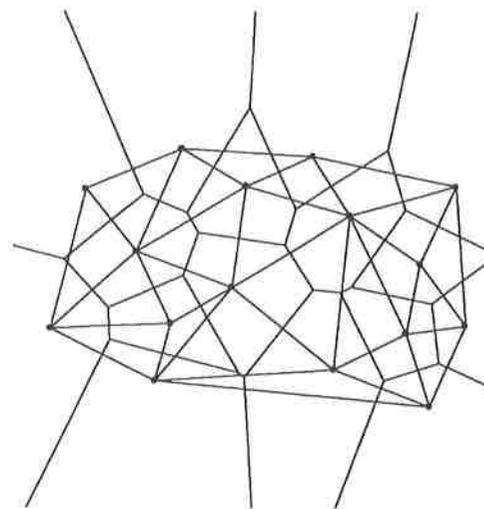


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMATICAS**



**BOLETIN N.º 41
OCTUBRE DE 1995**

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de E. Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L. - San Pedro, 23 bis - 28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: 611 59 94 - Fax: 611 59 88.

La portada de este número reproduce una de las figuras del artículo titulado «Geometría computacional: La Geometría contra-reloj», contenido en este boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid.

ÍNDICE

	<u>Págs.</u>
XIII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas	5
XXXVI Olimpiada Internacional de Matemáticas - Canadá 1995	9
Geometría Computacional: La Geometría contra-reloj por <i>Manuel Abellanas</i>	11
Harmonics and periodic functions: a computer-aided path to introduce Fourier analysis por <i>María Teresa Galiza y María Mascarelo</i>	33
Sombras cónicas por <i>José Miguel Celorrio Laseca</i>	50
Parchís de operaciones. por <i>A. Teresa Castañeda Escudero y Miguel Ángel Sanz Poyo</i>	57
Imagen mental de los estudiantes de Bachillerato sobre el concepto de función, por <i>María Dolores de Prada Vicente</i>	59
La Inteligencia Artificial en los Juegos por <i>José Ignacio Giráldez y Miguel Ángel Gallardo</i>	77
Reseñas de libros	83
Breve reseña de Congresos	85
Problemas propuestos	87
Problemas resueltos	89
Índice de soluciones publicadas	92
Instrucciones para el envío de originales para su publicación en este boletín ...	93
Relación de otros artículos que han sido admitidos para ser publicados en próximos números de este boletín	93

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS (Madrid)

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ (Castilla-León)

SALVADOR HERRERO PALLARDO (Castilla-La Mancha)

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)

JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE (Relaciones institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)

MARTÍN GARBAYO MORENO (Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:

MIGUEL ANGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecaria:

CARMEN GARCÍA-MIGUEL FERNÁNDEZ

XIII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

El XIII Concurso de Resolución de Problemas, convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, se celebró, como estaba anunciado, el sábado 24 de junio de 1995, en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, que nos fueron amablemente cedidos para este acto.

Este año, el número de alumnos participantes ha sido próximo al centenar, repartido casi por igual entre los tres niveles. La mayoría de ellos cursaban BUP, aunque había algunos del bachillerato de la LOGSE. Es de destacar la participación de bastantes alumnos procedentes de otras comunidades autónomas distintas de la de Madrid.

A los alumnos de cada curso se les propusieron cuatro problemas, para resolverlos en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 10 puntos. Al final de esta crónica damos sus enunciados.

En la tarde del mismo día de las pruebas y en el salón de actos de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, se hizo la entrega de premios y diplomas a los cinco ganadores de cada curso. El acto estuvo muy concurrido y en él, el Presidente de nuestra Sociedad y el representante del Colegio de Doctores y Licenciados pronunciaron unas palabras de aliento para todos los participantes y de felicitación a los premiados y a los profesores que los prepararon. Agradecieron también la colaboración de la firma «Coca-Cola» de España, que, como en años anteriores, ha costeado los premios entregados a los ganadores.

Damos a continuación la lista de los alumnos premiados, con indicación de los Centros que los presentaron:

NIVEL I (PRIMER CURSO DE BUP):

- 1.º Iñaki ARMENDÁRIZ BENÍTEZ, del I.B. Avenida de los Toreros (Madrid).
- 2.º Borja GUARDIOLA DEL CORRAL, del Colegio El Prado (Madrid).
- 3.º Manuel CARRANZA GARCÍA, del Colegio Agustiniiano (Madrid).
- 4.º Francisco José MORENO MADRID, del I. B. María Moliner (Coslada).
- 5.º Alonso ENTERO GONZÁLEZ, del I. B. de Guadarrama.

NIVEL II
(SEGUNDO DE BUP):

- 1.º Nuria GASCÓN CRUZ, del I. B. María Moliner (Coslada).
- 2.º Carmen RAMIRO PÉREZ, del I. B. San Juan Bautista (Madrid).
- 3.º Iván ALVIR ALONSO, del Colegio San Viator (Madrid).
- 4.º Teodoro SEOANE AMADO, del Colegio El Prado (Madrid).
- 5.º Raúl GARCÍA MENA, del I. B. María Moliner (Coslada).

NIVEL III
(TERCERO DE BUP):

- 1.º Rut GONZÁLEZ LÓPEZ, del I. B. Nuñez de Arce (Valladolid) 1.º LOGSE
- 2.º Daniel SÁEZ DOMINGO, del I. B. Mixto (Utiel).
- 3.º Daniel PERALTA SALAS, del Colegio Agustiniiano (Madrid).
- 4.º Irene DONAIRE VILLA, del Colegio JOYFE (Madrid).
- 5.º Rebeca PALMA POLO, del I. B. La Serna (Fuenlabrada).

Señalaremos que Teodoro Seoane Amado, clasificado en cuarto lugar en el Segundo Nivel, quedó en segundo lugar como alumno de Primero en nuestro Concurso de 1994, y que Irene Donaire Villa, clasificada en cuarto lugar en el Tercer Nivel, fue la segunda de Segundo en 1994 y la tercera de Primero en 1993.

Los enunciados de los problemas propuestos fueron los siguientes:

Primer Nivel:

1. Se tiene un triángulo equilátero ABC . Desde un punto interior P se trazan PX perpendicular a BC , PY perpendicular a AC y PZ perpendicular a AB . Calcular

$$\frac{PX + PY + PZ}{BX + CY + AZ}$$

2. En una excavación arqueológica se ha extraído un bloque de mineral traslúcido, de forma cúbica y 30 centímetros de arista, que contiene en su interior 85 insectos fosilizados. Razonar que a partir de ese bloque puede obtenerse otro cubo, de 11 centímetros de arista, que contenga al menos cuatro de esos insectos.

3. Sabiendo que la suma de los cuadrados de los n números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, es igual al producto de b por la suma de dichos números y que la suma de los cubos de esos n números es igual a $8nb^3$, expresar

$$(a_1 - b)^3 + (a_2 - b)^3 + (a_3 - b)^3 + \dots + (a_n - b)^3$$

del modo más abreviado posible.

4. Se trata de encontrar un par de enteros positivos, a y b , que verifiquen:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{15}$$

Si no existen, razonarlo. Si existen, encontrar todos los posibles pares.

Segundo Nivel:

1. Denotemos por $s(A,B)$ a una semicircunferencia de extremos los puntos A y B . Siendo X un punto interior del segmento de extremos A y B , se consideran las tres semicircunferencias $s(A,B)$, $s(A,X)$ y $s(X,B)$ contenidas en un mismo semiplano respecto de la recta AB (esto es, las tres al mismo lado respecto de la recta AB). Rayar la figura acotada cuyo borde está formado por las tres semicircunferencias citadas y determinar su área en función de la longitud del segmento de extremos X e Y , siendo Y el punto de la semicircunferencia $s(A,B)$ tal que la recta XY sea perpendicular a la recta AB .
2. Sin extraer las raíces, ¿qué es mayor, $\sqrt{10} + \sqrt{8} + \sqrt{6}$ ó $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{24}$?
3. Estudiar si en la sucesión de término general

$$u_n = (3^{6n+3} + 1) / 7$$

existe algún número entero y si existe algún número primo.

4. Dado un triángulo isósceles, pero no rectángulo, que tenga un ángulo doble que el otro, se pide:
 - a) Determinar la medida del menor de sus ángulos.
 - b) Trazar una recta que descomponga el triángulo en otros dos triángulos, uno de los cuales tenga ángulos respectivamente iguales a los del triángulo inicial.

- c) Hallar la medida del lado mayor, m , del triángulo inicial, tomando como unidad el menor, u .

Tercer Nivel:

1. Un móvil se desplaza en el plano de modo que en cada instante, t , su abscisa y su ordenada pueden expresarse en la forma

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

Calcular $x^2 + y^2$, simplificando el resultado lo más posible, para tratar de explicar el tipo de trayectoria que describe el móvil.

2. Si a es un número real mayor que $1/8$, ¿Cuánto vale

$$\sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}} \sqrt{\frac{8a-1}{3}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}} \sqrt{\frac{8a-1}{3}} \quad ?$$

3. Sin derivar, razonar para qué valor de x se hace mayor la diferencia

$$+\sqrt{x^2+1} - |x|$$

4. Este problema pretende evaluar hasta qué punto el alumno está habituado a razonar a partir de hipótesis.

Dado un triángulo y su circunferencia circunscrita, C , se aceptan como conocidas las proposiciones:

- a) Las proyecciones ortogonales de todo punto de C sobre los lados del triángulo son puntos alineados.
 b) La recíproca de la anterior: para toda recta r que corte a los tres lados del triángulo, las perpendiculares a los lados trazadas por los puntos de encuentro son rectas concurrentes en un punto de C .

Utilizar a) y b) para resolver el siguiente problema: $r(1)$, $r(2)$, $r(3)$ y $r(4)$ son cuatro rectas coplanarias tales que cada una corta a las otras tres. Cada terna de ellas determina un triángulo y la correspondiente circunferencia circunscrita. Determinar que existe un punto del plano que pertenece a las cuatro circunferencias.

XXXVI Olimpiada Internacional de Matemáticas Canadá 1995

La XXXVI Olimpiada Internacional de Matemáticas se celebró en Canadá, en el mes de julio de 1995.

Las pruebas se realizaron los días 19 y 20. Se propusieron, como de costumbre, seis problemas, cuyos enunciados pueden verse en la sección de **Problemas Propuestos** de este Boletín. Se realizaron en dos sesiones, de cuatro horas y media cada una.

Cada problema fue calificado con una puntuación de 0 a 7, por lo que cada alumno podía obtener **un máximo de 42 puntos**. Las medallas de oro se otorgaron a partir de los 37 puntos, las de plata a partir de los 29 y las de bronce de 19 en adelante.

Los representantes españoles tuvieron una actuación discreta, algo mejor que la del año anterior, aunque por debajo de la brillante del año 1992, obteniendo una **medalla de bronce** y dos **menciones honoríficas**. Estos fueron sus resultados:

Angel PAREDES GALÁN , de Santiago de Compostela (1.º clasificado en la XXXI O.M.E.)	25 puntos	Bronce
Jerónimo ARENAS GARCÍA , de Sevilla (2.º clasificado en la XXXI O.M.E.)	12 puntos	M. H.
Luis FABIANI BENDICHO , de Zaragoza (3.º clasificado en la XXXI O.M.E.)	11 puntos	M. H.
Jaume ANDREU PASCUAL , de Baleares (4.º clasificado en la XXXI O.M.E.)	10 puntos	
Ignacio FERNÁNDEZ GALVÁN , de Extremadura (6.º clasificado en la XXXI O.M.E.)	9 puntos	
Alejandro GARCÍA GIL , de Madrid II (5.º clasificado en la XXXI O.M.E.)	5 puntos	

A la Olimpiada concurrieron 414 alumnos de 73 países, ya que algunos de éstos presentaron menos de los seis permitidos.

Debe destacarse la brillante actuación de los representantes de China, Hungría y Rumanía, tres de los cuales en cada uno de esos países, alcanzaron la máxima calificación de 42 puntos. Esa puntuación fue alcanzada tan sólo por 14 alumnos de los 414. Los países que obtuvieron puntuaciones totales mayores fueron China (236), Rumanía (230), Rusia (227) y Vietnam (220). España quedó con 72, ocupando el lugar n.º 50 de los 73 países participantes.

Los problemas 6.º y 2.º resultaron extremadamente difíciles para los alumnos. Para que se pueda jugar sobre la dificultad relativa de los problemas propuestos (ver nuestra

sección de Problemas Propuestos en este Boletín), damos a continuación las puntuaciones medias (recuérdese que la máxima es de 7 puntos) obtenidas en cada uno de ellos por los seis alumnos españoles y por los 414 presentados de todo el mundo.

Problema	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º
Media seis españoles:	4,7	0,0	1,0	4,8	1,3	0,0
Media 414 participantes:	5,0	1,7	3,1	4,6	3,4	1,0

Geometría Computacional: La Geometría contra-reloj

Manuel Abellanas

Universidad Politécnica de Madrid

1. Introducción

Como su propio nombre indica, la Geometría Computacional es una disciplina a caballo entre la Geometría y la Computación. Interesa en Geometría Computacional la solución constructiva de problemas geométricos. El gran auge de la Informática en los últimos tiempos ha permitido desarrollar notablemente aplicaciones en diversos campos como el tratamiento automático de gráficos, la robótica, la cartografía automática y un sinnúmero de campos técnicos y científicos en los que se presentan problemas geométricos. Es preciso resolver dichos problemas de forma constructiva. En las aplicaciones en general no tiene tanto interés la belleza de una demostración de existencia de solución como un buen método constructivo (algoritmo) que permita obtener, en los casos particulares que se presenten, soluciones precisas. Por otra parte, dado el gran volumen de información que se debe manejar en la solución de numerosos problemas prácticos, ni siquiera es suficiente encontrar un método constructivo. Es preciso encontrar un método eficiente.

Si queremos calcular cuál es el menor conjunto convexo que contiene a una nube S formada por n puntos del plano, existen diversas alternativas. Una vez observado que la solución será un polígono convexo cuyos vértices serán un subconjunto ordenado del conjunto de puntos dado, es fácil obtener una solución:

Elijamos cada uno de los subconjuntos no vacíos de S y comprobemos si definen un polígono convexo conteniendo en su interior al resto de los puntos de S .

Desde el punto de vista matemático, el método es correcto. Sabemos que por este camino encontraremos antes o después la solución. Dejando aparte la forma de resolver los dos subproblemas que este método genera (1. Averiguar si k puntos son los vértices de un polígono convexo. 2. Averiguar si los $n-k$ puntos restantes están en el interior de dicho polígono), un sencillo análisis combinatorio nos muestra que, en el peor caso, puede sucedernos que hasta realizar $2^n - 2$ comprobaciones no encontremos la solución buscada. Si somos extremadamente rápidos, pensemos que, por ejemplo, somos capaces de realizar todas las operaciones correspondientes a cada una de las comprobaciones en una milésima de segundo, para un conjunto con tan sólo 100 puntos necesitaríamos

4.10¹⁹ años para concluir nuestros cálculos. Queda pues claro que disponer de este método y no disponer de ninguno es lo mismo en la práctica. Téngase en cuenta que, además, el número de puntos que se manejan en numerosas aplicaciones se cuentan por miles. El ejemplo anterior muestra cómo, si queremos de verdad resolver problemas, debemos disponer de métodos que no exijan un tiempo excesivo para el cálculo de las soluciones.

Por esta razón el análisis de la complejidad de problemas es una importante disciplina. Es bien conocido el problema del viajante de comercio. En su trabajo diario debe recorrer las n ciudades de la región para atender las demandas de los productos que fabrica su empresa. Como es lógico, le preocupa encontrar el mejor recorrido, es decir, aquel que minimice el número de kilómetros recorridos al final del día. A pesar de la simplicidad del problema y de lo sencillo que resulta encontrar un método para resolverlo, no es posible resolverlo en la práctica si el número de ciudades es mínimamente elevado (por ejemplo 50). La Teoría de Complejidad prueba que este problema es NP (ver [GJ]), es decir, es del tipo de problema para el que no se conocen algoritmos polinómicos y se conjetura que no existen.

Claramente de nada sirve buscar un buen algoritmo que resuelva un problema si está demostrado que no es posible. En este sentido la Teoría de la Complejidad de problemas es necesario combinarla con cualquier estudio algorítmico de problemas, y en particular en el caso de problemas geométricos.

Es por tanto un compañero de viaje inseparable de la Geometría Computacional. También lo son, por razones fáciles de entender, la Combinatoria, la Teoría de Grafos, el Análisis de Algoritmos, la Teoría de Estructuras de Datos y, por supuesto la Geometría.

A pesar de lo dicho hasta aquí y del propio nombre «Geometría Computacional» que sugiere la idea de una Geometría ligada a los actuales computadores, nada más lejos de la realidad el fijar los orígenes de la disciplina en nuestros días. Los orígenes de la Geometría Computacional hay que buscarlos en la Grecia clásica. Los artículos de Tous-saint [To3] y [To4] dan buena prueba de ello.

La actual concepción de la Geometría Computacional como materia propia de los currícula de la Ingeniería Informática tiene su origen en la tesis doctoral de Shamos [Sha] de 1977. Desde entonces han ido surgiendo diferentes textos recogiendo colecciones de artículos como el editado por Preparata [Pr], los editados por Toussaint [To1 y To2] y algunos más estructurados en forma de tratados como el de Mehlhorn [Me,vol3] (1984), el de Preparata y Shamos [PS] (1985), el de Edelsbrunner [Ed] (1987) o el de O'Rourke [O'R] (1994).

A parte de los libros mencionados y otros más específicos dedicados a temas concretos (entre los que cabe destacar especialmente el de Okabe et al [OBS] sobre diagramas de Voronoi) las referencias sobre trabajos publicados en el área crecen desde hace tiempo de forma explosiva. (Puede consultarse la base de datos *geombib* en la que se recogen la mayor parte de las referencias a través del servicio GEOCOM de la Universidad Politécnica de Madrid - Telnet 138.100.8.6 *username*: GEOCOM *password*: GEO-

COM). Este crecimiento vertiginoso es debido fundamentalmente a las aplicaciones de los problemas geométricos resueltos en áreas como la Robótica, la Computación Gráfica, el Diseño de Circuitos, el Diseño, la Manufactura y la Ingeniería Asistidos por Ordenador (CAD-CAM-CAE), la Estadística, la Cartografía y un sinnúmero de importantes áreas y otras que debieran serlo menos como la industria militar.

No cabe ninguna duda que hoy día el diseño de software es una de las actividades más importantes pues de ello dependemos cada vez en mayor medida. Desde los sistemas informáticos que manejan nuestro dinero en los bancos hasta los sistemas de control aéreo, pasando por otros muchos ejemplos, todos ellos dependen de los programas que hacen funcionar adecuadamente las máquinas correspondientes.

Es claro pues que todo esfuerzo dirigido a mejorar y desarrollar buen software redundará directamente en beneficio de todos. Es tristemente conocido entre los investigadores en Geometría Computacional uno de los motivos que hizo fracasar una de las misiones espaciales del Challenger [Fe]. El método empleado por los técnicos (obviamente no geómetras) para verificar que una pieza de los depósitos de combustible reutilizables para el despegue seguían teniendo una sección circular consistía en tomar medidas diametrales de dicha sección y asegurarse que todas ellas eran iguales. Como es claro que por este método si se emplean sólo dos mediciones, una rueda cuadrada podría resultar circular, los técnicos empleaban un buen número de ellas. Pero resulta que, aunque se hagan una cantidad infinita de mediciones y todas ellas den el mismo resultado, una figura puede estar muy lejos de ser circular. Véase el ejemplo de la figura 1: un triángulo circular formado mediante arcos de circunferencia con centros en los vértices de un triángulo equilátero y radio igual al lado.

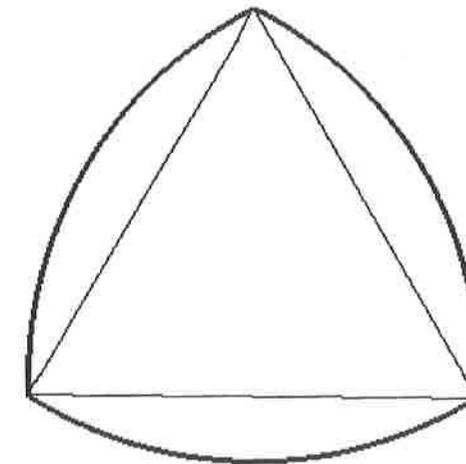


Figura 1

El avance usual en las soluciones de problemas en Geometría Computacional sigue de una u otra forma el siguiente esquema:

1. Planteamiento del problema (Originado muchas veces en una de las numerosas áreas de aplicación como las citadas más arriba).
2. Obtención de alguna solución (algoritmo). Esto implica disponer de una cota superior para el tiempo requerido en el cálculo de la solución del problema.
3. Análisis de la complejidad del problema. Lo que significa obtener cotas inferiores del mismo.
4. Si la cota inferior del problema no coincide con la superior dada por algún algoritmo, volver al paso dos.
5. El algoritmo cuya complejidad coincide con la cota inferior es calificado de óptimo y el problema se considera resuelto. (No obstante, suelen quedar todavía cuestiones pendientes como el refinado del algoritmo que permite rebajar aunque de forma no esencial su tiempo de ejecución, o el análisis de la complejidad probabilística tanto del algoritmo como del problema, etc.).

En resumen, la Geometría Computacional trata de resolver de forma algorítmica eficiente problemas geométricos. Esto significa, como hemos dicho, que busca soluciones que requieran el menor número posible de operaciones elementales para resolver el problema, lo que implica obviamente un menor tiempo de ejecución. Es por esto por lo que podría llamarse a la Geometría Computacional la «**Geometría Contra-Reloj**».

A lo largo del artículo tomaremos como medida de la complejidad de los problemas y algoritmos el orden de la función $T(n)$, $O(T(n))$, siendo $T(n)$ la función que mide, para una entrada de tamaño n , el número de operaciones básicas que es preciso realizar en el peor caso para resolver el problema o ejecutar el algoritmo. (Ver [Kn1] o [PS] para las definiciones y propiedades de los conjuntos $O(f)$).

El resto del artículo está estructurado como sigue: En la sección 2 se presentan problemas de cálculo de envolventes de un conjunto de puntos en el plano. Este tiene su origen en la Morfología Computacional: ¿Qué forma tiene una nube de puntos? En la sección 3 se muestran dos de las estructuras geométricas asociadas a un conjunto de puntos del plano más importantes: El diagrama de Voronoi y su estructura dual la triangulación de Delaunay.

2. Envolventes de una nube de puntos

En el reconocimiento de formas surge el problema de obtener estructuras que describan la forma de una nube de puntos. Existen diferentes alternativas. En este apartado vamos a introducir tres sencillas: La envolvente rectangular, la envolvente convexa, y la envolvente maximal.

2.1. Envolvente rectangular

Una de las envolventes más simples de una nube de puntos es la envolvente rectangular que consiste en el menor rectángulo que contiene a la nube.

Consideraremos dos casos cuya complejidad veremos que difiere notablemente.

En primer lugar consideremos el rectángulo de lados paralelos a los ejes (figura 2 a)) y a continuación el caso general (figura 2 b)).

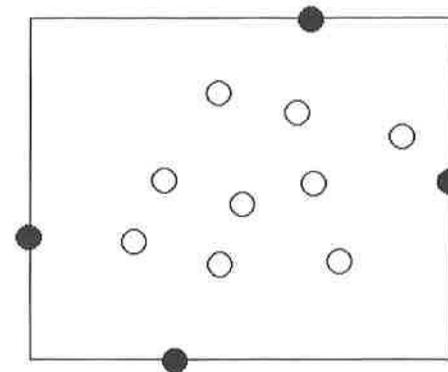


Figura 2a

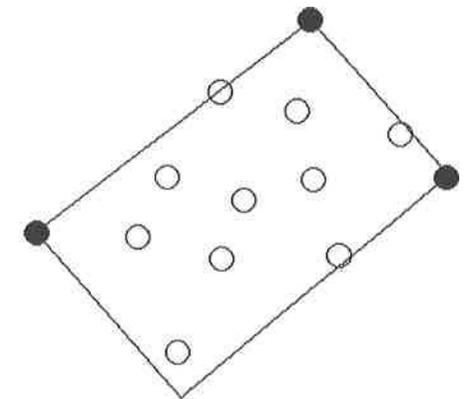


Figura 2b

En el primer caso, el algoritmo para calcular las rectas que contienen los lados del rectángulo es bien sencillo. Todo consiste en calcular el máximo y el mínimo de los valores de las abscisas y las ordenadas de los puntos del conjunto. Dada una lista de números, el máximo puede hallarse en tiempo lineal ($O(n)$) sin más que comparar el primer elemento con el segundo. A continuación el mayor de ambos con el tercer elemento de la lista. El que resulte mayor lo compararemos con el siguiente y así sucesivamente. Tras $n-1$ comparaciones dispondremos del máximo. De forma análoga se halla el mínimo. Para hallar el rectángulo de menor área que contiene a una nube de puntos en el caso general esbozaremos un algoritmo de Toussaint.

Consideremos primero el siguiente problema:

Dado un polígono convexo P determinado por la lista circular de sus vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ en el orden en que aparecen al recorrer la frontera de P , hallar el rectángulo de menor área que lo contiene.

En el primer paso hallamos el rectángulo de lados paralelos a los ejes de menor área que lo contiene empleando el algoritmo del primer caso al conjunto de sus vértices.

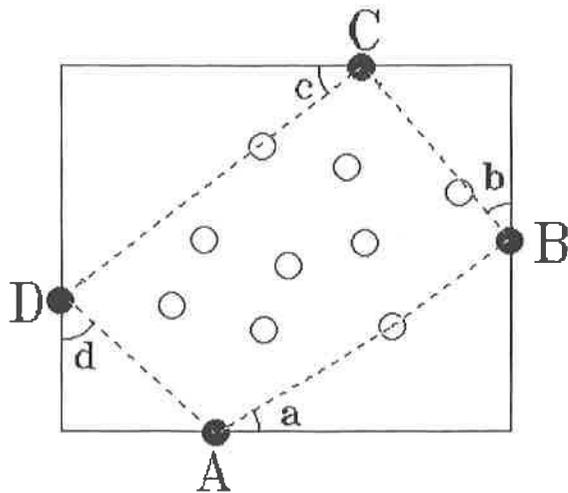


Figura 3
Envolvente rectangular

A continuación efectuamos un giro de ángulo $m = \min\{a, b, c, d\}$ (siendo a, b, c, d los ángulos indicados en la figura 3) a cada uno de los lados del rectángulo y girando sobre los puntos A, B, C, D respectivamente (ver la figura 3). Cuando sobre un lado del rectángulo haya dos vértices, efectuaremos el giro sobre el más avanzado de los dos en la lista de los vértices.

Comparamos el área del nuevo rectángulo con el precedente y anotamos los datos del rectángulo cuya área sea menor. Repitiendo el proceso de giro una y otra vez conservando los datos del rectángulo que vaya siendo menor, llegaremos a obtener un rectángulo ya considerado. En ese momento el algoritmo termina y el rectángulo buscado es el que tenemos anotado.

Es claro que este algoritmo requiere un tiempo lineal, ya que el primer paso hemos visto que es lineal y el número de veces que efectuamos el giro en el peor caso no supera a $\lceil n/2 \rceil$. El número de operaciones para efectuar cada giro es constante.

Para hallar el rectángulo de menor área que contiene a una nube de puntos, aplicaremos el algoritmo descrito a la envolvente convexa de la nube (ver 1.2. para la definición de envolvente convexa).

En consecuencia, se verifica el siguiente teorema:

Teorema: El rectángulo de menor área que contiene a una nube de puntos puede calcularse,

- en tiempo $O(n)$ si consideramos sólo rectángulos orientados (de lados paralelos a los ejes)
- en tiempo $O(n \log n)$ si consideramos cualquier clase de rectángulos.

2.2. Envolverte Convexa

Por definición, se llama envolvente convexa de un conjunto S formado por n puntos $\{x_1, \dots, x_n\}$ a la frontera del conjunto convexo de menor área que contiene a S (a éste se le denomina cierre convexo de S). La envolvente convexa puede obtenerse del cierre convexo calculando éste mediante la intersección de semiplanos cerrados. La intersección de todos los semiplanos que contienen a S . Además es fácil probar que tan sólo con una cantidad finita de semiplanos se obtiene el mismo conjunto. Si S tiene n puntos, basta con a lo sumo n semiplanos. Estos semiplanos son los determinados por parejas de puntos de S tales que el resto de los puntos están contenidos en el semiplano. En consecuencia, la envolvente convexa de n puntos es un polígono convexo cuyos vértices son puntos del conjunto.

La envolvente de una nube de puntos divide a éstos en dos clases: los interiores y los exteriores. Los exteriores son los vértices de la envolvente convexa. Los interiores el resto.

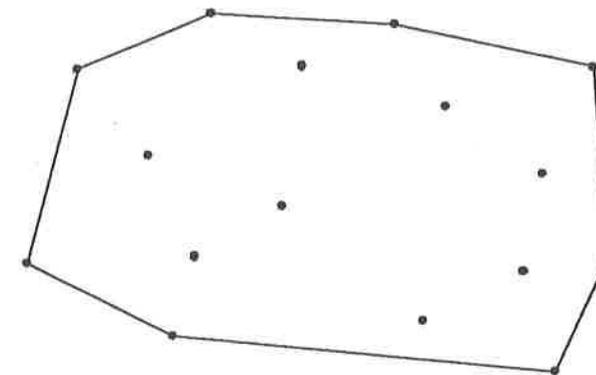


Figura 4
Envolverte convexa

Un punto P depende convexamente de un conjunto S si P pertenece al cierre convexo de S (menor conjunto convexo que contiene a S). Se dice que los puntos x_1, \dots, x_k son convexamente independientes si ninguno de ellos depende convexamente de los demás.

Dado un conjunto $S = \{x_1, \dots, x_n\}$, los vértices de la envolvente convexa de S forman un conjunto maximal de puntos de S convexamente independientes.

En lo que sigue supondremos que los puntos de S están en posición genérica (es decir, que no hay tres de ellos alineados). Esta hipótesis no supone modificación en la complejidad de los algoritmos.

Para calcular los puntos interiores de S podemos emplear la siguiente propiedad que los caracteriza.

Lema: Si S tiene al menos tres elementos, un punto P es interior si, y sólo si existen tres puntos $x_1, x_2, x_3 \in S$ tales que P depende convexamente de $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Es decir, un punto de S es interior si es interior a un triángulo determinado por tres puntos de S .

Empleando esta propiedad podemos obtener el siguiente algoritmo para calcular los puntos interiores de S .

Algoritmo PUNTOS INTERIORES(S)

Entrada: El conjunto $S = \{x_1, \dots, x_n\}$

Para cada terna $\{A, B, C\}$ de puntos de S

Para cada uno de los restantes puntos $P \in S \setminus \{A, B, C\}$

Averiguar si el punto P es interior al triángulo ABC .

En caso afirmativo incluirlo en la lista de puntos interiores.

Fin

Fin

Salida: La lista de puntos interiores de S .

Si en lugar de anotar los puntos interiores en una lista los vamos eliminando del conjunto S , lo que obtendremos al final será el conjunto de los vértices de la envolvente convexa. Obsérvese no obstante, que disponer de los vértices de la envolvente convexa no significa haber determinado ésta. Para determinarla es preciso conocer sus aristas, es decir los pares de vértices adyacentes.

Conviendremos en representar un polígono mediante la lista circular ordenada de sus vértices según aparecen al recorrer la frontera del polígono en sentido positivo.

Analicemos la complejidad del algoritmo anterior. Básicamente el algoritmo consiste en realizar un test de inclusión de un punto en un triángulo. Cada uno de estos test se realiza con un número constante de operaciones. El número de triángulos a considerar será

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

y, para cada uno de ellos, debemos realizar el test $n-3$ veces. El número de operaciones en consecuencia será una función de orden $O(n^4)$.

Aun siendo un algoritmo aparentemente eficiente, por ser su función de tiempo polinómica, veremos que puede mejorarse mucho la solución del problema.

Siguiendo el esquema indicado en la sección 1, vamos primero a obtener una cota inferior del problema. Para ello emplearemos la técnica de transformación de problemas.

Es conocido (Ver [Kn2]) que el problema de la ordenación de n números naturales de menor a mayor no puede realizarse en el peor caso con menos de $O(n \log n)$ operaciones.

Vamos a transformar el problema ORDENACIÓN (x_1, \dots, x_n) en el problema ENVOLVENTE CONVEXA (p_1, \dots, p_n) . Esto significa que con una transformación de los datos de entrada x_1, \dots, x_n del problema ORDENACIÓN obtendremos unos datos de entrada p_1, \dots, p_n para el problema ENVOLVENTE CONVEXA. Una vez obtenida la solución de éste para p_1, \dots, p_n , su respuesta, que como hemos dicho será una lista circular de los vértices de la envolvente convexa, podremos transformarla en la respuesta para el problema ORDENACIÓN (es decir, nos proporcionará la lista de números x_1, \dots, x_n en orden creciente). Si estas transformaciones podemos hacerlas en un tiempo que no supere al conocido como cota inferior para ORDENACIÓN ($O(n \log n)$), entonces ésta cota inferior lo será del problema ENVOLVENTE CONVEXA (en caso contrario, empleando estas transformaciones junto con un algoritmo que calculara la envolvente convexa en un tiempo inferior a $O(n \log n)$, podríamos ordenar n números en un tiempo inferior a $O(n \log n)$, lo que es imposible).

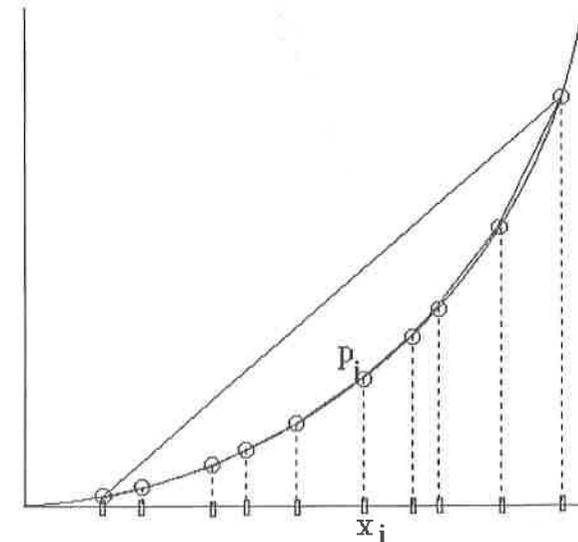


Figura 5
Transformación del problema

Sea $p_i = (x_i, x_i^2)$. De esta forma obtenemos n puntos en el plano convexamente independientes. Su envolvente convexa tendrá, por tanto, n vértices (los n puntos p_1, \dots, p_n).

Cualquier algoritmo que calcule la envolvente convexa de los puntos p_i , $i = 1, \dots, n$, dará como respuesta una lista circular con estos puntos ordenados según aparecen en la frontera. Con un proceso sencillo, cuya complejidad es $O(n)$ en el peor caso, podemos averiguar cuál es el punto de ordenada (y abscisa) menor. Comenzando a enumerar desde ese vértice las abscisas de los vértices de la solución, obtenemos la lista de los números x_i ordenados en orden creciente.

Observemos que las transformaciones necesarias requieren conjuntamente un número de operaciones $O(n)$. En consecuencia, se deduce que $O(n \log n)$ es cota inferior del problema.

De momento, por tanto, no podemos decir que disponemos de un algoritmo óptimo, pues si empleamos como parte de nuestro algoritmo el que hemos mencionado para calcular puntos interiores obtendremos un algoritmo de complejidad como mínimo $O(n^4)$.

Para seguir investigando el problema existen ahora dos alternativas:

1. Intentar mejorar el algoritmo.
2. Intentar mejorar la cota inferior.

En nuestro caso veamos que sólo la primera opción es posible. El siguiente algoritmo de cálculo de la envolvente convexa es debido a Jarvis [Ja]. Este algoritmo calcula la cadena derecha de la envolvente convexa, es decir, la que va del vértice de menor ordenada al de mayor y deja a los puntos del conjunto a su izquierda. Para el cálculo completo basta aplicar dos veces este algoritmo haciendo el cambio de ejes adecuado la segunda de ellas.

Aunque veremos que este algoritmo no es óptimo, sin embargo si el número de puntos extremos es suficientemente pequeño (como sucede por ejemplo, cuando los puntos siguen una distribución normal en el plano) puede incluso mejorar a algoritmos que sí lo sean. Los algoritmos como éste cuya complejidad depende del tamaño de la salida, se dice que son *sensibles a la salida* (output sensitive).

Algoritmo de Jarvis

Entrada: El conjunto S con n puntos

Paso 1: Hallar los puntos p_m y p_M de menor y mayor ordenada de S e incluirlos en una lista L .

Paso 2: Hallar el punto Q de $S \setminus \{p_m\}$ tal que el ángulo α entre la semirecta horizontal con origen en p_m hacia $+\infty$ y el segmento PQ medido en sentido positivo sea mínimo e incluirlo en L .

Paso 3: Si el punto obtenido es p_M FIN.

Paso 4: Sustituir p_m por Q y volver al paso 2.

Salida: La lista L .

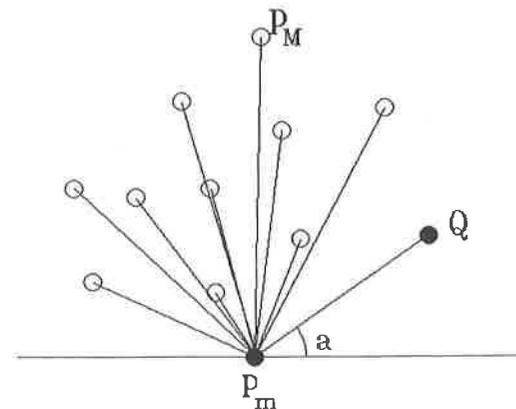


Figura 6
Algoritmo de Jarvis

La idea intuitiva del algoritmo consiste en simular el siguiente proceso:

1. Deslizar una recta horizontal desde $-\infty$ hacia arriba hasta que toque al primer punto p_m de S .
2. Girar la recta apoyándose en p_m en sentido positivo hasta que toque a un segundo punto Q .
3. Girar la recta apoyándose en Q hasta encontrar un nuevo punto.
4. Llamar Q al nuevo punto y, si no es un punto que hemos encontrado previamente, volver al paso 3. En caso contrario FIN.

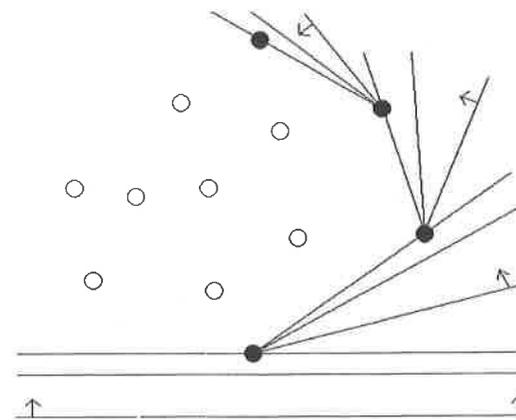


Figura 7
Idea del algoritmo

La complejidad de este algoritmo se obtiene teniendo en cuenta que:

- a) El mínimo de una lista de n números se puede calcular en tiempo $O(n)$.
- b) El punto buscado en el paso 2 del algoritmo se obtiene hallando el mínimo de una lista de números. Para ser precisos, la lista $\{a_1, \dots, a_n\}$ siendo a_i el ángulo definido en el paso 2 para cada punto x_i de $S \setminus \{p_m\}$.

En consecuencia, desde cada vértice de la envolvente convexa, para hallar el siguiente debemos realizar un proceso lineal ($O(n)$). La complejidad del algoritmo es por tanto $O(n.k)$, siendo k el número de vértices que tenga la envolvente convexa. En el peor de los casos serán los n puntos de partida, por lo que en el peor caso la complejidad es $O(n^2)$.

Como vemos, este algoritmo mejora esencialmente al anterior, a pesar de no poder todavía afirmar que es óptimo.

Para terminar este apartado veamos un algoritmo óptimo debido a Graham [Gr] cuya complejidad es $O(n \log n)$.

Algoritmo de Graham

Entrada: La lista de los puntos $L = \{p_1, \dots, p_n\}$.

1. Hallar el punto de menor ordenada O de L .
2. Ordenar angularmente respecto de O los restantes $n - 1$ puntos.
3. Si $L = \{p_1, \dots, p_n\}$ es la lista ya ordenada en el paso 2 siendo $p_1 = O$:
 - 3.1. Asignar a la variable i el valor 1 ($i \leftarrow 1$).
 - 3.2. Si $i = n - 2$ FIN.
 - 3.3. Si $DET(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) < 0$:
 - 3.3.1. Eliminar p_{i+1} de la lista L .
 - 3.3.2. Si $i > 1$ asignar $i \leftarrow i - 1$.
 - 3.3.3. Volver a 3.2.
 - 3.4. Si $DET(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) > 0$:
 - 3.4.1. Asignar $i \leftarrow i + 1$.
 - 3.4.2. Volver a 3.2.

Salida: La lista L obtenida al finalizar el proceso.

$(DET(A, B, C))$ es el valor del determinante cuya primera fila son tres unos, la segunda las abscisas de A, B, C y la tercera las ordenadas de A, B, C .

La idea de este algoritmo, como en el primero, es ir eliminando los puntos interiores de S . La diferencia estriba en que no se emplea un método «fuerza bruta» para detectarlos, sino las siguientes propiedades:

Lema 1: El punto de menor ordenada es exterior.

Lema 2: En las condiciones de los puntos tras ejecutar los pasos 1 y 2 del algoritmo de Graham, si $DET(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) < 0$, se verifica que p_{i+1} es interior.

El paso 1 puede realizarse en tiempo lineal ($O(n)$). El segundo paso, en esencia, consiste en ordenar una lista de números y, por tanto, puede hacerse en tiempo $O(n \log n)$. El tercer paso, conocido como el *scan de Graham*, requiere tiempo lineal ya que, aunque hay avances y retrocesos en la lista, cada vez que hay un retroceso se elimina definitivamente un punto. En consecuencia el número de retrocesos no puede ser mayor de $n - 3$.

Como consecuencia resulta el siguiente teorema:

Teorema: El algoritmo de Graham calcula la envolvente convexa de una nube de n puntos en un tiempo óptimo $O(n \log n)$.

2.3. Envoltente maximal

Consideremos el orden producto en R^2 obtenido a partir del orden natural en R : $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ e } y \leq y'$.

Dado un conjunto de n puntos del plano $S = \{x_1, \dots, x_n\}$, queremos calcular los elementos maximales de S con respecto al orden mencionado. El conjunto de los puntos maximales determina la envolvente maximal en la dirección noreste (NE).

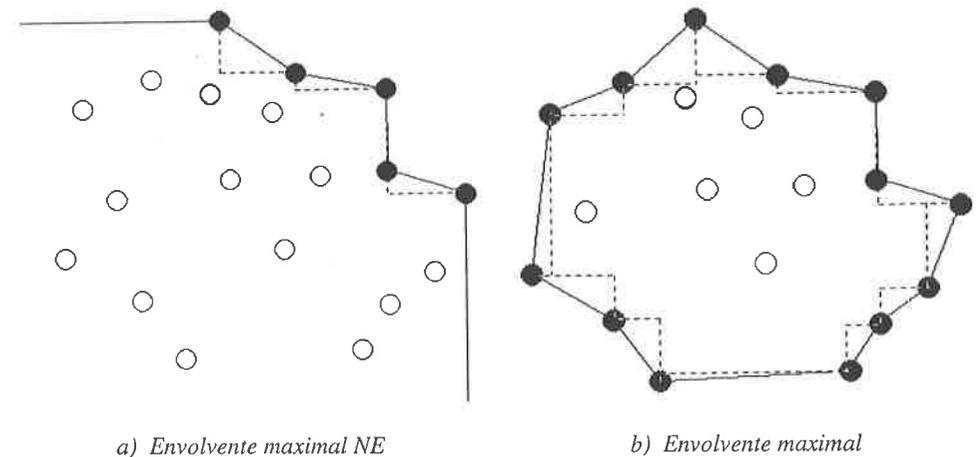


Figura 8

Considerando las direcciones *NO*, *SE*, *SO* de forma análoga a como se ha hecho con la *NE*, obtenemos los puntos de la envolvente maximal.

Lema: Todo vértice de la envolvente convexa de una nube de puntos es un punto maximal para alguna de las orientaciones *NE*, *NO*, *SE*, *SO*.

Como vemos, en general existen más puntos maximales en un conjunto que puntos extremos (vértices de la envolvente convexa). Por esta razón puede considerarse en algunas aplicaciones que la envolvente maximal define mejor la forma del conjunto.

Cabe resaltar que el gran inconveniente en este aspecto es que los puntos maximales dependen de la orientación del sistema de referencia elegido. Un cambio de dirección en los ejes del sistema de referencia puede suponer una alteración en el conjunto de puntos maximales.

Una solución a este inconveniente aparece en la tesis de Hurtado [Hu] mediante la introducción de los puntos maximales no orientados.

Veamos un algoritmo para calcular los puntos maximales *NE* de un conjunto. En este caso mostraremos un ejemplo de algoritmo recursivo que emplea la técnica «*divide y vencerás*».

Algoritmo MAXIMALES(*S*)

Entrada: Un conjunto de puntos $S = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Paso 1. Dividir el conjunto *S* en dos subconjuntos: $S_1 = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ y $S_2 = \{p_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \dots, p_n\}$.

Paso 2. Calcular por separado $E_1 = \text{MAXIMALES}(S_1)$ y $E_2 = \text{MAXIMALES}(S_2)$.

Paso 3. Mezclar E_1 y E_2 obteniendo el conjunto *E* de elementos maximales de *S*.

Salida: La lista *E* formada por los puntos maximales de *S* ordenados en orden creciente por sus abscisas.

La clave del algoritmo, como sucede en esta clase de algoritmos, reside en las fases de división del conjunto de entrada y la de mezcla de las soluciones parciales.

Enunciamos, sin demostrar el siguiente teorema:

Teorema: Si C_1 y C_2 son dos cadenas poligonales monótonas en la dirección *l* (es decir, tales que toda perpendicular a *l* corta a cada una de dichas cadenas en a lo sumo un punto) con n_1 y n_2 vértices respectivamente, es posible calcular la envolvente superior $E(C_1, C_2)$ en tiempo $O(n_1 + n_2)$.

En la fase de mezcla del algoritmo anterior se verifican las condiciones del teorema considerando las cadenas poligonales de vértices E_1 y E_2 y la recta $y = -x$.

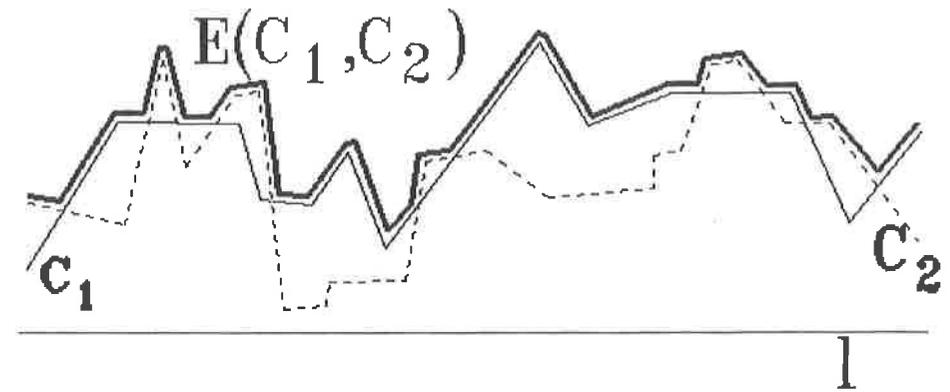


Figura 9
Envolvente superior de dos cadenas monótonas

En consecuencia, el tiempo $T(n)$ requerido por el algoritmo para obtener la envolvente maximal *NE* verifica la inecuación:

$$T(n) \leq 2T(n/2) + O(n)$$

y, por tanto, se verifica que $T(n) \in O(n \log n)$.

El algoritmo es óptimo pues por ser los puntos extremos del conjunto un subconjunto de los maximales, es fácil probar que la cota inferior $O(n \log n)$ también lo es para este problema.

3. Problemas de proximidad

Sin salirse de los problemas en los que los datos de entrada son una nube de puntos, consideremos ahora algunos problemas relacionados con la proximidad entre ellos.

Problema 1. Diremos que el lugar más seguro para situar una central nuclear es aquel que, sin salirse de los límites del país, está lo más alejado posible de cualquier ciudad. ¿Cómo calcular ese lugar más seguro?

Problema 2. Necesitamos averiguar con frecuencia cual es la ciudad más próxima a un punto del mapa del país. Obtener una estructura geométrica que nos permita averiguar rápidamente cuál es la ciudad más próxima a un punto dado.

Problema 3. En el control aéreo es preciso prestar mayor atención al par de aviones más próximos entre sí. Para ello necesitamos un buen algoritmo que calcule el par más próximo de un conjunto de puntos del plano.

En esta sección vamos a revisar una de las estructuras básicas en Geometría Computacional que permite resolver adecuadamente estos y otros muchos problemas relacionados con la proximidad de puntos: *El diagrama de Voronoi*.

3.1. Diagramas de Voronoi

Dado un conjunto de puntos del plano $S = \{p_1, \dots, p_n\}$, se llama región de Voronoi de p_i (también conocida como región Thiessen o región de Dirichlet) al lugar geométrico de los puntos del plano más próximos a p_i que a cualquier otro de los puntos de S .

$$V(p_i) = \{x; d(x, p_i) \leq d(x, p_j), j \neq i\}$$

Al recubrimiento del plano formado por las regiones de Voronoi de los puntos de S se le llama *diagrama de Voronoi* de S , $Vor(S)$.

Las regiones como se ha visto, se consideran cerradas y, por tanto, existen solapamientos entre ellas. Los puntos que equidistan de dos o más puntos pertenecen a dos o más regiones respectivamente. En ocasiones se llama diagrama de Voronoi precisamente a esos puntos. Incluso se considera dotado de estructura de grafo rectilíneo plano de la siguiente manera: Como conjunto de vértices se considera el conjunto de puntos que equidistan de más de dos puntos. Las aristas del grafo son las aristas que delimitan las regiones de Voronoi (sus extremos coinciden precisamente con los puntos que consideramos vértices del grafo, salvo las aristas infinitas. Para éstas se considera el punto del infinito como extremo y éste se considera también vértice del grafo).

Retomemos el problema de la central nuclear. Supongamos que la envolvente convexa de las ciudades (que representaremos mediante puntos del plano) coincide con la frontera del país. El problema estará resuelto si encontramos el mayor círculo cuyo centro pertenezca al cierre convexo del conjunto de ciudades y cuyo interior no contenga a ningún punto. Este problema se conoce como el problema del MAYOR CÍRCULO VACÍO.

Es fácil observar que dicho círculo tendrá su centro en un punto equidistante de tres o más puntos (ciudades). Por tanto será uno de los vértices del diagrama de Voronoi.

El diagrama de Voronoi, por ser un grafo plano, posee un número de vértices y de aristas proporcional al número de caras, es decir, proporcional al número de puntos que

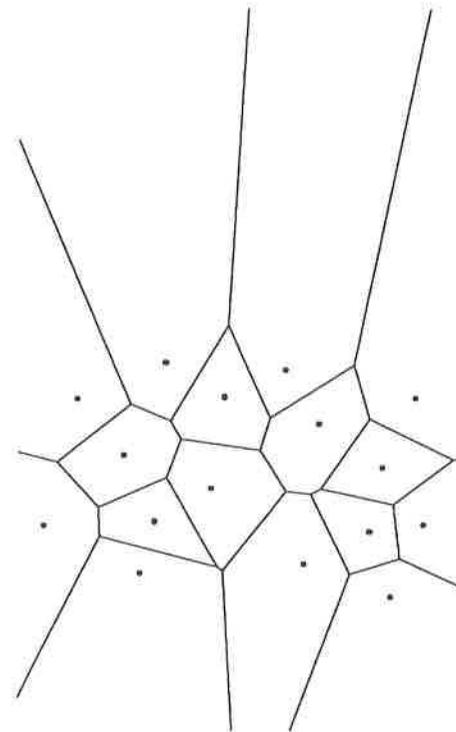


Figura 10
Diagrama de Voronoi

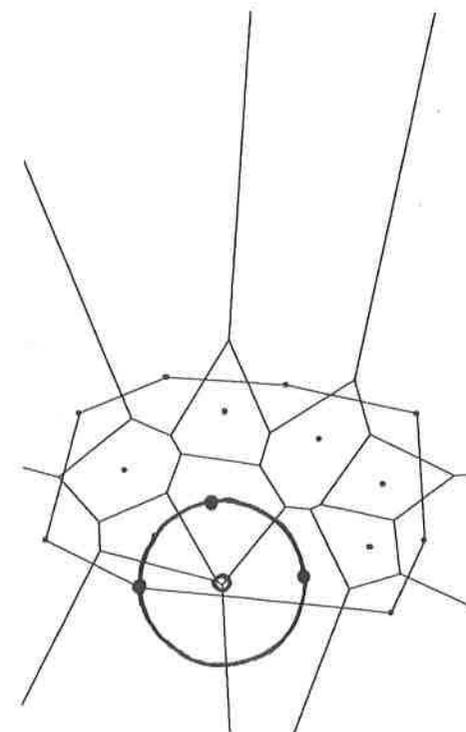


Figura 11
El mayor círculo vacío

lo originan (a estos puntos iniciales se les suele llamar «sitios» o «lugares»). En consecuencia, si conocemos el diagrama de Voronoi, en un tiempo lineal añadido podemos encontrar el mayor círculo vacío.

Asímismo, conocido el diagrama de Voronoi de S , conjunto de los puntos que representan las ciudades, dado un punto Q del plano, para averiguar cuál es el punto de S más próximo a Q basta averiguar a qué región de Voronoi pertenece Q (téngase en cuenta que $Vor(S)$ es una partición del plano). La localización de un punto en una subdivisión del plano en regiones convexas (como es el caso del diagrama de Voronoi) puede realizarse en tiempo $O(\log n)$ [Me, Vol 3]. Esto significa que si disponemos del diagrama de Voronoi de S , es posible calcular el punto más próximo a Q en tiempo $O(\log n)$. Es claro que esto mejora el algoritmo obvio que consiste en calcular la distancia de Q a todas las ciudades y quedarse con aquella que dé el mínimo (lo que requiere tiempo $O(n)$). De todas formas habrá que ver en qué casos compensa el cálculo del diagrama en este problema. Si el número de puntos Q para los que nos va a interesar saber cuál es la ciudad

más próxima iguala o supera al número de ciudades entonces efectivamente compensa el preproceso que supone calcular el diagrama. Por el contrario, si el número es bajo no.

El tercero de los problemas de proximidad planteado, también se resuelve en tiempo lineal a partir del diagrama de Voronoi. El par de puntos más próximos necesariamente poseen sus regiones de Voronoi adyacentes. Por tanto conocido el diagrama de Voronoi basta analizar los pares de puntos cuyas regiones correspondientes son adyacentes. Como ya hemos dicho, el número de aristas del diagrama de Voronoi, por ser un grafo plano, es proporcional al número de puntos iniciales.

Otros muchos problemas tienen solución eficiente una vez conocido el diagrama de Voronoi de los puntos de entrada. Es por tanto importante disponer de buenos algoritmos para el cálculo de dicho diagrama.

La primera tentación que uno siente para calcular el diagrama de Voronoi consiste en hallar para cada punto p_i de S su región de Voronoi. De hecho es fácil observar que la región de Voronoi $V(p_i)$ es intersección de $n - 1$ semiplanos:

$$V(p_i) = \bigcap_{j \neq i} H(p_i, p_j)$$

siendo $H(p_i, p_j)$ el semiplano que determina la mediatriz de p_i y p_j y contiene a p_i .

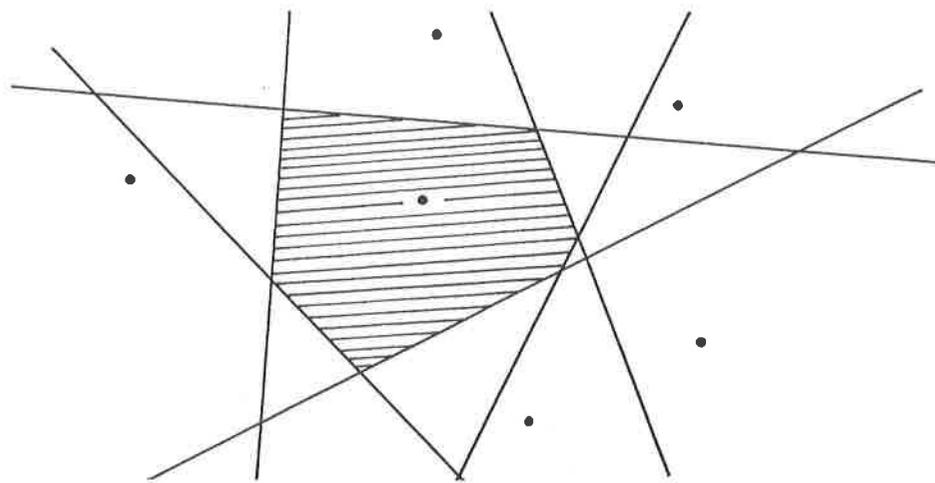


Figura 12

Cálculo de $V(p_i)$ mediante intersección de semiplanos

Por este camino nos vemos obligados en el peor caso a emplear los $n(n - 1)$ semiplanos que determinan los n puntos y, en consecuencia el algoritmo tendrá al menos una complejidad $O(n^2)$.

Veamos que es posible mejorar el método. Daremos aquí las ideas principales del algoritmo de Shamos y Hoey [SH] que emplea de nuevo la técnica «divide y vencerás».

Algoritmo VORONOI(S)

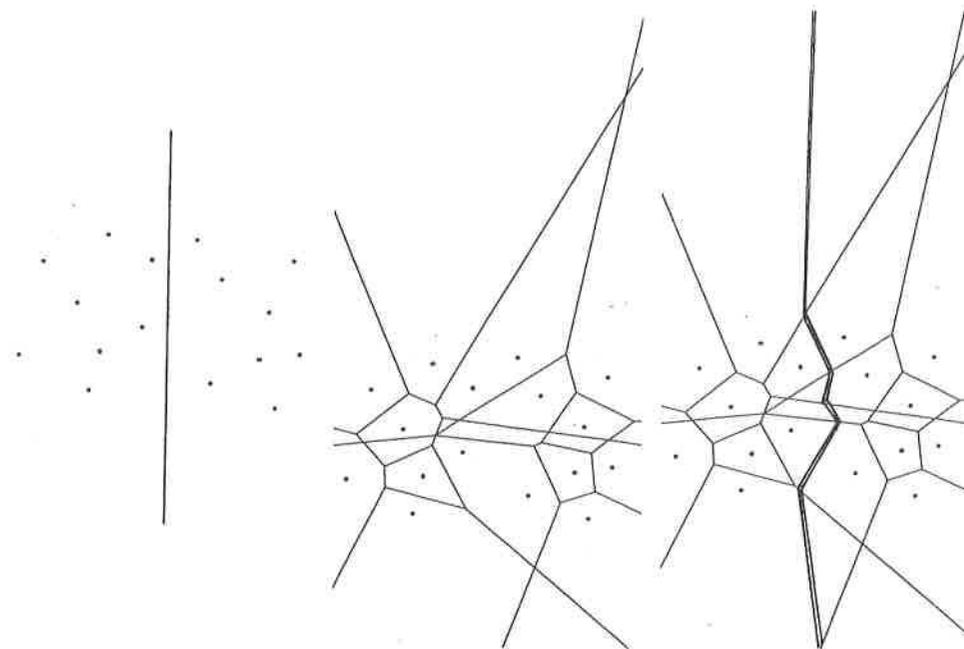
Entrada: El conjunto de puntos $S = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Paso 1. Hallar una recta vertical l que deje la mitad de los puntos de S a cada lado y considerar los subconjuntos S_1 y S_2 formados por los puntos que deja l a la izquierda y a la derecha respectivamente.

Paso 2. Hallar recursivamente $VORONOI(S_1)$ y $VORONOI(S_2)$.

Paso 3. Mezclar los dos diagramas obtenidos en el paso 2 obteniendo el diagrama buscado.

Salida: El diagrama obtenido en el paso 3.



Paso 1:
División

Paso 2:
Cálculo de $VORONOI(S_1)$ y
 $VORONOI(S_2)$

Paso 3:
Mezcla

Figura 13

Construcción del diagrama de Voronoi

Nuevamente la clave del algoritmo está en los procesos de división (Paso 1) y mezcla (Paso 3). En [PS] pueden verse los detalles de cómo es posible realizar ambos pasos en tiempo lineal. En consecuencia, el tiempo $T(n)$ necesario para ejecutar el algoritmo verifica la inecuación

$$T(n) \leq 2T(n/2) + O(n)$$

y, por tanto $T(n) \in O(n \log n)$.

Una de las propiedades interesantes del diagrama de Voronoi es la siguiente:

Lema: Los vértices de la envolvente convexa de un conjunto de puntos del plano S son aquellos cuya región de Voronoi en $\text{Vor}(S)$ es una región no acotada.

De esta propiedad se desprende que revisando el diagrama de Voronoi (mirando qué puntos tienen su región no acotada) podemos obtener la envolvente convexa de S . Esta operación es posible hacerla en tiempo lineal, por lo que la cota inferior $O(n \log n)$ para el problema de la envolvente convexa también lo es para el problema del cálculo del diagrama de Voronoi. En consecuencia, el algoritmo anterior es óptimo.

De las muchas referencias que existen sobre diagramas de Voronoi, destacamos dos: El libro de Okabe et al. [OBS] especialmente interesante por las numerosas aplicaciones que recoge, y el libro de Klein [KI] en el que se estudian generalizaciones del diagrama de Voronoi en espacios métricos diferentes del plano euclídeo.

3.2. Triangulación de Delaunay

Dado un conjunto de n puntos del plano $S = \{p_1, \dots, p_n\}$, como sabemos, su diagrama de Voronoi $\text{Vor}(S)$ es un grafo plano con n caras (las regiones $V(p_i)$, $i = 1, \dots, n$). Consideremos el grafo dual $DT(S)$ de la siguiente forma: Los vértices de $DT(S)$ son los puntos de S . Una arista conecta dos vértices p_i y p_j si las regiones de Voronoi correspondientes $V(p_i)$ y $V(p_j)$ comparten un lado.

Si suponemos que los puntos de S están en posición genérica (es decir que no hay tres de ellos alineados ni cuatro concíclicos), se verifica que la triangulación de Delaunay de S , $DT(S)$, es una triangulación de S (lo que significa que es un grafo rectilíneo plano cuyos vértices son los puntos de S , cuyas caras son triángulos y que contiene entre sus aristas a las aristas de la envolvente convexa de S).

Como vemos, por definición, existe una estrecha relación entre el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay de un conjunto S . Este hecho permite calcular en tiempo lineal la triangulación de Delaunay una vez conocido el diagrama de Voronoi.

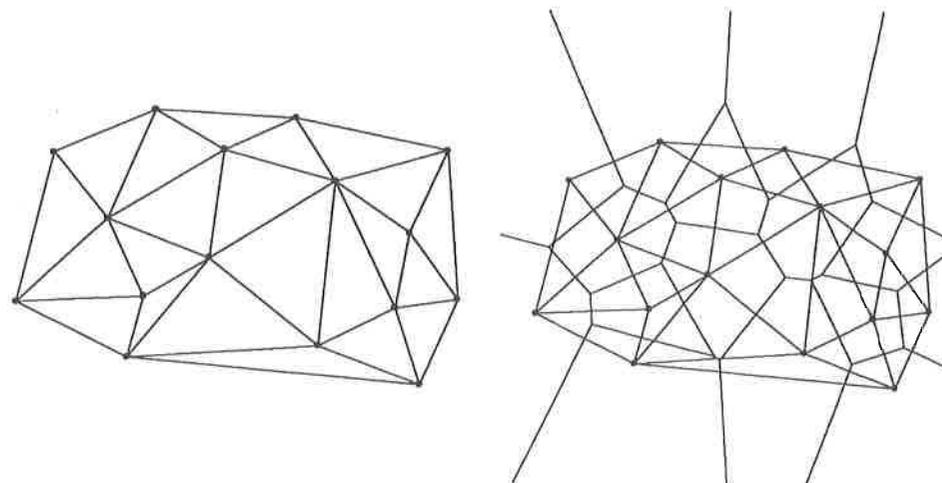


Figura 14a

Figura 14b

Figura 14

Triangulación de Delaunay y diagrama de Voronoi

Entre las propiedades de la triangulación de Delaunay destacaremos la siguiente:

Teorema: Los círculos circunscritos a los triángulos de la triangulación de Delaunay de un conjunto S no contienen en su interior a ningún punto de S . Además esta propiedad caracteriza a los triángulos de dicha triangulación.

Corolario: Dos puntos de S son adyacentes en $DT(S)$ si, y sólo si existe un círculo que los contiene y no contiene a ningún otro punto de S .

Como hemos dicho, a partir del diagrama de Voronoi es posible calcular en tiempo lineal la triangulación de Delaunay de un conjunto S . Esto proporciona un algoritmo de complejidad $O(n \log n)$. Como la envolvente convexa de S forma parte de la triangulación de Delaunay, la cota inferior $O(n \log n)$ para el cálculo de dicha envolvente lo es para el cálculo de la triangulación de Delaunay. El método propuesto es, por tanto, óptimo.

La triangulación de Delaunay contiene la información más relevante sobre proximidad entre los puntos del conjunto S . Además también da idea de la forma del mismo por contener a la envolvente convexa.

Diferentes grafos de proximidad relacionados con un conjunto de puntos son subgrafos de la triangulación de Delaunay. Cabe destacar entre ellos el *árbol generador mínimo* [SH1], el *grafo del vecino más cercano* [SH1], el *grafo de Gabriel* [GS], o el de *la esfera de influencia* [To5].

4. Referencias

- [Ed] EDELSBRUNNER, H., *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer Verlag (1987).
- [Fe] FEYMAN, R.P., *What do you care what other people think?*, Bantam Books (1988).
- [GJ] GAREY, M.R. and JOHNSON, D.S., *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-Completeness*, Freeman (1979).
- [Gr] GRAHAM, R.L., *An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set*, Info. Proc. Lett. 1, 132-133 (1972).
- [GS] GABRIEL, K.R., SOKAL, R.R., *A new statistical approach to geographic variation analysis*, Systematic Zoology 18, pp. 259-278 (1969).
- [Hu] HURTADO, F., *Problemas geométricos de visibilidad*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya (1992).
- [Ja] JARVIS, R.A., *On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane*, Info. Proc. Lett., 2, 18-21 (1973).
- [Kl] KLEIN, R., *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams*, Lecture Notes on Computer Science n. 400, Springer Verlag (1989).
- [Kn1] KNUTH, D.E., *Big omicron and big omega and big theta*, SIGACT News, 8(2), pp. 18-24 (1976).
- [Kn2] KNUTH, D.E., *The art of programming Computers*.
- [Me] MEHLHORN, K., *Data Structures and algorithms*, Springer Verlag (1984).
- [OBS] OKABE, A. and BOOTS, B. and SUGIHARA, K., *Spatial Tessellations. Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, John Wiley (1992).
- [O'R] O'ROURKE, J., *Computational Geometry in C*, Cambridge Univ. Press (1994).
- [Pr] PREPARATA, F.P., ed., *Computational Geometry*, Jai Press (1983).
- [PS] PREPARATA, F.P. and SHAMOS, M.I., *Computational Geometry, An Introduction*, Springer Verlag (1985).
- [Sha] SHAMOS, M.I., *Computational Geometry*, Ph.D. Dissertation, Yale University (1977).
- [SH] SHAMOS, M.I. and HOEY, D., *Closest-point problems*, 16th Ann. IEEE Sym. on Foundations of Computer Science, pp. 151-162 (oc. 1975).
- [To1] TOUSSAINT, G.T., *Computational Geometry*, North Holland (1985).
- [To2] TOUSSAINT, G.T., *Computational Morphology*, North Holland (1988).
- [To3] TOUSSAINT, G.T., *Scanning the issue*, Special Issue on Computational Geometry, Proc. IEEE, vol 80, no. 9, pp.1347-1363 (sep. 1992).
- [To4] TOUSSAINT, G.T., *A new look at Euclid's second proposition*, The Mathematical Intelligencer vol. 15, No. 3, pp. 12-23 (1993).
- [To5] TOUSSAINT, G.T., ed., *A graph-theoretical primal sketch*, North Holland (1985).

Harmonics and periodic functions: a computer-aided path to introduce Fourier analysis*

María Teresa Galiza
María Mascarelo

*Departamento di Matematica, Politecnico di Torino,
Corso Duca degli Abruzzi 24 - 10129 Torino, Italy*

Abstract

In this work we will show a computer-aided path, leading from basic trigonometric concepts to periodic functions and Fourier polynomials. This path has been developed at the Politecnico of Torino, and it is given in the second course of Mathematical Analysis to 20 year-old students, as introduction to Fourier analysis. Having experimented it successfully for several years, we are encouraged to show it to colleagues, believing it useful in standing some fundamental concepts that are applied mainly to Fourier analysis, but also to many other topics, as Physics, Mechanics, Electronics and Computer Sciences. This path can be performed in any basic mathematics course, with the help of a P.C., using a Symbolic Mathematical System; we carry it out by DERIVE.

Introduction

In this paper we will describe a computer-aided path that, starting from the study of sine curves and periodic functions, brings on Fourier polynomials and Fourier analysis.

This path is carried out with the students attending the second year (20 years old) of the Faculty of Engineering at the Politecnico of Torino (Italy), during the second course of Mathematical Analysis.

Among the other subjects, this course deals with Fourier analysis. Because of its central role in many applied sciences, Fourier analysis is becoming more and more

* This work was financially supported by MURST and CNR funds of Italian Government and ERASMUS.

important in every mathematics undergraduate teaching program, therefore we take a particular care in introducing its fundamental concepts to the students, as much clearly and efficiently as it is possible.

Because of at the Politecnico of Torino computer laboratories have been available for students since the late 70-ies, we have been involved in several innovative teaching programs.

From these experiences we matured the belief that the computer is a very important tool in allowing a more active approach to the concepts, through experiments, images, graphs, trial and error exercises, instead of an abstract approach through formal definitions and theorems [12].

That is even more true, since the coming of Symbolic Mathematical Systems (later on indicated by S.M.S.) improved the easy and powerful handling of graphics, and the numerical and symbolic computational resources of the computers [9, 7].

However we consider the computer only as a tool, as books, worksheets, and so on therefore working with a P.C. is just another learning moment, like a traditional lesson or paper and pencil exercises; so that the computer laboratory activity has to be inserted in a wider teaching plan, as a powerful help, but not as replacement of the traditional tools. Following this idea we are used to develop learning paths driven by worksheets prepared by the teacher, that support the traditional approach [1, 5]. The students work in groups of 3 or 4 persons for two hours a week at the computer laboratory.

The entire path on Fourier analysis consists of four parts:

- Harmonics and their compositions;
- Fourier polynomials and series;
- Fourier transforms;
- Discrete Fourier Transforms (D.F.T.).

Here we will illustrate in detail the first two parts that deal with the second course of Mathematical Analysis. The third and the fourth parts are specially devoted to students in Electronics, Computer Science and Telecommunications, and they are usually developed in further years of the Engineering course; we referred about them in [3, 8].

The first part of the path is divided into three steps:

- analysis of the parameters characterizing the sine curves,
- linear combinations of sine curves,
- compositions o sine curves,

it takes about six hours at the laboratory; since only the first two steps are directly aimed at the introduction of Fourier series, sometimes we save two hours by skipping the third step, notwithstanding it is quite interesting on the theoretical point of view [4]; unfortunately the lesson time often runs too fast!

Also the second part takes about six hours, and it is always developed very carefully, because of its main role in understanding fundamental concepts about Fourier analysis. Often a few students become particularly fond of some problems, so that they dwell upon them longer; one of the most fascinating subjects is undoubtedly the Gibbs' phenomenon.

In the following sections we will explain the worksheets that we use: for each exercise we will illustrate the aims, the students' background we expect, and the peculiarities needed by the software to perform it. Furthermore we will illustrate some examples of pupils' answers, and we will finally give some cautions to avoid some mistakes and misinterpretations that could be induced by the use of a tool working in discrete way, as the computer does, for studying continuous phenomena [10].

1. Harmonics and their compositions

This part represents the link between the trigonometric functions studied at high school and their application to Fourier analysis as the basis of trigonometric polynomials and series.

To perform the exercises we expect the students to know the concepts of sine and cosine curves, as well as of period and frequency, amplitude, initial phase (displacement) and vertical translation of a trigonometric function.

The software we need is any ready-made software able to draw and superimpose graphs, showing the scale on both the axes, so that the students could quantify the links between the changes of the parameters and the ones of the corresponding sine curves.

The first set of exercises is aimed at revising the basic concepts about trigonometric functions; at the end the students have to be able to draw graphs of any such function, given the parameters values, and vice versa to write the analytical expression given its graph.

The functions to be analyzed are in the order:

$A \sin x$	(amplitude)
$\sin(Bx)$	(period)
$\sin(x + C)$	(initial phase)
$\sin(Bx + C)$	(initial phase when period changes)
$\sin x + D$	(vertical translation)
$A \sin(Bx + C) + D$	

Then the exercises are repeated in the same way for the cosine function.

Exercise 1.1 reports the requests about sine functions, and the tables concerning the period and the whole set of parameters.

Exercise 1.1

Use the computer to superimpose the graph of $\sin x$ to each of the ones in the following Tables 1 and 2: what are the differences?

By the comparison of the graphs get the data to fill in the Tables 1 and 2.

Which of the following characteristics: period, amplitude, initial phase, vertical translation have changed? What is the relationship leading the changes?

TABLE 1
Sine curve, parameter B

sin Bx				
B	Amplitude	Period	In. Phase	Vert. Transl.
1	1	2π	0	0
-1				
3				
$3/4$				
$3\pi/5$				
$-3\pi/5$				
$\sqrt{2}/4$				
$-\sqrt{2}/4$				

TABLE 2
Sine curve, parameters A, B, C, D

$A \sin (Bx + C) + D$							
A	B	C	D	Amplitude	Period	In. Phase	Vert. Transl.
2	$1/2$	$\pi/2$	-3				
$-1/3$	3	$\pi/2$	2				
$3/4$	$2/3$	π	-5				
-2	1	$3\pi/5$	-1				
$\div 2$	$-\pi/4$	$-\pi/2$	2π				

Figure 1 reports some samples of the graphs showed by the computer, using DERIVE.

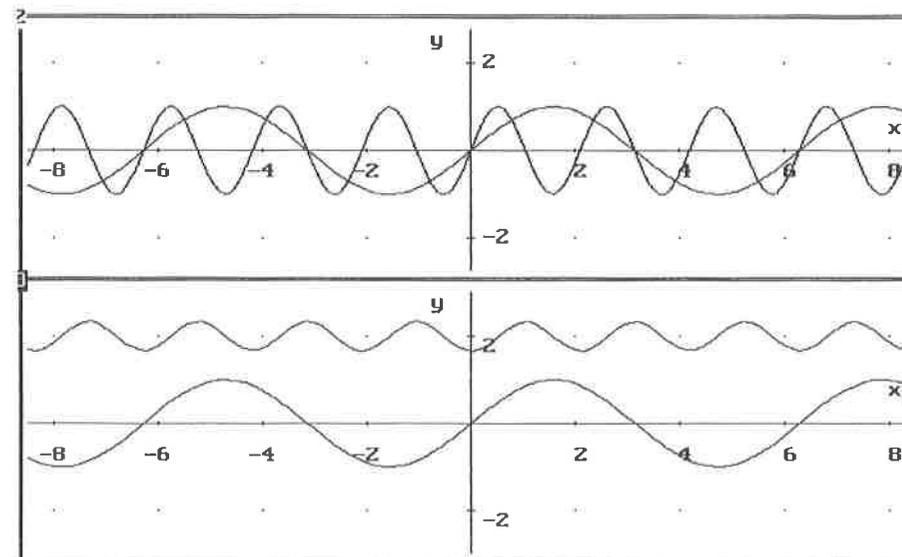


Figure 1:

Top: $\sin x$ is superimposed to $\sin 3x$; bottom: $\sin x$ superimposed to $-\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$

The second set of exercises is aimed at introducing the concepts of harmonics, trigonometric polynomials, periodic functions. The students are given a list of linear combinations of sine and cosine functions, like the ones listed in Exercise 1.2.

They have to consider the period of the component functions, to tell, by looking at the graph of the linear combination, if it is a periodic function, in particular a simple sine curve, and, in case of positive answer, to find its period.

Exercise 1.2

For each of the linear combinations of sine curves in Table 3, use the computer to superimpose the graphs of the components to the one of the combination.

TABLE 3
Linear combinations of sine curves

1) $\sin 2x + 3x$
2) $\sin 6x + \sin 10x/3$
3) $\sin 2x - \sin (2x - 1.046)$
4) $2\sin 3x - 4\cos 3x$
5) $\sin \sqrt{2}x + \sin 2\sqrt{2}x$
6) $\sin \sqrt{3}x - 2\sin 2\sqrt{3}x$
7) $\sin \sqrt{5}x + \sin \sqrt{2}x$
8) $4\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x\right)/\pi$
9) $4\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x\right)/\pi$

Looking at them, get the data to fill in the Table 4.

TABLE 4
T1, T2, T3, T4: periods of the component functions as in Table 3.
T: period of the linear combination when it is periodic

Linear combinations of sine curves								
	T1	T2	T3	T4	Sine curve	Amplitude	Periodic	T
1)								
2)								
3)								
4)								
5)								
6)								
7)								
8)								
9)								

By comparison of the data get a conjecture about the answers to the following questions:

- In which case are the linear combinations of sine curves still a sine curve? In this case, what is its amplitude?
- In which case is it periodic? What is its period? What is the relationship between the periods of the components and the one of their resultant?

Almost all the students make the correct conjecture about the condition for the linear combination to be a sine curve and get the relation for the amplitude, showing themselves ready to formalize the definition of *harmonic*.

In the same way they are usually able to conjecture that the linear combinations are periodic if and only if the periods of the components are commensurable and their period is the *least common multiple* of the periods of the components. Actually the question is more subtle, for two reasons:

- the *least common multiple* is a period, but it should be proved that it is really the *minimum positive period*,
- the concept of *least common multiple* is defined on a ring, but the set of periods usually is not a ring [4].

At this point we have to choose either if we want to deep into the formal algebraic questions, or if we want to focus on trigonometric polynomials. In the first case the conjecture made by the students is the starting point for a further deeper analysis, in the second one it is the same for the introduction of trigonometric polynomials, as finite linear combinations of harmonics, whose periods have to be chosen suitably.

In case of periods whose ratio is not rational, as in line 7 of Table 3, some students have some doubts about the correctness of their conjecture; they object that a such function seems to have a non periodic behavior, but they cannot be sure this is absolutely true, because:

- they can test only a limited range of abscissa
- all numbers are rational for the computer, therefore the graphs do not represent the exact behavior of the function.

These ones are exactly the caution to be given about the finiteness and the discreteness of the computer, when we use it to explore either an infinite or a continuous phenomenon.

Some samples of the graphs are drawn in Figure 2. In the top figure the graph of $\sin 6x + \sin \frac{10}{3}x$ is shown: the resultant is periodic with period 3π according to the *generalized l.c.m.* rule; in the bottom figure, showing the behavior of $\sin \sqrt{5}x + \sin \sqrt{2}x$, though we reduce the scale, we are not able to identify a period.

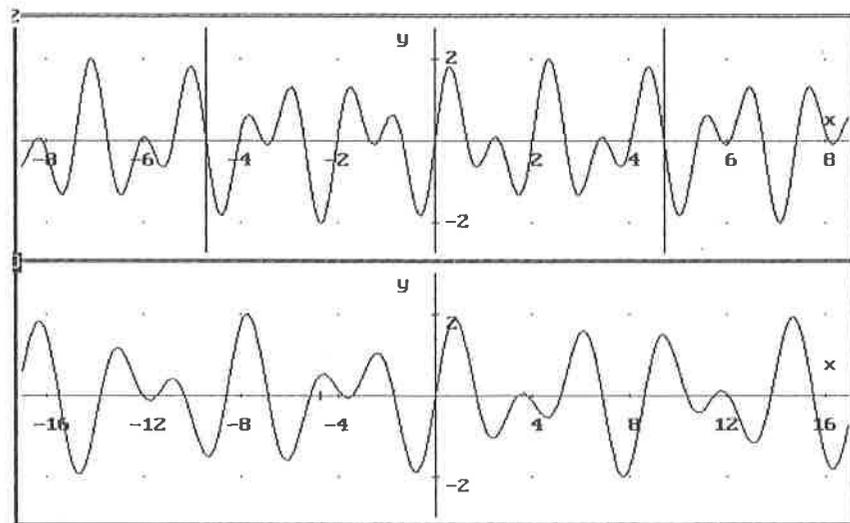


Figure 2:
Top: $\sin 6x + \sin \frac{10}{3}x$; bottom: $\sin \sqrt{5}x + \sin \sqrt{2}x$

The third set of exercises is aimed at deeping the analysis of the period of a generic composition of harmonics; in this case the *minimum positive period* of the resultant function can actually be a proper submultiple of the *least common multiple* of the component periods, as in the simplest case of the duplication formula:

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x$$

A list like the one reported in Table 5 is given to the students, together with the same requests as in Exercise 1.2; only the periods are sometimes different from what the students are expecting from the *least common multiple* rule, as in lines 1, 6, 7, 8 of Table 5. For example in Figure 3, where the graph of $2 \sin(3x) \cos x + \cos 2x$ is reported, we can notice that its period is π , instead of the expected one: $2\pi = l.c.m.(\frac{2}{3}\pi, 2\pi, \pi)$.

TABLE 5
Compositions of harmonics

- 1) $\sin \sqrt{3}x \cos \sqrt{3}x$
- 2) $\sin 2x \cos x + \sin x$
- 3) $\sin \sqrt{3}x \cos \sqrt{3}x + \sin x$
- 4) $\sin \sqrt{3}x \cos x + \sin x$
- 5) $\sin 3x \cos x - \sin 2x$
- 6) $2 \sin 3x \cos x - \sin 2x$
- 7) $2 \sin 3x \cos x + \cos 2x$
- 8) $\sin 3x \cos x + \cos 2x$

TABLE 6
 T_1, T_2, T_3 : periods of the component functions as in Table 5.
 T : period of the composition when it is periodic

Compositions of harmonics						
	T_1	T_2	T_3	Sine curve	Periodic	T
1)						
2)						
3)						
4)						
5)						
6)						
7)						
8)						

The students usually overcome their perplexity by invoking the Werner's formulas to reduce the composition to a linear combination of sine and cosine curves. This is actually a correct operative solution, but it doesn't explain neither *why* the period of linear combi-

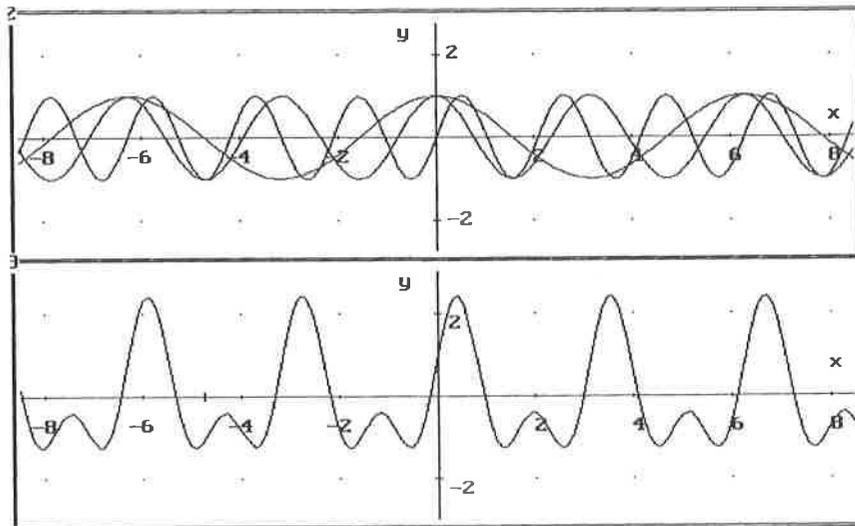


Figure 3:

Top: $\sin 3x, \cos x, \cos 2x$; bottom: $2 \sin(3x) \cos x + \cos(2x)$.

nations is always the l.c.m. of the components periods, nor what really the expression *least common multiple* means in the set of periods, that is a set of real numbers.

The question has been analyzed in [4], where the algebraic structure of that set has been identified as a \mathbf{Z} -module, and the concepts of *generalized l.c.m.* and *generalized G.C.D. (Greatest Common Divisor)* have been defined by using the cyclic \mathbf{Z} -modules generated by the components periods. Unfortunately the solution is not trivial, so that we still haven't found an easy way to deep it with the students, then at this moment we are content with the answer about the operating with Werner's formulas.

2. Fourier polynomials and series

This part represents the fundamental core of the whole path on Fourier analysis, leading the students to understand how every periodic phenomenon is a sum of harmonics. Its goals are the following ones:

- to acquire the concept of approximating periodic functions by means of trigonometric polynomials,
- to calculate and draw Fourier polynomials,
- to distinguish among mean square, pointwise, uniform approximation,

- to introduce the concept of Fourier series and the problem of its convergence,
- to realize the links between the mathematical concept of mean square convergence and the physical concept of conservation of the energy.

To perform the exercises we expect the students to have acquired the concepts given in the foregoing part, as well as the concepts of Fourier coefficients, euclidean norm, energy.

Even if the first experiments have been carried out before the coming of S.M.S., using only numerical and graphic output, we recommend a software able to manage symbolic calculations, because it allows to make calculi easier and to consider a wide range of examples.

The exercises are like the ones reported below; the requests are the same for all groups, even if the given functions can change.

Exercise 2.1

Given the periodic function of period p :

$$f(x) = \cos x \quad 0 < x < \pi$$

Use the computer to:

1. Draw the function.
2. Compute its Fourier coefficients.
3. Superimpose to $f(x)$ the graphs of its Fourier polynomials of order respectively 3, 5, 15, 50:

$$F_3(x), F_5(x), F_{15}(x), F_{50}(x);$$

4. Calculate the mean square approximations q_n given by polynomials $F_n(x)$, being:

$$q_n = \|f(x) - F_n(x)\|^2$$

and fill them in Table 7.

5. Calculate $s_n(x) = |f(x) - F_n(x)|$ for:

$$x = 0$$

$$x = \pi/2$$

$$x = 3.13$$

$$x = \pi$$

and fill them in Table 7.

TABLE 7
Approximations of $f(x)$ given by its Fourier polynomials

$F_n(x)$	$\ f(x) - F_n(x)\ ^2$	$s_n(0)$	$s_n(\pi/2)$	$s_n(3.13)$	$s_n(\pi)$
$F_1(x)$					
$F_2(x)$					
$F_3(x)$					
$F_4(x)$					
$F_5(x)$					
$F_{10}(x)$					
$F_{15}(x)$					
$F_{20}(x)$					
$F_{50}(x)$					

By looking at the data in Table 7, and by the known theory, answer to the following questions:

1. What happens to mean square approximation when $n \rightarrow \infty$?
Does the Fourier series of $f(x)$ converge in mean square?
2. What happens to the sequence of the values of $s_n(x)$ in each given point x , when $n \rightarrow \infty$?
Does the Fourier series of $f(x)$ pointwise converge in those points?
3. How is the following limit worth?

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (0, \pi)} |f(x) - F_n(x)|$$

4. In what intervals does the Fourier series of $f(x)$ uniformly converge?

Figure 4 reports the graphs of the Fourier polynomials as in Exercise 2.1.

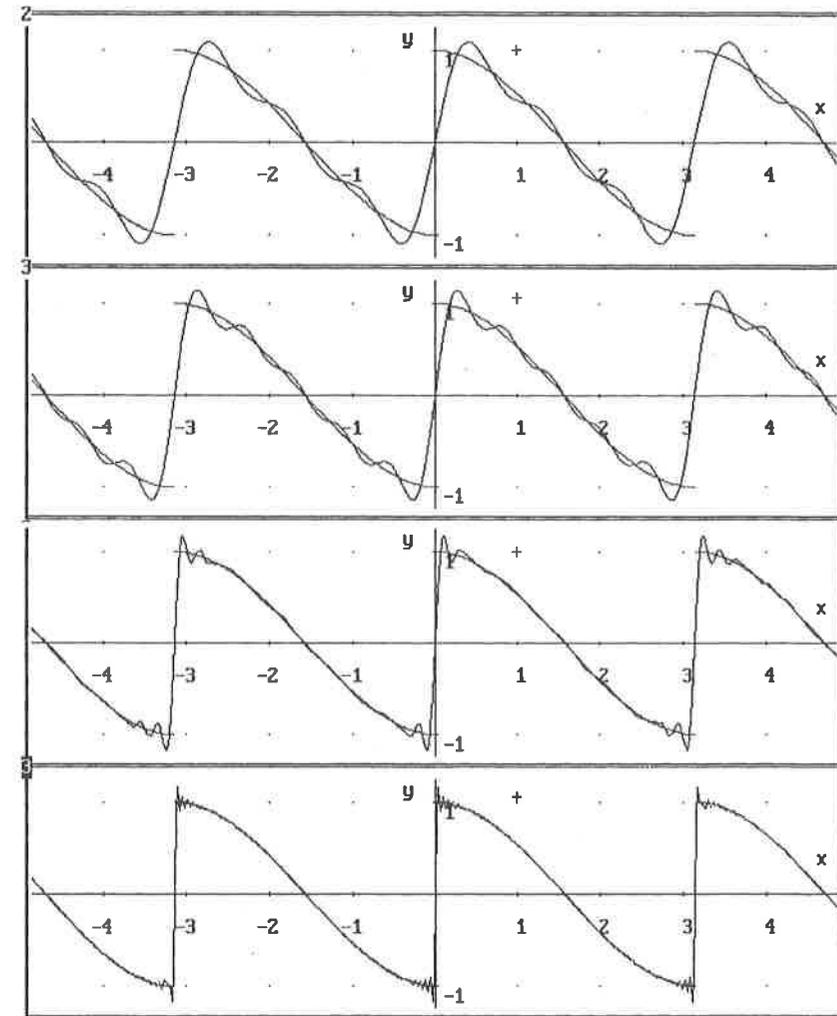


Figure 4:
Fourier polynomials of order 3, 5, 15, 50, of $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$.

Exercise 2.2

Given the same function as in Exercise 2.1, use the computer to:

1. Calculate the energy $\|f(x)\|^2$ of the signal given by the function $f(x)$, then fill it in Table 8;

TABLE 8
Energies of the signal and of its harmonics

function	analytic expression	energy
$f(x)$		
1-st harmonic		
2-nd harmonic		
3-td harmonic		
4-th harmonic		
5-th harmonic		
10-th harmonic		
15-th harmonic		
20-th harmonic		
k - th harmonic		

2. Calculate the energies of its harmonics, by mean of the Fourier coefficients found in Exercise 2.1, then fill them in Table 8.

By looking at the data in Table 8, and by the known theory, answer to the following questions:

1. What happens to the sequence of the harmonics energies when $n \rightarrow \infty$?
2. What relationship links the $\|f(x)\|$ to Fourier coefficients?

Because these exercises are carried out in pair with the theoretical development, usually the students' answers are correct; the visualization given by the computer helps the building of a correct concept image [12] of the different kinds of convergence; the numeric evaluation of the approximations requested in Table 7 gives a more precise idea about the behavior of Fourier series related both to the kind of convergence and to the point we consider.

In particular about the sequence of the energies of harmonics the students have no problem in noticing that it tends to zero like the square of the coefficients; a lot of them take care to check the convergence of the corresponding series to the signal energy; in the same way they are able to calculate and to correctly analyze the mean square approximation given in the first column of Table 7; they compare the values obtained by direct calculation of the norm with the ones obtained, according to Parseval formula, by sum-

ming the squares of the coefficients, and then they have no problem to visualize the mean square convergence as the decrement of the area included between the graphs of the function and the sequence of its Fourier polynomials.

The analysis of the sequences of the pointwise difference $s_n(x)$ is less trivial for the students, particularly at the discontinuities, where the series $F(x)$ converges pointwise to the mean of the limits of the function, according to the formula:

$$F(x_0) = [f(x_0^-) + f(x_0^+)]/2$$

For example in Table 7 we notice the behavior of $\cos x$; the differences between the function and the sequence of polynomials are constant in three points: the discontinuities 0 and π , where they are 1, because the series tends to 0, while the function limits are respectively 1 and -1 , and the point $\pi/2$, where the differences are all 0, because all Fourier polynomials and the function are 0; for $x = 3.13$, on the contrary, the sequence of the differences behaves as the students are used to expect, that is it decreases to 0.

By the comparison among these behaviors, students manage to distinguish between pointwise and uniform convergence, while the graphics capabilities of the computer allow them to visualize the first case as the trend to the simple superimposition of the graphs, and the second one as the trend of the polynomials graphs to remain in a littler and littler strip symmetric to the function graph.

A very fascinating thing for the students is the Gibbs' phenomenon; we don't ask anything about it, but all the groups having to analyze a discontinuous function can observe it on the screen, and many groups engage in a deeper personal analysis.

Usually they try to find the maximum (or the minimum) of the Fourier polynomial of order n nearest the discontinuity point; then they check their results both by zooming graphically and by tabulating the found values ([6]).

Conclusions

In this paper we have described a learning path to introduce Fourier analysis, that has been carried out from the long experience of a group of teachers, some working in technical high schools, some in the Engineering School at the Politecnico of Torino.

In particular, the exercises in section 1, concerning singular and finite sum of harmonics, were originally proposed to the students of a technical high school for Electronics and Computer Science [5]. We think it is worth to propose them in an almost identical form to our higer level students as elementary but necessary introduction to Fourier analysis. Another important remark about section 1 is that the student faces here a parti-

cular aspect of the interplay discrete-continuous [10]. Precisely, when considering the graph of the function

$$\sin \sqrt{5}x + \sin \sqrt{2}x$$

on the screen (see Figure 2), he realizes that its periodicity cannot be decided only on the basis of computer experiments: whatever conjecture he made has to be demonstrated as a rule.

About the exercises in section 2, they are a classic example in which the graphical power of the computer is used to help the building of concepts, in this case the concepts of mean square, pointwise, uniform convergence of the Fourier series.

Besides we have paid a particular attention to numerical questions, asking the students to tabulate the approximations given by Fourier polynomials; in this way they can have an alternative representation of the different kinds of convergence in order to better build these concepts [2].

The exercises in section 2 are, as we have already remarked, the real core of our course on Fourier analysis; in fact the natural continuation of the present path would be a computer-aided presentation of Fourier transform and Discrete Fourier Transform, starting from Fourier coefficients, as described in [3].

Finally, we underline the strict interaction between lectures in the classroom and practices in the laboratory so that these activities have to be suitably co-ordinated.

References

- [1] B. CORNU (1993), The computer: Some Changes in Mathematics Teaching and Learning, *Advanced Educational Technologies for Mathematics and Science*, D.L. Ferguson, Ed., NATO ASI Series, Computer and System Sciences, vol. 107, Springer-Verlag, Berlin, pp. 687-707.
- [2] T. DREYFUS (1991), Advanced mathematical thinking processes, in *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [3] M. ELIA, M. T. GALIZIA, M. MASCARELLO (1995), From Fourier coefficients to Fourier Transform and DFT: a computer-aided path with DERIVE, to appear on *The International DERIVE Journal*.
- [4] M. T. GALIZIA ANGELI, C. MARCONI (1990), Sui periodi delle composizioni di funzioni trigonometriche: i concetti di m.c.m. e di M.C.D., *Archimede*, Anno XLII, Gennaio-Marzo '90, pp. 3-15
- [5] M. T. GALIZIA, C. MARCONI, M. MASCARELLO, A. R. SCARAFIOTTI (1993), Experiences of Computer Laboratory in Mathematics Teaching, *Advanced Educational Technologies for Mathematics and Science*, D.L. Ferguson, Ed., NATO ASI Series, Computer and System Sciences, vol. 107, Springer-Verlag, Berlin, pp. 585-615.

- [6] M. T. GALIZIA, M. MASCARELLO (1993), Different kinds of software in teaching integration and Fourier series, *Collegiate Microcomputer*, Vol. XI, n. 4, pp. 264-274.
- [7] M. T. GALIZIA, M. MASCARELLO (1993), Symbolic Mathematical Systems in teaching integration and Fourier series, in Conference Proceedings *Technology in Mathematics Teaching*, TMT93, B. Jaworski ed., Birmingham, pp. 253-260.
- [8] M. T. GALIZIA, M. MASCARELLO (1995), Esercitazioni sull'analisi di Fourier con l'aiuto dell'elaboratore, *Actas de las Jornadas sobre Nuevas Tecnologias en las Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad*, A. Montes, J. M. Brunat eds., Barcelona, pp. 143-152.
- [9] B. R. HODGSON, E. R. MULLER (1992), The impact of Symbolic Mathematical Systems on Mathematics education, in *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching*, B. Cornu and A. Ralston eds., UNESCO, pp. 93-107.
- [10] M. MASCARELLO, B. WINKELMANN (1992), Calculus teaching and the computer. On the interplay of discrete numerical methods and calculus in the education of users of mathematics, in *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching*, B. Cornu and A. Ralston eds., UNESCO, pp. 108-116.
- [11] A. RICH, J. RICH AND D. STOUTEMEYER (1994) *DERIVE version 3, A Mathematical Assistant for your Personal Computer*, Soft Warehouse, Inc., Honolulu, USA.
- [12] D. TALL (1986), Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics, *Phil. D. Thesis*, University of Warwick.

Sombras cónicas

José Miguel Celorrio Laseca

Instituto de Bachillerato «Castilla». Grupo de Astronomía. Soria

1. Introducción

Unos de los primeros fenómenos curiosos que un aficionado a la astronomía puede observar, son las curvas que traza el extremo de la sombra de un gnomon sobre un plano horizontal a lo largo de un día. Una mínima reflexión nos lleva a concluir que, puesto que la altura del Sol sobre el horizonte no es constante, estas curvas serán diferentes según los días del año. También podríamos pensar que son «paralelas», alejándose o acercándose al gnomon según el Sol esté más bajo o más alto respectivamente. Pero nada más erróneo. Dando paso a la experimentación, observamos, en nuestras latitudes, cómo en otoño e invierno estas curvas tienen apariencia «parabólica», con sus brazos alejándose hacia el noreste y noroeste, mientras que en primavera y verano lo hacen hacia el sureste y suroeste. Además, según va pasando el invierno va disminuyendo su curvatura y acercándose más a la base del gnomon, de manera que cuando empieza la primavera se han transformado en una recta que va de este a oeste, a una cierta distancia de la base del gnomon. Continúa, según va avanzando esta estación, curvándose hacia el sur. En el solsticio de verano alcanza su curvatura máxima y su posición más meridional, invirtiéndose el proceso durante el verano y otoño.

El objeto de estas líneas es dar explicación a este fenómeno aclarando que las curvas que aparecen pueden considerarse cónicas. Veremos qué tipo de cónicas según el punto del hemisferio norte en el que se observen y los elementos más característicos de dichas cónicas. En el hemisferio sur sería análogo.

2. Consideraciones astronómicas

La Astronomía esférica prescinde de las distancias de la Tierra a los astros, y considera sólo las visuales, como si todos los astros estuvieran en una superficie esférica de centro la Tierra y radio indeterminado. Las intersecciones de esta superficie con el eje de la Tierra y el plano de su ecuador se llaman respectivamente polos y ecuador celestes.

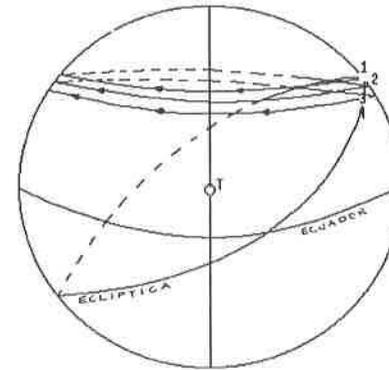


Figura 1

Todas las estrellas, a lo largo de un «día sidéreo» dan una vuelta completa describiendo un meridiano. El Sol va retrasándose, aproximadamente un grado diario y ocupando posiciones distintas 1,2,3,4,... a lo largo de la eclíptica.

El Sol en su movimiento aparente anual recorre una circunferencia máxima, llamada eclíptica, que cruza el ecuador celeste en dos puntos (equinociales). El ángulo trazado durante el recorrido del Sol por la eclíptica en el transcurso de un día no llega a un grado, prácticamente inapreciable, por lo que en un día determinado podemos considerar al Sol fijo en un punto de la eclíptica.

El efecto aparente debido al movimiento de rotación de la Tierra, es que toda la esfera celeste y, por supuesto el Sol, gira entorno a ella. (Ver fig 1).

Vamos a considerar, entonces, la Tierra como origen de referencia. De esta forma el Sol, durante un día, se mueve describiendo, aproximadamente puesto que su declinación apenas varía, un paralelo cuya latitud es igual a la declinación del Sol durante ese día. El extremo de un gnomon colocado en un punto cualquiera de la superficie terrestre puede considerarse un punto fijo en el espacio, tan relativamente cerca del centro de la esfera celeste que se puede confundir con él. El rayo de Sol que incide en la punta del gnomon, va describiendo en el transcurso del día, como línea generatriz, una superficie cónica con vértice el extremo del gnomon eje paralelo al terrestre y ángulo $\alpha = 90 - d$ entre el eje y la generatriz ($d =$ declinación del Sol). (Fig. 2).

El plano horizontal del lugar donde está colocado el gnomon, corta a esta superficie imaginaria, de forma que la distancia con su vértice es igual a la altura del gnomon. Además la intersección de estas dos superficies es, obviamente, la línea que describe el extremo de la sombra del gnomon. Por lo que dicho trazado es, aproximadamente, una cónica.

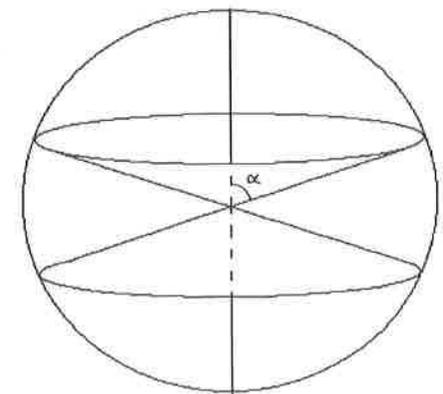


Figura 2

3. Clasificación de las cónicas

El ángulo β que forma el plano horizontal con el eje de la superficie cónica es igual a la latitud del lugar y por lo tanto variable con él.

El ángulo α es diferente según la época del año, varía en función de la declinación del Sol. Oscila entre 67° durante los solsticios y 90 grados durante los equinocios. Sin embargo no depende del lugar puesto que se considera que los rayos del Sol inciden paralelamente en todos los puntos de la superficie terrestre.

Si la declinación del Sol es positiva, en primavera y verano, el Sol se encuentra en el hemisferio norte de la esfera celeste y los rayos solares pasan del cono norte de la superficie cónica al sur. Por lo que la sombra sería la intersección del plano con el cono sur. En otoño e invierno ocurre lo contrario y la sombra sería la intersección con el cono norte.

La línea norte-sur, en el plano horizontal, es la intersección de éste con el plano del meridiano que contiene al gnomon. Es un eje de simetría de las cónicas, y su vértice será el punto de la sombra más cercano a la base del gnomon, que coincide con la intersección con dicha línea.

Si la declinación del Sol es nula, la superficie cónica degenera en un plano, paralelo al ecuatorial, por lo que la intersección con el horizontal es una recta perpendicular al plano del meridiano del lugar, por lo que marca la dirección este-oeste. Su distancia a la base del gnomon sería $h/\text{tg}(90-l)$; (h = altura del gnomon, l = latitud del lugar).

Caso 1.º: $\beta > \alpha$

Este caso sólo tiene sentido cuando la declinación, d , es positiva.

La intersección del plano horizontal con la superficie cónica será una elipse, base de un cono cerrado con vértice, V , en el extremo del gnomon. (Ver fig. 3).

Uno de los focos de la elipse estaría en el punto de tangencia con el plano horizontal de la esfera inscrita en el cono citado.

El plano del meridiano que contiene al gnomon corta a la superficie cónica y al plano horizontal, formando un triángulo NVS . Su base estaría sobre la dirección norte-sur y sería el eje mayor de la elipse: $NS = 2a$; su altura h sería la del propio gnomon. Como conocemos sus tres ángulos: $V = 180 - 2d$, $S = d - 90 + l$, $N = d + 90 - l$, tenemos:

$$2a = \frac{h}{\text{tg}N} + \frac{h}{\text{tg}S}; n = \frac{h}{\text{sen}S}; s = \frac{h}{\text{sen}N}$$

n es el lado opuesto a N , s es el lado opuesto a S

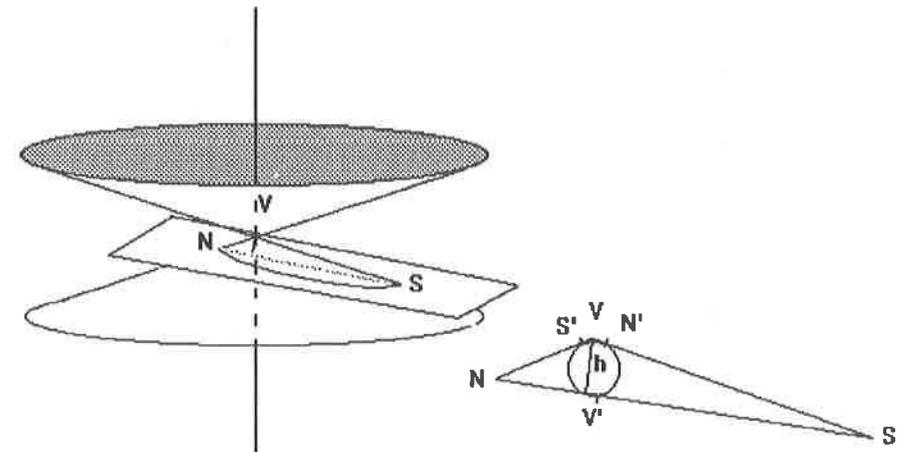


Figura 3

El punto de tangencia entre la circunferencia inscrita al triángulo y el lado $2a$, sería un foco de la elipse. Considerando los tres puntos de contacto V' , N' y S' de la circunferencia inscrita en el triángulo VNS , dividen a sus lados en seis segmentos cuya suma es el perímetro $2p$. Como son iguales los pares de segmentos concurrentes en cada vértice, tres de ellos no concurrentes sumarán el semiperímetro p , y sumándolos de dos en dos obtenemos los tres lados. Por lo que $p = NV' + SN' + N'V'$; donde $NV' = p - n$. Con lo que queda determinada la elipse.

Como caso particular, en el Polo, la elipse sería circunferencia con centro en la base del gnomon, ya que el plano horizontal corta al eje de la superficie cónica perpendicularmente.

Caso 2.º: $\beta < \alpha$

La intersección es una hipérbola.

El plano horizontal corta al cono norte y al sur de la superficie cónica. La intersección del plano del meridiano que contiene al gnomon con la superficie cónica y el horizontal es un triángulo NVS . $V = 2d$, $N = 90 - l - d$, $S = 90 + l - d$. El lado NS marca la dirección norte sur en el plano horizontal y además es el eje mayor de la hipérbola, $NS = 2a$. Si la altura del gnomon es h tenemos

$$2a = \frac{h}{\text{tg}N} + \frac{h}{\text{tg}(180-S)}; s = \frac{h}{\text{sen}N}; n = \frac{h}{\text{sen}(180-S)}$$

Como hemos dicho, en primavera y verano la sombra sería la intersección del plano horizontal con el cono sur, por lo que sólo aparecía dicha rama de la hipérbola. Su foco sería el punto de tangencia, V'' , de la circunferencia exinscrita al triángulo NVS con la prolongación del lado NS hacia el sur. Si N'' y S'' son los puntos de tangencia con las rectas SV y NV , tendremos que $NS'' = NV''$ por lo que $NV + VN'' = NS + SN'' = p$, p el semiperímetro. De donde $SN'' = SV'' = p - NS = p - 2a$.

De forma similar se calcularía el otro foco.

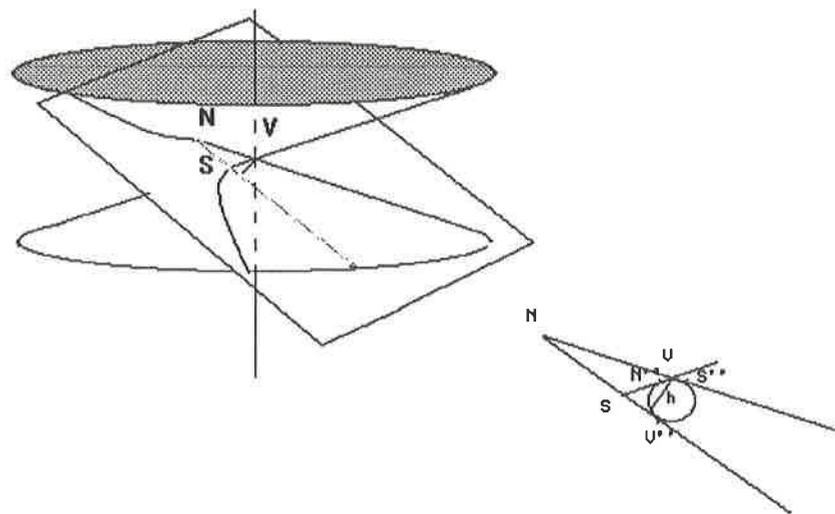


Figura 4

Como hecho curioso reseñamos que las direcciones asintóticas serían dos generatrices de la superficie cónica, paralelas al plano horizontal, o sea el rayo solar del amanecer y del atardecer.

En otoño-invierno, el Sol se encuentra por debajo del ecuador celeste, por lo que sus rayos pasan del cono sur al norte y la sombra resulta ser la intersección del plano horizontal con el cono norte. Las sombras de dos días en los que el Sol tiene declinaciones opuestas constituyen las dos ramas de una misma hipérbola.

Caso 3.º: $\alpha = \beta$

La intersección del plano horizontal con la superficie cónica es una parábola, en el cono sur.

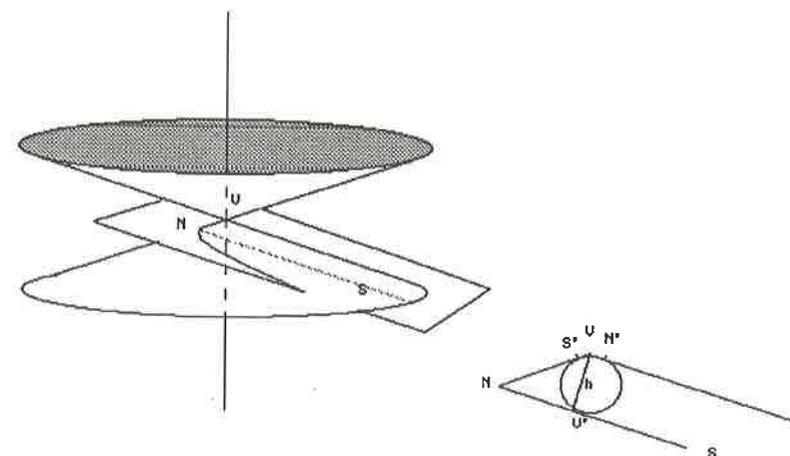


Figura 5

La intersección del plano del meridiano que contiene al gnomon con la superficie cónica y el plano horizontal contiene dos generatrices que se cortan en V y la recta Norte-Sur, eje de la parábola, en el plano horizontal, paralela a una generatriz y que corta a la otra en el punto N , formando un ángulo $2d$. En N estaría el vértice de la parábola. La altura h del gnomon es la distancia entre las dos líneas paralelas mencionadas. El foco de la parábola sería el punto de tangencia, V' , con la línea Norte-Sur del plano horizontal de la circunferencia inscrita en los ángulos V y N . Si designamos por S' el punto de tangencia con el segmento VN , y N' el de contacto de dicha circunferencia con la generatriz, tendremos:

$$NV' = NS', N'V = S'V \text{ y } NV' + S'V = NV$$

$$NV' - S'V = NV \cos(2d)$$

por lo que

$$\overline{NV'} = \frac{\overline{NV} (1 + \cos 2d)}{2}$$

En las circunstancias de este tercer caso, cuando la declinación del Sol es positiva, éste permanecería visible sobre el horizonte las 24 horas del día salvo en un instante, a las 0 horas y 24 horas, que estaría exactamente sobre el horizonte. El rayo de Sol de ese instante constituye la dirección del punto del infinito de la parábola.

Si la declinación es negativa, el Sol sólo llegaría a asomarse un instante por el horizonte, indicando con su rayo la dirección Norte-Sur; y permaneciendo oculto durante las 24 horas.

Bibliografía

- [Fa] FABREGAT, J. y otros: *Curso de Astronomía*. Teoría y práctica. Ed. Ecir.
[Pu] PUIG ADAM, P.: *Curso de Geometría Métrica*. Tomos I y II.

Parchís de operaciones

A. Teresa Castañeda Escudero y Miguel Angel Sanz Poyo

Profesores del I.E.S. «León Felipe» de Benavente

Consiste en un juego de parchís cuyas casillas llevan distintas operaciones indicadas, en las que aparece una incógnita x .

Pueden participar de dos a cuatro jugadores y se necesitan los siguientes materiales:

1. Tablero de parchís con las operaciones.
2. Dados y fichas.
3. Papel y bolígrafo para realizar las operaciones.

Las reglas del juego son las siguientes:

1. Los jugadores lanzan un dado y comienza el juego aquel que obtenga mayor puntuación.
2. Cada jugador juega con una ficha única.
3. Será necesario obtener un cinco en alguna tirada para sacar la ficha de casa y comenzar a contar.
4. Una ficha avanzará un número de casillas igual a la puntuación obtenida en la tirada, sustituyendo en la casilla en la cual queda, la x por dicho valor y anotando el resultado final en el marcador del jugador que la ha lanzado, sumándolo a la cantidad acumulada en jugadas anteriores.
5. Si una ficha llega a una casilla ya ocupada por otra, ésta deberá irse a casa y los puntos que tuviera el jugador correspondiente deberán ser repartidos en partes iguales entre los dos jugadores cuyas fichas se encontraron, siempre que la casilla no esté coloreada, en cuyo caso el juego continuará normalmente.
6. Por cada seis que se saque, después de anotar la puntuación obtenida se volverá a lanzar el dado, excepto si se saca por tercera vez consecutiva, en cuyo caso se irá para casa y tendrá que dividir la puntuación acumulada hasta entonces por tres, volviendo a comenzar el recorrido cuando se obtenga un nuevo cinco.
7. Al concluir el recorrido del parchís, cada jugador dispondrá de cuatro casillas finales con las operaciones: suma, resta, cociente y producto (casilla final). Cada vez que un jugador cae en una de esas casillas deberá sumar, restar, dividir o multiplicar el total de sus puntos acumulados por el valor obtenido en esa tirada.

8. El juego termina cuando una ficha finaliza el recorrido llegando a la casilla final tras una tirada exacta, no pudiendo mover en caso de que el valor del dado sea mayor que el número de casillas que faltan para terminar, obteniendo una bonificación de 50 puntos. Ganará el juego aquel que obtenga mayor puntuación acumulada.

Damos en la figura la forma en que queda el tablero, con las operaciones indicadas en sus casillas.

ROJO		SUMA		ROJO		AZUL	
		RESTA		COCIENTE		SUMA	
VERDE		SUMA		PRODUCTO		AZUL	
		RESTA		COCIENTE		SUMA	
VERDE		SUMA		PRODUCTO		AMARILLO	
		RESTA		COCIENTE		SUMA	
VERDE		SUMA		PRODUCTO		AMARILLO	
		RESTA		COCIENTE		SUMA	

Handwritten mathematical operations in the cells:

- ROJO (Top):**
 - Top-left: $3 - (x^2 + x)/3$
 - Top-right: $3x^2 - 2x$, $3x^2 + 1/x$, $x^2/2 - 2x$, $-x^2 - x^3$, $x^2/4 - 3x^2$
 - Middle-left: $2x/3 + 1/2$, $-x^2 + x^2/4$, $(-1) \cdot x$, $3x : 1/2$, $-x^2/4 - 3x^2$
 - Middle-right: $2x^2 + x^2$, $2x^2 + 1$, $1 + x^2$, $(x^2 - x^2) / 3$, $4x - 2x^3$, $4x^2 + 5$
 - Bottom-left: $2 + (x-1)/3$, $2 - x/3$, $x + x^2$, $1 - (x-x^2)/2$, $2/x - 3/x$
 - Bottom-right: $x^2 + x - 3$, $1/2 - 1/3$, $6x \cdot 5/4$, $2x - x^2$, $4x - x^2$, $3x - 7x^2$
- VERDE (Bottom):**
 - Top-left: $3/x + 2x^2$
 - Top-right: $2x - x^2/2$, $2/3 - x^2$, $x^2/3 + (1/2 - x)$, $3x : (x+1)/2$, $(x+1)/x + (x-1)/3$
 - Middle-left: $2 : (x+1)$, $4/3 : x/2$, $(x+1)/2$, $(x+1)/3$, $(x+1)/2$, $(x+1)/3$
 - Middle-right: $3x^2 - 1 - x$, $3x^2 + 3$, $x^2/2 + 3$, $3x^2 + x^3$, $2x^3 - 4x$, $(x-1)/5 - 2$, $(3x+1)/2 - 1$
 - Bottom-left: $(-x)^2/3$, $-x^2/3$, $3x^2 \cdot x^3$, $3/x + x$, $2x - x^3$
 - Bottom-right: $3x^2 + 3$, $3x^2 + x^3$, $2x^3 - 4x$, $(x-1)/5 - 2$, $(3x+1)/2 - 1$

Imagen mental de los estudiantes de Bachillerato sobre el concepto de función

María Dolores de Prada Vicente

Catedrática de Matemáticas e Inspectora de Educación

1. Marco teórico y conceptual

1.1. Introducción

Las nuevas matemáticas, han intentado a partir de los años 60 clarificar algunos conceptos a través de definiciones impecables, presentadas de manera (eso se creía), que los estudiantes no tuvieran más remedio que comprenderlas.

Uno de estos conceptos depurados y presentados matemáticamente fue el de función. El problema es que el aprendizaje de las matemáticas depende de algo más que de la exactitud de la definición. La forma de aprender de los alumnos lleva la impronta de sus experiencias personales, de su estructura cognitiva y de su propio estilo de aprendizaje.

La experiencia acumulada demuestra que los alumnos pueden repetir definiciones matemáticas impecables y al mismo tiempo haber formado una imagen mental distinta que se pone en conflicto con la definición aprendida.

El objeto del trabajo que presentamos es averiguar en la medida de lo posible las imágenes mentales que tienen nuestros alumnos sobre el concepto de función y la relación que existe entre éstas y su definición formal aprendida a través de la enseñanza y los textos escolares.

Esta imagen mental que el alumno no explicita y muchas veces evoca inconscientemente se puede descubrir a través de los errores que comete en la transferencia del concepto a situaciones concretas.

Para intentar buscar estos prototipos mentales, en relación con la noción de función, se ha llevado a cabo una experiencia (que presentamos en este documento) en 4 centros de Madrid capital, mediante la aplicación de un cuestionario a 180 alumnos de 3º y COU. La codificación de las contestaciones a este cuestionario nos ha permitido detectar las representaciones mentales del concepto de función y los errores que las falsas concepciones llevan emparejados y así poder diseñar estrategias didácticas encaminadas a la sustitución progresiva de estos errores por buenas teorías.

1.2. Evolución del concepto de función

El concepto de función ha sufrido una interesante evolución a lo largo de la historia. Se la ha considerado como una curva descrita por un móvil (S. XVII), una expresión analítica hecha de variables y constantes, una representación gráfica, una máquina input-output que permite relaciones más generales, hasta llegar al moderno concepto de función como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos o más formalmente como un subconjunto del producto cartesiano de $A \times B$ tal que para cada $a \in A$ hay exactamente un $b \in B$, tal que $(a, b) \in f$.

Freudenthal (1983) considera que la evolución del concepto de función se ha producido desde una noción de dependencia dinámica a una noción de teoría de conjuntos estática, o desde una noción operacional a una noción estructural.

Según Cañón Loyes (1993), la evolución del concepto de función pasa por tres etapas.

La primera, se extiende desde las más antiguas expresiones de correspondencias numéricas o geométricas hasta la modernidad.

En esta etapa no aparece la palabra función, pero el concepto de relación entre conjuntos está presente en las tablas, en el cálculo de proporciones y en los primeros intentos de los griegos de hacer expresable el cambio mediante el establecimiento de la relación entre dos cosas. En toda la Edad Media, el lenguaje que expresa las relaciones de funcionalidad es el lenguaje verbal y el geométrico.

Descartes, Newton y Leibnitz son los representantes de la segunda etapa. El lenguaje verbal y geométrico da paso al lenguaje algebraico para expresar las relaciones de funcionalidad y en este sentido se puede considerar a Descartes como el padre del concepto abstracto de función. Newton y Leibnitz lo desarrollan con su cálculo infinitesimal. En el libro de Euler *Introductio in Analysis infinitorum*, aparece la siguiente definición de función: «Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria de aquella cantidad variable y de números, o sea de cantidades constantes». Por tanto, una función es una expresión compuesta de potencias, logaritmos, razones trigonométricas, y de la variable x , sin que sea necesario expresar claramente cuáles pueden ser estas combinaciones. Esta definición de función es demasiado restrictiva para las necesidades de la física matemática, en concreto no puede satisfacer a las «curvas mecánicas» (aquellas curvas cualesquiera que son trazadas con referencia a un sistema de coordenadas y para las cuales no se conocen las ecuaciones que las representan).

En la tercera etapa, el concepto de función hubo de pasar por un proceso de generalización y clarificación de la mano de Fourier y Dirichlet (1805-1859). También Lobachevsky llegó en este periodo al mismo concepto de función. Dirichlet admitirá dentro

del concepto de función, las curvas discontinuas, a trozos, sin ecuación conocida etc. Lo importante para caracterizar el concepto no es la ecuación que determina la correspondencia entre variables, lo que importa es la correspondencia misma. La teoría de conjuntos ha permitido expresar la definición general de función de la manera en que hoy la conocemos.

Freudenthal (1983) considera que son dos las características más desarrolladas del moderno concepto de función: su naturaleza arbitraria y la univocidad.

La naturaleza arbitraria hace relación a que las funciones no tienen que exhibir ninguna regularidad, ni ser descritas mediante una expresión específica o un gráfico, tampoco tienen que estar definidas en conjuntos específicos, pueden estarlo en cualquier conjunto de objetos y éstos no tienen necesariamente que ser números.

La univocidad indica que a cada elemento del conjunto dominio sólo le puede corresponder un único elemento del conjunto rango. Esta característica no fue requerida en los comienzos. Freudenthal atribuye este requerimiento al deseo de los matemáticos de hacerlas más manejables.

1.3. Investigaciones sobre la representación mental del concepto de función, en los estudiantes de Enseñanzas Medias

Son bastantes las investigaciones que en la última década se han realizado en torno a la comprensión del concepto de función, tal como puede comprobarse en las referencias bibliográficas, pero las más importantes para nuestro trabajo son las siguientes:

Eisenberg (1992) que descubrió una fuerte tendencia en los estudiantes para concebir las funciones algebraicamente más que visualmente. El autor concluye que esto puede ser debido a que lo visual es más difícil de comprender, más difícil de enseñar y más rechazado por la mentalidad matemática de los profesores. Clements, ha demostrado que aunque el alumno dotado matemáticamente puede pensar visualmente, tiene una fuerte tendencia a no hacerlo y Krutetskii llegó más allá al declarar que la habilidad para visualizar no es un pre-requisito para tener talento matemático.

Ruhama Even (1993), que realizó una investigación sobre el concepto de función entre aspirantes a profesores de secundaria, concluía que estos profesores tienen un concepto imagen limitado y similar a los del siglo XVIII.

Para destacar el papel jugado por la representación mental de los conceptos, Vinner (1983) introdujo los términos de «concepto imagen» y «concepto definición».

Define el «concepto imagen» como la estructura cognitiva asociada con el concepto que incluye todas las representaciones mentales con las propiedades asociadas y procesadas.

El «concepto definición» es el enunciado usado para hacer explícito el concepto Estudios sobre el comportamiento de estudiantes de distintos países (Dreyfur & Eisenberg (1987), Lovell (1971), Marnyanski (1975), Vinner (1983), han encontrado que muchos de esos estudiantes no han adquirido el moderno concepto de función, y aunque hayan estudiado en los textos escolares la definición basada en la teoría de conjuntos, tienen un concepto imagen prototípico que dista mucho de esa definición. Así, de las conclusiones de estos estudios, se desprende que, generalmente, el concepto imagen de los alumnos sobre función es el de algo que puede representarse, mediante una recta o una curva bastante regular y familiar, esperan que las funciones exhiban gráficos bonitos, «regulares», «razonables» y que todas las funciones puedan expresarse mediante una fórmula. Muchos estudiantes no incluyen en su concepto de función, las funciones constantes, aquellas que tienen discontinuidades, las funciones a trozos o las funciones obtenidas por composición.

Para contrastar estos resultados con alumnos españoles hemos realizado una experiencia con alumnos de 3.º de Bachillerato y COU de varios Institutos de Madrid, que presentamos a continuación.

2. Desarrollo de la experiencia

2.1. Objetivos

1. Analizar las diferencias entre el concepto de función que los alumnos han estudiado, es decir el concepto definición y la aplicación en la práctica que hacen de este concepto, es decir su concepto mental o concepto imagen.
2. Estudiar los errores que cometen en sus contestaciones y arbitrar medidas didácticas eficaces para construir buenas teorías a partir de estos errores.

2.2. Descripción de la muestra

Se ha realizado la experiencia con 180 alumnos de los cursos 3.º de B.U.P.; 2.º de Bachillerato LOGSE y COU, en 3 Institutos y un Centro Privado de Madrid Capital. Los Institutos son: I.B. Isabel la Católica; I.B. Dámaso Alonso e I.B. Príncipe Felipe, el Centro Privado es el Colegio San Fernando de la Comunidad Autónoma.

El I.B. Isabel la Católica atiende una población estudiantil de 2.600 alumnos provenientes de diversas zonas de Madrid capital y barrios periféricos, el nivel socio-cultural y económico es, por tanto, muy diverso de unos alumnos a otros.

Los Institutos Dámaso Alonso y Príncipe Felipe están ubicados en la zona de Fuencarral (Barrio del Pilar), son centros de alrededor de 900 alumnos de nivel socio-económico medio.

El Centro San Fernando, ubicado en la carretera de Colmenar Viejo, es un colegio privado con 2.000 alumnos aproximadamente, que anticipa la reforma de las enseñanzas medias y de nivel socioeconómico medio bajo. Acuden alumnos de Madrid y también de pueblos de la zona norte. Cuenta con internado.

Hemos elegido sólo alumnos de 3.º, COU y 2.º Bachillerato LOGSE porque son los niveles terminales anteriores a la Universidad y se supone que al ser la función, un concepto nuclear en matemáticas lo han utilizado en múltiples ocasiones y han de tenerlo ya interiorizado.

El nivel de rendimiento de todos los alumnos es el correspondiente a una población normal, ya que no se ha hecho ninguna selección previa, ni los alumnos pertenecen a colectivos específicos.

2.3. Fases

La experiencia ha constado de tres fases:

- La primera fue la presentación del cuestionario a los profesores.
- La segunda, la cumplimentación del cuestionario por parte de los alumnos.
- La tercera, entrevista a los profesores, para aclaración de algunos términos y elaboración de conclusiones.

2.4. El cuestionario

El test que figura en el anexo es una adaptación para estos alumnos de un cuestionario aplicado por Ruhama Even (1993), del Instituto de Ciencia de Israel, a 160 aspirantes a profesores de Secundaria. Incluye 5 preguntas. Las dos primeras tienden a evaluar el «concepto definición» ya que se pide a los alumnos que escriban la definición de función y las diferencias existentes entre función y ecuación. Las otras tres preguntas del cuestionario pretenden averiguar cuál es el «concepto imagen», a través del reconocimiento de funciones en distintas formas y de la discriminación respecto a expresiones que no son funciones.

Estas tres preguntas van encaminadas a captar si entre las características del «concepto imagen» los alumnos incluyen la arbitrariedad y la univocidad.

2.4. Análisis e interpretación de los resultados

a) Respecto a la definición de una función

Las contestaciones a la primera pregunta del test, indican que los alumnos se dividen en cuatro grupos respecto al «concepto definición»:

1. La función es una correspondencia (44%).
2. La función es una expresión o ecuación (33%).
3. La función es una representación gráfica (10%).
4. Otras definiciones (4%).
5. No contestan (9%).

Para la mayoría de los alumnos función no es lo mismo que ecuación por las siguientes razones:

- a) Porque la función es la representación de la ecuación;
- b) Porque en la ecuación no aparece el término;
- c) Porque la ecuación es la definición de la función;
- d) Porque la ecuación es una igualdad de términos;
- e) Porque la función es la expresión de una recta o una curva y la ecuación no;
- f) Porque hay funciones que no se pueden representar por medio de ecuaciones.

b) Reconocimiento de funciones

b1) ¿Cuántas funciones existen que pasen por dos puntos dados?

Las contestaciones a la tercera pregunta, indican que la mayoría de los alumnos (90%), consideran que por dos puntos pasan infinitas o muchas funciones, solamente el 9% manifiestan un dominio lineal, pues creen que por dos puntos solo pasan rectas. También la mayoría de los alumnos (77%) consideran que por tres puntos pasan infinitas o muchas funciones. Sin embargo, el test de la univocidad sólo lo han pasado en este caso el 22%.

b2) ¿Cuántas funciones existen que pasen por los tres puntos de la pregunta 4?

También a esta pregunta la mayoría de los alumnos consideran que por esos tres puntos pueden pasar infinitas funciones, pero sólo el 20% contestan que no puede haber una función en que un elemento tenga dos imágenes.

b3) ¿Cuales de las expresiones de la pregunta 5 son funciones?

La pregunta n.º 5 plantea una serie de expresiones que unas están relacionadas con el moderno concepto de función y otras no. La mayoría de los alumnos han identificado como funciones la primera y la segunda de tales expresiones, ya que son las más familiares a ellos. Es significativo que la tercera expresión, sólo la mitad de los alumnos no la identifique como una función. Esto es debido a que los dos conjuntos seguidos de

una flecha evocan en los alumnos una correspondencia aunque no exista el criterio. Respecto a la cuarta expresión, los alumnos se encuentran divididos en partes iguales y esto es debido a la palabra correspondencia con que se inicia esta expresión. La quinta expresión la identifican como función el 58% de los alumnos, la mayoría de los que no lo hacen es debido a que consideran que no es función porque no puede ser representada, y la última expresión tampoco la identifican con una función, sino con tres puntos que dicen no estar entre sí relacionados, porque a simple vista no se puede ver la regla de formación.

Esta pregunta tiene mucho interés, porque mediante el estudio de las justificaciones que dan a cada uno de los casos, nos permite contrastar el «concepto definición» con el «concepto imagen».

c) Relación entre el concepto imagen y el concepto definición

Para realizar este estudio hemos buscado la relación entre la definición de función que dan los alumnos a la primera pregunta del test y la aplicación de este concepto que hacen a través de las contestaciones a todas las demás preguntas.

En cuanto a la definición de función ya hemos visto que los alumnos consideran las funciones:

- a) como correspondencias, con o sin univocidad,
- b) como expresiones,
- c) como representaciones.

La relación que buscamos es si su definición corresponde a la aplicación de esta definición en ejemplos concretos. Mediante la técnica del análisis de contenido se ha constatado a través de las contestaciones de los alumnos, de los ejemplos que ponen y sus expresiones o dibujos, la existencia de las siguientes categorías:

1. Existencia de una regla.

En esta categoría se evalúa si el alumno considera la existencia de una regla como una condición necesaria para que exista función. Se puede evaluar fundamentalmente en las contestaciones a 5b), 5c), 5d), 5e), 5f).

2. Univocidad.

Esta categoría supone la necesidad de que a cada elemento del conjunto inicial le corresponda sólo uno en el conjunto final. La univocidad se puede evaluar fundamentalmente en las contestaciones a la pregunta 4 y a las expresiones a), d), e).

3. Gráficos familiares.

Se evalúa si los alumnos sienten la necesidad de que las funciones se expresen mediante gráficos y estos sean de los conocidos en sus estudios de matemáticas. La necesidad de que las funciones se expresen con gráficos familiares se puede ver a través de las contestaciones a las preguntas 3 y 4 y a la expresión a) y b).

4. Gráficos bonitos, regulares y razonables.

Se evalúa en esta categoría si los alumnos asocian una función con la existencia de una gráfica regular, sin discontinuidades, cúspides, o sinuosidades. La necesidad de que las funciones se expresen con gráficos bonitos y razonables, se observa en las contestaciones a las preguntas 3 y 4 y a las expresiones a), d) y g).

5. Linealidad.

El predominio de la linealidad se ve en las contestaciones a las preguntas 3 y 4.

6. Existencia de fórmulas, variables o incógnitas.

Se evalúa si los alumnos consideran imprescindible para la existencia de una función que ésta venga expresada o pueda expresarse mediante una fórmula, con términos en x o cualquier otra variable. La necesidad de existencia de variables o incógnitas en las funciones se puede ver en las contestaciones a las expresiones a), c), d), f).

7. Necesidad de igualar el dominio al rango.

Se evalúa si los alumnos condicionan la existencia de una función a que la correspondencia sea suprayectiva. La necesidad de igualar el dominio al rango se ve fundamentalmente en las contestaciones a las expresiones b) y c).

8. Representabilidad de la expresión.

La necesidad de que la expresión sea representable para clasificarla como función se puede observar a través de las contestaciones a las expresiones b), c), d), e).

Las categorías 3, 4, 5, 6, 7, 8, nos indican si los alumnos han conseguido la característica esencial de la arbitrariedad para las funciones.

La categoría 1, si además de los conjuntos es esencial para ellos la existencia de una regla.

La categoría 2 define la univocidad.

La codificación de las contestaciones se observa en la siguiente tabla, que expresa porcentajes.

	Alumnos que en la definición incluyen correspondencia	Alumnos que en la definición incluyen correspondencia y univocidad	Alumnos que en la definición incluyen expresión solamente	Alumnos que en la definición incluyen representación solamente	Alumnos que en la definición incluyen expresión y representación
PORCENTAJE SOBRE EL TOTAL DE CADA COLUMNA					
1. Existencia de una regla	46	34	21	21	32
2. Univocidad	54	79	10	14	18
3. Gráficos familiares	33	44	44	36	64
4. Gráficos bonitos, razonables	37	6	24	0	36
5. Dominio lineal	21	6	17	14	14
6. Existencia de fórmulas, variables o incógnitas	12	12	28	43	23
7. Igual dominio a rango	21	17	10	14	4
8. Expresión, siempre representable	17	12	34	64	91

Si consideramos que el concepto definición, para estos alumnos, es el que han utilizado en la primera pregunta y su concepto imagen es cómo esta definición la llevan a la práctica en la resolución de los ejercicios propuestos de la tabla anterior se deduce, que sólo la mitad de los alumnos que en su concepto definición incluyen la correspondencia, reconocen funciones como correspondencias. Sin embargo, de los alumnos que en su concepto imagen incluyen la univocidad, el 80% reconocen como funciones las correspondencias unívocas.

De los alumnos que han definido la función como una expresión representable, para el 91% coincide su concepto imagen con su concepto definición, es decir reconocen como función es solamente las representables. Y aquellos que la han definido solamente como expresión, el 64% admiten como funciones sólo aquellas expresiones representables.

El predominio de la linealidad, es decir creer que las funciones son siempre funciones lineales es la categoría que menos representada está.

Los alumnos que en su definición de función incluyen representación y expresión son los que más necesitan los gráficos familiares para identificar funciones, y en contraste los que sólo incluyen representación en su definición.

3. Análisis de errores y estrategias didácticas

En matemáticas, el conocimiento es indisoluble de la comprensión, por eso los errores son útiles no sólo al alumno sino también al profesor.

Los trabajos de Laurence Vinnot en Física, han demostrado la existencia en los alumnos y en los adultos de *modelos espontáneos* diferentes de los modelos teóricos. Después de que los aprendizajes han hecho adquirir nuevos modelos a los alumnos estos modelos espontáneos permanecen, cohabitan con los modelos aprendidos y conservan su campo de aplicación.

Muchas veces, estos modelos espontáneos son teorías falsas, opiniones aberrantes, automatismos defectuosos que se convierten en verdaderos teoremas- alumnos y persisten y se afianzan con el paso del tiempo y del aprendizaje.

El profesor que conozca estos modelos espontáneos podrá orientar a los alumnos en la sustitución por los nuevos con estrategias didácticas adecuadas para que los aprendizajes se asienten establemente en su estructura cognitiva.

Las investigaciones de Mac Gregor de la universidad de Melbourne sobre análisis de errores en la formulación de ecuaciones, las de Vinner sobre concepto imagen y concepto definición o las de Borassi sobre estrategias para sacar ventaja de los errores que cometen los alumnos, nos indican la importancia que el análisis de los errores tiene en orden a la elaboración de estrategias didácticas eficaces.

Los estudios sobre investigación de errores e ideas falsas en los estudiantes de matemáticas (Radatz 1979-1980, Confrey 1990, Graeber & Jhonson 1991), que están de acuerdo con un punto de vista constructivista, ven los errores no solamente como una parte inevitable del aprendizaje, sino como una fuente valiosa de información acerca del proceso de aprendizaje, como una clave que los profesores e investigadores tienen para descubrir lo que los estudiantes realmente saben y cómo han llegado a construir tal conocimiento. Tal pensamiento en torno a los errores representa un considerable avance comparado con el conductismo y proporciona contribuciones importantes a la educación matemática, e invita a los estudiantes a sacar ventaja de los errores como oportunidades importantes de instrucción. Dentro de esta línea, solamente se implica a los investigadores y profesores, no a los estudiantes, a la actividad creativa de analizar los errores, aunque el potencial de los errores para generar nuevas cuestiones y exploraciones probablemente todavía, salvo excepciones, no ha sido explotado y reconocido.

Por tanto, una manera de enfocar la acción didáctica puede ser a partir del análisis de errores que cometen los alumnos, para descubrir los aprendizajes mal adquiridos, los conceptos no elaborados, los automatismos defectuosos, los procesos incompletos. Este mismo análisis nos advertirá acerca de la manera de aprender, acerca de la presencia de obstáculos de naturaleza didáctica, acerca del sentido de la enseñanza.

Sin dejar de tener en cuenta que los errores tienen un contexto específico y que las explicaciones que se dan son para dicho contexto, y que pueden variar para otras situa-

ciones, se han considerado en este trabajo sólo aquellos errores que contabilizan al menos un 10% de las contestaciones y se han obtenido los siguientes:

3.1. Respeto a lo arbitraria

Todos los errores vienen a indicar que bastantes alumnos sólo admiten funciones bien definidas, donde se pueda saber qué número corresponde a otro número mediante la aplicación de una regla o la solución de una ecuación, generalmente no admiten funciones definidas en otros conjuntos que no sean numéricos, ni funciones de las que no se pueda conocer su ecuación.

Estos errores pueden provenir de la forma en que se han presentado a los alumnos las experiencias sobre funciones que ha inducido en ellos la creación de una imagen mental determinada por unas características entre las cuales no está la *arbitraria*.

Una estrategia didáctica eficaz en este caso es proponer ejemplos de funciones que:

- No puedan ser representadas.
- Se obtengan de un experimento científico que no permita la determinación de una fórmula.
- Estén definidas entre conjuntos no numéricos.
- También es importante explicar y aplicar en contextos no matemáticos cada una de las palabras que aparece en la definición de función.

3.2. Respeto a la representación gráfica

Los errores vienen a indicar que en algunos casos los alumnos disocian función y representación gráfica (una cosa es la función y otra su representación gráfica) El alumno ve muchos objetos (gráfica, tabla, diagrama relación) donde sólo hay uno: función.

En otros casos, supeditan la naturaleza de la función a su representación gráfica (no es función porque no se puede representar o porque resultaría una gráfica muy rara).

Además las funciones deben exhibir gráficas admisibles y que respondan a estándares prefijados (deben tener asíntotas, máximos, mínimos, no deben tener puntos sueltos, ni ser demasiado raras).

Una estrategia didáctica que podría ser eficaz en esta situación podría consistir en independizar el concepto de función de su representación gráfica. Un ente matemático es una función si cumple las condiciones dadas en la definición, Además en algunos casos se puede representar.

Sería conveniente, aplicando el principio de Dienes de la variabilidad perceptiva: Proponer ejemplos de funciones en todas las situaciones imaginables: con discontinuidades,

des, puntos sueltos, puntos singulares, etc. Utilizar todas las formas posibles de representación mental de las funciones (enunciados, diagramas, conjuntos de pares ordenados, graficas, expresiones algebraicas, etc.).

3.3. Respecto a los conjuntos dominio y rango

Los componentes de una función (dominio, regla, rango) son frecuentemente fuentes de error, mas a menudo el dominio y el rango a pesar de que en nuestra enseñanza los profesores suelen insistir mucho en el cálculo de dominios y rangos. Puede ser que dicho cálculo se convierta en un automatismo mecánico que oscurece la verdadera naturaleza del concepto, ya que los alumnos en bastantes casos consideran que:

- El dominio y el rango deben ser conjuntos iguales (es decir, toda función debe estar definida de \mathbb{R} en \mathbb{R} , de \mathbb{Z} en \mathbb{Z} o de \mathbb{N} en \mathbb{N}).
- Creen que de un número natural no se puede producir un número real.

El error de considerar que $f(x) = 4$ no es una función porque es un punto, es un error sistemático que se da en otros países y es una constante en muchas investigaciones, así como el considerar que todas las funciones deben ser suprayectivas.

Una estrategia didáctica en este caso, podría ser el paso gradual de la utilización de la correspondencia a la fórmula matemática.

Los profesores que explican la función como correspondencia, inmediatamente pasan a utilizar las funciones mediante fórmulas o expresiones algebraicas. Este salto debe hacerse gradualmente, invirtiendo tiempo en relacionar la expresión matemática con la regla que hace pasar de un conjunto de números a otros, indicando la naturaleza y extensión de cada uno de los dos conjuntos numéricos, que no siempre son iguales, ni en cuanto a la naturaleza de los números que lo forman, ni en cuanto a su extensión.

El error puede provenir de que al hacer explícitos los conjuntos dominio y rango se pone el mismo nombre y los alumnos confunden los conjuntos en los que se está operando con los conjuntos resultantes de la operación.

Muchos alumnos creen que en las funciones, el dominio debe ser igual al rango, y que la imagen en una función debe ser un número de la misma clase que el original, es decir la imagen de un número natural debe ser un número natural, otro error consiste en creer que las funciones deben ser aplicaciones suprayectivas.

3.4. Respecto a la regla que establece la correspondencia

En el apartado d), consideran que no es función porque el 3 no tiene ninguna relación con el 0.

Bastantes alumnos consideran que hay correspondencia cuando hay una expresión de este tipo $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, aunque no exista regla de formación.

La expresión del apartado d) no es función porque no se pueden dar valores.

3.5. Respecto al dominio de la línea recta

Parece que en esta experiencia no se ratifican los resultados de otras investigaciones ya que los alumnos consideran que hay otras muchas funciones además de la función lineal que pasan por dos puntos dados, e incluso al proponer ejemplos de funciones acuden mas frecuentemente a funciones no lineales.

Pocos alumnos, un 10% del total, consideran que por dos puntos sólo se pueden trazar rectas.

3.6. Conclusión parcial

El análisis de los errores observados y de las definiciones del concepto de función formuladas nos lleva a concluir que existen en los alumnos inconsistencias entre las definiciones que dan y la aplicación de esta definición al reconocimiento y construcción de funciones.

Las falsas concepciones sobre el concepto de función bastante extendidas en la población estudiantil examinada, son las siguientes:

- *La creencia de que una función debe manifestarse o poder manifestarse siempre a través de una expresión algebraica.*
- *La creencia de que una función siempre debe poder ser representada.*
- *La creencia de que el conjunto dominio y el conjunto definición de una función deben ser iguales.*

4. Conclusiones generales

1. Los libros de texto que han manejado estos alumnos, presentan el concepto de función en su acepción moderna, es decir como una correspondencia o como una aplicación entre conjuntos, exigiendo la característica de la univocidad, y generalmente limitándose a funciones numéricas. Están familiarizados por tanto con la idea de una función que implica relación entre dos conjuntos de números, que supone la existencia de un conjunto de definición o dominio, un conjunto de valores y una ley que expresa la dependencia de los valores de un conjunto respecto de los del otro. Sin embargo su «concepto

imagen» de función en bastantes de ellos responde a la idea vigente en la historia de etapas matemáticas anteriores. Es decir, la función sería una expresión matemática, o una representación, o una expresión que puede ser representada y generalmente su representación habría de coincidir con imágenes familiares a su experiencia: rectas, curvas continuas y redondas, parábolas hipérbolas, etc.

2. En relación con el concepto imagen de función, se puede decir que casi el 90% de los alumnos en una u otra forma no aceptan la arbitrariedad de una función, consideran que la función debe poder ser representada, que debe responder a una regla de formación o que debe poder ser expresada mediante una fórmula.

La univocidad la reconocen un 35% de los alumnos, incluso aunque no la hayan incluido en su concepto definición.

3. Generalmente los alumnos forman este concepto imagen a partir de las experiencias de funciones con que se han encontrado.

Así, si las funciones que han trabajado se le dan fundamentalmente mediante una fórmula, tenderán a creer que la existencia de fórmulas es esencial para una función. Si además a estas fórmulas la mayor parte de las veces se les asocia una representación, el alumno tenderá a creer que lo esencial de las funciones es que tengan una fórmula y que además pueda ser representada, dado que la mayoría de los ejercicios que se le presentan a los alumnos en los niveles medios son fórmulas que producen una representación familiar y bastante regular, el alumno identificará las funciones con fórmulas que producen representaciones razonables.

Esto refuerza la idea de Vinner y Dreyfus (1989) de que los estudiantes prestan más atención a los aspectos computacionales u operacionales que a los conceptuales.

4. El proceso de aprendizaje de los alumnos está influido sólo en parte por la enseñanza del profesor ya que alumnos del mismo profesor llegan a desarrollar imágenes mentales bastante diferentes.

5. Tampoco la lectura de los mismos libros desarrolla idénticas imágenes mentales en cuento al concepto de función.

6. En algunos casos, la lectura de libros diferentes y la enseñanza con profesores también diferentes (en el caso de alumnos americanos y españoles) llega a desarrollar representaciones mentales similares.

7. Una mayoría de estos alumnos no acepta la arbitrariedad de las funciones, espera que estén expresadas mediante fórmulas o expresiones algebraicas que contengan variables. Necesitan que todas las funciones respondan a una regla de formación conocida o que pueda conocerse. Requieren que las funciones se puedan repre-

sentar y que estas representaciones sean gráficas admisibles por ellos (no demasiado raras).

8. También mayoritariamente consideran que donde hay representación gráfica hay función, aunque sólo un 25% se para a considerar si cumple las condiciones enumeradas en la definición de función. También una mayoría cree que aquello que no puede ser representado no debe considerarse como función.

9. Los conjuntos dominio y rango son fuente de bastantes errores para estos alumnos, a pesar de que la enseñanza que reciben insiste mucho en el cálculo de ellos. Así, una mayoría de estos alumnos creen que todas las funciones deben ser suprayectivas y que el conjunto imagen debe estar contenido en el conjunto inicial.

10. No se ratifica en este estudio una conclusión obtenida en otras investigaciones (Marcovits y colaboradores, 1986) acerca del dominio de la representación lineal sobre otro tipo de representaciones no lineales. Al ejemplificar tipos de funciones los alumnos piensan más en representaciones tipo parábola, elipse, hipérbola que en la línea recta.

11. Parece que existe en el caso de los errores una fuente sistemática de producirlos que es independiente de la enseñanza oral o escrita recibida, que se genera en la propia estructura cognitiva y en la cual influye poderosamente la historia de las experiencias del alumno y su estilo cognitivo.

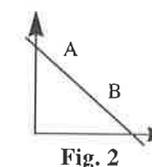
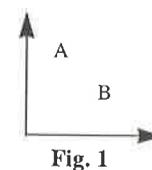
Referencias bibliográficas

- BARNES, M. (1988). *Understanding the function concept: Some results of interviews with secondary and tertiary students*. Research on Mathematics Education in Australia, 24-33.
- BELL, A. (1986). *Diagnostic teaching: Two developing conflict-discussion lessons*. Mathematics teaching, 116, 26-29.
- CAÑÓN LOYES, C. (1993). *La matemática, creación y descubrimiento*. UPCO. Madrid.
- CONFREY, J. (1990). *What constructivism implies for teaching*. In R.B. Davis, C. A. Maher, & Noddings (Eds). *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*, 107-122. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- DAVIS, R.B. & VINNER, S. (1986). *The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception satges*. Journal of Mathematical Behaviour, 5(3), 281-303.
- DREYFUS, T. & EISENBERG, T. (1987). *On the deep structure of functions*. Proceedings of the eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Montreal: Université de Quebec.

- DREYFUS, T. & VINNER, S. (1982). *Some aspects of the function concept in college students and junior high school teachers*. Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
- DREYFUS, T. & VINNER, S. (1989). *Images and Definitins for the Concept of Function*. Journal for research in Mathematis Education, 20, 356-366.
- EISENBERG, T. (1991). *Functions and associated learning difficulties*. En: Advanced mathematical thinking. David Tall. Kuwer Academic Publishers.
- FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht. D. Reidel.
- GRAEBER, A.O. & JOHNSON, M.L. (1991). *Insights into secondary school students' understanding of mathematics*. Final report to the National Science Foundation.
- LOVELL, K. (1971). *Some aspects of the growth of the concept of a function*. In M.F. Rooskopf L.P. Steffe, Piagetian cognitive development research and mathematical education. Reston V.A.
- MALIK, M.A. (1980). *Historical and pedagogical aspects of the definition of a function*. International Journal of Mathematics Education in Science and Tecnology, 11 (4), 489-492.
- MARNYANSKI, A. (1975). *Psichological characteristics of pupils' assimilation of the concept of function*. In J. Kilpatrick, Soviet studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics XIII. Chicago: University of Chicago Press.
- MARKOVITS, Z.; EYLON, B. & BRUCKHEIMER, M. (1986). *Functions today and yesterday*. For the Learning of Matheamtics, 6,18-24.
- RADATH, H. (1979). *Error analysis in mathematics education*. Journal for Research in Mathematics Education, 10, 163-172.
- RUHAMA EVEN. (1993). *Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept*. In Journal for research in mathematics Education. Vol. 24, n.º 2. NCTM. Reston.
- RUIZ HIGUERAS, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- SIERPINSKA, A. (1988). *Epistemological remarks on functions*. Proceedings of the twelfth International conference for the Psychology of Mathematics Education, 568-575. Vespem, Hungary.
- TALL, D. (1991). *The transitió to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof*. Adavanced mathematical thinking. David Tall. Kuwer Academic Publishers.
- VINNER, S. (1983). *Concept definition, concept image and the notion of function*. The International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology, n.º 14.
- VINNER, S. & HERSHKOWITZ, R. (1980). *Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts*. Proceedings of the Fourt International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 177-184) Berkeley.

ALUMNO CURSO
CENTRO

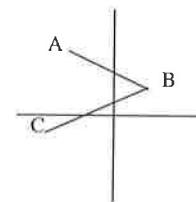
1. Escribe una definición de función
2. ¿Es lo mismo función que ecuación? Si no es lo mismo, explica por qué.
3. A un alumno se le pide que ponga un ejemplo del gráfico de una función que pase por los puntos A y B (figura 1). El estudiante da la respuesta de la fig. 2.



Cuando se le pregunta si hay otra respuesta al estudiante dice: «No».

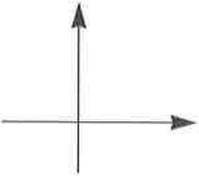
- * Si piensas que el alumno tiene razón. Explica por qué.
- * Si piensas que el alumno está equivocado. ¿Cuántas funciones que satisfacen la condición puedes encontrar? Razona la contestación.

4. Preguntado un alumno sobre cómo sería la gráfica de una función que pase por los alumnos A, B, C, ha dado la siguiente contestación:



- ¿Es correcto?, ¿hay otra respuesta correcta? Da un ejemplo.
¿Puedes encontrar otro? ¿Cuántos?
Si no, ¿cuál sería la respuesta correcta?

5. \mathbf{R} es el conjunto de los números reales y \mathbf{N} el conjunto de los números naturales. Un alumno dice que las expresiones de a) y f) **no son funciones**.

a)  b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
 $f(x) = 4$ c) $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$

d) Una correspondencia que asocia el número 1 con cada número positivo, el -1 con cada número negativo y 3 con el 0.

e) $g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es un número racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional} \end{cases}$

f) $\{(1,4), (2,5), (3,9)\}$

Para cada uno de los casos anteriores, contesta si el estudiante acertó o se equivocó. Razona cada una de sus decisiones.

- a) Correcto Equivocado ¿por qué?
- b) Correcto Equivocado ¿por qué?
- c) Correcto Equivocado ¿por qué?
- d) Correcto Equivocado ¿por qué?
- e) Correcto Equivocado ¿por qué?
- f) Correcto Equivocado ¿por qué?

La Inteligencia Artificial en los Juegos

José Ignacio Giráldez
Miguel Ángel Gallardo

Coordinador de la sección de Juegos del Boletín

Resumen

Nuestro objetivo es el de ofrecer al lector una introducción a la visión con la que se contempla el mundo de los juegos desde la perspectiva de la Inteligencia Artificial, destacando aquí el interés que presenta el estudio de los juegos como campo de desarrollo y prueba de técnicas de más amplia aplicabilidad.

1. Introducción

Es una gran inquietud, inherente al ser humano, la que desde siempre le ha llevado a construir máquinas para la realización de tareas de complejidad creciente. En un principio, el único cometido de estas máquinas fue el aliviar al ser humano de pesadas y tediosas actividades físicas. Más tarde, se buscó también el que las máquinas fueran capaces de relevar al ser humano en algunas tareas que involucraban el intelecto humano, como en cálculos y toma de decisiones. Y todavía se ha ido más lejos, puesto que ya no se trata únicamente de reemplazar al ser humano en labores físicas o intelectuales, sino que además se pretende superar al ser humano en tareas cuya realización precisa fundamentalmente de la inteligencia (por ejemplo en los juegos).

2. Inteligencia Artificial

Lo que podríamos definir como «Inteligencia» depende en buena medida de nuestro bagaje cultural y científico, ya que los matemáticos, pero también los informáticos, psicólogos, filósofos, pedagogos, y otros científicos, poseen visiones sutilmente diferentes sobre lo que es la Inteligencia.

Siempre se puede tratar de llegar a una definición consensuada que contemple las características de la Inteligencia que se consideren irrenunciables por cada disciplina. En el caso de la Informática, estas características son las siguientes. En primer lugar, para poder calificar el comportamiento de un agente como inteligente, es imprescindible que el agente sea capaz de valerse efectivamente del conocimiento sobre un problema para resolverlo.

Es decir, que una característica del comportamiento inteligente es el uso efectivo del conocimiento sobre aspectos de un problema para resolver un caso particular de ese problema, u otro equivalente, o al menos aproximarse a la solución. Además, hay otra característica que consiste en la capacidad de aprendizaje del agente, que es consustancial a su Inteligencia.

Una vez que hemos tratado sobre qué es la Inteligencia podemos intentar delimitar qué entendemos por Inteligencia Artificial y cuales son sus objetivos. La Inteligencia Artificial pretende reproducir en los agentes comportamientos inteligentes. Pero debido a que esta inteligencia será el resultado de la aplicación de ciertas técnicas, conviene adherirle el calificativo de Artificial, para así enfatizar que es una Inteligencia con una génesis distinta a la de la Inteligencia que pueda desarrollar el lector, por ejemplo.

En cuanto a los objetivos de la Inteligencia Artificial, siempre se ha mencionado como uno de los más relevantes el de ser capaz de resolver problemas inteligentemente, de la misma manera que lo hace un humano. Para ello se precisa un análisis de cómo resuelven el problema en cuestión los humanos, y después la aplicación de técnicas adecuadas para emular tal resolución. Este enfoque proporciona una luz que guía por el camino a seguir en la construcción de un sistema inteligente, pero también presenta una gran limitación. Los problemas pueden resolverse inteligentemente también por métodos que no emplean los humanos (frecuentemente porque no les son intuitivos) y estos métodos de solución proveen en ocasiones de soluciones mucho mejores en algún aspecto.

Constituye pues una limitación el no contemplar el uso de técnicas diferentes a las que emplearía un humano en la solución de un problema, ya que la inteligencia que se limita a emular la propia del ser humano no tiene por qué ser mejor que la difícilmente comparable a la humana. Es decir, que el sistema más inteligente puede no ser el que más se parezca, en su comportamiento, al del ser humano, por mucho que nos cueste admitir la lógica de esta afirmación.

Esta limitación surge con frecuencia porque el que diseña el sistema inteligente piensa más fácilmente en términos de cómo con su inteligencia resuelve el problema un humano, que en los términos más ideales de cómo se resuelve mejor el problema, aunque sea por una vía poco intuitiva y distinta a los razonamientos humanos habituales en ese dominio.

En cuanto a la relevancia del papel desempeñado por lo que científicamente se define como conocimiento, podemos asegurar que es fundamental para la resolución inteligente de los problemas. Existen problemas que han de ser abordados por métodos de solución con explosiva complejidad temporal, y que cuando se dispone de cierto

conocimiento previo sobre el problema, pueden resolverse mucho más rápidamente que cuando se desconoce. Esto sucede precisamente en sus aplicaciones para juegos, que sirven muy bien como campo de pruebas para medir cuántos recursos (i.e. tiempo y espacio) pueden ahorrarse gracias a la disponibilidad y buen uso del conocimiento.

3. Motivación del estudio de los juegos

Como prueba del siempre presente deseo humano de vencer a la complejidad mediante la construcción de ingenios, no nos resulta sorprendente que la motivación para la construcción de máquinas capaces de jugar a complicados juegos haya interesado, e incluso obsesionado, la mente de brillantes científicos e ingenieros.

La primera de ellas [1], inventada en el siglo XVIII, posee una historia muy curiosa. En 1769 Wolfgang von Kempelen construyó una máquina capaz de jugar por sí misma al ajedrez, al parecer con un elevado grado de maestría según se comentó en la época. Llegó a derrotar, entre otros, a Federico El Grande, rey de Prusia. «El turco», que fue como se bautizó a la máquina, causó perplejidad entre quienes conocían el estado del arte de la ciencia y la técnica del momento, porque ellos sabían bien que por entonces no era posible la construcción de tal ingenio.

Bastante después, ya en 1834, el secreto que guardaba von Kempelen fue desvelado: la «máquina» era en efecto un fraude, ya que si bien albergaba inteligencia, ésta no era artificial, sino la inteligencia de un experimentado jugador de ajedrez que gracias a su reducida estatura podía introducirse en la máquina y jugar escondido contra sus cándidos oponentes.

Desde la perspectiva de la Inteligencia Artificial el estudio de los juegos está fuertemente motivado. Aquí presentamos algunas de tales motivaciones:

- 1) Muchos juegos tienen elevada complejidad, por ejemplo, se estima que el ajedrez tiene una complejidad espacial del orden de 10^{55} . Es decir, que existen 10^{55} situaciones legales diferentes de un tablero. Dado que un recorrido exhaustivo del espacio de estados posibles, en busca del que cumpla ciertas propiedades, puede ser inviable por limitaciones de tiempo o espacio impuestas por la tecnología informática disponible actualmente. Por lo tanto, estamos ante un problema intratable por su enorme magnitud, a menos que decisiones inteligentes nos permitan reducir el tamaño del espacio de estados a explorar, haciendo así el problema tratable con la tecnología actual. Por eso se dice [2] que uno de los logros de la Inteligencia Artificial consiste en tomar decisiones razonablemente buenas con recursos limitados. Los juegos constituyen, por tanto, un dominio ideal para la aplicación y el desarrollo de las técnicas de la Inteligencia Artificial que permite tratar tecnológicamente problemas que de otro modo resultarían completamente intratables por su complejidad.

- 2) Los juegos son problemas bien definidos, en el sentido de que sus reglas son muy precisas, y sus objetivos también. Esto no ocurre con muchos problemas de la vida real, en los que las reglas no son bien conocidas y no siempre se cumplen. Así pues un juego constituye un problema «de laboratorio», del que se puede conocer su estado con precisión y en el que es fácil medir el éxito y el fracaso, ya que la legalidad en los juegos está aislada y es ajena a perturbaciones externas (lo cual no ocurre en otras disciplinas como el Control Borroso o el Control Inteligente).
- 3) Siempre se ha considerado como signo de inteligencia el ser capaz de jugar bien a juegos complejos. Así que esto supone un reto para la Inteligencia Artificial, el objetivo consiste en jugar tan bien o mejor que los humanos. Si eso se consigue, en el camino se habrán desarrollado nuevas técnicas valiosas (como ya ha sucedido) y se habrá cumplido el objetivo de construir un agente cuyo comportamiento inteligente es fácilmente evidenciable. Incluso si no se consigue derrotar a todos los humanos en el juego (como ocurre actualmente en ajedrez o go), en el camino siempre se producen importantes avances en el campo de la Inteligencia Artificial, y se logra una comprensión cada vez mejor del problema, y las particularidades de sus soluciones.

4. La Solución de un Juego

El grado de solución de un juego puede ser variable, ya que a veces es posible saber si se va a ganar aunque no se sepa exactamente cómo. El objetivo de esta sección es especificar rigurosamente qué tipos de soluciones admiten los juegos. Para ello, empezaremos comentando dos definiciones de Paul Colley.

Un juego se considera *muy débilmente resuelto* si es conocido el valor teórico de juego de las situaciones iniciales. En otras palabras, si se conoce cuál será el desenlace del juego supuesto que los contendientes jueguen óptimamente. No es necesario para ello el conocer cómo se conseguirá un juego óptimo, sino que basta con conocer cual será el desenlace.

Un juego se considera *débilmente resuelto* cuando se conoce una estrategia que, partiendo de las posiciones iniciales del juego, permite conocer cuál será el desenlace del juego, empleando para ello recursos en cantidad razonable. Esta definición deja al sentido común, y a la tecnología disponible, el determinar qué es un uso de recursos en «cantidad razonable». Por lo general, por uso de recursos en cantidad razonable, se entiende el emplear las más avanzadas computadoras durante unos pocos minutos por cada movimiento de la partida. Es bien conocido que el juego de las tres-en- raya está débilmente resuelto: si los contrincantes juegan óptimamente, el desenlace es un empate siempre.

La siguiente definición se la debemos a Donald Michie, y va un paso más allá de las anteriores:

Un juego se considera *fuertemente resuelto* si para todas las situaciones legales se ha encontrado una estrategia que permite determinar el desenlace empleando recursos en cantidad razonable.

Esta definición se diferencia de las dos anteriores sobre todo en que no sólo contempla las situaciones iniciales del juego sino que se hace extensiva a todas las situaciones posibles. Entre los juegos resueltos en sentido fuerte se encuentran el tres-en- raya, el nim y algunas terminaciones del ajedrez.

Como ya se habrá percatado el lector, todo juego fuertemente resuelto también lo está débilmente resuelto. Al igual que todo juego débilmente resuelto, también está muy débilmente resuelto.

5. El Estado del Arte

Actualmente, los esfuerzos de los investigadores de la Inteligencia Artificial que se dedican al estudio de los juegos, en su mayoría se centran en los juegos de las Olimpiadas de Juegos por Ordenador. A continuación efectuaremos una rápida revisión del estado de la cuestión en estos frentes [3].

El *qubic* es el primero de los juegos de la Olimpiada que fue resuelto [4] a pesar de la respetable complejidad de su espacio de estados, que está alrededor de 10^{30} .

El *cuatro-en- raya*, aunque con una complejidad espacial menor (10^{14}), fue resuelto ocho años más tarde, en 1988, por Victor Allis.

Varias variantes de *go-moku* han sido resueltas hasta la fecha (complejidad del espacio de estados es 10^{105}) aunque en la variante de *go-moku* profesional el mejor programa no ha batido claramente a todos los mejores jugadores humanos aún.

También ha sido resuelto el juego «*nine men's morris*», muy recientemente, que tiene un espacio de estados con una complejidad muy pequeña (10^{10}) comparada con los otros. Si bien se trata de un juego complejo porque aunque no haya muchos estados, desde cada uno se puede llegar a muchos otros. Por eso, la complejidad del árbol del juego es elevada (al menos 10^{50}).

En *awari* y *othello* no hay ningún humano capaz de vencer a los programas campeones del mundo.

En las *damas* y el *ajedrez* no se ha conseguido que las máquinas venzan a los mejores humanos, pero en las damas se está ya cerca. En el ajedrez las máquinas juegan a un nivel comparable al de un Gran Maestro, aunque sin poder enfrentarse con éxito regular a campeones mundiales.

En el *ajedrez chino*, el *renju* y el *go* el nivel de juego alcanzado por las máquinas no llega al de Gran Maestro, en el caso del *go* ni al de jugador mediocre, lo mismo que ocu-

re en el *bridge*. En *scrabble* no hay todavía una medida fiable de la calidad de juego de los programas existentes.

En *backgammon* el nivel de los programas es bastante bueno, habiendo vencido a los campeones del mundo humanos en alguna ocasión.

6. Conclusiones

La Inteligencia Artificial tiene actualmente ante sí muchos campos, y en cada uno de ellos complejos desafíos, en los que cosechar importantes avances. No podía ser de otra manera en el caso de una disciplina tan sumamente joven como lo es la Inteligencia Artificial. Su aplicación a los juegos ya ha conseguido excelentes resultados en algunos casos, y entre ellos está el ser capaz de superar a todo jugador humano en la resolución de problemas muy concretos (juegos, partidas...) que precisan de inteligencia.

7. Referencias

- [1] C.M. CARROLL. *The Great Chess Automaton*, Dover Publications, Inc. New York, 1975.
- [2] S. RUSSELL, E. WEFALD. *Do the right thing*, MIT Press, 1992.
- [3] L.V. ALLIS, *Searching for Solutions in Games and Artificial Intelligence*, tesis doctoral, Julio 1994.
- [4] O. PATASHNIK, *Qubic: 4x4x4 Tic-Tac-Toe*, Mathematics Magazine, vol. 53, pp. 202-216.
- [5] J. SCHAEFFER, *Checkers: a preview of what will happen in Chess?*, University of Alberta Technical Report.

Reseña de libros

HONSBERGER, Ross: *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. The Math. Assoc. of America, NML37, 1995. 174 págs. ISBN 0-88385-639-5.

Durante una de las sesiones del Primer Congreso de la WFNMC (Federación Mundial de Competiciones matemáticas nacionales), celebrado en Waterloo (Canadá) en agosto de 1990, tuve el placer de asistir a la conferencia del Prof. Ross Honsberger, titulada *El Punto Simediano*. Esa exposición se encuentra ahora recogida en el capítulo 7 de la última obra publicada por la M.A.A., formando parte de una notable recopilación de resultados de *Geometría del triángulo* —en el sentido de Lemoine—, que, a menudo dispersos en obras de difícil acceso, el autor ha reunido y probado con el mínimo bagaje necesario de resultados previos.

Así, se pueden encontrar en este libro el círculo de Fuhrmann, el teorema de Miquel (o del pivote), los círculos de Tucker, los puntos de Brocard y el teorema del ortopolo, junto con resultados modernos como el punto de Rigby y el teorema de Haruki: ¡todavía hoy es posible descubrir algo en geometría euclídea! La brillantez de exposición del Prof. Honsberger, ampliamente contrastada en otras obras suyas: *Ingenuity in Mathematics* (hay versión española muy reciente en *La Tortuga de Aquiles*), *Mathematical Gems*, *Mathematical Morsels*, etc, queda también aquí puesta de manifiesto.

Cada capítulo contiene un pequeño conjunto de ejercicios, resueltos en un apéndice final.

Francisco Bellot Rosado
Valladolid, junio 1995

JUAN DE HERRERA. *Institución de la Academia Real Mathematica*. Edición y estudios preliminares de José Simón Díaz y Luis Cervera Vera. Instituto de Estudios Madrileños, Madrid, 1995.

A iniciativa de Juan de Herrera, el Rey Felipe II, a la sazón en Lisboa, determinó crear en Madrid una Academia de matemáticas y arquitectura civil y militar. De esta resolución se conservan tres Reales Cédulas de 25 de noviembre de 1582 con los tres primeros nombramientos para la tal Academia; se han perdido en cambio el Decreto de constitución de la Academia y el nombramiento como su director del propio Herrera.

En febrero de 1583 regresaron a Madrid el Rey y su séquito, y Herrera se ocupó de buscar casa en Madrid para la Academia y de prepararla para comenzar las clases el 1 de octubre: «*Lo que por acá tenemos de nuevo es que S.M. a instancia y suplicación mía ha instituido una cátedra de matemáticas que se lea en la corte, y así se va haciendo desde*

octubre acá, y créese que ha de ser de grande provecho para muchas cosas, y hasta agora no faltan oyentes y entendemos que tampoco faltarán.»

El 12 de enero de 1584 Herrera firmó la dedicatoria de la *Institución de la Academia Real Mathematica en Castellano, que la Magestad del Rey D. Phelippe II N.S. mandó fundar en su Corte*, que recibió la licencia real de impresión el 8 de junio siguiente.

Durante más de cuatro siglos se han ignorado los objetivos exactos y organización interna de la Academia por no conocerse ningún ejemplar de este texto; pero en la Biblioteca Mazarino de París D. José Simón, Profesor Emérito de Bibliografía de la Universidad Complutense, ha hallado un volumen que comprende dos obras de Herrera: *el Svmario y breve declaracion de los diseños y estampas de la Fabrica de san Lorenzo el Real del Escorial*, y la Institución que nos ocupa.

Es éste un librito de 40 páginas, editado en Madrid (1584) por Guillermo de Droy, y que es el que ahora se publica en edición facsimil por el Instituto de Estudios Madrileños, precedido por dos estudios de José Simón y Luis Cervera.

El texto comienza por unas consideraciones sobre el (pésimo) estado de las ciencias matemáticas en España y la importancia de las mismas. A continuación expone las especialidades que se han de cursar en la Academia, indicando las obras fundamentales que se han de estudiar en cada una: se habían de formar aritméticos, geómetras, músicos, cosmógrafos, pilotos, arquitectos, fortificadores, ingenieros, maquinistas, artilleros, maestros de instrumentos, fontaneros, niveladores, horologiógrafos y perspectivos.

Y termina Herrera: *Y porque la intencion de su Magestad, en auer mandado fundar esta Academia Mathematica, en vulgar ha sido para que, en beneficio y ennoblezimiento de sus Reynos, aya en ellos professores consumados de todas las disciplinas y artes sobredichas. Y para que esto aya efecto, y los estudiosos de ellas se animen y dispongan con determinacion al estudio dellas, su Magestad sera seruido, que a los que en esta escuela quisieren aprouecharse y salir examinados della, se les den sus cartas de aprouacion, y titulos en forma, conforme a la facultad que professaren. Con todas las honras, prerrogatiuas y preheminiencias que las Vniuersidades aprouadas suelen dar, y algunas mas, proueyendo (si conuiniessa) por ley y publico decreto, que ninguno sin ser examinado por las personas que para ello se nombrare, vse publicamente, ni exercite profession alguna de las arriba nombradas.*

De la vida de la Academia hasta la década de los 1620, y de los libros que fija Herrera para el estudio de las diversas disciplinas, encontrará el lector cumplida cuenta en los estudios de los Dres. Simón y Cervera que acompañan a esta obra felizmente recobrada para la historia de la matemática en España.

José Javier Etayo

Breve reseña de Congresos

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS CON DERIVE

Se celebró en la Universidad de Cantabria del 28 al 30 de junio 1995, como ya fue anunciado en nuestro anterior boletín, tratándose diversas facetas de la utilización del sistema Derive en la clase de Matemáticas y comentándose experiencias muy interesantes.

VI ENCUESTRO DE GEOMETRÍA COMPUTACIONAL

Organizado por la Universitat Politècnica de Catalunya, se celebró en Barcelona del 5 al 7 julio, como ya fue anunciado en nuestro anterior boletín, con participación de bastantes profesores españoles y algunos de los mejores especialistas extranjeros en esta disciplina.

7 JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Organizado por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo», se celebró en Madrid del 14 al 16 de septiembre, con participación de numerosos profesores y una excelente organización, que merece nuestra felicitación.

PRIMER ENCUESTRO DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL Y APLICACIONES

Organizado por el Departamento de Matemática y Computación de la Universidad de Cantabria, se celebró en Santander, el 18 y 19 de septiembre, con participación de numerosos profesores españoles y extranjeros, algunos de los cuales participaron en la reunión preparatoria para la creación de la Sociedad Española de Cálculo Simbólico, anunciada en otro lugar de este mismo Boletín.

PRIMER CONGRESO DE USUARIOS DE MAPLE

Organizado por el Departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla y Add Link Software Científico, se celebró los días 28 y 29 de septiembre, con participación de numerosos profesores interesados en este Sistema de Cálculo Simbólico.

Sociedad Española de Cálculo Algebraico y Simbólico

Se está gestando la creación de una Sociedad Española cuyos objetivos son la investigación, fomento, difusión y uso de la Computación Simbólica en sus diversos ámbitos (Universidad, Enseñanza Media, Industria, etc.), previendo también su inclusión en la Federación Internacional de tales Sociedades.

A tal fin se reunieron en Santander (a la finalización del Primer Encuentro de Algebra Computacional y Aplicaciones) un grupo de profesores asistentes a dicho encuentro, a instancias del profesor Tomás Recio de la Universidad de Cantabria.

En dicha reunión se acordó que de la puesta en marcha de esta sociedad se encargara una Comisión Gestora, constituida por varios profesores de distintas universidades, entre ellos Eugenio Roanes Lozano, vocal de nuestra Sociedad.

Aquellas personas interesadas en una más amplia información, pueden dirigirse al secretario de dicha Comisión Gestora:

Prof. Laureano González Vega
Universidad de Cantabria
Facultad de Ciencias
Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación
Avda. de los Castros, s/n.
39071 - SANTANDER
e-mail: secas@matsun1.unican.es

Problemas propuestos

Problemas propuestos en la XXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL celebrada en Canadá en Julio de 1995

Problema 1.º:

Sean A, B, C y D cuatro puntos distintos sobre una recta, en ese orden. Las circunferencias de diámetros AC y BD se cortan en los puntos X e Y . La recta XY corta a BC en el punto Z . Sea P un punto de la recta XY , distinto de Z . La recta CP corta a la circunferencia de diámetro AC en los puntos C y M , y la recta BP corta a la circunferencia de diámetro BD en los puntos B y N . Demuestre que las rectas AM, DN y XY son concurrentes.

Problema 2.º:

Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestre que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Problema 3.º:

Determine todos los enteros $n > 3$ para los cuales existen n puntos A_1, A_2, \dots, A_n en el plano, y números reales r_1, r_2, \dots, r_n que cumplen las condiciones siguientes:

- (i) Entre los puntos A_1, A_2, \dots, A_n no hay tres que sean colineales.
- (ii) Para cada terna i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) el triángulo $A_i A_j A_k$ tiene área igual a $r_i + r_j + r_k$.

Problema 4.º:

Encuentre el valor máximo de x_0 para el cual existe una sucesión de números reales positivos $x_0, x_1, \dots, x_{1,995}$ que cumple las condiciones:

(i) $x_0 = x_{1,995}$

(ii) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ para $1 \leq i \leq 1,995$.

Problema 5.º:

Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo, tal que:

$$AB = BC = CD,$$

$$DE = EF = FA,$$

$$\text{y } \angle BCD = \angle EFA = 60^\circ.$$

Sean G y H dos puntos del interior del hexágono tales que

$$\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ.$$

Demuestre que

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

Problema 6.º:

Sea p un número primo impar. Encuentre el número de subconjuntos A del conjunto $\{1, 2, \dots, 2p\}$ tales que

(i) el número de elementos de A es p ;

(ii) la suma de todos los elementos de A es divisible por p .

Problemas resueltos

PROBLEMA 1 (BOLETIN NUMERO 37)

Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de esa progresión son cuadrados perfectos.

Solución:

Todas las cantidades que vamos a introducir en este problema se van a suponer enteras.

Sean a_0 el primer término de la sucesión, y r el paso de la misma. Supongamos que para cierto n tenemos $a_n = a_0 + nr = a^2$. Se trata de ver si para algún $m \neq n$ se cumple $a_m = a_0 + mr = b^2$, o equivalentemente, si existe b tal que

$$m = \frac{b^2 - a_0}{r} = \frac{b^2 - a^2 + nr}{r} = n + \frac{b^2 - a^2}{r}$$

sea un entero. Escribamos $b = a + l$. Sustituyendo nos queda:

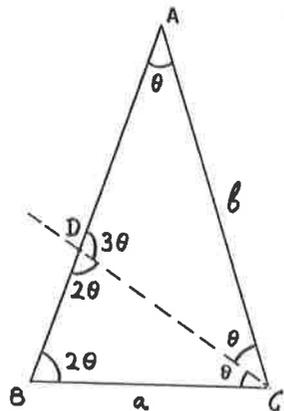
$$m = n + \frac{l(2a + l)}{r}$$

Así pues, si b es tal que l ó $2a + l$ son múltiplos de r , tendremos un m entero, esto es, a_m será un cuadrado perfecto. De aquí se deduce que existen infinitos términos de la sucesión que son cuadrados perfectos, como se quería demostrar.

Benito Hernández Bermejo

PROBLEMA 4 (BOLETIN NUMERO 37)

El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide $2/5$ de recto, siendo iguales sus ángulos B y C . La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D . Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD . Expresar la medida, a , del lado BC en función de la medida, b , del lado AC , sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.



Solución:

Llamaremos $\theta = \pi/5$, que es $2/5$ veces un ángulo recto, y $x = a/b$ la relación buscada. Entonces la construcción es la que se ve en la figura. En el triángulo BCD el ángulo B será 2θ y la bisectriz en C da dos ángulos de valor θ de modo que el ángulo restante del triángulo BCD es π menos los anteriores, es decir, 2θ .

Para completar el problema buscamos ahora la relación entre a y b . En primer lugar de la figura vemos lo siguiente:

$$2b \cos(\theta) = a \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{x}{2}$$

Y, por otra parte:

$$b \cos(\theta) + a \cos(2\theta) = b \Rightarrow \cos(\theta) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Igualando la última expresión del coseno de θ con la del ángulo mitad y elevando al cuadrado resulta:

$$\frac{1 + (x/2)}{2} = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 \Rightarrow x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$$

Factorizando esta ecuación se obtienen cuatro raíces reales:

$$(x + 1)(x - 2)(x + \tau_1)(x + \tau_2) = 0,$$

donde $\tau_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ y $\tau_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ son los números áureos. Resulta evidente que la única solución que satisface la geometría del problema es esta última y por tanto $a = |\tau_2| b$ es la relación pedida.

Benito Hernández Bermejo

PROBLEMA 9 (BOLETIN NUMERO 37)

Una urna tiene n bolas, $n-1$ blancas y una negra. Se extraen sucesivamente, y con reposición, n bolas. Sea p_n la probabilidad de obtener al menos una vez la bola negra. Hallar el límite de p_n , cuando n tiende a infinito.

Solución:

Tenemos que $p_n = 1 - \bar{p}_n$, donde \bar{p}_n es la probabilidad de no extraer ninguna vez la bola negra. Entonces:

$$p_n = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

Calculemos ahora el límite pedido:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}$$

Y así tenemos, por la definición del número e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = 1 - 1 \cdot \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e},$$

que es el límite buscado.

Benito Hernández Bermejo

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X los que interesen)

3	4	10	31	32	33
<input type="checkbox"/>					
34	35	36	37	38	39
<input type="checkbox"/>					

Envío adjuntos sellos para el franqueo.

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5 al 9, y 11 al 30 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas

Facultad de Educación (despacho 3517)

Paseo Juan XXIII, s/n

Ciudad Universitaria

28040 Madrid