)$$

Puede probarse que el polinomio definido en (42) verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= u_{n-1}(x) + x u_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \\ u_0(x) &= 1, \quad u_1(x) = 1, \end{aligned} \quad (44)$$

cuya iteración permite llegar a

$$u_{n+m}(x) = u_m(x)u_n(x) + xu_{m-1}(x)u_{n-1}(x) ,$$

desde la cual puede obtenerse la interesante identidad de tipo combinatorio:

$$\binom{n+m-p}{p} = \sum_{r \geq 0} \left[ \binom{n-r}{r} \binom{m-p+r}{p-r} + \binom{n-r-1}{r} \binom{m+r-p}{p-r-1} \right] . \quad (45)$$

Otras identidades similares, curiosas y útiles, pueden obtenerse para los números  $R(k, n)$ .

En el artículo de A. F. Horadam y B. J. M. Mahon, "Convolutions for Pell Polynomials" [1, pp. 55-80], se estudian otros tópicos interesantes sobre los números de  $R(k, n)$ ,  $F_n$ ,  $L_n$ ,  $P_n$  y algunos otros tipos especiales de números que allí se tratan. También se estudian los polinomios de Lucas, Pell-Lucas, Gegenbauer, Chebyshev, Humbert. Con las funciones hipergeométricas se obtienen, como casos particulares, los polinomios de Legendre, Jacobi, Laguerre, Hermite, Pincherle, etc. A partir de estos últimos obtenemos, como casos particulares, los polinomios de Pell:

$$P_n(x) = \mathcal{P}_n(3, x, 1, -1/2, 1) . \quad (46)$$

Los números de Fibonacci  $F_n$  también se obtienen como casos particulares, con  $x = 1/2$ , y están dados por:

$$F_{n+1} = \mathcal{P}_n(2, 1/2, -1, -1, 1) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} . \quad (47)$$

### 3.2 Los polinomios de Pell $P_n(x)$ y de Pell-Lucas $Q_n(x)$

Definimos los polinomios de Pell  $P_n(x)$  y de Pell-Lucas  $Q_n(x)$  como sigue:

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x) , \quad P_0(x) = 0 , \quad P_1(x) = 1 , \quad (48)$$

$$Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) + Q_n(x) , \quad Q_0(x) = 2 , \quad Q_1(x) = 2x . \quad (49)$$

Las funciones generatrices para las sucesiones de polinomios  $\{P_n(x)\}$  y  $\{Q_n(x)\}$  son, respectivamente:

$$(1 - 2xy - y^2)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{r+1}(x)y^r = \sum_{r=1}^{\infty} P_r(x)y^{r-1} , \quad (50)$$

$$(2x + 2y)(1 - 2xy - y^2)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} Q_{r+1}(x)y^r . \quad (51)$$

Las fórmulas explícitas para dichos polinomios son las siguientes:

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-m-1}{m} (2x)^{n-2m-1} , \quad n > 0, \quad (52)$$

$$Q_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m} (2x)^{n-2m} , \quad n > 0. \quad (53)$$

De forma análoga, se tienen las fórmulas de Binet:

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} , \quad Q_n(x) = \alpha^n + \beta^n , \quad (54)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las raíces de la ecuación  $t^2 - 2tx - 1 = 0$ , las cuales verifican las relaciones:

$$\alpha = x + \sqrt{x^2 + 1} , \quad \beta = x - \sqrt{x^2 + 1} \quad (55)$$

$$\alpha + \beta = 2x , \quad \alpha\beta = -1 , \quad \alpha - \beta = 2\sqrt{x^2 + 1} \quad (56)$$

### 3.3 Algunos problemas relacionados con los tópicos anteriores

Presentamos a continuación una breve selección de problemas sobre los números de Fibonacci, Lucas, Pell,  $R(k, n)$ , y sobre los polinomios de Pell y Lucas-Pell utilizando, entre otras, las funciones determinante y permanente de una matriz.

Dada una matriz  $A$  con coeficientes reales  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , podemos definir el determinante y el permanente de dicha matriz como sigue:

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} ,$$

$$\text{per} A = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} ,$$

donde  $\sigma$  recorre todas las permutaciones del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , e  $i(\sigma)$  es el número de inversiones de la permutación  $\sigma$ . Para ver detalles sobre sus propiedades, significados geométricos y diferencias entre ambas, pueden consultarse [16-22].

Pasamos a enunciar los problemas:

1. Utilizando la función generatriz de los números  $R(k, n)$ , evaluar el determinante y el permanente de las matrices siguientes:

$$(a) \begin{pmatrix} R(k, n) & R(k, n+1) \\ R(k, n+1) & R(k, n+2) \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} R(k, n) & R(k, n+1) \\ R(k, n+2) & R(k, n+3) \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} R(k, n) & R(k, n+1) & R(k, n+2) \\ R(k, n+1) & R(k, n+2) & R(k, n+3) \\ R(k, n+2) & R(k, n+3) & R(k, n+4) \end{pmatrix} \dots$$

2. Idénticos problemas a los anteriores para los polinomios de Pell y Lucas-Pell.

3. Probar que se tienen las relaciones siguientes:

$$F_n F_{n+p+3} - F_{n+1} F_{n+p+2} = (-1)^{n+1} F_{p+2}, \quad p \geq 0, n \geq 0.$$

$$F_{pn+q} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_p^k F_{p-1}^{n-k} F_{k+q}, \quad p \geq 1, q \geq 0.$$

$$L_{pn+q} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_p^k F_{p-1}^{n-k} L_{k+q}, \quad p \geq 1, q \geq 0.$$

4. Calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n, \quad R_n = \frac{L_n - F_n}{L_n + F_n}, \quad n \geq 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad S_n = \frac{\alpha L_n - \beta F_n}{\alpha L_n + \beta F_n}, \quad n \geq 0.$$

5. Sea  $n$  un número natural. Via el algoritmo de las fracciones continuas, definimos la sucesión siguiente de la que se calculará su límite:

$$x_1(n) = n, \quad x_{m+1}(n) = n + \frac{1}{x_m(n)}, \quad m \geq 1.$$

6. Sea  $N = a_1 a_2 \dots a_n$  un número natural arbitrario con dígitos  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , no todos iguales y ninguno nulo. Via el algoritmo de las fracciones continuas construimos la siguiente sucesión de números racionales como sigue, y de la que se calculará su límite:

$$x_1(N) = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad x_{m+1}(N) = x_1(N) + \frac{1}{x_m(N)}, \quad m \geq 1.$$

Generalizar para todos los números naturales que se obtienen al transformar el orden de sus cifras mediante una permutación  $\sigma$ , arbitraria, del conjunto de los números  $1, 2, \dots, n$ . Esto es, la sucesión siguiente definida via las fracciones continuas:

$$\sigma(N) = N_\sigma = a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}$$

$$x_1(N_\sigma) = [a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}], \dots,$$

$$x_{m+1}(N_\sigma) = x_1(N_\sigma) + \frac{1}{x_m(N_\sigma)}, \quad m \geq 1.$$

7. a) Sea  $x = 0.\widehat{a}$ ,  $a = 1, \dots, 9$  un número racional periódico. Mediante el algoritmo de las fracciones continuas, calcúlese el límite de la siguiente sucesión:

$$x_1(x) = a, \quad x_2(x) = a + \frac{1}{a}, \quad \dots, \quad x_n(x) = a + \frac{1}{x_{n-1}(x)}, \quad n \geq 2.$$

- b) El mismo problema anterior, cuando  $x$  es el número racional periódico siguiente:

- b1)  $x = 0.\widehat{ab}$ ,  $a \neq b$ ,  $a, b = 1, 2, \dots, 9$ , donde:

$$x_1 = a + \frac{1}{b}, \quad x_{n+1} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{x_n}}, \quad n \geq 1.$$

- b2)  $x = 0.\widehat{ba}$ ,  $x = 0.\widehat{aab}$ ,  $x = 0.\widehat{aba}$ ,  $x = 0.\widehat{baa}$ ,  $a \neq b$ ,  $a, b = 1, 2, \dots, 9$ .

- b3)  $x = 0.\widehat{abc}$ ,  $a \neq b$ ,  $a \neq c$ ,  $a, b, c = 1, 2, \dots, 9$ .

- c) Y la generalización para  $x = 0.\widehat{a_1 \dots a_n}$ :

$$x_1 = [a_1, \dots, a_n], \quad x_{n+1} = x_1 + \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1.$$

Como comentario final de este artículo, podemos decir que muchas de las relaciones aquí descritas pueden ser demostradas mediante técnicas matemáticas diversas que van desde el uso de la inducción a las funciones generatrices, todas ellas de amplio uso en el campo de la matemática discreta.

También existen diversas investigaciones sobre Geometría, en las cuales aparecen los números de Fibonacci, Lucas, Pell y otros. Por ejemplo, ver [23] para un estudio de polígonos tipo Fibonacci.

## Bibliografía

- [1] A. N. PHILIPPOU; G. E. BERGUN y A. F. HORADAM editores: *Fibonacci Numbers and Their Applications*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- [2] J. PERALTA, *Sobre la analogía observada entre ciertos procedimientos de obtención de los números áureo y  $\sqrt{2}$* , Boletín de la Asociación «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, 35-46 (Febrero 1993).
- [3] N. N. VOROBYOV, *Los números de Fibonacci*, Limusa-Wiley, Mexico, 1973.
- [4] R. M. YOUNG, *Excursion in Calculus, an Interplay of the Continuous and Discrete*, M.A.A., 1992.
- Indicado para ver propiedades y problemas interesantes sobre los números de Fibonacci y Lucas. De particular interés el Capítulo 3, «Fibonacci Numbers: Function and Form», pp. 123-184. Se tiene además una extensa bibliografía sobre ellos.
- [5] L. DICKSON, *History of the Theory of the Numbers* (Volúmenes I, II y III), Chelsea, 1952.
- Una amplia y valiosa recopilación de propiedades de los números de Fibonacci, Lucas y Pell, y una excelente bibliografía sobre los mismos.
- [6] D. WELLS, *Curious and interesting numbers*, Penguin Group, Londres, 1988.
- En este libro se relatan diversos tópicos y anécdotas, aritméticas y geométricas, sobre los números de Fibonacci y Lucas.
- [7] M. R. SCHROEDER, *Number Theory in Science and Communication*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- Ver los apartados siguientes: capítulo 1, 1.1, pp. 1-6; capítulo 5, 5.3, pp. 60-81. Es un libro interesante por las distintas aplicaciones que presenta sobre la teoría de los números.
- [8] B. A. BROUSSEAU, *Introduction to Fibonacci Discovery*, F.A., Santa Clara, CA, 1965.
- [9] V. E. HOGGATT Jr., *Fibonacci and Lucas Numbers*, F.A., Santa Clara, CA, 1972.
- [10] W. L. SCHAAF, *A Bibliography of Recreational Mathematics*, en especial:
- Vol. 1, Capítulo 2: Arithmetic and Algebraic Recreations: 2.8 Fibonacci Numbers and Series, pp. 49-50.
  - Vol. 2, Capítulo 2: Number Theory as a Recreation: Fibonacci Numbers, pp. 29-32.
  - Vol. 3, Capítulo 2: Number Theory as a Recreation: 2.3 Fibonacci and Lucas Numbers, pp. 18-19.
  - Vol. 4, Capítulo 2: Number Theory as a Recreation: 2.3 Fibonacci and Lucas Numbers, pp. 24-25.
- [11] M. BICKNELL y V. E. HOGGATT editores:
1. *Fibonacci's Problem Book*, F.A., Santa Clara, CA, 1974.
  2. *A Primer for the Fibonacci Numbers*, F.A., Santa Clara, CA, 1972.
  3. *A collection of Manuscripts Related to the Fibonacci sequence -18th Aniversary Volume*, F.A., Santa Clara, CA, 1980.
- [12] B. A. BROUSSEAU, *Linear Recursion and Fibonacci Sequences*, F.A., Santa Clara, CA, 1971.
- [13] A. N. PHILIPPOU, A. F. HORADAM y G. E. BERGUN editores: *Applications of Fibonacci Numbers*, F.A., Santa Clara, CA, 1980.
- [14] S. VADJA, *Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section: Theory and Applications*, Halsted Press, N. Y., 1989.
- [15] S. RABINOWITZ editor: *Index to Mathematical Problems*, 1980-1984, Volumen 1, Proj. Press, Westford, Massachusetts, 1992, pp. 512 y ss.
- Excelente libro en el cual se recoge una recopilación de problemas de todas las partes de la Matemática, y que han sido publicados y/o resueltos en las revistas más prestigiosas de todo el mundo. Es notorio que en tales revistas dicha sección siempre ocupa un lugar relevante que da vida a la revista bajo la forma de la proposición y resolución de problemas. Ejemplos en este sentido, en los cuales aparecen regularmente artículos y problemas relacionados con todos los tópicos de este trabajo son: Indices de *Monthly*, *Mathematics Magazine*, *CMJ Journal*, *The Fibonacci Quarterly*, etc.
- [16] M. MARCUS, *Introducción al Algebra Lineal*, Cecsca, Barcelona, 1976.
- [17] H. MINC, *Permanent Encyclopaedia of Mathematics and its Applications*, Volumen 6, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.
- [18] O. SHISHA editor: *Inequalities* (3 Volúmenes), Academic Press, N. Y., 1967.
- En concreto, *Length of Tensors*, de M. Marcus.
- [19] M. HALL Jr, *Combinatorial Theory*, capítulo 5, pp. 48-72, Wiley, N. Y., 1986.
- [20] M. AIGNER, *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [21] K. RIBNIKOV, *Análisis Combinatorio*, Mir, Moscú, 1988.
- [22] K. RIBNIKOV, *Análisis Combinatorio: Problemas y Ejercicios*, Mir, Moscú, 1989.
- [23] B. GRUMBAUN, C. DAVIS y F. A. SHERK editores: *The Vein of the Geometry*, Springer-Verlag, 1984.
- Libro que recopila diversos artículos de investigación sobre tópicos diversos de la Geometría, escritos por excelentes geómetras. El libro está dedicado al gran geómetra, Profesor H. S. M. Coxeter, por sus extraordinarias contribuciones a la Geometría en todas sus facetas.

# Transformaciones lineales con sistemas de cómputo algebraico

E. Roanes Lozano y E. Roanes Macías

Dpto. de Algebra. Universidad Complutense

## Introducción

Los grupos de transformaciones geométricas constituyen desde F. Klein uno de los capítulos fundamentales de la Geometría. Nos ocupamos aquí del grupo de transformaciones del plano afín real cuyas ecuaciones vienen dadas por expresiones polinómicas de grado uno (lineales), que incluyen los movimientos, semejanzas y afinidades. La tecnología computacional permite hoy automatizar estas transformaciones con dos objetivos: utilitario y didáctico.

Con anterioridad ya habíamos realizado implementaciones de movimientos y semejanzas con aritmética de coma flotante. La primera apareció en el número 9 de este boletín [RR1] y fue mejorada en [RR2]. La segunda, que aprovechaba nuestra implementación [RR3] de la «Turtle Geometry», fue desarrollada para el capítulo 1 de [RR4] y difundida en [RR7].

Las implementaciones en coma flotante permiten trabajar con aproximaciones decimales, cuyas aparentemente pequeñas imprecisiones conducen, a veces, a error, a la hora de clasificar una transformación geométrica. Además no permiten manipular directamente las ecuaciones simbólicas de las transformaciones, ni sus expresiones matriciales, ni los objetos geométricos definibles mediante expresiones polinómicas.

Por el contrario, la posibilidad de multiplicar matrices simbólicas, que tienen los sistemas de cómputo algebraico, facilita extraordinariamente la composición de transformaciones lineales. Ello, unido a la difusión de estos manipuladores simbólicos, nos ha decidido a realizar este trabajo. Con él se pretende:

- presentar estas transformaciones de modo apropiado para ser directamente implementadas por los usuarios de estos sistemas (apartados 1 a 4);
- mostrar como funciona la implementación que nosotros hemos desarrollado sobre el sistema Maple V3, que puede así servir de ejemplo (apartado 5);
- resaltar su comodidad de utilización sobre una hoja de trabajo o «worksheet», así como su interés práctico y didáctico (apartados 6 y 7).

Notemos que la implementación de transformaciones de semejanza contenida en la librería «Euclidean Geometry» de Maple es bien distinta de la nuestra, pues, además de realizar como aquella los cálculos en aritmética exacta de la imagen de un punto, ofrece otras muchas prestaciones, como se verá.

Una primera versión de la implementación que hemos desarrollado, y con unos objetivos mucho más modestos, ya fue presentado al I Congreso de Usuarios de Maple [RR9].

## 1. Transformaciones lineales en el plano afín

Las transformaciones lineales son aquellas que hacen corresponder al punto de coordenadas  $(x,y)$ , el punto de coordenadas  $(x',y')$ , dado por las ecuaciones lineales

$$x' = a12 + a22 \cdot x + a32 \cdot y, y' = a13 + a23 \cdot x + a33 \cdot y \quad (1)$$

o, en notación matricial,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathbf{A}; \mathbf{x}' = (1, x', y'), \mathbf{x} = (1, x, y), \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a12 & a13 \\ 0 & a22 & a23 \\ 0 & a32 & a33 \end{bmatrix} \quad (2)$$

El conjunto de estas transformaciones es un grupo respecto de su composición o producto.

Las transformaciones lineales más interesantes son las biyectivas, que son las transformaciones propias del espacio afín, por lo que se denominan *afinidades*. Forman el *grupo afín del plano*.

Un subgrupo importante del afín lo constituyen aquellas transformaciones que conservan la razón de distancias entre puntos homólogos, esto es, tales que para cualesquiera puntos, P y Q, sus imágenes, P' y Q', verifican

$$\text{dist}(P', Q') / \text{dist}(P, Q) = \text{constante} \quad (3)$$

En consecuencia, estas transformaciones conservan la forma de las figuras, por lo que se denominan *semejanzas*. Forman el llamado *grupo equiforme*.

Un subgrupo importante del equiforme lo constituyen las transformaciones que conservan la distancia entre puntos homólogos:

$$\text{dist}(P',Q') = \text{dist}(P,Q) \quad (4)$$

llamadas *isometrías, congruencias o movimientos*. Estas forman el *grupo euclídeo*.

## 2. Generación de transformaciones lineales

Hay cuatro modos de determinar transformaciones lineales:

- por sus definiciones sintéticas (traslaciones por su vector, reflexiones por su eje, homotecias por su centro y razón, etc);
- por sus ecuaciones;
- como transformación en que se corresponden dos figuras homólogas;
- como producto de otras transformaciones previamente definidas.

En principio, disponiendo de un manipulador simbólico, es tentador el hacer uso exclusivo del modo b), pero asumimos la conveniencia de simultanearla con las otras tres, por razones prácticas y didácticas.

Por simplicidad de cálculo, se supondrá métrico el sistema de referencia, mientras no se explicita lo contrario.

### 2.1. Generación de movimientos: traslaciones, rotaciones y reflexiones

En el plano sólo existen cuatro tipos de movimientos: traslaciones, rotaciones, reflexiones y reflexiones con deslizamiento (teorema de Chasles). Estas últimas se reducen a producto de reflexión por traslación de vector paralelo al eje de reflexión, por lo que es suficiente considerar sólo las tres primeras como transformaciones básicas para generar cualquier isometría.

La *traslación* de vector (a,b), tiene por ecuaciones.  $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$ , o en notación matricial

$$x' = xT; \quad T = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

La *rotación* de amplitud  $\varphi$  con centro en el origen de coordenadas, tiene por ecuaciones:  $x' = x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi)$ ,  $y' = -x \cdot \sin(\varphi) + y \cdot \cos(\varphi)$ , o en notación matricial

$$x' = xG; \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Si el centro de rotación es (a,b), basta realizar una traslación de ejes de coordenadas al nuevo origen (a,b), con lo cual resulta

$$x' = xT^1GT \quad (7)$$

donde T y G son las matrices (5) y (6).

La *reflexión* cuyo eje es el de abscisas tiene por ecuaciones:  $x' = x$ ,  $y' = -y$ , o en notación matricial

$$x' = xR; \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Si el eje es la recta que pasando por el punto (a,b), tiene inclinación  $\varphi$  respecto del eje de abscisas, basta realizar una traslación de ejes al nuevo origen (a,b), seguida de una rotación de ejes de ángulo  $\varphi$ , resultando

$$x' = x(GT)^{-1}R(GT) \quad (9)$$

donde T, G y R son las matrices (5), (6) y (8). Si el eje viniera dado por su ecuación, bastaría determinar uno de sus puntos y el ángulo de su pendiente, para reducirlo al caso anterior.

### 2.2. Generación de semejanzas: homotecias

Puesto que las semejanzas son producto de movimientos por homotecias, es suficiente considerar sólo traslaciones, rotaciones, reflexiones y homotecias como transformaciones básicas para generar semejanzas. Vamos pues a ocuparnos de las homotecias (las otras ya fueron tratadas en 2.1).

La *homotecia* de razón  $k(\neq 0)$  con centro el origen de coordenadas, tiene por ecuaciones:  $x' = x \cdot k$ ,  $y' = y \cdot k$ , o en notación matricial.

$$x' = xH; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si el centro de homotecia es (a,b), basta realizar una traslación de ejes de coordenadas al nuevo origen (a,b), con lo cual resulta

$$\mathbf{x}' = \mathbf{xT}^{-1}\mathbf{HT} \quad (11)$$

donde T y H son las matrices de (5) y (10).

### 2.3. Generación de afinidades: afinidades homológicas

Puesto que las afinidades pueden generarse a partir de semejanzas y de afinidades homológicas, nos ocuparemos de estas últimas.

Eligiendo un sistema de referencia (no métrico, en general), cuyo eje de abscisas sea el eje de la *afinidad homológica* y cuyo eje de ordenadas tenga la dirección de afinidad (distinta de la del eje), si k es la característica de afinidad, sus ecuaciones son  $x' = x$ ,  $y' = ky$ , o en notación matricial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathbf{C}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (12)$$

Siendo  $\delta$  el ángulo de inclinación de la dirección de afinidad respecto de su eje, para pasar a un sistema de referencia métrico con el mismo semieje positivo de abscisas, basta efectuar el cambio de coordenadas  $x'' = x' + y'\cos(\delta)$ ,  $y'' = y'\sin(\delta)$ , o en notación matricial

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}'\mathbf{E}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cos(\delta) & \sin(\delta) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Si, en particular,  $\delta$  fuera ángulo recto (*afinidad ortogonal*), sería innecesario el paso anterior. Finalmente, si el eje de la afinidad homológica es la recta que, pasando por el punto (a,b), tiene inclinación  $\phi$  respecto del eje de abscisas, basta realizar una traslación de ejes al nuevo origen (a,b), seguida de una rotación de ángulo  $\phi$ . De todo ello se sigue que la ecuación matricial de esta afinidad homológica resulta ser

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathbf{T}^1\mathbf{G}^{-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{CEGT}$$

donde T,G,E y C son las matrices de (5),(6),(13) y (12). Si el eje de la afinidad homológica viniera dado por su ecuación, bastaría determinar uno de sus puntos y el ángulo de

su pendiente, para reducirlo al caso anterior. Y lo mismo se haría si la dirección de afinidad homológica viniera dada por una recta de su dirección.

Finalmente, notemos que si, en particular, fuera  $k = 0$ , la afinidad homológica degeneraría en la proyección paralela sobre el eje en la dirección especificada (que ya no sería afinidad, por no ser biyectiva).

### 3. Producto o composición de transformaciones lineales: clasificación

La determinación de la matriz de la transformación producto o composición de varias transformaciones lineales se reduce a un sencillo proceso recurrente. Siendo F la matriz de la última transformación efectuada y A la matriz de la transformación producto de las anteriormente efectuadas, su producto, AF, será la matriz de la transformación producto de todas las transformaciones efectuadas (con el único prerequisite de inicializar A como matriz unidad).

La transformación lineal (1) será biyectiva, si permite calcular x e y (únicas), dadas  $x'$  e  $y'$ . En otras palabras, la transformación lineal (2) será una *afinidad*, si y sólo si verifica la condición

$$\det(\mathbf{A}) = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} \neq 0 \quad (14)$$

Por otra parte, para que una afinidad sea *semejanza*, es decir, para que verifique (3), es necesario y suficiente que se verifiquen las dos condiciones

$$a_{22}^2 + a_{23}^2 = a_{32}^2 + a_{33}^2; \quad a_{22} \cdot a_{32} + a_{23} \cdot a_{33} = 0 \quad (15)$$

Finalmente, para que una semejanza sea *isometría*, es decir, para que verifique (4), es necesario y suficiente que se verifiquen las tres condiciones

$$a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1; \quad a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1; \quad a_{22} \cdot a_{32} + a_{23} \cdot a_{33} = 0 \quad (16)$$

es decir, que sea ortogonal la submatriz A11, menor complementario del elemento (1,1) de la matriz A, lo cual equivale a  $|\det(\mathbf{A}11)| = 0$ , supuesto que se verifican las condiciones (15).

#### 3.1. Clasificación de movimientos

Una vez comprobado que la transformación lineal en estudio es un movimiento, es decir, que verifican las condiciones (16), para decidir si el movimiento conserva, o no, el sentido en el plano, basta observar el signo de  $\det(\mathbf{A})$ . Si es positivo, se trata de un movi-

miento directo (traslación o rotación) y si es negativo, de un movimiento inverso (reflexión o reflexión con deslizamiento).

En caso de movimiento directo, si es  $a_{22} = 1$ , entonces, por ser ortogonal la submatriz  $A_{11}$ , resulta  $a_{23} = a_{32} = 0$  y  $a_{33} = 1$ , luego se trata de la traslación de vector  $(a_{12}, a_{13})$ . Si, por el contrario, es  $a_{22} \neq 1$ , entonces se trata de la rotación de amplitud  $\alpha = \arcsen(a_{23})$ , si  $a_{22} \geq 0$ , y de amplitud  $2$  rectos  $-\alpha$ , en otro caso. Su centro es el único punto invariante de la transformación, el cual puede determinarse resolviendo el sistema lineal

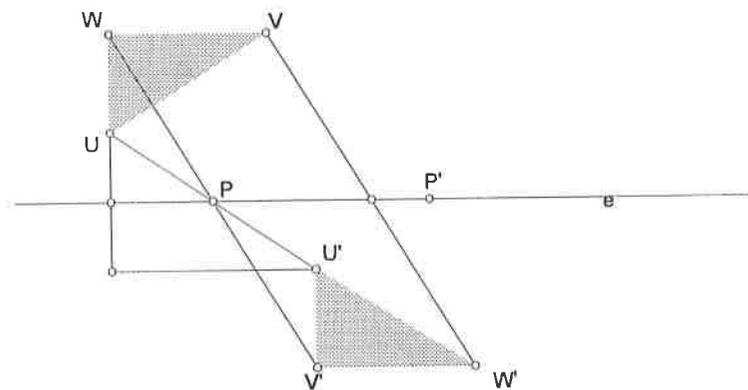
$$a_{12} + a_{22}x + a_{32}y = x, \quad a_{13} + a_{23}x + a_{33}y = y \quad (17)$$

En caso de movimiento inverso, si valen  $1$  los rangos de las dos matrices

$$\begin{bmatrix} a_{22}-1 & a_{32} \\ a_{23} & a_{33}-1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{22}-1 & a_{32} & a_{12} \\ a_{23} & a_{33}-1 & a_{13} \end{bmatrix} \quad (18)$$

entonces el sistema (17) es compatible indeterminado, luego el movimiento posee una recta de puntos invariantes, y por tanto se trata de una reflexión, cuyo eje es la solución de dicho sistema. Si, por el contrario, son distintos los rangos de las dos matrices (18), entonces no existen puntos invariantes, luego se trata de una *reflexión con deslizamiento*, cuyo eje es la única recta invariante de la transformación.

Aunque dicho eje puede determinarse como autovector, es más cómodo determinarlo teniendo en cuenta que ha de pasar por los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son cada punto del plano y su imagen en la transformación. Además, esto es cierto tanto para reflexión, como para reflexión con deslizamiento, lo que invita a determinar el eje,  $e$ , en ambos casos por este método, y después considerar un punto,  $P \in e$ , para comprobar si su imagen,  $P'$ , coincide, o no, con  $P$ . Si coinciden, se trata de la reflexión de eje  $e$ , y si son distintos, se trata de la reflexión con deslizamiento de eje  $e$  y vector  $PP'$ .



Conviene tener en cuenta que al tratar de determinar e por este último método, no basta tomar dos puntos distintos, ya que los puntos medios de estos y sus respectivas imágenes, pueden coincidir, como en el caso de la figura anterior. Pero si se parte de tres puntos no alineados, los tres puntos medios obtenidos (pertenecientes al eje  $e$ ) no pueden coincidir (ya que si coincidieran se trataría de una rotación de amplitud dos rectos o semigiro), en contradicción con la hipótesis de ser movimiento inverso.

### 3.2. Descomposición de movimientos en producto de reflexiones

Es sabido que todo movimiento puede descomponerse en producto finito de, a lo más, tres reflexiones, pudiendo elegir un punto por el que ha de pasar uno de los ejes (restricción a dimensión dos del teorema de Cartan-Dieudonne [ST]).

El producto de dos reflexiones de ejes paralelos resulta ser una traslación de vector perpendicular a ambos, sentido del primero al segundo eje y módulo doble de la distancia entre ambos ejes. En consecuencia, la traslación de vector  $v$  es producto de dos reflexiones de ejes perpendiculares a  $v$ , tales que la distancia entre ambos sea la mitad del módulo de  $v$  y el sentido del primero al segundo eje sea el sentido de  $v$ . Tal descomposición puede hacerse eligiendo un punto arbitrario por el que ha de pasar el primero (o el segundo) de los ejes de reflexión.

El producto de dos reflexiones de ejes secantes resulta ser una rotación de centro su punto de intersección y de amplitud doble del ángulo que forman ambos ejes, con sentido del primero al segundo eje. En consecuencia, la rotación de centro  $O$  y amplitud  $\phi$  es producto de dos reflexiones cuyos ejes pasan por  $O$  y forman ángulo  $\phi/2$  (en el sentido del primero al segundo eje). Tal descomposición puede hacerse eligiendo un punto arbitrario por el que ha de pasar el primero (o el segundo) de los ejes de reflexión.

Por otra parte, una reflexión puede expresarse como producto de la transformación idéntica por dicha reflexión, pudiéndose descomponer la transformación idéntica como cuadrado de cualquier reflexión.

Finalmente, como la reflexión con deslizamiento es producto de traslación por reflexión de eje paralelo al vector traslación, toda reflexión con deslizamiento podrá descomponerse en producto de dos reflexiones de ejes paralelos por una tercera de eje perpendicular a ambas. Tal descomposición puede hacerse eligiendo un punto arbitrario por el que ha de pasar el primero (o el segundo) de los ejes paralelos entre sí.

En resumen, si el movimiento es directo (si conserva el sentido en el plano), se reduce a producto de dos reflexiones, y si es movimiento inverso, se reduce a producto de tres.

Notemos que aunque las reflexiones generan el grupo de los movimientos del plano, tiene interés práctico y didáctico seguir considerando como generadores de dicho grupo a las traslaciones, rotaciones y reflexiones.

### 3.3. Clasificación de semejanzas que no son isometrías

Una vez comprobado que la transformación lineal en estudio es una semejanza, es decir, que verifica las condiciones (15), para asegurarse de que no es isometría, basta comprobar que no se verifique la primera condición (16). Se trata ahora de clasificar tales semejanzas propiamente dichas, es decir, las que no son movimientos.

Si se verifican las dos condiciones

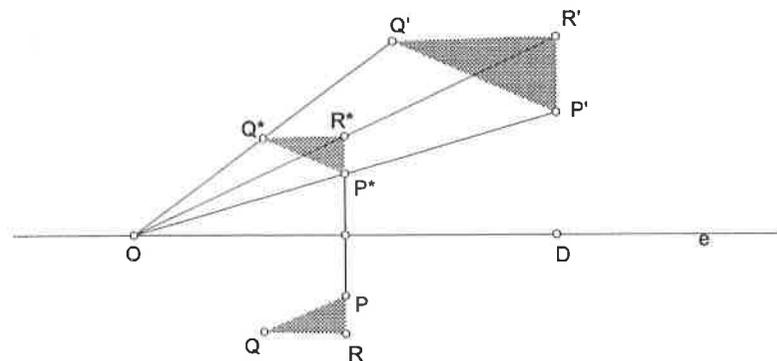
$$a_{23} = 0, \quad a_{22} = a_{33} \quad (19)$$

entonces se trata de una homotecia de razón  $a_{22}$  y cuyo centro es el único punto invariante de la transformación, que se determina resolviendo el sistema (17).

Si, por el contrario, no se verifican las dos condiciones (19), entonces hemos de comprobar si la semejanza conserva, o no, el sentido en el plano, para lo cual basta observar el signo de  $\det(A)$ . Si es positivo, se trata de una semejanza directa (reducible a movimiento directo por homotecia) y si es negativo, se trata de una semejanza inversa (reducible a movimiento inverso por homotecia), ya que en el plano las homotecias conservan el sentido.

En caso de semejanza directa, existe un único punto en el plano, centro común de una rotación y de una homotecia, de cuyo producto resulta esa transformación (*centro de semejanza directa*), que puede determinarse resolviendo el sistema (17). Por ser la matriz de esta transformación producto de una matriz de tipo (7) por otra de tipo (11), la razón de la homotecia,  $k$ , será la raíz de  $\det(A_{11})$  y la amplitud de la rotación se calcula a partir de  $\arcsen(a_{23}/k)$ , de modo análogo al indicado para rotaciones.

En caso de semejanza inversa (*reflexión con dilatación*) puede elegirse el centro de la homotecia perteneciente al eje de la reflexión. Por ser único tal punto, también puede determinarse resolviendo el sistema (17). Por ser la matriz de esta transformación producto de una matriz de tipo (9) por otra de tipo (11), la razón de la homotecia,  $k$ , será la raíz positiva de « $\det(A_{11})$ » y el eje de la reflexión será la única recta invariante de la transformación.



Aunque dicho eje puede determinarse como autovector, es más cómodo determinarlo del modo que se describe a continuación. Sea  $O$  el punto invariante antes indicado (centro de homotecia, perteneciente al eje de reflexión) y  $P$  un punto no perteneciente a la perpendicular por  $O$  al eje de reflexión con dilatación. Denotemos por  $P'$  a la imagen de  $P$  en la reflexión con dilatación y por  $P^*$  a la imagen de  $P'$  en la homotecia de centro  $O$  y razón  $1/k$ . Por ser  $P^*$  simétrico de  $P$  respecto del eje de reflexión con dilatación, el punto  $D$  tal que el vector  $OD$  sea suma de los vectores  $OP$  y  $OP^*$  estará en el eje de reflexión con dilatación, que será pues la recta  $OD$ .

### 3.4. Clasificación de afinidades que no son semejanzas

Una vez comprobado que la transformación lineal en estudio es una afinidad, es decir, que verifica la condición (14), para comprobar que no es semejanza, basta comprobar que no se verifique alguna de las dos condiciones (15). Se trata ahora de clasificar tales afinidades propiamente dichas, es decir, las que no son semejanzas. Para ello, atenderemos a los puntos invariantes de la afinidad.

Si el sistema (17) es compatible indeterminado, es decir, si las matrices (18) son de rango uno, entonces la afinidad posee una recta de puntos invariantes, y por tanto se trata de una afinidad homológica, cuyo eje es la solución del sistema (17). Para determinar la dirección de afinidad, basta considerar un punto,  $P$ , no perteneciente al eje, y su imagen,  $P'$ , pues entonces la recta  $PP'$  es de la dirección buscada. Si  $PP'$  corta al eje en  $P^*$ , entonces la característica de afinidad será

$$k = \text{dist}(P^*, P') / \text{dist}(P^*, P)$$

Puede ocurrir que sea  $PP'$  perpendicular al eje (*afinidad ortogonal*) o paralela a él (*afinidad especial*).

Si el sistema (17) es compatible determinado, es decir, si la primera de las matrices (18) es de rango dos, entonces la afinidad posee un único punto invariante o centro (*afinidad central*). Tal centro es solución del sistema (17). Vamos ahora a clasificar las afinidades centrales, según el número de rectas invariantes que posean. Puesto que las rectas invariantes pasan por el centro, para facilitar su determinación, podemos suponer, sin merma de generalidad, que el centro es el origen de coordenadas. En estas condiciones, la recta  $y = mx$ , que pasa por  $(1, m)$ , tendrá por imagen la recta que pasa por el centro y por el punto imagen del  $(1, m)$ , es decir, la recta  $y = m'x$ , donde

$$m' = (a_{23} + m \cdot a_{33}) / (a_{22} + m \cdot a_{32})$$

luego las pendientes de las rectas dobles serán soluciones de la ecuación

$$a_3^2 \cdot m^2 + (a_2^2 - a_3^2) \cdot m - a_2^3 = 0$$

cuyo discriminante

$$\Delta = (a_2^2 - a_3^2)^2 + 4 a_2^3 a_3^2$$

permite decidir el número de rectas dobles. Si  $\Delta < 0$ , no existen rectas dobles (*afinidad central elíptica*). Si  $\Delta = 0$ , existe una única recta doble (*afinidad central parabólica*) y si  $\Delta > 0$ , entonces existen dos rectas dobles (*afinidad central hiperbólica*).

Finalmente, si el sistema (17) es incompatible, es decir, si las dos matrices (18) tienen distinto rango, entonces se trata de una *afinidad sin puntos invariantes*.

### 3.5. Transformaciones lineales que no son afinidades

Si las matrices (18) son ambas de rango uno, se trata de una *proyección paralela* sobre una recta de puntos invariantes, que puede determinarse como en el caso de afinidad homológica (con característica 0).

Si  $A_{11}$  es la matriz nula, se trata de una *proyección sobre un punto* fijo del plano.

### 4. Transformación lineal en que se corresponden dos ternas de puntos

Sean  $P_1, P_2$  y  $P_3$  tres puntos no alineados, de coordenadas respectivas  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ , y sean  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  tres puntos cualesquiera, de coordenadas respectivas  $(u_1, v_1)$ ,  $(u_2, v_2)$  y  $(u_3, v_3)$ . Si estos tres puntos son las respectivas imágenes de aquellos en la transformación lineal (2), entonces se verificarán

$$(1, u_1, v_1) = (1, x_1, y_1)A; \quad (1, u_2, v_2) = (1, x_2, y_2)A; \quad (1, u_3, v_3) = (1, x_3, y_3)A$$

y, en consecuencia,

$$Q = PA; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 0 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}$$

siendo invertible la matriz  $P$ , por ser no alineados los puntos  $P_1, P_2$  y  $P_3$ , luego la matriz  $A$  debe verificar

$$A = P^{-1}Q$$

lo que permite calcular la matriz  $A$  de la transformación lineal en que tales puntos son homólogos.

Una vez calculada la matriz  $A$ , para determinar de qué tipo de transformación lineal se trata, basta aplicar lo indicado en 3.

### 5. Implementación de las transformaciones lineales

Las consideraciones geométricas que venimos de hacer, permiten implementar las transformaciones lineales sobre sistemas de cómputo algebraico. La que nosotros hemos desarrollado (sobre el sistema Maple V3), permite definir transformaciones lineales de cualquiera de los cuatro modos indicados al comienzo del apartado 2, aplicándolas a objetos de uno de los dos tipos siguientes:

- i) un punto, dado por la lista de sus coordenadas:  $[x, y]$
- ii) una lista de puntos:  $[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]]$

devolviendo como salida la lista imagen en la transformación. Pasemos a describir su sintaxis.

Para transformaciones definidas de modo sintético, aplicamos el nombre abreviado de la transformación a los datos de esta y, finalmente, al objeto. Así, para aplicar la rotación de centro  $(a, b)$  y amplitud  $\phi$  al objeto  $obj$ :

$$> \text{rot}([a, b], \phi, \text{obj});$$

devolviendo como salida la lista imagen en la transformación. De modo análogo se hace para traslaciones, reflexiones, homotecias y afinidades homológicas. Notemos que el objeto imagen obtenido como «output», es devuelto en aritmética exacta, presentando, a veces, las coordenadas obtenidas, expresiones para las que no es fácil intuir su valor aproximado. En tal caso conviene convertir su salida por pantalla (no los datos que se usen para cálculos internos) al modo coma flotante.

Para transformaciones definidas por sus ecuaciones, aplicamos el nombre abreviado de transformación lineal ( $lin$ ) a los polinomios bivariables que expresan sus ecuaciones

y, finalmente, al objeto. Así, para aplicar la transformación lineal de ecuaciones  $x' = ax + by + c$ ,  $y' = dx + fy + g$  al objeto obj:

```
> lin(ax + by + c,dx + fy + g,obj);
```

y el programa hace una descripción de la transformación lineal de que se trata y devuelve como salida la lista imagen.

Para transformaciones definidas por dos objetos homólogos, aplicamos el nombre abreviado del tipo de transformación (mov, sem, afi,...) a ambos objetos en el orden apropiado. Así, para definir el movimiento que transforma el objeto obj1 en el obj2:

```
> mov(obj1,obj2);
```

y el programa hace una descripción del movimiento de que se trata y devuelve como salida la lista imagen en la transformación.

Notemos que el programa compara automáticamente las listas de puntos obj1 y obj2, avisando si son de distinto número de puntos. Además busca en dichas listas dos ternas de puntos homólogos, si las encuentra calcula la matriz de la transformación y finalmente compara los restantes puntos homólogos, para avisar si hay algún par que no se corresponda, por error.

Por otra parte, el programa permite descomponer un movimiento en producto de reflexiones, uno de cuyos ejes (primero o segundo) pase por el punto que se elija.

El programa también calcula el producto o composición de todas las transformaciones efectuadas, desde que se inicializó por última vez, así como obtener la imagen de una recta, circunferencia o curva algebraica, en dicha transformación producto o en la última transformación efectuada.

Las representaciones gráficas se obtienen de modo similar al utilizado en nuestra implementación de la «Turtle Geometry» para Maple ([RR5], [RR6], [RR7]). El dibujo queda almacenado en una variable, que se inicializa como la lista vacía. En dicha lista se almacenan valores en coma flotante, para aumentar la velocidad, mientras que los cálculos algebraicos se realizan en aritmética exacta, de modo que no se produzcan errores de acarreo y los valores numéricos solución sean correctos. En cualquier momento, los dibujos almacenados en dicha lista pueden hacerse visibles en pantalla, realizando un PLOT de la lista. Esta concepción permite dibujar sólo aquellos de los pasos intermedios que se desee, así como recuperar en cualquier momento la pantalla gráfica previamente calculada.

Se consiguen dibujar los objetos original e imagen de la última transformación efectuada, o del producto de todas, y representar esta esquemáticamente, indicando el valor numérico de la máxima abscisa a representar (la ordenada máxima es 3/4 de la máxima abscisa). Por defecto aparecen los ejes en el modo usual y la escala en vertical y horizontal es la misma.

## 6. Ejemplo de «worksheet»

### Ejemplo de "worksheet" sobre transformaciones lineales con Maple V.3

Para cargar nuestro programa:

```
read (lin2d);
```

#### EJEMPLO 1: Efectuar dos reflexiones de ejes secantes y su transformación producto.

Inicializar:

```
ini( );
```

Definir el objeto ob1:

```
ob1:=[[2,1],[2,3],[3,2],[2,2]];
```

Aplicar la reflexión cuyo eje pasa por (3,-1) inclinado 45 grados respecto de la horizontal, al objeto ob1, denotando ob2 a su imagen:

```
ob2:=ref([3,-1],45,ob1);
```

```
ob2 := [[5, -2], [7, -2], [6, -1], [6, -2]]
```

Aplicar la reflexión de eje la recta de ecuación  $y+3=0$  a ob2, denotando ob3 a su imagen:

```
ob3:=refl(y+3,ob2);
```

```
ob3 := [[5, -4], [7, -4], [6, -5], [6, -4]]
```

Transformación producto de las dos reflexiones anteriores:

```
prod();
```

*Ecuaciones de la transformación:*

$$X = 4 + y, Y = -2 - x$$

*Es la rotación de centro, [1, -3], y amplitud, -90, grados*

#### EJEMPLO 2. Efectuar un semigiros seguido de una reflexión y hallar su producto:

```
ini();
```

Aplicar el semigiros de centro (4,-1) a ob1:

```
rot([4,-1],180,ob1);
```

```
[[6, -3], [6, -5], [5, -4], [6, -4]]
```

Aplicar la reflexión cuyo eje pasa por (5,0) inclinado -45 grados al objeto obtenido: 

```
ref([5,0],-45,");
```

```
[[8, -1], [10, -1], [9, 0], [9, -1]]
```

Transformación producto de los dos movimientos anteriores:

```
prod();
```

*Ecuaciones de la transformación:*

$$X = 7 + y, Y = -3 + x$$

*Es la reflexión con deslizamiento (simetría deslizante):*

*consistente en la reflexión de eje,  $x - y - 5 = 0$*

*por la traslación de vector, [2, 2]*

**EJEMPLO 3. Componer dos semigiros y descomponer en producto de reflexiones:**

ini();

rot([4,1],180,ob1);

[[6, 1], [6, -1], [5, 0], [6, 0]]

rot([6,3],180,"");

[[6, 5], [6, 7], [7, 6], [6, 6]]

prod();

*Ecuaciones de la transformacion:*

$$X = 4 + x, Y = 4 + y$$

*Es la traslacion de vector, [4 4]*

Descomponerla en producto de reflexiones, pasando por (0,5/4) el eje de la primera :  
des([0,5/4],1);

*Se descompone en:*

*reflexion 1 de eje,  $4x + 4y - 5 = 0$*

*reflexion 2 de eje,  $4x + 4y - 21 = 0$*

Descomponerla en producto de reflexiones, pasando por (0,5/4) el eje de la segunda :  
des([0,5/4],2);

*Se descompone en:*

*reflexion 1 de eje,  $4x + 4y + 11 = 0$*

*reflexion 2 de eje,  $4x + 4y - 5 = 0$*

**EJEMPLO 4: Definir otro objeto y hallar el movimiento que pasa de ob1 a el.**

ini();

obj4=[[5,-1],[5,-1],[6,0],[5,0]]:

Hallar el movimiento que pasa de ob1 a ob4:

mov(ob1,"");

*Ecuaciones de la transformacion:*

$$X = 3 + x, Y = -2 + y$$

*Es la traslacion de vector, [3 -2]*

*AVISO: Esta es la transformacion en que se corresponden los puntos de posiciones, 1, 3, 4, de ambas listas de puntos:*

[2, 1], [2, 3], [3, 2], [2, 2]

[5, -1], [5, -1], [6, 0], [5, 0]

*pero en ella no se corresponden los puntos situados en las posiciones, 2*

**EJEMPLO 5: Aplicar una homotecia, visionar y componer con una traslacion:**

ini();

Aplicar la homotecia de centro (-2,1) y razon 5/2 al objeto ob1:

ob5:=hom([-2,1],5/2,ob1);

$$ob5 := \left[ [8, 1], [8, 6], \left[ \frac{21}{2}, \frac{7}{2} \right], \left[ 8, \frac{7}{2} \right] \right]$$

Representar la última transformación con máxima abscisa 12:  
dibu(12);

Aplicar la traslacion de vector (3,-3) al objeto obtenido:

tra([3,-3],ob5);

$$\left[ [11, -2], [11, 3], \left[ \frac{27}{2}, \frac{1}{2} \right], \left[ 11, \frac{1}{2} \right] \right]$$

Transformación producto de las dos anteriores:  
prod();

*Ecuaciones de la transformacion:*

$$X = 6 + \frac{5}{2}x, Y = -\frac{9}{2} + \frac{5}{2}y$$

*Es la homotecia de centro, [-4, 3], y razon,  $\frac{5}{2}$*

**EJEMPLO 6: Dar un objeto semejante a ob1, definir la semejanza y visionar.**

ini();

ob6:=[[5,-3],[9,-3],[7,-5],[7,-3]]:

Definir la semejanza que pasa de ob1 a ob6:

sem(ob1,ob6);

*Ecuaciones de la transformacion:*

$$X = 3 + 2y, Y = 1 - 2x$$

*Es la rotacion con dilatacion consistente en:*

*la rotacion de centro, [1, -1], y amplitud, -90, grados*

*por la homotecia del mismo centro y razon, 2*

Representarla gráficamente con máxima abscisa 10:  
dibp(10);

**EJEMPLO 7: Aplicar una semejanza dada por sus ecuaciones.**

ini();

Aplicar la transformación lineal de ecuaciones  $x'=13+2y$ ,  $y=10+2x$  al objeto ob1:

lin(-4-2\*y,-1-2\*x,ob1);

*Ecuaciones de la transformacion:*

$$X = -4 - 2y, Y = -1 - 2x$$

*Es la reflexion con dilatacion consistente en:*

*la reflexion de eje,  $3x + 3y + 5 = 0$*

por la homotecia de centro,  $\left[\frac{2}{3}, \frac{-7}{3}\right]$ , y razón, 2

(el centro de la homotecia esta en el eje de la reflexion)

Imagen del objeto:

[[ -6, -5 ], [ -10, -5 ], [ -8, -7 ], [ -8, -5 ]]

#### EJEMPLO 8: Aplicar dos afinidades homológicas y hallar su producto.

ini():

Aplicar la afinidad homológica cuyo eje pasa por (1,-1), inclinado 0 grados, en dirección inclinada 45 grados (respecto de la horizontal) y de característica 2 al objeto ob1:

afh([1,1],0,45,2,ob1);

[[2, 1], [4, 5], [4, 3], [3, 3]]

Aplicar la afinidad homológica de eje  $x-y+1=0$ , en dirección de  $x+y=0$  y de característica  $3/2$  al objeto obtenido:

afho( $x-y+1,x+y,3/2,$ ");

$\left[\left[\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right], [4, 5], \left[\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right], \left[\frac{13}{4}, \frac{11}{4}\right]\right]$

prod();

Ecuaciones de la transformacion:

$$X = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y, Y = -\frac{5}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}y$$

Es la afinidad central de centro, [0, 1]

en la que hay dos rectas dobles:

$$x - y + 1 = 0, \frac{1}{3}x - y + 1 = 0$$

(afinidad central hiperbolica)

#### EJEMPLO 9: Definir otro objeto y hallar la transformación lineal que pasa de ob1 a él.

ini():

[[1,1],[3,3],[2,2],[2,2]]:

Hallar la transformación lineal que pasa de ob1 al objeto anterior:  
tli(ob1,"");

Ecuaciones de la transformacion:

$$X = y, Y = y$$

Esta transformacion lineal no es afinidad

Se trata de la proyeccion sobre la recta,  $-x + y = 0$

en la direccion de la recta,  $2y = 0$

## 7. Interés práctico y didáctico

Como se ha podido comprobar en 6, la implementación que propugnamos permite aplicar transformaciones lineales a objetos diversos (puntos, poligonales, rectas, circunferencias, curvas algebraicas), determinar la transformación producto, dibujar las figuras original e imagen en una transformación y representar esta esquemáticamente.

Por otra parte, las transformaciones utilizadas pueden ser definidas de diversos modos: por sus atributos (traslaciones por su vector, reflexiones por su eje, homotecias por su centro y razón, etc), como producto de otras transformaciones previamente efectuadas, como transformación en que se corresponden dos figuras homólogas, o por sus ecuaciones. Ello invita a su utilización de modo multivalente: al modo de la Geometría Analítica elemental, o al modo de la Geometría Sintética (sin que el usuario haga uso de las expresiones polinómicas que internamente va utilizando el manipulador simbólico). En consecuencia, puede ser útil en distintos niveles de enseñanza: bachillerato (movimientos y semejanzas) y universidad (además de las anteriores, afinidades y transformaciones lineales en general).

A modo de ejemplo, una utilización adecuada de este tipo de programas como apoyo en el tema de movimientos y semejanzas, ayuda a descubrir la composición de transformaciones en subgrupos típicos generados por:

- traslaciones unidireccionales,
- rotaciones concéntricas,
- semigiros,
- reflexiones de ejes paralelos,
- reflexiones de ejes incidentes con un punto fijo,
- reflexiones con deslizamiento de eje común,
- homotecias concéntricas,
- homotecias y traslaciones.

Asimismo, ayuda a descubrir experimentalmente cómo las afinidades conservan propiedades que las hacen interesantes:

- alineación de puntos,
- paralelismo,
- punto medio,
- razón simple de puntos alineados,
- cociente de áreas de figuras homólogas,
- especie de una cónica.

También ayudan a descomponer una transformación en producto de otras:

- movimiento como producto de reflexiones,
- semejanza como producto de movimiento por homotecia,
- afinidad como producto de semejanza por afinidad homológica,
- afinidad central como producto de dos afinidades homológicas,
- afinidad central como producto de semejanza por afinidad homológica (con el mismo punto invariante).

En todo caso, el estudio de estas transformaciones con ayuda de estos programas sobre un manipulador simbólico, permite a profesores y alumnos aprovechar la tecnología computacional para hacer más rápido y cómodo su trabajo. De una parte, mediante una utilización adecuada de estos programas informáticos, se agiliza la proposición y corrección de ejercicios. Y de otra, la rapidez con que estos programas pueden ser ejecutados, permiten acumular experiencias, que facilitan la elaboración mental de los conceptos abstractos que encierran estas transformaciones, permitiendo redescubrir experimentalmente sus propiedades, lo que ayuda, de modo natural, a interesarse por ellas. De ahí su interés didáctico.

Notemos finalmente que el usuario de estos programas no necesita prerequisite informático alguno, lo que permite generalizar su utilización.

## Bibliografía

- [Ch] B. CHAR et al: *Maple V. Library Reference Manual*. Springer, 1991.
- [CL] A. CARRILLO; I. LLAMAS: *Maple V. Aplicaciones matemáticas*. Ra-ma, 1994.
- [He] A. HECK: *Introduction to Maple*. Springer-Verlag, 1993.
- [Li] P. LIBOIS: *Espaces affins et espaces projectives*. Dunod, 1966.
- [Mo] A. MONTES: *Apuntes de Maple V*. Univ. Politécnic de Catalunya, 1994.
- [Ri] F. RINCÓN et al: *Cálculo científico con Maple*. Ra-ma, 1995.
- [RR1] E. ROANES L.; E. ROANES, M.: *Simulación Logo del grupo equiforme*. Bol. de la Soc. Puig Adam, núm. 9, abril 1986.
- [RR2] E. ROANES L., E. ROANES M.: *Matemáticas con ordenador*. Síntesis, 1988.
- [RR3] E. ROANES L., E. ROANES M.: *Desarrollo de una implementación mejorada y flexible de la «Turtle Geometry»*. Actas del III Encuentro de Geometría Computacional. Univ. de Zaragoza, julio 1992.
- [RR4] E. ROANES L.: *Automatización e implementación de algunos problemas algebraicos y geométricos (Tesis doctoral)*. Univ. Politécnica Madrid, 1993.
- [RR5] E. ROANES L., E. ROANES M.: «An Implementation of "Turtle Graphics" in Maple V.2. En *Computer Algebra Nederland*, Nieuwsbrief 12, marzo 1994.
- [RR6] E. ROANES L., E. ROANES M.: «"Turtle Graphics" in Maple V.2». En *Maple V: Mathematics and Its Applications* (editor R. J. Lopez). BirkhNuser, 1994.
- [RR7] E. ROANES L., E. ROANES M.: *Nuevas tecnologías en Geometría*. Editorial Complutense, 1994.
- [RR8] E. ROANES L., E. ROANES M.: «An Implementation of "Turtle Graphics" in Maple V». En *MapleTech*, Special Issue 1994.
- [RR9] E. ROANES L., E. ROANES M.: *Semejanzas en Maple V.3*; Actas del I Congreso de Usuarios de Maple; Dpto. de Algebra, Computación, Geometría y Topología, Univ. de Sevilla, septiembre 1995.
- [ST] E. SNAPPER, R. TROYER: *Metric Affine Geometry*. Academic Press, 1971.
- [SV1] M. J. SOTO, J. L. VICENTE: *Algebra Lineal con MatLab y Maple*. Prentice Hall, 1995.
- [SV2] M. J. SOTO, J. L. VICENTE: *Matemáticas con Maple*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

# Prácticas de Cálculo Numérico con MATLAB

Celestino Montes\* y María de los Angeles Navarro†

Departamento de Matemática Aplicada Universidad de Sevilla

## Resumen

Deseamos, ante todo, agradecer a la Sociedad «Puig Adam» su amable invitación para redactar un trabajo de divulgación sobre MATLAB. En él, tras una breve introducción histórica, realizamos algunas consideraciones generales sobre la docencia de las Matemáticas, mostramos nuestra experiencia personal y vemos algunos ejemplos que hemos utilizado en nuestro trabajo cotidiano.

## 1. Introducción

El mundo de la enseñanza no es ajeno al cambio que ha supuesto la irrupción de los ordenadores personales en la sociedad actual. El mundo de la enseñanza universitaria, como pionero que debe ser, es uno de los primeros en utilizarlos y, dentro de él, los profesores de Matemáticas en general han realizado un formidable esfuerzo por adaptarse a la nueva situación. Las aplicaciones son innumerables, y una de las disciplinas que más se ha beneficiado del advenimiento de los ordenadores es la del Análisis Numérico.

Si podemos decir que los computadores pueden servir de ayuda en cualquier rama de la Matemática, es en el Análisis Numérico donde su presencia es del todo indispensable, y donde más se ha progresado en cuanto a tópicos en los programas se refiere. En efecto, hoy es impensable una lección de resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin incluir el método de eliminación gaussiana y la factorización LU de una matriz. Cualquier disciplina matemática, sobre todo las que se explican fuera de la Facultad, tiene mejor aceptación por el alumnado (y por el profesorado de otros departamentos) si se atiende el apartado numérico. Esto hace necesario que se acompañe a dichos tópicos de sus correspondientes problemas. Cuando se trata de resolver un problema numérico, la elección del sistema MATLAB es la mejor en opinión de los autores. La antigua antagonía entre sistemas numéricos y simbólicos ha quedado rota en las últimas versiones de

\* Departamento de Matemática Aplicada II.

† Departamento de Matemática Aplicada I.

ambos tipos de sistemas. De hecho la mayor parte de los sistemas pueden ser conectados entre sí. La razón por la que seguimos prefiriendo MATLAB es su arquitectura básica. El esqueleto del sistema sigue siendo el análisis matricial numérico. Esto hace que el diseño esté enfocado a la rapidez de los cálculos y permite operar con problemas en los que intervienen un gran número de datos.

Al hilo de lo anterior, queremos hacer referencia a una vieja disputa con los especialistas de Análisis Numérico. La mayoría de los consultados por los autores declinan el uso de sistemas comerciales, alegando que la mayor parte de las rutinas pueden ser construidas por los alumnos en un lenguaje de bajo nivel. Sin pretender ningún tipo de discusión con ellos, debemos hacer notar que cuando explicamos Cálculo Numérico a alumnos que no van a ser especialistas en él, resulta mucho más práctico acudir a algún sistema diseñado por especialistas. Aparte del ahorro de tiempo, la razón fundamental es la fiabilidad de los algoritmos utilizados, cuestión en la que nuestros alumnos difícilmente van a entrar.

## 2. Breve introducción histórica

En 1979 J.J. Dongarra, C.B. Moler, J.R. Bunch y J.W. Stewart publican la guía de LINPACK (Ver [4]). En ella se recogen una colección de subrutinas escritas en FORTRAN para la resolución del sistema de ecuaciones  $Ax = b$  y la práctica totalidad de sus variantes de interés. LINPACK, pues, consiste en un paquete de subrutinas para la resolución de sistemas de ecuaciones.

Su contrapartida para el otro gran problema del Algebra Lineal, el cálculo de autovalores, se dió en llamar EISPACK y una guía para ella, [10], había sido publicada tres años antes por B.T. Smith, J.M. Boyle, J.J. Dongarra, B.S. Garbow, Y. Ikebe, V.C. Klema y C.B. Moler.

Ambos paquetes eran de uso obligado en casi cualquier aplicación relacionada con el Algebra Lineal numérica, siendo aún de utilidad para usuarios de grandes computadores.

El advenimiento de la era del ordenador personal supuso un desafío para los especialistas de Análisis Numérico, en el sentido de la necesidad de adaptar los métodos y algoritmos existentes a las nuevas máquinas «pequeñas» de las que disponía cada vez un número mayor de usuarios.

Entre las numerosas derivaciones que se producen de la matemática aplicada a los ordenadores personales, en el campo del Análisis Numérico, son muchos los que están de acuerdo en que la mejor opción es MATLAB.

MATLAB es un sistema interactivo basado en matrices para cálculos científicos. Las primeras versiones datan de la década de los 80, cuando Cleve Moler se decide a integrar los paquetes LINPACK y EISPACK en un Laboratorio de Matrices, de donde proviene el nombre. En él se pueden realizar las operaciones habituales entre matrices,

junto con técnicas más sofisticadas tales como las factorizaciones LU, QR y en valores singulares, tan populares hoy en nuestros programas de Algebra Lineal.

De esta forma, las primeras versiones de MATLAB resultaban muy adecuadas para su utilización en cursos de teoría de matrices, Algebra Lineal y Cálculo Numérico. Hoy en día las posibilidades de MATLAB van algo más allá del «Laboratorio de Matrices» original, constituyendo un sistema interactivo y un lenguaje de programación para la realización de cómputos científicos y técnicos. El elemento básico del programa es una matriz que no requiere dimensionamiento. Permite solucionar numerosos problemas numéricos en una fracción del tiempo que requeriría escribir un programa en un lenguaje como Fortran, Basic o C. Además las soluciones a los problemas se expresan en MATLAB de forma prácticamente idéntica a como se escribirían matemáticamente.

La capacidad para generar gráficos es importante en una clase relacionada con el Análisis Numérico, y esto hace que el sistema desde sus comienzos integre algunas funciones para crear gráficos en dos y tres dimensiones. La utilidad de los gráficos va más allá de la docencia. En efecto, en muchas ocasiones, la observación de un gráfico puede permitir, por ejemplo, determinar una buena aproximación inicial a un problema, cuestión esencial en el método de Newton, o en la mayoría de los métodos de optimización.

El diseño del programa MATLAB tiene una gran capacidad de crecimiento debido a que el usuario puede ir definiendo funciones particulares para la resolución de problemas específicos. De esta forma van apareciendo numerosas «cajas de herramientas». Así en 1988 se comercializa la de Señales y en 1990 la de Optimización y la de Splines. Existen muchas más: Control, Control robusto, Identificación de sistemas,  $\mu$ -análisis, redes neurales, etc. Cada una de ellas consiste en varios archivos relacionados con un tema y algunas demostraciones.

A la par que surgen nuevas aplicaciones el sistema va mejorando tanto en prestaciones como en presentación. Así, algunas de las funciones diseñadas por usuarios se integran en el sistema; se crean bases de datos donde acceder a funciones más simples y ejemplos sencillos usados por profesores de todas las categorías y todos los lugares. Además los gráficos van mejorando pues el nivel de exigencia del usuario es cada vez mayor y los competidores son mejores en este terreno.

De esta forma, se obtiene la versión 3.5 j en 1990, y las versiones 4.0 y 4.1 en 1993 (la versión 4.2 está introduciéndose en estos momentos), que pueden considerarse como una de las herramientas más poderosas para la resolución de problemas relacionados con el Algebra Lineal numérica.

Las Matemáticas son el lenguaje común de la Ciencia y la Ingeniería. Las matrices, las ecuaciones diferenciales, los gráficos,... constituyen bloques básicos para la construcción de la matemática aplicada y también de MATLAB. Lo que hace al sistema accesible y poderoso es la base matemática subyacente. El manual de la versión para estudiantes, [11], señala el comentario de un profesor, usuario habitual de MATLAB: «La razón

por la que MATLAB es tan útil para el proceso de señales es que no fue diseñado para el proceso de señales, sino para las Matemáticas». Esta podría ser la filosofía del programa. MATLAB es un programa de Matemáticas. A él se añaden diversas aplicaciones, que lo enriquecen y lo hacen accesible al no especialista. Pero esencialmente es un programa de Matemáticas.

### 3. MATLAB en la docencia

#### 3.1. Algunas reflexiones generales

Es preocupante el creciente desinterés que muestran nuestros alumnos por las asignaturas de Matemáticas. Si bien los Planes de Estudios reconocen la importancia de una sólida formación matemática, pueden resultar curiosas las respuestas que se obtienen de los alumnos cuando son preguntados sobre su opinión sobre nuestra disciplina. Muchas son las experiencias que se han hecho para intentar corregir esta situación. Las soluciones adoptadas en otros contextos suelen pasar por la realización de prácticas en grupos reducidos. La realidad de nuestra universidad impone otra forma de actuar. La experiencia de los autores muestra que no es imposible acercar al alumnado al mundo de las Matemáticas reales, incluso con medios relativamente pobres.

La cuestión que habitualmente se plantea con más frecuencia, cuando se trata de diseñar un nuevo curso de matemáticas con el ordenador como elemento adicional, es el *aprendizaje mediante la experimentación*. Si no se dispone de suficientes horas para el desarrollo de unas prácticas, situación que hay que estimar como ideal, la idea puede consistir en motivar suficientemente al alumnado para que realicen las mismas por su cuenta. Naturalmente, esto sólo se conseguirá si el sistema que se explique a los alumnos es lo suficientemente potente como para que resulte útil en la práctica, cuestión totalmente resuelta en nuestro caso empíricamente. En efecto, actualmente nuestros alumnos utilizan el sistema MATLAB en gran parte de los cálculos numéricos que realizan. Y creemos que es ahí donde está la cuestión. Nuestro punto de partida no es que la docencia de las matemáticas deba ser revisada totalmente, sino que se necesita una prolongación de la misma hasta llegar a los resultados concretos.

Otro de los puntos que habitualmente se plantean cuando se trata de aplicar las nuevas tecnologías a la enseñanza de las Matemáticas es la *concentración en el concepto*. Este punto es algo más delicado según nuestra opinión. Claramente es cierto que el uso del ordenador permite la eliminación de engorrosos cálculos para concentrarnos en los conceptos. La cuestión es que cuando se trata de explicar Cálculo Numérico, la elaboración de un programa puede ser tan laboriosa como los cálculos que realizábamos antes de su uso. Ciertamente, la ventaja ahora es que, si la programación es buena, el trabajo realizado puede aprovecharse de forma inmediata en otras situaciones, pero sigue existiendo una componente de trabajo rutinario. En nuestra opinión, esta parte del trabajo no

se puede eludir, y, por tanto, no debe ser ocultada a nuestros alumnos, por lo que la posibilidad de enfatizar sólo en el concepto debe ser matizada.

#### 3.2. Nuestra experiencia personal

Expondremos a continuación nuestra experiencia personal sobre el uso de MATLAB en la docencia diaria.

El problema surge cuando el primero de los firmantes recibe el encargo de impartir una asignatura de Cálculo Numérico en la especialidad de Organización de Empresas de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Sevilla. La confección del programa de la asignatura, con condicionantes no habituales para nosotros, como la opinión de profesores externos al departamento de Matemáticas, se había pactado previamente, con lo que no existía ninguna duda sobre los tópicos a desarrollar. Naturalmente, la asignatura exigía la realización de prácticas, para lo que los alumnos podían usar los lenguajes de programación C y Fortran. Los resultados no fueron satisfactorios durante el primer año, entendiéndose por esto, fundamentalmente, los resultados de las prácticas. Podíamos observar cómo después de horas programando los alumnos presentaban resultados, cuando menos, poco alentadores. La solución que tomamos fué adoptar el sistema MATLAB para intentar hacer algunos problemas en clase e indicarles los puntos en donde solían tener problemas. Debemos confesar que en un principio no hubo ningún motivo especial para la elección del programa. Sencillamente, pasaba por allí, y se adecuaba a nuestras necesidades.

La primera cuestión a abordar consiste, desde luego, en iniciarse con el sistema. Es un problema relativamente simple, puesto que sus manuales son lo suficientemente sencillos como para ser entendidos por los no especialistas en informática, con tal de conocer las ideas básicas del Álgebra Lineal Numérica. Eventualmente, para ciertas aplicaciones, puede ser necesaria la colaboración del especialista. Una vez resuelto este problema, el siguiente consiste en disponer del material técnico necesario para poder impartir una clase a un número razonable de alumnos. Para ello es necesario la utilización de una pantalla de cristal líquido, o bien sistemas más sofisticados como un proyector de vídeo conectado a un ordenador. Este segundo sistema simplifica un poco la puesta en escena.

Una vez superados estos problemas, es casi irresistible realizar alguna experiencia en clase, y eso fue lo que hicimos el primer año. Inmediatamente, y tras mostrar como se utilizan las funciones más básicas, se pueden poner ejemplos, incluso tomados del programa, para ilustrar distintos aspectos de la teoría. Naturalmente el uso de un ordenador permite trabajar con objetos más cercanos a los reales, en cuanto a tamaño se refiere. Así, poner un ejemplo de Análisis Numérico que involucre una matriz  $10 \times 10$ , es algo realmente inabordable si no se cuenta con la ayuda de una máquina; sin embargo, en el más pequeño de los ordenadores personales, la resolu-

ción de un sistema  $50 \times 50$  es cuestión de segundos. El resultado fue bueno, ya que podíamos trabajar con matrices «grandes», lo que permitía a los alumnos ver los problemas que aparecían en la práctica, la comparación de distintos algoritmos al operar sobre matrices numéricas, o ver la ganancia de tiempo que supone la reducción previa de una matriz. Se conseguía además, la salida de la rutina de clases magistrales seguidas por otras de problemas, en las que necesariamente se trabajaba con dos tipos de matrices: Matrices de orden bajo (cuatro en el mejor de los casos), o bien matrices muy «académicas», en el sentido de que su construcción obedece al objetivo de encontrar un contraejemplo o bien al de que se puedan llevar a cabo los cálculos necesarios en un algoritmo.

Pero aún había un hecho no deseable: las clases eran poco participativas y por parte del alumnado de una inactividad absoluta. Hasta entonces, la actitud de los alumnos había sido completamente pasiva, en el sentido de que la motivación que les guiaba era la mencionada anteriormente. La solución evidente, explicar el sistema a los alumnos, tiene como inconveniente la falta de tiempo, de la que nos quejamos todos. La solución que adoptamos fue traducir un curso breve de Kermit Sigmon (Ver [9]), y explicarlo en dos sesiones de hora y media. El resultado, desde un punto de vista docente, nos pareció espectacular: Al final de las sesiones la mayoría de los alumnos estaban interesados en acceder al programa y obtener una copia del manual.

### 3.3. Formas de implementación

Con el tiempo, y contactando con diversas instituciones y personas (Ver, por ejemplo, [1] y [8]), hemos ido encontrando otras formas de utilizar MATLAB o cualquier otro paquete numérico en la docencia diaria. La que estimamos mejor entre las que conocemos, y que se ha experimentado con éxito, que sepamos, en varias Universidades españolas y extranjeras, consiste en formar grupos de veinte alumnos con dos profesores por grupo con la idea de que uno de ellos se concentre exclusivamente en resolver las dudas que los alumnos puedan plantear, mientras que el otro, aparte de ayudar al primero en lo posible, tiene como tarea la explicación de las diferentes técnicas a experimentar en cada sesión.

Nuestra Universidad parece aún lejos de poder adoptar esta forma de impartir una clase o práctica. La experiencia demuestra que la forma más plausible de utilizar el programa consiste en el uso de un proyector de vídeo o una pantalla de cristal líquido conectado a un ordenador donde poder ilustrar con ejemplos los distintos temas explicados en clase, como decíamos antes. La efectividad de esta forma de utilizar un sistema de cálculo depende del grado de familiarización que posean los alumnos con el sistema. En efecto, en un curso donde los alumnos no conozcan en absoluto el programa, tan sólo podemos aspirar a motivarlos un poco. Sin embargo, si perdemos un poco de tiempo en mostrar algunas interioridades del mismo, y los alumnos tienen acceso a un aula donde

practicar libremente, los resultados mejorarán espectacularmente, pues en este caso, contaremos con la aportación real de los problemas que ellos deben resolver a menudo.

En cursos superiores es practicable también otra técnica de trabajo consistente en proponer a los alumnos una serie de trabajos para realizar fuera o dentro del horario de clases. Como requerimientos técnicos para esta forma de trabajo se necesita un número razonable de puestos de ordenador con el programa instalado a disposición de los alumnos. El problema en este caso no se encuentra en el número de grupos de prácticas en que se tiene que dividir al alumnado, lo que produce unas necesidades de profesorado enormemente altas, sino en el número de alumnos total, ya que debe ser posible la evaluación de un trabajo donde la creatividad de nuestro alumnado puede generar ingentes cantidades de material. Como desventaja de esta forma de utilizar el ordenador en nuestra docencia, podemos citar la falta de control sobre el trabajo personal de los alumnos, aunque esto también tiene cierta componente positiva. Como contrapartida se tiene la comodidad que supone para el alumnado la falta de un horario rígido, y la posibilidad de profundizar en aquellos temas que resulten de su interés.

En cualquier caso pensamos que la forma de impartir las materias debe adecuarse al número de alumnos y no al revés. Si estuviéramos en una situación ideal, esto último podría plantearse e incluso podemos pensar en la posibilidad de que dentro de unos años baje el número de alumnos, pero no podemos permitirnos el lujo de esperar hasta entonces para introducir las nuevas tecnologías en nuestras clases. Según el Profesor Alsina ([2]), las matemáticas han de ser para **todos**, a lo que nosotros añadimos que toda aquella experiencia que no sea susceptible de ser transportada a un auditorio masivo, cuando menos, perderá peso específico dentro de nuestra comunidad.

## 4. Ejemplos

A continuación presentaremos algunos ejemplos que hemos ido coleccionando a lo largo de éstos años, para la ilustración de distintos puntos de las distintas asignaturas donde hemos utilizado el programa. Se trata de ejemplos que han sido expuestos en una clase magistral.

### 4.1. Errores de redondeo

El siguiente ejemplo, tomado de [12] pretende ilustrar que lo peligroso de los errores de redondeo es su posible propagación en cálculos subsecuentes. Para ello resolveremos un sistema triangular, viendo que las primeras coordenadas de la solución que se calculan, son prácticamente exactas, mientras que las últimas apenas tienen alguna cifra significativa correcta. También aclara que el número de condición no es el cociente entre los autovalores máximo y mínimo a no ser que la matriz sea simétrica.

En primer lugar, introducimos la matriz cuyos elementos diagonales son .501, .502, .503, ..., .550 y los de su superdiagonal son iguales a -1. El vector  $b$  se toma de forma que la solución del sistema de ecuaciones sea el vector cuyas componentes son todas iguales a 1/3.

```

for i = 1:50
    a(i,i) = 0.5 + (i/1000);
    if i < 50
        a(i,i + 1) = -1;
        b(i,1) = (a(i,i)-1)/3;
    else
        b(i,1) = 0.55/3;
    end
end
end

```

El resultado es, por supuesto, la matriz:

$$\begin{bmatrix}
 .501 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & .502 & -1 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & .503 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & .550
 \end{bmatrix}$$

A continuación resolvemos el sistema  $Ax = b$ , con la instrucción  $x = a\b$ . Especificamos el formato «largo» (15 cifras) con **format long e** y cambiamos de orden las coordenadas de la solución, para verlas de la misma forma en que se obtienen, con  $y = x(50:-1:1)$ . Las coordenadas de la solución en orden decreciente son:

```

3.333333333333333e-01      3.333333332635979e-01
3.333333333333333e-01      3.333333332002504e-01
3.333333333333333e-01      3.333333330788727e-01
3.333333333333333e-01      3.3333333328458609e-01
3.333333333333332e-01      3.3333333323976856e-01
3.333333333333331e-01      3.3333333315340107e-01
3.333333333333329e-01      3.3333333298664304e-01
3.333333333333325e-01      3.3333333266404706e-01
3.333333333333318e-01      3.3333333203877574e-01
3.333333333333304e-01      3.3333333082450080e-01
3.333333333333279e-01      3.3333332846181384e-01

```

```

3.333333333333233e-01      3.3333332385566896e-01
3.333333333333147e-01      3.3333331485835404e-01
3.3333333333332987e-01      3.333329724938940e-01
3.3333333333332687e-01      3.333326271896165e-01
3.3333333333332125e-01      3.333319487378101e-01
3.3333333333331071e-01      3.333306131063721e-01
3.3333333333329089e-01      3.333279785558506e-01
3.3333333333325356e-01      3.333227716420459e-01
3.3333333333318310e-01      3.333124604256508e-01
3.3333333333304987e-01      3.332920008428728e-01
3.333333333279748e-01      3.332513244236894e-01
3.333333333231847e-01      3.331702937515363e-01
3.333333333140759e-01      3.330085532899130e-01
3.333333332967222e-01      3.326850697736122e-01

```

El motivo de perder tantas cifras significativas es lógicamente que la matriz está mal condicionada. Para verlo calculamos primero su número de condición respecto a la norma euclídea con **cond(a)**, obteniendo el resultado **2.029220279849393e + 14**. Podemos recurrir también al número de condición referido a la norma 1, que resulta menos costoso. La instrucción es **rcond(a)** y el resultado **5.209426967190691e-15** (en este caso obtenemos el inverso).

#### 4.2. Eliminación Gaussiana contra Cramer

El siguiente ejemplo fue también uno de los primeros que expusimos en clase. El objetivo que se pretendía conseguir era convencer a los alumnos de las ventajas de utilizar la Eliminación Gaussiana frente a su vieja conocida Regla de Cramer. Hagamos notar que la razón que habitualmente damos a nuestros alumnos, sobre el número de operaciones no es la más importante, pero el lugar donde se expone el ejemplo impide entrar en consideraciones más profundas. Dos medidas de la eficiencia de un algoritmo son el número de operaciones realizadas, y el tiempo gastado. Si deseamos saber cuanto tarda y cuantas operaciones realiza MATLAB para resolver un sistema  $50 \times 50$  podemos escribir:

```

a = rand(50);
b = rand(50,1);
flops(0); t1 = clock;
xgauss = a\b;
tgauss = etime(clock,t1)
operauss = flops

```

Esto producirá las respuestas

```
tgauss = 0.0500    opergauss = 99929
```

Si deseamos comparar éstos resultados con los que se obtendrían al resolverlo con la fórmula  $x = \text{inv}(a)*b$ , lo que esencialmente consiste en utilizar la Regla de Cramer basta con escribir

```
flops(0);t1 = clock;  
xinv = inv(a)*b;  
tinv = etime(clock,t1)  
operinv = flops
```

Las respuestas que se obtienen ahora son:

```
tinv = 0.1600    operinv = 265404
```

Ahora, lo lógico es ver la diferencia o mejor el cociente. Basta teclear

```
operinv/opergauss  
tinv/tgauss
```

para obtener que el cálculo de la solución con la fórmula de la inversa es **2.6559** veces más costoso si medimos el costo en número de operaciones, y **3.2000** veces mayor si lo medimos en términos de tiempo gastado en la realización de los cálculos. Naturalmente, estos resultados dependen de las matrices que escoja la máquina y del ordenador que se esté utilizando.

Fue sorprendente para nosotros el hecho de que este ejemplo tan sencillo fuera tan bien aceptado, tanto por los alumnos como por algunos profesores con los que discutimos, por ejemplo, el reducido número de operaciones que requería la evaluación de la inversa dentro del sistema. La experiencia nos ha demostrado que el ejemplo contiene dos hechos fundamentales sobre la utilización del programa. Por un lado la mayor parte de los algoritmos de algebra lineal numérica que aparecen en la práctica están contruidos en MATLAB, por lo que podemos evitar largos y tediosos espacios de tiempo en la programación de éstos. Por otro, la forma en que se solicitan resultados al sistema, es decir, la sintaxis es muy parecida a la que podemos utilizar cuando escribimos en un papel.

### 4.3. El método de Newton

El siguiente ejemplo trata sobre el método de Newton. No es nada original, pero en cualquier curso donde se trata algo de Cálculo numérico aparece el tema, y no debemos soslayar las cosas conocidas si son importantes. De esta forma cuando la segunda firmante fue invitada a dar una charla divulgativa sobre el sistema, uno de los ejemplos que trató fue precisamente este (Ver [7]).

Se trataba pues de crear un archivo que permitiera ver como se comporta el método de Newton, restringiendonos al caso de los polinomios, sobre los que disponemos de información adicional sobre la elección del punto inicial.

Los polinomios se introducen en el sistema como vectores. En particular el polinomio  $x^3 + x^2 + x + 1$  se introduce en MATLAB como

```
p = [1 1 1 1]
```

Despues de localizar las raíces del polinomio entre -2 y 2, mediante la fórmula adecuada, se puede crear el gráfico del polinomio de forma inmediata. La única complicación que se presenta a la hora de introducir el método de Newton es el cálculo de la derivada. En el caso de los polinomios esto es sencillo. Podemos utilizar la fórmula:

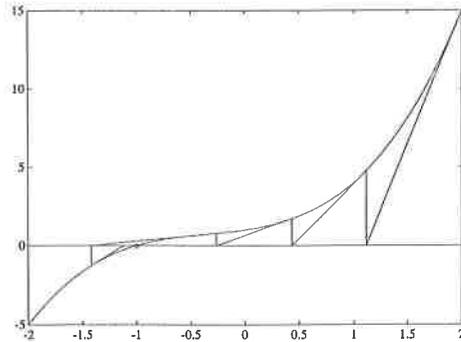
```
n = max(size(p))-1;    p1 = (n:-1:0).*p;    p1 = p1(:,1:n)
```

He aquí una desventaja con respecto a los sistemas simbólicos. Incluso en el caso de polinomios el cálculo de la derivada es relativamente complicado (si queremos escribir una fórmula que proporcione la derivada de cualquier polinomio).

Una vez disponemos del polinomio y su derivada, los cálculos son sencillos. Si partimos de  $x_0 = 2$ , para obtener la iteración 25 del método de Newton, basta escribir:

```
k = 0;    x = x0;    q = polyval(p,x);  
for k = 1:25  
    correc = q/polyval(p1,x);  
    x = x-correc;    q = polyval(p,x);  
end  
x
```

De esta forma la desventaja que comentábamos antes se enjuga con la sencillez con que podemos disponer los cálculos. El valor que se alcanza resulta ser -1. Complicando un poco la programación puede obtenerse además la típica representación gráfica:



#### 4.4. Condicionamiento del cálculo de ceros de polinomios

Relacionado con el ejemplo anterior, en este intentabamos rebatir algunas ideas preconcebidas sobre el condicionamiento del cálculo de los ceros de un polinomio.

Las raíces  $x_i(k)$  del polinomio  $p(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-20)$  están bien separadas. Queremos estudiar la condición del problema del cálculo de los ceros de  $p(x)$ . Para ello empezamos introduciendo el polinomio. Esto se hace con la instrucción **conv**, que sirve para multiplicar polinomios:

```
p = [1 -1]; for k = 2:20, p = conv(p,[1 -k]); end
```

A continuación, perturbamos el coeficiente de  $x^{19}$  en  $p$  para ver cómo se modifican sus raíces

```
q = p; q(2) = p(2)*(1 + 10^(-8)); a = [p;q]'
```

Observemos que la perturbación tiene un error relativo de  $10^{-8}$ . La parte final de la instrucción nos da los coeficientes de  $p$  y su perturbación  $q$  escritos por columnas.

1.0000000000000000e + 00	1.0000000000000000e + 00
-2.1000000000000000e + 02	-2.1000000210000000e + 02
2.0615000000000000e + 04	2.0615000000000000e + 04
-1.2568500000000000e + 06	-1.2568500000000000e + 06
5.3327946000000000e + 07	5.3327946000000000e + 07
-1.6722808200000000e + 09	-1.6722808200000000e + 09
4.0171771630000000e + 10	4.0171771630000000e + 10
-7.5611118450000000e + 11	-7.5611118450000000e + 11
1.131027699538100e + 13	1.131027699538100e + 13

-1.355851828995300e + 14	-1.355851828995300e + 14
1.307535010540395e + 15	1.307535010540395e + 15
-1.014229986551145e + 16	-1.014229986551145e + 16
6.303081209929490e + 16	6.303081209929490e + 16
-3.113336431613907e + 17	-3.113336431613907e + 17
1.206647803780373e + 18	1.206647803780373e + 18
-3.599979517947607e + 18	-3.599979517947607e + 18
8.037811822645052e + 18	8.037811822645052e + 18
-1.287093124515099e + 19	-1.287093124515099e + 19
1.380375975364070e + 19	1.380375975364070e + 19
-8.752948036761600e + 18	-8.752948036761600e + 18
2.432902008176640e + 18	2.432902008176640e + 18

Finalmente, deseamos comparar las raíces de los dos polinomios. Para ello calculamos las raíces de  $q$  y las mostramos:

```
xi = roots(p); xip = roots(q); a = [xi';xip]'
```

Los resultados de las operaciones anteriores son

2.0000e + 01	2.2159e + 01
1.8998e + 01	2.0367e + 01 + 3.1877e + 00i
1.8007e + 01	2.0367e + 01 - 3.1877e + 00i
1.6981e + 01	1.6798e + 01 + 4.2862e + 00i
1.6035e + 01	1.6798e + 01 - 4.2862e + 00i
1.4951e + 01	1.3613e + 01 + 3.7127e + 00i
1.4049e + 01	1.3613e + 01 - 3.7127e + 00i
1.2964e + 01	1.1286e + 01 + 2.5400e + 00i
1.2021e + 01	1.1286e + 01 - 2.5400e + 00i
1.0991e + 01	9.6023e + 00 + 1.3147e + 00i
1.0003e + 01	9.6023e + 00 - 1.3147e + 00i
8.9993e + 00	8.2579e + 00 + 1.1896e - 01i
8.0001e + 00	8.2579e + 00 - 1.1896e - 01i
7.0000e + 00	6.9947e + 00
6.0000e + 00	6.0001e + 00
5.0000e + 00	5.0000e + 00
4.0000e + 00	4.0000e + 00
3.0000e + 00	3.0000e + 00
2.0000e + 00	2.0000e + 00
1.0000e + 00	1.0000e + 00

Observemos que los resultados son absolutamente disparatados. Por el contrario si realizamos los mismos cálculos con el polinomio  $p(x) = (x - 2^{-1})(x - 2^{-2}) \dots (x - 2^{-20})$  cuyas raíces no están bien separadas y se acumulan en 0, obtenemos las raíces

5.000000000000004e - 01	5.000000000000001e - 01
2.499999999999993e - 01	2.499999999999990e - 01
1.250000000000013e - 01	1.250000000000015e - 01
6.24999999999822e - 02	6.24999999999824e - 02
3.125000000000153e - 02	3.125000000000150e - 02
1.56249999999926e - 02	1.56249999999929e - 02
7.812500000000222e - 03	7.812500000000217e - 03
3.90624999999973e - 03	3.90624999999975e - 03
1.95312499999995e - 03	1.95312499999995e - 03
9.765625000000022e - 04	9.765625000000026e - 04
4.882812500000108e - 04	4.882812500000114e - 04
2.441406249999890e - 04	2.441406249999894e - 04
1.220703125000041e - 04	1.220703125000042e - 04
6.103515625000058e - 05	6.103515625000047e - 05
3.051757812499884e - 05	3.051757812489061e - 05
1.525878906250033e - 05	1.525878906417765e - 05
7.629394531249931e - 06	7.629394518669821e - 06
3.814697265625058e - 06	3.814697309655818e - 06
1.907348632812492e - 06	1.907348566766083e - 06
9.536743164062445e - 07	9.536743494295138e - 07

Los resultados ahora, aunque en las últimas raíces perdimos la mitad de las cifras significativas, son relativamente buenos.

## 5. Un ejemplo sobre optimización numérica

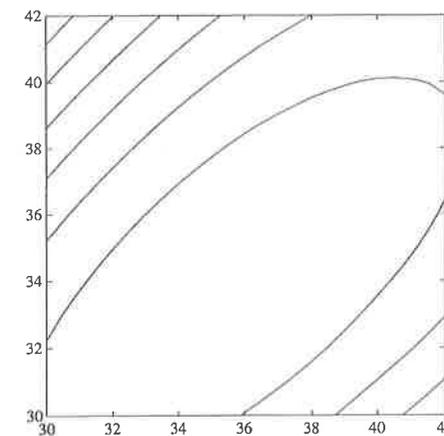
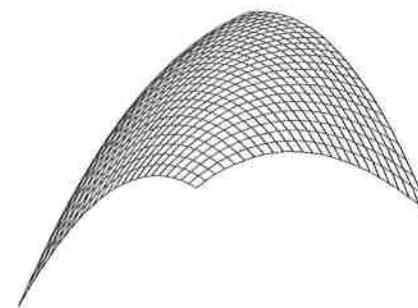
Los métodos de Newton y del gradiente aparecen en cualquier texto que se dedique a la optimización. Aparte de los motivos históricos, existen serias razones para que esto suceda. Una de ellas es que ambos admiten una teoría suficientemente desarrollada. Por otro lado, la sencillez de ambos métodos permite describir sin más problemas los distintos ingredientes que componen los algoritmos más avanzados.

El método del gradiente es uno de los más antiguos para resolver el problema de minimizar una función escalar  $f$  de varias variables y consiste en realizar la iteración  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$ , donde  $g_k$  es el gradiente de  $f$  en  $x_k$ , y  $\alpha_k$  es el parámetro que minimiza la función escalar  $f(x_k - \alpha_k g_k)$ . El método es extremadamente simple, salvo la trampa de la determinación del parámetro  $\alpha_k$ , para lo que se debe utilizar algún método de búsqueda

lineal. Para ello nos referiremos a [3] y [5] (Ver también [6] para más detalles). Como opuesto al método anterior aparece el método de Newton, que consiste en aplicar el método de Newton usual a las condiciones necesarias de extremo local. Este procedimiento es, salvo condiciones adversas, localmente cuadráticamente convergente, lo que le confiere particular eficacia de forma local, pero tiene la desventaja de depender fuertemente de la elección del punto inicial. Es decir, tiene las propiedades opuestas al método del gradiente.

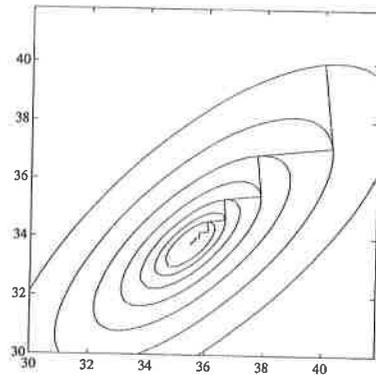
El siguiente ejemplo, tomado de [6], pretende ilustrar estos hechos, junto con la posibilidad de que la iteración que se obtiene con el método de Newton no sea descendente. Consideremos la función de dos variables definida en el cuadrante positivo:  $f(x,y) = 10x^{0.35}y^{0.5} - 2x - 3y$ . Se trata de encontrar numéricamente su máximo, cuyo cálculo podemos realizar de forma exacta, con las condiciones necesarias de primer orden. Resulta ser  $x = (17.5/6)^{1/0.3}$  e  $y = (5x^{0.35}/3)^2$

Se trata de una función muy sencilla. Es habitual y cómodo cuando se trata de estudiar los distintos métodos de optimización, el ir viendo los resultados sobre el plano de contornos de la función. Por tanto mostramos dicho plano de contornos junto con la gráfica. Después de algunos intentos, descubriremos que los problemas aparecen cuando nos acercamos a los ejes, mientras que si nos separamos lo suficiente de ellos podemos conseguir un aspecto local de la función muy parecido al paraboloide habitual. Por ejemplo en el cuadrado  $[30,42]^2$  los gráficos que se obtienen son los siguientes:

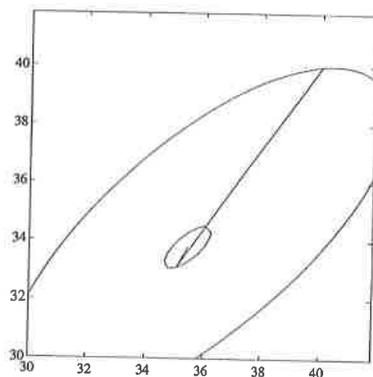


El máximo parece estar perfectamente localizado, y de hecho lo está, tan sólo es necesario poner en marcha los distintos métodos de que dispongamos. Para hacerlo necesitamos una estrategia de búsqueda lineal. Hemos elegido para ello un algoritmo con garantía de convergencia global para funciones unimodales. (Ver [3], [5] y [6] para más

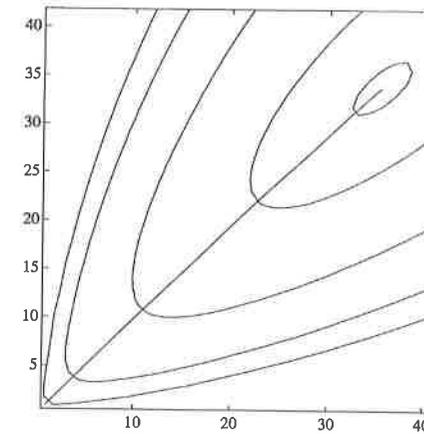
detalles). Si partimos del punto inicial  $(40,40)$ , puede obtenerse el siguiente gráfico, que en una demostración real podría verse paso por paso:



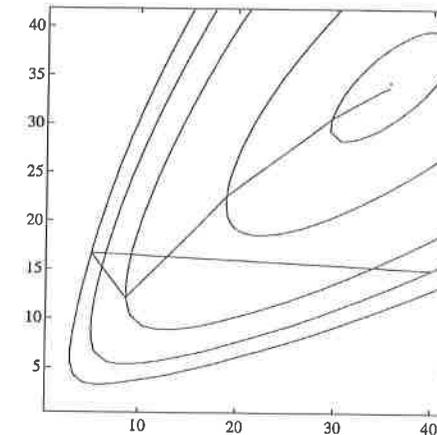
La sencillez del ejemplo hace que las iteraciones sean relativamente rápidas, pero la comparación con el método de Newton no da lugar a dudas. Una pocas iteraciones conducen a la solución, sin tener que preocuparnos por la búsqueda lineal. Veamos la iteración que resulta con el método de Newton partiendo del mismo punto inicial que antes:



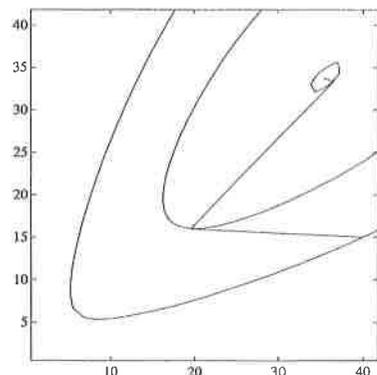
La rapidez del método de Newton se ve empañada, fundamentalmente, por la complicación que supone la necesidad de una buena elección del punto inicial. Esto puede ilustrarse con el ejemplo que estamos viendo. En primer lugar tomaremos como punto inicial el  $(1,1)$ , con el que el único problema es que se necesitan más iteraciones para llegar a la solución (cada línea de contorno determina una iteración). El gráfico que obtenemos es el siguiente:



El problema puede agudizarse hasta el punto de que la iteración podría incluso salirse de la región donde la función está definida. Un caso menos grave es el que mostramos a continuación en el que la iteración no siempre resulta ser descendente, lo que constituye otro problema del método de Newton, relacionado con la falta de convergencia global. Se obtiene partiendo del punto  $(40,15)$ :



Naturalmente, estos inconvenientes pueden evitarse si en cada iteración del método de Newton se realiza la búsqueda lineal. En éste caso la iteración converge mucho más rápidamente, aunque ahora los cálculos resultan algo más engorrosos, por razones obvias. Aún así mostramos la iteración que se obtendría, partiendo del mismo punto inicial del gráfico anterior. Observaremos en él que desaparece el comportamiento oscilatorio de la iteración:



## Referencias

- [1] *Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad*, M. Abellanas, A. García, Eds., Universidad Politécnica de Madrid, 1991.
- [2] ALSINA, C.: «Sería interesante pero son ustedes muchos». *Matemáticas y Tecnología para todos*. Actas de las Jornadas sobre Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad (TEMU-95), pp. 335-344, Universidad Politécnica de Barcelona, 1995.
- [3] BUNDAY, B. D.: *Basic Optimization Methods*, Arnold, 1984.
- [4] DONGARRA, J.J. et alii: *LINPACK User's Guide*, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [5] LUENBERGER, David E.: *Programación lineal y no lineal*, Addison-Wesley Iberoamericana, Mexico, 1989.
- [6] MONTES, C.: *Algunos ejemplos de Optimización Numérica*. Actas de las Jornadas sobre Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad (TEMU-95), pp. 291-300, Universidad Politécnica de Barcelona, 1995.
- [7] MONTES, C.-NAVARRO, M. A.: *Notas sobre una experiencia con MATLAB*, Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad, Universidad Politécnica de Madrid, 1991.
- [8] MONTES, C.-NAVARRO, M. A.: *Más experiencias con MATLAB*, Actas de las Jornadas sobre Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad, Universidad Politécnica de Valencia, 1993. J.R. Torregrosa, Eds., Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [9] MONTES, C.-NAVARRO, M.A.: *MATLAB y algunas de sus aplicaciones*, 1994.
- [10] NAVARRO, M. A.: *MATLAB*, Actas de las Jornadas sobre Matemática Aplicada a la Arquitectura Técnica, pp. 133-142. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 1994.
- [11] *Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad*, J.L. Hueso, C. Jordan, A. Roca, J.R. Torregrosa, Eds., Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [12] SIGMON, K.: *Introducción a MATLAB*, 1992.
- [13] SMITH, B.T. et alii: *EISPACK Guide*, Lecture Notes in Computer Science, v. 6, Springer Verlag, 1976.
- [14] *The Student Edition of MATLAB*, Prentice-Hall, New Jersey, 1992.
- [15] WILKINSON, J. H.: *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, 1965.
- [16] *MATLAB User's Guide*. The Mathworks, Inc. 1990.

# La cuarta dimensión: una alternativa al teorema de Fermat

Julián Sanz Pascual

## La demostración de A. Wiles

El último episodio de esta larga historia que es el teorema de Fermat lo ha protagonizado el matemático británico Andrew Wiles, quien en junio de 1993 anunció que había conseguido su demostración. La primera noticia la leí en un artículo del profesor Antonio Córdoba: «El teorema de Fermat: cae un mito de las matemáticas. La última pieza del rompecabezas» (EL PAIS, de fecha 26-6-93, p. 27).

Con este motivo, me publicaron en EL PAIS una carta en la que afirmaba que tal demostración era imposible, y daba algunas razones (12-7-93), que también he expuesto en mi libro [1]. No habían pasado seis meses cuando el propio Wiles se vio obligado a reconocer que había cometido un fallo<sup>1</sup>.

## La alternativa: esquema

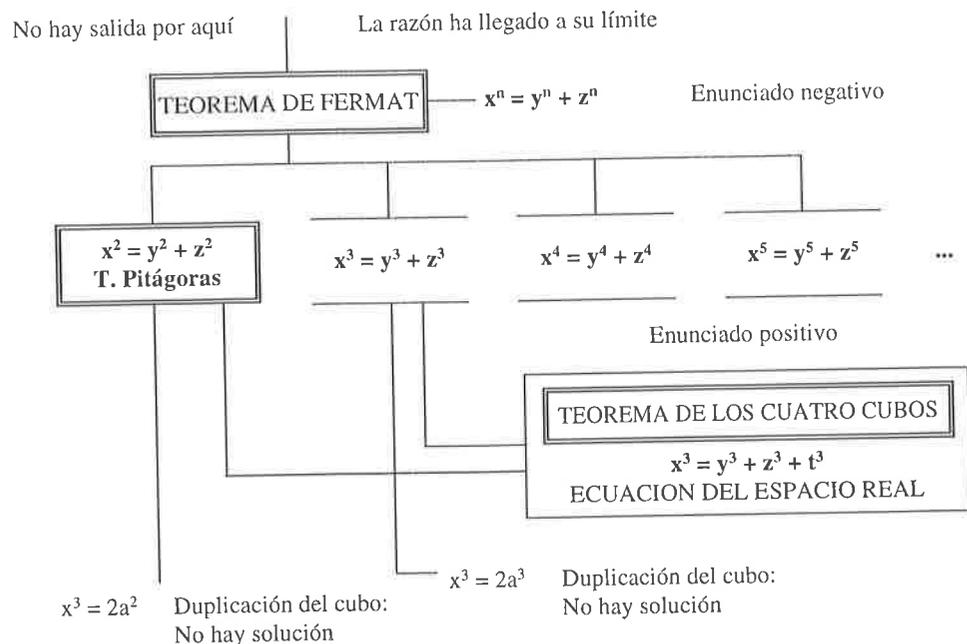
En el supuesto de que el teorema de Fermat nunca llegue a demostrarse, caben dos posturas:

- 1.º Continuar con los intentos de su demostración, lo que podrá enriquecer, sin duda, la metodología matemática, incluso ofrecer algún descubrimiento positivo de interés.
- 2.º Buscar una alternativa. Esta podría ser «el teorema de los cuatro cubos», también «la cuarta dimensión», que vengo proponiendo desde hace bastantes años sin haber encontrado eco entre los profesionales de las matemáticas.

De acuerdo con el esquema propuesto a continuación, partimos de la ecuación de los tres cuadrados, teorema de Pitágoras, que constituye el fundamento de la ciencia del plano, pues es su proposición más simple y propia. De ésta se deriva el problema de la duplicación del cuadrado, que ya está perfectamente resuelto.

<sup>1</sup> (Nota de la Redacción): Con posterioridad a la recepción del presente artículo, Andrew Wiles ha publicado la versión corregida y completa de su demostración del último Teorema de Fermat en el número de mayo de 1995 de los *Annals of Mathematics*. Naturalmente, este hecho no afecta a las otras construcciones que realiza el autor de este trabajo.

## ESQUEMA



De la ecuación de tres cuadrados, parece que habríamos de pasar a la de los tres cubos. Esta ecuación ya era famosa como insoluble entre los matemáticos árabes de la Edad Media. En el siglo XI, Avicena la menciona en un tratado de filosofía [2].

Fermat debió llegar al mismo punto y, convencido como estaba de que no se podía resolver, debió preguntarse ¿por dónde seguir? Era la encrucijada. Parece lógico pensar que, si no hay tres números enteros tales que  $x^3 = y^3 + z^3$ , menos pueda haber cuatro que cumplan  $x^3 = y^3 + z^3 + t^3$ . Entonces a Fermat sólo se le ocurrió seguir investigando en ecuaciones de tres variables y con exponentes enteros superiores a 3, pues con las cúbicas de cuatro variables le parecía obvia la inutilidad de continuar, por no decir la falta de interés. A mí me produce un cierto escalofrío pensar qué hubiese pasado si a este hombre, tan aficionado a los números y tan hábil con ellos, se le hubiese ocurrido tantear la ecuación de cuatro cubos. En efecto:  $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$ . ¿No le hubiese interesado mucho más esta salida positiva de «los cuatro cubos», que la negativa por la que se decidió?

### La ecuación de los cuatro cubos

La manera como yo llegué a la ecuación de los cuatro cubos puede ser considerada como anecdótica, pero no casual del todo. Un día, oyendo hablar del teorema de Fermat

por primera vez, pero habiéndolo entendido mal, me puse sin más a intentar resolver la ecuación de tres cubos. Mas al instante comprendí que eso no tenía sentido. Pensando tal vez como un viejo pitagórico, me hice esta argumentación: si al cuadrado son tres los números racionales que se pueden relacionar es porque tres puntos no en línea recta determinan un plano; consecuentemente, al cubo los números han de ser cuatro, pues cuatro son los puntos como mínimo que determinan un espacio. En efecto, por simple tanteo, pronto obtuve las primeras soluciones 6, 5, 4 y 3. Los hechos me daban la razón. El gol que Fermat había tenido en la punta de la bota hacía tres siglos y medio me había llegado a mí por un extraño rebote.

### Las primeras consecuencias aritméticas y geométricas

Desde el primer momento tuve conciencia clara de que las soluciones que había encontrado para la ecuación de cuatro cubos no eran casuales, como tampoco era casual que la ecuación de tres cuadrados tuviese las suyas. Es más, pensé que, si la de tres cuadrados constituye el fundamento de la ciencia del plano, la de cuatro cubos ha de constituir el fundamento de la ciencia del espacio. Esto, naturalmente, abría un campo inmenso de investigación, acaso demasiado inmenso y profundo para mis escasos recursos metodológicos, pues yo no era un matemático en el sentido profesional del término, sino un modesto profesor de filosofía.

### Una primera fórmula que permite otras soluciones

La primera pregunta que cabe hacerse es si las soluciones 3, 4, 5 y 6 son las únicas de la ecuación de cuatro cubos. Por analogía con la de los tres cuadrados, parece que no. Entonces ideé una fórmula que da nuevas soluciones a partir de las ya conocidas. Es ésta:

$$m = \frac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{a + b + c - d}$$

$$\begin{aligned} x &= a - m \\ y &= b + m \\ z &= c + m \\ t &= d + m \end{aligned}$$

Prueba con las soluciones 3, 4, 5, 6:

$$m = \frac{6^2 + 3^2 - 4^2 - 5^2}{3 + 4 + 5 - 6} = 2/3$$

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2/3 = 7/3 \\ y &= 4 + 2/3 = 14/3 \\ z &= 5 + 2/3 = 17/3 \\ t &= 6 + 2/3 = 20/3 \end{aligned}$$

Esta fórmula tiene dos posibilidades más:

$$m = \frac{d^2 - a^2 + b^2 - c^2}{a + b + c - d}$$

$$\begin{aligned} x &= a + m \\ y &= b - m \\ z &= c + m \\ t &= d + m \end{aligned}$$

A partir de las soluciones 3, 4, 5 y 6, da 6, 1, 8 y 9.

$$m = \frac{d^2 - a^2 - b^2 + c^2}{a + b + c - d}$$

$$\begin{aligned} x &= a + m \\ y &= b + m \\ z &= c - m \\ t &= d + m \end{aligned}$$

A partir de las soluciones 3, 4, 5 y 6, da 9, 10, -1 y 12.

## Historia de la ecuación de cuatro cubos y de sus soluciones

La referencia más antigua que he encontrado de esta ecuación data de 1748 y se debe a Leonardo Euler. En su libro *Introductio in analysin infinitorum*, tomo II, capítulo XIV, «De inventionem curvarum ex datis applicatarum proprietatibus», puede leerse: «Sic, si quaeratur Curva in qua

$$p^3 + q^3 + r^3 = a^3,$$

siet

$$p^3 - 3PQ + 3R = a^3;$$

et, ob

$$R = y^3 - Py^2 + Qy,$$

habebitur haec aequatio

$$3y^3 - 3Py^2 + 3Qy + p^3 - 3PQ = a^3$$

pro Curvis quaestio satisfaciendibus» [3].

Ya en este siglo, G.H. Hardy nos ofrece un texto en el que la ecuación es nuevamente tratada. Está en un libro que escribió junto con Wright, *An introduction to the theory of numbers* [4]. En el capítulo 13, trata de las ecuaciones diofánticas, en particular de la  $t^3 = x^3 + y^3 + z^3$ . Da la solución completa y dice que la propuso y la resolvió Euler. También trae esta fórmula que atribuye a Ramanujan, aunque no dice si con ella se pueden encontrar todas las soluciones:

$$x = 3a^2 + 5ab - 5b^2$$

$$y = 4a^2 - 4ab + 6b^2$$

$$z = 5a^2 - 5ab - 3b^2$$

$$t = 6a^2 - 4ab + 4b^2$$

[4]

Más recientemente aún, L.J. Mordell, en su libro *Diophantine equations* [5] en el capítulo 13, «Integer solutions of some cubic equations in three variables», plantea la ecuación  $x^3 + y^3 + z^3 = n$ . Para  $n = a^3$ , da este par de soluciones:

$$x = t, \quad y = -t, \quad z = a$$

$$x = 9at^4, \quad y = 3at - 9at^4, \quad z = a - 3at^3$$

[5]

En efecto, dando valores a las variables «t» y «a» en la fórmula de Mordell, se obtienen soluciones como éstas:

$$1, 6, 8, 9; \quad 1, 71, 138, 144.$$

Con la fórmula de Ramanujan, dando valor a las variables «a» y «b» se obtienen soluciones como éstas:

$$3, 36, 37, 46; \quad 18, 19, 21, 28; \quad 27, 30, 37, 46.$$

Tanto en la fórmula de Ramanujan como en la de Mordell como en la que yo mismo he propuesto, no parece que haya límite a las posibilidades de nuevas soluciones. Entre las que da la fórmula de Mordell y la de Ramanujan, se observa una diferencia que puede ser de interés de cara a la posible geometrización del teorema, y es que, mientras los tres números del primer miembro en la de Mordell no permiten la construcción de un triángulo, en la de Ramanujan sí lo permiten.

## La geometrización del teorema

Mientras, según hemos visto, ya ha habido algún ilustre matemático que se ha ocupado de la ecuación de cuatro cubos en el campo de la aritmética, no ocurre lo mismo en el de la geometría, pues se trata de un capítulo que hasta el día de hoy permanece completamente en blanco: no conozco ni una sola línea que se haya escrito sobre él. Salvo, claro está, lo poco que yo mismo he publicado [6].

Parece razonable pensar que, si la ecuación de los tres cuadrados tiene su expresión geométrica en la circunferencia, la de los cuatro cubos ha de tenerla en la esfera. De acuerdo con algunas de las soluciones encontradas, las que dan, por ejemplo, la fórmula de Ramanujan, podía pensarse que los tres números del primer miembro de la ecuación

permiten construir un triángulo, que sería la base del tetraedro, mientras que el número del otro miembro sería un segmento libre que permitiría relacionar cúbicamente dicho triángulo con los puntos de una esfera (Fig. 1). Lo que no he conseguido, a pesar de los muchos ensayos que he hecho, ha sido una figura plana, de proyección, en la que las diversas soluciones de la ecuación de cuatro cubos tengan su realización geométrica de manera similar a como la de los tres cuadrados la tiene en la circunferencia.

### La primera construcción

Si trazamos dos circunferencias iguales cuyos centros estén a una distancia de  $6/5$  del radio, uniendo los dos puntos de intersección y trazando por uno de estos puntos una perpendicular a dicho segmento de manera que corte a las dos circunferencias, tenemos cuatro puntos de intersección que determinan cuatro segmentos rectilíneos desiguales entre los que se puede establecer la siguiente relación cúbica:  $BD^3 = AB^3 + AC^3 + BC^3$  (Fig. 2).

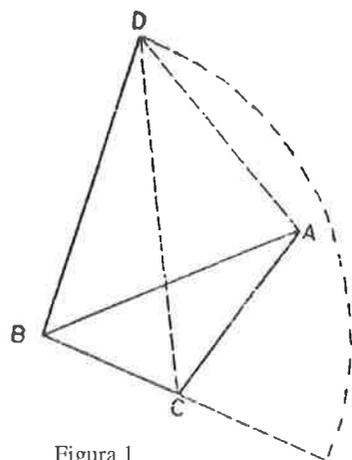


Figura 1

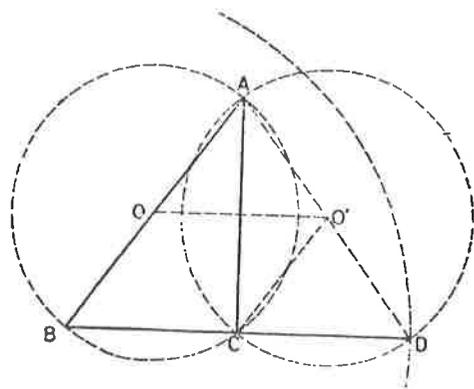


Figura 2

Comprobación:

Por construcción:  $OO' = 5r/6$ . Por el teorema de Thales tenemos  $OO' = 1/2 BD$ . Por simetría:  $BC = CD$ . Entonces  $BC = 6r/5$ ,  $BD = 12r/5$ . Por el teorema de Pitágoras:  $(AC)^2 = (2r)^2 - (6r/5)^2$ , luego  $AC = 8r/5$ . También:  $AB = 2r$ . Poniendo todos los términos de la ecuación en función de  $r$ , tenemos:

$$(12r/5)^3 = (2r)^3 + (8r/5)^3 + (6r/5)^3,$$

igualdad comprobable aritméticamente.

A nadie se le escapa que esta primera construcción es de un valor científico muy modesto, pues se limita a un caso particular de las soluciones posibles de la ecuación de cuatro cubos, sin embargo puede constituir el interés de haber sido el primer intento de llevar a la geometría una ecuación tan nueva y original, la verdadera ecuación del espacio.

### La ecuación de los cuatro cubos en la Geometría

Bien conocida es la posibilidad de pasar de la proporcionalidad lineal de los lados de triángulos semejantes (teorema de Thales) a la relación cuadrática de los mismos. En los triángulos rectángulos es la demostración del teorema de Pitágoras (Fig. 3).

Como comentario a esta clásica demostración, yo diría que la relación de proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes es algo que ya se da en el plano, no en el segmento en sí, lo que quiere decir que, en todo caso, hemos partido más bien del plano. Sólo restaría plantearse si a partir del teorema de Thales se podría haber llegado al de Pitágoras sin haberlo conocido previamente.

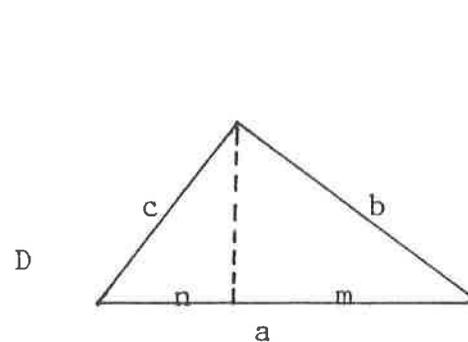


Figura 3

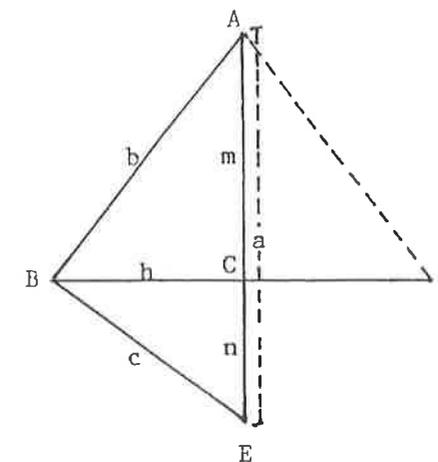


Figura 4

$$b^2 = am \quad y \quad c^2 = an$$

Sumando miembro a miembro ambas igualdades tenemos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n)$$

Como  $m + n = a$ , entonces  $b^2 + c^2 = a^2$ .

La pregunta que, por analogía, ahora vamos a hacernos es si, en el terreno de la geometría, sería posible pasar de la ecuación de los tres cuadrados a la de los cuatro cubos. En este caso, yo sólo puedo responder con la historia que conozco. A partir de las soluciones 3, 4, 5, de la ecuación de los tres cuadrados, y 3, 4, 5, 6, de los cuatro cubos, de acuerdo con la figura 4, trazando la perpendicular al segmento AB por el punto B y prolongando el segmento AC hasta el punto E, se nos forman tres triángulos semejantes, ABE, ACB y CBE. Aplicando el teorema de los cuatro cubos en los dos últimos triángulos y teniendo en cuenta los teoremas del cateto y de la altura, tenemos:

$$a) \quad (2n)^3 = c^3 + h^3 + n^3 \quad y \quad 7n^3 = c^3 + h^3$$

Como  $c^2 = an$  y  $h^2 = mn$ , sustituyendo, tenemos:

$$\begin{aligned} 7n^3 &= can + hmn, \text{ dividiendo por } n, \text{ nos queda:} \\ 7n^2 &= ca + hm \end{aligned} \quad (1.^a)$$

$$b) \quad (2h)^3 = b^3 + m^3 + h^3 \quad y \quad 7h^3 = b^3 + m^3$$

Como  $b^2 = am$  y  $h^2 = mn$ , sustituyendo, tenemos:

$$\begin{aligned} 7hmn &= bam + m^3, \text{ dividiendo por } m, \text{ nos queda:} \\ 7hn &= ba + m^2 \end{aligned} \quad (2.^a)$$

Sumando miembro a miembro las fórmulas 1.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup>, tenemos:

$$7hn + 7n^2 = ba + ca + m^2 + hm$$

Sacando factores comunes,  $7n(h + n) = a(b + c) + m(m + h)$ .

Como las sumas que están dentro de cada paréntesis lo son respectivamente de los catetos de los tres triángulos semejantes que se han formado, al estar sus respectivos lados homólogos en la proporción 3, 4, 5, estas sumas estarán en la misma proporción. Entonces, sustituyendo cada suma por sus respectivos números proporcionales, nos queda:

$$7n.3 = a.5 + m.4$$

Como  $a = mn$ , sustituyendo, tenemos:

$$21n = 5(m + n) + 4m = 5m + 5n + 4m; \quad 16n = 9m$$

Estos coeficientes, 16 y 9, corresponden, como puede comprobarse, a la relación métrica entre los segmentos del triángulo estudiado.

El problema está en que, de momento, este paso del espacio al plano, sólo lo he conseguido con las soluciones 3, 4, 5, 6. Pero lo que nos interesa ahora es el proceso y sobre todo la pregunta de si es o no reversible. Ciertamente, después de conocer el camino de ida, *a posteriori*, resulta fácil hacer el camino de vuelta, pero dudo mucho de que esto mismo se hubiese podido hacer en un puro *a priori*, mucho menos sin haber estudiado el teorema de los cuatro cubos y su posible geometrización. Lo que sí se podía haber hecho es una trampa, lo que el zorro, borrar el camino de ida con la cola y después presumir de haber inventado el camino de vuelta.

## La ecuación de siete cubos

La diferencia esencial entre el teorema de los cuatro cubos y el de Fermat está en el sentido de su signo: mientras el de Fermat es negativo, el de los cuatro cubos es positivo. Quiere esto decir que el primero cierra todos los caminos a la investigación una vez demostrado, el segundo se los abre. Siguiendo esta idea y a pesar de todas las dificultades que hemos señalado sí parece posible comenzar a resolver alguna clase de problemas, como es el de ecuaciones de cubos que tengan un número impar de incógnitas, siendo estas soluciones números racionales, desiguales y positivos. Para la de cinco variables he encontrado las soluciones -1, 7, 25, 24 y 31, que faltan a una condición.

En cuanto a la de siete sí he tenido éxito, pero por un camino bastante complicado en el que he combinado construcciones geométricas con cálculo aritmético. Este es el resumen:

Partiendo de las soluciones  $7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$ , tenemos  $7^3 + 14^3 = 20^3 - 17^3$ , luego  $7^3(1^3 + 2^3) = 3087 = 3^2 \cdot 7^3$  y dividiendo por  $7^3$  queda:  $1^3 + 2^3 = 3^2 = (1 + 2)^2$ .

Si generalizamos, tenemos este teorema: La suma de los cubos de la serie de los números enteros es igual al cuadrado de su suma [7].

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

Si sumamos los cubos de los trece primeros números, nos da 8281, que es el cuadrado de 91. Como  $91 = 4^3 + 3^3$ , tenemos

$$91^2 = (4^3 + 3^3)^2 = 16^3 + 9^3 + 12^3 + 12^3$$

Sustituyendo, nos quedaría esta ecuación:

$$16^3 + 9^3 + 12^3 + 12^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 13^3$$

Reduciendo términos semejantes, queda:

$$16^3 + 12^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 10^3 + 11^3 + 13^3$$

Como  $12^3 = 10^3 + 8^3 + 6^3$ , y también  $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$ , sustituyendo y eliminando términos equivalentes, nos queda la ecuación de siete cubos:

$$1^3 + 3^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3 + 13^3 = 16^3$$

A partir de aquí, ya es posible resolver ecuaciones de cualquier número de cubos. Como prueba, aquí están las soluciones de la de trece:

$$6^3 + 7^3 + 12^3 + 14^3 + 15^3 + 17^3 + 18^3 + 24^3 + 25^3 + 42^3 + 66^3 + 78^3 = 96^3$$

### Aclaración de interés

Este artículo es un breve resumen de un libro del mismo título inédito aún.

### Referencias

- [1] Ver: J. SANZ PASCUAL, *Primer discurso de ilógica*, Tecnos, Madrid 1992, Cap. IV, «Nociones de tiempo y de espacio».
- [2] C. GOLDSTEIN, «El teorema de Fermat», *Rev. Mundo Científico*, Barcelona, mayo 1994, p. 419.
- [3] L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, Apud Marcum-Michaellem Bousquet et Socios, 1748, tomo II, pág. 202.
- [4] HARDY-WRIGHT, *An introduction to theory of numbers*, Oxford 1956, pp. 190-203.
- [5] L.J. MORDELL, *Diophantine equations*, Academic Press, London 1969, p. 100.
- [6] Además del citado *Primer discurso de ilógica*, están *Teorema de los cuatro cubos y ecuación del espacio real* (opúsculo, Segovia 1975); «El tiempo y la cuarta dimensión del espacio», art. en *Rev. LLULL*, Zaragoza 1991, vol. 14, n.º 26, pp. 259-266.
- [7] Este es el viejo teorema de Nicómaco de Gerasa, año 100 d.C.

## Corrigenda

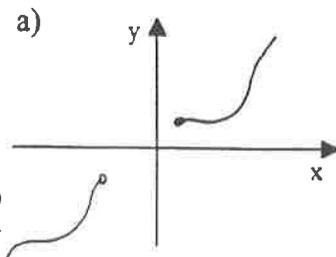
Lamentamos el error que se deslizó en la página 76 del último número de este Boletín, en cuya segunda línea decía:

las expresiones de a) y f) no son funciones

y debía decir:

las expresiones de a) a f) no son funciones

Además en la figura correspondiente al apartado a) aparecían los ejes de coordenadas sin curva y debía aparecer también la curva indicada a continuación:



## Reseña de libros

JAVIER PERALTA: *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*, Huerga y Fierro editores, 1995, 239 págs.

El profesor Peralta ejerció catorce años como catedrático de bachillerato y durante cuatro años fue profesor de Metodología de la Matemática II en la Sección de Metodología de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense. Desarrolló su tesis doctoral en la especialidad de Geometría Diferencial. En la actualidad es catedrático de la E.U. de Formación de Profesorado de la Universidad Autónoma de Madrid. Ha publicado interesantes artículos, algunos de ellos en nuestro boletín.

En resumen, a su nivel científico une un enorme interés por la enseñanza de la Matemática, y cuando concurren estas dos circunstancias suelen dar como fruto ideas interesantes y útiles, que afortunadamente en este caso han sido plasmadas en el referido libro, para que otros podamos aprovecharlas.

El libro consta de dos partes. En la primera se exponen las ideas básicas sobre la enseñanza de la matemática: su metodología y didáctica, el aprendizaje, la resolución de problemas y, muy especialmente, el papel que puede jugar la historia de la matemática en su enseñanza.

La segunda parte, notoriamente más pragmática, aborda las didácticas específicas de cinco partes esenciales de la matemática elemental: aritmética, algebra, geometría, cálculo y estadística. Y lo hace con un planteamiento muy personal y original, a través de un breve resumen histórico de su evolución y de problemas y curiosidades y pasatiempos, que el profesor-lector puede aprovechar.

La orientación dada al libro recuerda mucho la que D. Pedro Puig Adam dio a su célebre libro titulado «La Matemática y su Enseñanza Actual». Su lectura es también entretenida y apasionante, como lo fue, y lo sigue siendo, aquella obra clásica.

Aunque dirigido, en principio, a profesores de primaria y de bachillerato, este magnífico libro es aprovechable y recomendable para profesores de matemáticas en todos los niveles. Le auguramos un merecido éxito.

E. Roanes M.

M. J. SOTO PRIETO; J. L. VICENTE CÓRDOBA: *Algebra lineal con MATLAB y Maple*, Prentice-Hall, 1995, 301 págs y un disquete con programas.

El prof. Vicente Córdoba es catedrático de Algebra de la Universidad de Sevilla, de prestigio universal, miembro de la Academia Europea. M. J. Soto es licenciado en Matemáticas y experto en programación y cálculo simbólico.

Este interesantísimo libro tiene un enfoque distinto al de la mayoría de los clásicos de Algebra Lineal, en los cuales se describe el sistema formal, dejando los cálculos

explícitos para los ejercicios, que ya se supone se sabrán hacer una vez que se ha comprendido el formalismo.

En este libro se parte de la base de que a un estudiante le resulta más fácil calcular que comprender conceptos abstractos. Se suministran primero los algoritmos de cálculo y luego se estudia la teoría abstracta, pero no como un capítulo separado, sino modelada sobre los algoritmos. Esto quiere decir que se usan los algoritmos como técnica de demostración de los teoremas. Así, el lector ve cómo los conceptos abstractos surgen como un modelo a partir de los cálculos explícitos.

Consta de cuatro partes bien diferenciadas. En la primera se introducen los algoritmos relativos a matrices y determinantes, hasta llegar a las formas reducidas de una matriz. En la segunda parte se introducen los conceptos relativos a espacios vectoriales y aplicaciones lineales. La tercera se dedica a invariantes complejos (autovalores y autovectores, y formas canónicas complejas) e invariantes reales (formas canónicas reales y matrices especiales). Y la cuarta parte se ocupa de aplicaciones (regresión lineal, optimización lineal y ecuaciones diferenciales).

En el libro se describen e implementan los algoritmos en MATLAB y Maple, que son dos sistemas de Cálculo Simbólico potentes y de gran difusión. Incluye un disquete que contiene programas y transcripciones de las sesiones de cálculo contenidas en el texto, para evitar al lector la tediosa labor de introducir a mano, por teclado, datos y comandos.

Esto no significa que sea necesario poseer un computador y un sistema de Cálculo Simbólico para estudiar este libro, en el cual se dedica una especial atención a los «cálculos a mano», por su carácter formativo.

El modo totalmente original de presentar los conceptos, anteponiendo el algoritmo al formalismo, lo hace asequible y útil a un amplio espectro de alumnado. Ello no significa pérdida de rigor, sino sólo un modo mucho más pedagógico de introducir los conceptos propios del Álgebra Lineal habitual.

El libro tiene carácter introductorio y, al mismo tiempo, trata con profundidad todos los temas considerados, por lo que puede ser usado con aprovechamiento por estudiantes y profesores de primeros cursos de Facultades de Ciencias, Economía o Tecnología.

**E. Roanes M.**

M. J. SOTO PRIETO; J. L. VICENTE CÓRDOBA: *Matemáticas con Maple*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995, 281 págs y un disquete con programas.

Por ser los autores los mismos del libro anteriormente reseñado, remitimos al lector a aquel, en cuanto a presentación de los mismos.

El libro es fruto de la experiencia de varios cursos sobre Maple y de muchas clases de Matemáticas usando Maple. Consta de tres partes.

La primera parte se dedica a introducir el sistema Maple, dando una visión general del mismo, que incluye el tratamiento de datos y expresiones, sintaxis de operaciones e iniciación a la programación.

La segunda parte está dedicada a Maple en la Enseñanza Media y consta de tres capítulos titulados Cálculo y Álgebra, Estadística y Combinatoria, y Geometría analítica plana. En ella se muestra como pueden ser aprovechados los correspondientes paquetes de Maple en cálculos relativos a los temas indicados.

La tercera y última parte, dedicada a Maple en la Enseñanza Superior, consta de cinco capítulos, de títulos sugestivos: Estructuras básicas (enteros, criptografía y recurrencia), Resolución de ecuaciones (aproximada, exacta y de sistemas), Estructuras diferenciales (operadores y ecuaciones), Gráficos avanzados (en el plano y en el espacio) y Tablas de funciones.

El libro contiene una larga lista de problemas de matemáticas desde un nivel de enseñanza media hasta primeros cursos de facultades de ciencias e ingenierías, que se resuelven con Maple en su inmensa mayoría construyendo programas «ad hoc».

El objetivo esencial del libro es enseñar a utilizar Maple como una herramienta poderosa en los estudios de Matemática a nivel medio y superior, por lo que es útil tanto a profesores de bachillerato como de universidad.

Por todo ello, el libro puede ser provechoso tanto para principiantes en Maple, como para usuarios habituales del sistema, ya que los autores muestran un profundo conocimiento de Maple. Pese a su aparentemente reducido volumen, su contenido es exhaustivo en muchos temas.

También incluye un disquete conteniendo los programas y los scripts de las sesiones, que ahorra al usuario muchas horas de trabajo mecanográfico.

**E. Roanes L.**

F. RINCÓN; A. GARCÍA; A. MARTÍNEZ: *Cálculo científico con Maple*, Ra-Ma, 1995, 287 págs y un disquete con programas.

Los autores son profesores del Departamento de Matemáticas de la Escuela Universitaria de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid, donde vienen desarrollando aplicaciones de los sistemas de cálculo científico a la docencia y a la técnica desde 1989.

Este libro es una introducción a Maple que no se limite a una mera descripción de sus capacidades y comandos. Partiendo de la premisa de que profundizar en el conocimiento del sistema permite optimizar su uso, pretende ir más allá, mostrando no sólo lo que Maple es capaz de hacer, sino cómo y por qué lo hace, ayudando al lector a identificar los tipos de problemas susceptibles de ser abordados con un sistema de cálculo científico.

El libro está dirigido a estudiantes, profesores, ingenieros, científicos e investigadores interesados en conocer las ventajas que los sistemas de cálculo científico los pueden proporcionar en la resolución de sus problemas matemáticos.

La obra está organizada en catorce capítulos. El primero es una introducción al cálculo científico. Los capítulos 2 a 6 describen el uso interactivo de Maple. El 7 muestra las capacidades gráficas del sistema. Los capítulos 8 a 10 presentan las estructuras de

datos y la manipulación de expresiones. La programación del sistema está contenida en los capítulos 11 a 13. Finalmente, el capítulo 14 contiene algunas aplicaciones.

A lo largo del texto, las capacidades del sistema se presentan por medio de más de 140 ejemplos y se ponen en práctica con cerca de 200 ejercicios. Unos y otros están realizados con el propio Maple, y abarcan desde el uso interactivo de los distintos comandos hasta el desarrollo de procedimientos que permiten implementar algoritmos matemáticos, pasando por la resolución de problemas clásicos.

Esta forma de incorporar las soluciones presenta la ventaja de la interactividad: el lector puede modificar los datos y obtener los nuevos resultados automáticamente.

Todos los ejercicios están detalladamente resueltos en el disquete que acompaña al libro, que puede utilizarse con las versiones de Maple tanto para Windows como para Macintosh.

#### E. Roanes L.

FAURING, GUTIERREZ, VAVILOV, PEDRAZA, SEVESO, WYKOWSKI, WERNER, RUSSO Y BRAGBINI: *Red Olímpica 1995. Olimpiada Matemática Argentina*. Olimpiadas Matemáticas Rusas. Problemas selectos. Colección Atenea. ISBN 987-9072-09-X. Editado por Red Olímpica. Santa Fé, 1548, 9.º (1060) Buenos Aires. Argentina.

Uno de los autores de este libro, Valeri Vavilov, fue durante diez años coordinador de las Olimpiadas Matemáticas de la Unión Soviética y en 1991, propuso a los restantes autores, profesores de Matemáticas que integraban el Comité Selector de Problemas de la Olimpiada Matemática Argentina, la publicación de una selección de los problemas de las Olimpiadas Soviéticas, traducidos al castellano y acompañados de sus soluciones.

La idea inicial fue la de dar a conocer varias colecciones, clasificadas por temas, comenzando por la de los problemas de Matemática Discreta, de los que el profesor Vavilov seleccionó los 58 que se presentan en este libro.

Los autores argentinos pudieron comprobar enseguida que los enunciados seleccionados por Vavilov eran 58 auténticas joyas, por su originalidad, belleza y aparente simplicidad, y se esmeraron en hacer una exposición clara y detallada de sus soluciones, adecuadas tanto para los estudiantes como para sus profesores.

Desgraciadamente, la colaboración entre Vavilov y el magnífico equipo de matemáticos argentinos, se interrumpió a partir de 1993, por lo que tenemos que lamentar que no nos haya podido proporcionar otras selecciones análogas, como por ejemplo, una sobre geometría elemental.

A primera vista, el número de problemas seleccionados podrá parecer corto, pero enseguida se comprueba que entre ellos no hay ni uno que pueda considerarse «de relleno»; todos son modelos de lo que la larga tradición ha definido como «problemas de Olimpiada»: de enunciado fácil de comprender, planteando cuestiones interesantes, difíciles a veces de resolver, pero que nunca requieren conocimientos avanzados o muy

específicos de Matemáticas y cuya solución aparece como brillante y muy gratificante para el que logra llegar a ella.

Como muestra de los brillantes enunciados de la colección, damos tres, escogidos casi al azar:

- Un turista llegado a la ciudad por ferrocarril, estuvo paseando por las calles. Después de un descanso en una cafetería situada en una esquina, decidió regresar a la estación de ferrocarril andando solamente por las cuerdas por donde había pasado un número impar de veces. Demuestre que siempre puede hacerlo.
- En el centro de un campo cuadrado se encuentra un lobo, y en cada esquina del cuadrado hay un perro. El lobo puede correr por todo el campo, y los perros sólo pueden hacerlo por los bordes. Se sabe que el lobo domina a un perro y que dos perros dominan al lobo. La velocidad máxima de cada perro es 1,5 veces la velocidad máxima del lobo. Demuestre que los perros tienen la posibilidad de no dejar salir al lobo del campo.
- Se dan 50 segmentos en una recta. Demuestre que al menos una de las afirmaciones siguientes es verdadera: a) Ocho segmentos tienen un punto común. b) Se pueden encontrar ocho segmentos, tales que no hay dos de ellos que tengan un punto común.

#### J.F.B.

DMITRY FOMIN, Alexey Kirichenko: *Leningrad Mathematical Olympiads, 1987-1991*. ISBN 0-9626401-4-X. 202 pgs. MathPro Press, 1994. (P.O.Box 713, Westford, MA 01886-0021, U.S.A.)

La editorial MathPro Press es de creación relativamente reciente, está dirigida por el afamado problemista Stanley Rabinowitz y su producción hasta ahora «sólo» consta de tres títulos, pero uno de ellos es el primer volumen del ambicioso proyecto *Index to Mathematical Problems, 1980-1984*, publicado en 1992, y cuya utilidad está fuera de toda duda.

El libro objeto del presente comentario contiene los problemas propuestos entre 1987 y 1991 en una de las Olimpiadas locales más prestigiosas de Rusia: la de Leningrado, hoy San Petesburgo. Los ganadores de la Olimpiada de San Petesburgo compiten directamente en la última de las 5 rondas del sistema de Olimpiadas ruso, es decir, al mismo nivel que los de Moscú y de cualquiera de las antiguas repúblicas de la Unión Soviética (hoy de la Federación Rusia). En la que fue última Olimpiada de la Unión Soviética, celebrada en Smolensk en 1991, de los seis estudiantes seleccionados para representar a su país en la Olimpiada Internacional, 3 eran Leningradskii, de la Escuela número 1.

El matemático mundialmente conocido Yuri Matiyasevich (que resolvió el décimo problema de Hilbert a los 22 años) fue en su adolescencia uno de los ganadores de la Olimpiada de Leningrado.

La estructura de la Olimpiada de San Petesburgo consta de 4 rondas: la primera, en cada escuela, tiene lugar en diciembre y enero; la segunda, regional (San Petersburgo está dividida en 22 regiones), tiene alrededor de 12.000 participantes y se celebra en febrero. La tercera, de toda la ciudad, es entre febrero y marzo y en ella participan 130 estudiantes de cada uno de los 6 últimos cursos (grados) del sistema escolar preuniversitario ruso, que va del 1 al 11. Esta prueba es oral. La ronda final tiene lugar en marzo y participan en ella alrededor de 100 alumnos de los tres últimos grados. Es oral y dura 5 horas.

En estos exámenes, cada participante recibe una lista escrita de 6 problemas, que no tiene que resolver por escrito: puede dar su solución oralmente a un miembro de Jurado, y debe estar preparado para contestar a todas las preguntas que éste le haga. Habitualmente hay entre 40 y 60 jurados, estudiantes, graduados y Profesores de la Universidad de San Petesburgo. Las calificaciones siguen la pauta habitual en los concursos rusos: (+) solución correcta; (-), solución incorrecta. Cada participante tiene tres oportunidades de resolver cada problema, y así sus resultados posibles son +, -, +, --+, --- en cada problema. Los jurados suelen trabajar en grupos de 2. Si, por ejemplo, por parte de un jurado se descubre un signo + asignado erróneamente por un colega, el estudiante afectado es informado de ello y tiene la oportunidad de intentar defender o mejorar su solución antes de que termine la Olimpiada. Casi todos los problemas propuestos son originales, creados expresamente para la competición.

La Olimpiada de Leningrado se fundó en 1934; es la competición más antigua de Rusia, ya que la de Moscú comenzó un año después, en 1935.

Los autores del libro son dos jóvenes matemáticos de la Universidad Estatal de San Petersburgo, especializados en cursos con estudiantes altamente capacitados para las matemáticas.

Algunos ejemplos de los problemas contenidos en el libro son los siguientes:

- (1987, grado 8) La guardia del shah busca al ladrón de Bagdad, que ha robado en palacio. El palacio consta de 1000 habitaciones, conectadas entre sí de tal manera que existe un único camino de cada habitación a otra (en término de grafos, el plano del palacio es un árbol). Probar que: a) 10 guardias pueden detener al ladrón de Bagdad si el plano del palacio es conocido. b) Puede ocurrir que 5 guardias no puedan detenerlo. c) 6 guardias pueden detenerlo, si se conoce el plano del palacio. (Autor, Fiodor Nazarov)
- (1990, grado 10) Un polinomio  $F(x)$  con coeficientes enteros es tal que  $F(2)$  es divisible por 5 y  $F(5)$  es divisible por 2. Demostrar que  $F(7)$  es divisible por 10. (Autor, Sergey Genkin)

**Francisco Bellot Rosado**

## Problemas propuestos

### Problemas propuestos en la X OLIMPIADA IBERO-AMERICANA DE MATEMATICAS celebrada en Chile en septiembre de 1995

#### Problema 1.º:

Determine los posibles valores de las sumas de los dígitos de todos los cuadrados perfectos.

#### Problema 2.º:

Sea  $n$  un número entero mayor que 1. Determine los números reales  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$ , y  $x_{n+1} > 0$  que verifiquen las dos condiciones siguientes:

$$(a) \quad \sqrt{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \dots + \sqrt[n]{x_n} = n \cdot \sqrt{x_{n+1}}$$

$$(b) \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = x_{n+1}$$

#### Problema 3.º:

Sean  $r$  y  $s$  dos rectas ortogonales y que no están en el mismo plano. Sea  $AB$  su perpendicular común, donde  $A$  pertenece a  $r$  y  $B$  a  $s$  (\*).

Se considera la esfera de diámetro  $AB$ .

Los puntos  $M$ , de la recta  $r$ , y  $N$ , de la recta  $s$ , son variables, con la condición de que  $MN$  sea tangente a la esfera en un punto  $T$ .

Determine el lugar geométrico de  $T$ .

Nota (\*): el plano que contiene a  $B$  y  $r$  es perpendicular a  $s$ .

#### Problema 4.º:

En un tablero de  $m \times m$  casillas se colocan fichas. Cada ficha colocada en el tablero «domina» todas las casillas de la fila ( $\leftrightarrow$ ), la columna ( $\updownarrow$ ) y la diagonal ( $\nearrow$ ) a la que pertenece (\*). Determine el menor número de fichas que deben colocarse para que queden «dominadas» todas las casillas del tablero.

Nota (\*): observe que la ficha no «domina» la diagonal ( $\swarrow$ ).

**Problema 5.º:**

La circunferencia inscrita en el triángulo  $ABC$  es tangente a  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  en  $D$ ,  $E$  y  $F$ , respectivamente. Suponga que dicha circunferencia corta de nuevo a  $AD$  en su punto medio  $X$ , es decir,  $AX = XD$ . Las rectas  $XB$  y  $XC$  cortan de nuevo a la circunferencia inscrita en  $Y$  y en  $Z$ , respectivamente. Demuestre que  $EY = FZ$ .

**Problema 6.º:**

Una función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es **circular** si para cada  $p$  en  $\mathbb{N}$  existe  $n$  en  $\mathbb{N}$  con  $n \leq p$  tal que

$$f^n(p) = \underbrace{f(f(\dots f(p)))}_{n \text{ veces}} = p$$

La función  $f$  tiene **grado de repulsión**  $k$ ,  $0 < k < 1$ , si para cada  $p$  en  $\mathbb{N}$ ,  $f^i(p) \neq p$  para todo  $i \leq [k.p]$ . (\*)

Determine el mayor grado de repulsión que puede tener una función circular.

Nota (\*):  $[x]$  indica el mayor entero menor o igual que  $x$ .

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

**Problemas propuestos en la PRIMERA FASE de la  
XXXII OLIMPIADA MATE MÁTICA ESPAÑOLA  
en la mayor parte de los distritos, en diciembre de 1995**

**Problema 7.º:**

La asociación «Amigos de las Matemáticas» invita, todos los años, a sus afiliados a su congreso anual. Este año, exactamente el 27,181818...% de los asistentes eran mujeres; exactamante el 55,5555...% eran personas mayores de 30 años, y el 37% llevaba algún libro de Matemáticas.

Sabiendo que el número de afiliados no es mayor que 15.000, ¿podrías calcular el número de asistentes al congreso?

**Problema 8.º:**

En el triángulo  $ABC$ , rectángulo en  $A$ , se traza la altura  $AD$  ( $D$  pertenece a  $BC$ ). Sean  $M$  (sobre  $AB$ ) y  $N$  (sobre  $AC$ ) los pies de las bisectrices interiores de los ángulos  $C$  y  $B$ , respectivamente. Sea  $P$  el punto de intersección de  $AD$  y  $MN$ . Demostrar que  $AP = r$ , el radio de la circunferencia inscrita en  $ABC$ .

**Problema 9.º:**

Dos jugadores juegan en un tablero infinito de casillas  $1 \times 1$ . El jugador A elige una casilla y pone en ella un 0. A continuación, el jugador B elige otra casilla y pone en ella una  $x$ . Juegan así, hasta que uno de los jugadores llena una fila o una columna de 5 casillas consecutivas, en cuyo caso gana el juego. Si ningún jugador puede hacer ésto, hay empate.

Demostrar que el jugador B puede impedir que el jugador A gane el juego.

**Problema 10.º:**

Sean  $a \in (0, \pi/2)$ ,  $b \in (0, \pi/2)$  y  $c \in (0, \pi/2)$ , las raíces de las ecuaciones

$$\cos x = x; \quad \text{sen}(\cos x) = x; \quad \cos(\text{sen } x) = x$$

respectivamente. Ordenar de menor a mayor los tres números  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , justificando la respuesta.

**Problema 11.º:**

Encontrar dos números enteros,  $k$  y  $n$ , tales que

$$0 < \frac{15}{17} - \frac{k}{2^n} < \frac{1}{1995}$$

¿Cual es el mínimo valor de  $n$  para el que existe  $k$  con esa propiedad?

**Problema 12.º:**

Se da un cono de revolución cuyo ángulo en el vértice es de  $60^\circ$ . En este cono se van introduciendo esferas, de forma que la primera quede tangente al cono; la segunda tangente al cono y a la primera esfera; la tercera, tangente al cono y a la segunda esfera; y así sucesivamente. El radio de la primera esfera es  $r_1$ . Se pide:

- El radio de la esfera introducida en  $n$ -ésimo lugar.
- El volumen comprendido entre el cono y las esferas introducidas en los lugares  $n$ -ésimo y  $n$ -ésimo más uno.

**Problema 13.º:**

Un torneo de tenis se juega por la modalidad de eliminatorias sucesivas: los participantes se emparejan aleatoriamente y los vencedores de los encuentros pasan a la siguiente eliminatoria (si el número de jugadores es impar, uno de ellos pasa directamente a la siguiente elimina-

toria). Este mecanismo se repite tantas veces como sea necesario hasta llegar a la final, en la que se enfrentan los dos únicos participantes restantes, resultando un único vencedor.

¿Cuántos partidos se jugarán en total en el torneo?

Si se supone que todos los jugadores son igualmente hábiles, y, por lo tanto, cualquiera de los participantes en un encuentro tiene la misma probabilidad de ganar. ¿Cuál es la probabilidad de que dos jugadores en particular, A y B, inscritos, se enfrenten en algún partido?

#### Problema 14.º:

Sea A un conjunto de 8 elementos. Hallar el máximo número de subconjuntos de A, de tres elementos cada uno, tales que la intersección de dos cualesquiera de esos subconjuntos NO es un conjunto de 2 elementos.

### Problemas propuestos por nuestros socios

#### Problema 15.º:

Utilizando el teorema de la media aritmética-geométrica y el hecho de que entre dos enteros positivos cualesquiera existe sólo un número finito de enteros, probar que la ecuación diofántica

$$y^3 = x(x+2)(x+4)$$

no tiene soluciones en enteros, x, y, mayores ambos que 1.

(Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez)

#### Problema 16.º:

Sean  $0 < a \leq b$  y  $\lambda \geq 0$  números reales y  $n \geq 2$  un número natural. Probar que:

$$\sqrt[n]{ab} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + \lambda[(a+b)^n - a^n - b^n]}{2 + \lambda(2^n - 2)}} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$

(Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez)

## Problemas resueltos

#### PROBLEMA 7 (BOLETIN N.º 39)

Sean a, b, c tres números reales distintos y P(x) un polinomio con coeficientes reales. Si se sabe que

- 1) P(x) da resto a cuando se divide por x - a;
- 2) P(x) da resto b cuando se divide por x - b;
- 3) P(x) da resto c cuando se divide por x - c;

encontrar el resto de la división de P(x) por (x-a)(x-b)(x-c).

#### Solución:

Los restos de dividir P(x) por x - a, x - b, x - c son respectivamente P(a) = a, P(b) = b, P(c) = c. Luego el polinomio Q(x) = P(x) - x tiene a, b, c como raíces. O sea:

$$P(x) - x = (x - a)(x - b)(x - c) \cdot C(x).$$

Será

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \cdot C(x) + x.$$

Luego

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = C(x) + \frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Por lo tanto, el resto de la división es x.

Ramón Fraile Peláez Pamplona

#### PROBLEMA 8 (BOLETIN N.º 39)

Demostrar que si  $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ , entonces  $x + y = 0$ .

**Solución:**

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{y - \sqrt{y^2 + 1}}{-1} =$$

$$= \sqrt{y^2 + 1} - y \Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{(y + x)(y - x)}{\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

Si fuese  $x + y \neq 0$ , quedaría,

$$1 = \frac{y - x}{\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow y - x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = y - \sqrt{y^2 + 1}$$

lo que es absurdo, pues el primer miembro es positivo y el segundo negativo. Así que ha de ser  $x + y = 0$ .

**Ramón Fraile Peláez (Pamplona)**

**PROBLEMA 9 (BOLETIN N.º 39)**

Los cuadrados de los lados de un triángulo ABC son proporcionales a los números 1, 2 y 3.

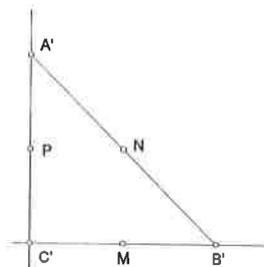
- Demostrar que los ángulos formados por las medianas son iguales a los del triángulo ABC.
- Demostrar que el triángulo cuyos lados tienen por longitudes las medianas de ABC es semejante al triángulo ABC.

**Solución:**

El triángulo ABC es semejante al de lados  $1, \sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$ . Refiriéndonos a este último, y aplicando el teorema del coseno, queda

$$3 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} \cos C \Rightarrow \cos C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

O sea, el triángulo es rectángulo. Sus ángulos agudos quedan determinados por las igualdades  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .



Coloquemos ahora el triángulo de lados  $1, \sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$  sobre los ejes de coordenadas, de modo que sus vértices sean  $C' = (0,0)$ ,  $B' = (1,0)$ ,  $A' = (0,\sqrt{2})$ . Los puntos medios de sus lados son

$$M = \left(\frac{1}{2}, 0\right), N = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Las ecuaciones de las medianas son:

$$A'M: \frac{x-0}{\frac{1}{2}} = \frac{y-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}x + y - \sqrt{2} = 0. C'N: \sqrt{2}x - y = 0. B'P: x + \sqrt{2}y - 1 = 0$$

Los ángulos que forman vienen dados por

$$\cos(\widehat{C'N, B'P}) = \frac{|\sqrt{2} \cdot 1 + (-1) \cdot \sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}} = 0 \Rightarrow \widehat{C'N, B'P} = \frac{\pi}{2} = C$$

$$\cos(\widehat{C'N, A'M}) = \frac{|\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{C'N, A'M} = B$$

$$\cos(\widehat{B'P, A'M}) = \frac{|1 \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{B'P, A'M} = A$$

Así que las medianas se cortan según los mismos ángulos que los del triángulo ABC.

Midamos ahora los lados del triángulo formado por las medianas (las del triángulo ABC, semejante al ABC):

$$|A'M| = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{2} - 0)^2} = \frac{3}{2},$$

$$|B'P| = \sqrt{(1 - 0)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$|C'N| = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Y como los cocientes  $\frac{3/2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{6}/2}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}/2}{1}$ , son todos iguales a  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , el triángulo que tiene por lados las medianas de  $\triangle A'B'C'$  es semejante a  $\triangle A'B'C'$  y, por lo tanto, a  $\triangle ABC$ . Así, pues, el triángulo que tiene por lados las medianas de  $\triangle ABC$  es semejante a  $\triangle ABC$ .

Ramón Fraile Peláez (Pamplona)

### PROBLEMA 10 (BOLETIN N.º 39)

Determinar el menor número natural  $m$  tal que, para todo número natural  $n \geq m$ , se verifique  $n = 5a + 11b$ , siendo  $a$  y  $b$  enteros mayores o iguales que 0.

#### Solución:

Si es  $n = 5a + 11b$ ,  $a, b \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , todos los números  $n + n' \in \mathbb{N}$  han de ser tales que al descomponerlos en la forma  $n + n' = 5[a + f(n')] + 11[(b + g(n'))]$ , los factores que multiplican a 5 y 11 tienen que ser números enteros mayores o iguales que cero, donde  $n' = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Esta descomposición puede hacerse de varias maneras, por ejemplo:

$$n + n' = 5(a - 2n') + 11(b + n'), \quad (1)$$

$$n + n' = 5(a + 11 - 2n') + 11(b + n' - 5), \quad (2)$$

$$n + n' = 5(a + 22 - 2n') + 11(b + n' - 10), \quad (3)$$

etcétera. El sumando que contiene a  $b$  es cíclico, y los ciclos corresponden a  $0 \leq n' \leq 4$ ,  $5 \leq n' \leq 9$ , etc. He aquí las dos primeras secuencias. Para la primera empleamos la expresión (1), para la segunda la (2), para la tercera utilizaríamos la (3), ..., pues de este modo se ve en seguida el ciclo del segundo sumando:

$n'$	$n + n' = 5(a - 2n') + 11(b + n')$	$n'$	$n + n' = 5(a + 11 - 2n') + 11(b + n' - 5)$
0	$5a + 11b$	5	$5(a + 1) + 11b$
1	$5(a - 2) + 11(b + 1)$	6	$5(a - 1) + 11(b + 1)$
2	$5(a - 4) + 11(b + 2)$	7	$5(a - 3) + 11(b + 2)$
3	$5(a - 6) + 11(b + 3)$	8	$5(a - 5) + 11(b + 3)$
4	$5(a - 8) + 11(b + 4)$	9	$5(a - 7) + 11(b + 4)$

Si nos fijamos en la expresión correspondiente a  $n' = 4$ , y la comparamos con las restantes de todas las secuencias, se observa que las condiciones del enunciado del pro-

blema se cumplen si y sólo si  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a - 8 \geq 0$ ,  $b \geq 0$ . Por lo tanto, el menor número  $m$  con tales condiciones será

$$m = \inf \{5a - 11b / a \geq 8, b \geq 0\} = 40.$$

Nótese además que si hubiéramos descompuesto  $5a + 11b + n'$  restando unidades a  $b$ , es decir,  $n + n' = 5(a + n_1) + 11(b - n_2)$ , obtendríamos un ínfimo mayor de 40.

Ramón Fraile Peláez (Pamplona)

### PROBLEMA 1 (BOLETIN N.º 40)

Se consideran conjuntos  $A$  de 100 números naturales distintos, que tengan la propiedad de que si  $a, b, c$  son elementos cualesquiera (iguales o distintos) de  $A$ , existe un triángulo no obtusángulo cuyos lados miden  $a, b$  y  $c$  unidades. Se denomina  $S(A)$  a la suma de los perímetros de los triángulos considerados en la definición de  $A$ . Calcula el valor mínimo de  $S(A)$ .

#### Solución:

En un triángulo de lados  $a, b$  y  $c$  los cosenos de sus ángulos vienen dados por las fracciones

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Si el triángulo no es obtusángulo, estas cantidades deben ser positivas; es decir:

$$c^2 \leq a^2 + b^2, a^2 \leq b^2 + c^2 \text{ y } b^2 \leq a^2 + c^2,$$

o sea, que ningún  $m \in A$  elevado al cuadrado puede superar a la suma de los cuadrados de otros números cualesquiera de  $A$ . Esta condición caracteriza a los conjuntos  $A$ .

Si en un conjunto  $A$  ordenamos sus elementos, quedará  $A = \{n, \dots, n + k\}$ , donde  $k$  será mayor o igual a 99. Si se cumple  $n^2 + n^2 \geq (n + k)^2$ , es evidente que también se cumplirán todas las demás desigualdades. Pero esta última equivale a  $n^2 - 2kn - k^2 \geq 0$ , donde el polinomio  $x^2 - 2kx - k^2$  es una parábola negativa para  $x = 1$ , y que sólo empieza a ser positiva para la segunda raíz de  $n^2 - 2kn - k^2 = 0$ , ó sea,

$$n = \frac{2k + \sqrt{4k^2 + 4k^2}}{2} = k(1 + \sqrt{2})$$

También es obvio que  $S(A)$  se hará más pequeña cuanto menor sea  $n$ , y cuando los elementos sean números consecutivos. Así que como  $n = (1 + \sqrt{2}) \geq 99(1 + \sqrt{2}) = 239, \dots$  el valor mínimo de  $S(A)$  vendrá dado para  $n = 240$  y  $k = 99$ .

Es decir, el conjunto buscado es  $A_1 = \{240, 241, \dots, 339\}$ .

Ahora se trata de calcular  $S(A_1)$ . Para ello observemos:

- i) En los triángulos equiláteros se repiten 3 veces los sumandos 240, ..., 339.
- ii) En los triángulos de lados distintos hay un total de  $C_{100,3} = 161700$  posibles elecciones. Por tanto, un total de  $3 \times 161700 = 485100$  sumandos, y lógicamente cada uno de ellos aparece el mismo número de veces, ó sea,  $\frac{485100}{100} = 4851$ .
- iii) En los triángulos isósceles hay un total de  $V_{100,2} = 9900$  posibles elecciones. Por tanto, un total de  $3 \times 9900 = 29700$  sumandos, todos ellos apareciendo el mismo número de veces, o sea,  $\frac{29700}{100} = 297$ .

Por lo tanto,

$$S(A_1) = 3 \times (240 + \dots + 339) + 4851 \times (240 + \dots + 339) + 297 \times (240 + \dots + 339) = 149121450.$$

**Ramón Fraile Peláez (Pamplona)**

#### PROBLEMA 4 (BOLETIN N.º 40)

Halla las soluciones enteras de la ecuación  $p(x + y) = xy$ , siendo  $p$  un número primo.

##### Solución

La ecuación equivale a  $x = \frac{py}{y-p} \in \mathbb{Z}$ . Hay tres opciones para que  $x$  sea un número entero:

$$i) \quad y - p \text{ es divisor de } p \Rightarrow \begin{cases} y - p = \pm 1 \\ y - p = \pm p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = p \pm 1 \Rightarrow x = \pm p^2 + p \\ y = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2p \Rightarrow x = 2p \end{cases} \end{cases}$$

Así que en este caso las soluciones son

$$(x,y) = (p^2 + p, p + 1), (x,y) = (-p^2 + p, p - 1), (x,y) = (0,0) \text{ y } (x,y) = (2p, 2p).$$

$$ii) \quad y - p \text{ es divisor de } p \Rightarrow y = n(y - p), n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \frac{np}{n-1}. \text{ Pero } \frac{np}{n-1}$$

sólo es entero si  $n = 0 \Rightarrow (x = 0, y = 0)$ , ó bien  $n = 2$ , con lo cual  $y = p$ ,  $x$  sin solución. Por lo tanto, como  $p$  es primo, sólo quedaría

$$\begin{cases} n - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 2 \end{cases}, \text{ visto anteriormente.} \\ n - 1 = \pm p \Rightarrow n = \pm p + 1 \Rightarrow y = p \pm 1 \Rightarrow x = \pm p^2 + p. \end{cases}$$

Así que las soluciones se repiten.

iii)  $y - p$  divide al producto  $yp$  sin dividir a ningún factor.

$$\text{Será } \begin{cases} y - p = np \\ y = nk \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}, n \geq 2.$$

De aquí,

$$nK = p(n + 1) \Leftrightarrow k = \frac{(n + 1)p}{n}$$

Así que  $n = \pm p \Rightarrow y = \pm p^2 + p, x = k = p \pm 1$ . Tenemos, pues, las soluciones simétricas  $(x,y) = (p + 1, p^2 + p)$  y  $(x,y) = (p - 1, -p^2 + p)$ , pues la ecuación es simétrica respecto de las incógnitas.

**Ramón Fraile Peláez (Pamplona)**

## Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.º	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										
		1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	
1	Varios	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	—	—	—	—	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	—	—	—	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	—	—	—	—	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	—	—	—	—	C
6	Varios	7	7	16	—	—	—	—	—	—	—	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	—	—	—	—	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	—	—	—	—	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	—	C
11	OME-f1-86/ OMI-86-Varsovia	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	26	20	12	21	—	—	—	—	—	—	C
13	OME-f2-87	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
14	Varios	20	21	21	21	21	21	—	—	—	—	C
15	OMI-87-Cuba	15	15	15	15	—	—	—	—	—	—	C
16	OME-f1-87	18	18	18	21	21	21	—	—	—	—	C
17	OME-f2-88	22	22	21	18	22	22	22	22	—	—	C
18	OI-88-Perú	25	23	23	23	23	23	—	—	—	—	C
19	OMI-88-Australia	23	23	23	23	25	25	—	—	—	—	C
20	OME-f1-88/Putnam	23	26	24	24	23	26	—	—	—	—	C
21	OME-f2-89/ OI-89-Cuba	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
22	OME-f2-89/ OMI-89-R.F.A./ Oposiciones	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
23	Oposiciones	26	27	—	—	—	—	—	—	—	—	C
24	OME-f1-90	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	C
25	OME-f2/f1-90	31	30	29	—	—	—	—	—	—	—	C
26	OMI-90-China/ OI-90-Valladolid	27	27	28	28	29	31	31	30	—	—	C
27	OME-f1-91	30	31	31	30	31	30	30	31	—	—	C
28	OME-f2-91	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
29	OME-f2-91	32	XX	XX	32	XX	XX	XX	32	XX	34	C
30	OME-f1-91	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	—	C
31	OME-f2-92/ OME-f1-91/PNS	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	—	—	C
32	OME-f2-92/ OMI-92-Moscu/ OI-92-Venez./PNS	32	32	XX	XX	33	33	—	—	—	—	C
33	OME-f1-92/f1-92(v) /PNS	38	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	C
34	OME-f2-93	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	33	33	33	C
35	OMI-93-Turq./ OI-93-Méjico/PNS	33	34	34	34	—	—	—	—	—	—	C
36	OME-f1-93/f1-93(v)	36	XX	36	36	36	XX	XX	XX	XX	35	C
37	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	35	34	—	—	—	—	—	C
38	OMI-94-Hong-Kong	35	XX	XX	XX	XX	XX	38	35	XX	38	C
39	OI-94-Brasil/OME- f1-94/f1-94(v)	38	38	38	38	—	—	—	—	—	—	C
40	OME-f2-95-	XX	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	C
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 o 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. PNS = Propuestos por nuestros socios.

## INSTRUCCIONES PARA EL ENVIO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACION EN EL BOLETIN

Por haber sido cambiado el modo de impresión del Boletín a partir del número 39, nos vemos obligados a cambiar las normas de presentación de originales, que deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo siguiente:

### Copias en papel (por duplicado)

Escritas con un procesador de texto en hojas DIN A-4.

Los artículos comenzarán con el título, nombre de autores y referencia de su departamento o institución e incluirán un breve resumen en inglés.

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: «Problema número (Boletín número)», tal como suelen aparecer en el boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

### Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3. x o superior), conteniendo dos archivos:

- archivo del documento para el procesador de texto utilizado
- archivo del documento en código ASCII.

Este último es el que más probablemente utilizará la imprenta.

Si se desea, las figuras pueden incluirse en archivos de extensión TIF (en otro caso se captarán por escaneado)

### Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

### RELACION DE OTROS ARTICULOS QUE HAN SIDO ADMITIDOS PARA SER PUBLICADOS EN PROXIMOS NUMEROS DE ESTE BOLETIN

- La historia de la Matemática como recurso didáctico (continuación), por *Mariano Martínez Pérez*.
- Implementación de un paquete de dibujo de grupos cristalográficos planos, por *Martín Garbayo Moreno y Eugenio Roanes Lozano*.
- The Construction of Symmetrical Patterns via iterated transformation, por *H. Schupp*.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

*(señalar con una X los que interesen)*

3	4	10	31	32	33	34
<input type="checkbox"/>						
35	36	37	38	39	40	41
<input type="checkbox"/>						

Envío adjuntos sellos para el franqueo.

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5 al 9, y 11 al 30 y 36 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

**Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas**  
**Facultad de Educación (despacho 3517)**  
**Paseo Juan XXIII, s/n**  
**Ciudad Universitaria**  
**28040 Madrid**