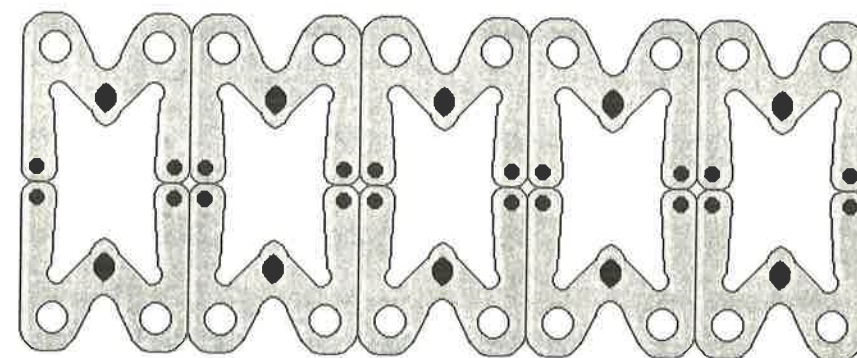


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»  
DE PROFESORES DE MATEMATICAS**



**BOLETIN N.º 40  
JUNIO DE 1995**

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de J. Fernández Biarge.

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L. - San Pedro, 23 bis - 28917 Leganés (Madrid).  
Teléf.: 611 59 94 - Fax: 611 59 88.

La portada de este número reproduce uno de los frisos del artículo titulado «Implementación de un paquete de dibujo de frisos», contenido en este boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS  
Facultad de Educación (despacho 3517)  
Paseo Juan XXIII, s/n  
Ciudad Universitaria  
28040 Madrid.

## ÍNDICE

	<u>Págs.</u>
Asamblea General Ordinaria .....	5
Don José María Torroja en el recuerdo .....	9
XXXI Olimpiada Matemática Española .....	13
Indice de Noticias sobre Olimpiadas Matemáticas .....	16
Resolución de sistemas de ecuaciones y sistemas dinámicos discretos, por Juan Bosco Romero Márquez, Benito Hernández Bermejo y M. <sup>a</sup> Angeles López y Sánchez Moreno .....	19
Funciones continuas y derivables en ninguna parte, empleando el programa Derive por Iván Castro Chadid .....	33
Implementación de un paquete de dibujo de frisos, por Martín Garbayo Moreno y Eugenio Roanes Lozano .....	39
Acerca de la red de tenis (con Derive), por Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías .....	55
El Monasterio de El Escorial, un trozo de Guadarrama ordenado por la Geometría, por Concepción Romo Santos .....	61
Matemáticas para Juegos, por Miguel Angel Gallado Ortiz .....	65
Congresos .....	69
Problemas propuestos .....	75
Problemas resueltos .....	77
Instrucciones para el envío de originales para su publicación en este boletín ...	93
Relación de otros artículos que han ido admitidos para ser publicados en próximos números de este boletín .....	93

## JUNTA DIRECTIVA

### Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

### Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS

(Madrid)

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

(Castilla-León)

SALVADOR HERRERO PALLARDO

(Castilla-La Mancha)

### Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE

(Redacción de publicaciones)

JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE

(Relaciones institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO

(Gestión de publicaciones)

MARTÍN GARBAYO MORENO

(Actividades y concursos)

### Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

### Vicesecretario:

MIGUEL ANGEL GALLARDO ORTIZ

### Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

### Bibliotecaria:

CARMEN GARCÍA-MIGUEL FERNÁNDEZ

## Asamblea General Ordinaria 1995

Nuestra Asamblea General Ordinaria correspondiente a 1995 se celebró el día 6 de mayo en los locales del Edificio «Pablo Montesino» de la Universidad Complutense de Madrid.

Presidida por D. Eugenio Roanes Macías, Vicepresidente por Madrid (en ausencia justificada y prevista del Presidente), dio comienzo a las doce horas. Excusó su asistencia el Secretario, D. Francisco Gonzalez Redondo, sustituyéndole en sus funciones el vicesecretario D. Miguel Angel Gallardo Ortiz. Se desarrolló con arreglo al siguiente Orden del Día:

**Punto primero.** Se leyó el acta de la sesión anterior (publicada en el Boletín número 37), que fue aprobada por unanimidad.

**Punto segundo.** El presidente en funciones informa sobre las Actividades de la Sociedad.

- a) Se informa que está previsto celebrar el XII Concurso de Problemas en aulas de la Facultad de Matemáticas (por gestión del presidente, prof. Etayo). D. Victor Manuel Sánchez, representante del Colegio de Doctores y Licenciados en el concurso de problemas informa del patrocinio de premios del concurso por parte de la firma comercial Coca-Cola y propone que la convocatoria de dicho concurso sea publicada en la revista SUMA, pero D. Julio Fernández Biarge indica que, por razones de plazo, ello no podrá hacerse hasta la convocatoria de 1996.
- b) Se informa sobre la celebración con éxito la «I Reunión Puig Adam» en el marco del III Simposio «Leonardo Torres Quevedo» (página 7 del Boletín número 39).

- c) Se informa sobre la Junta de Gobierno de la Federación (pág. 8 del Boletín n.º 39), en la cual nuestra sociedad estuvo representada por su tesorero, D. Alberto Aizpún, quien hizo aclaraciones sobre dicha reunión.
- d) Se informa sobre las gestiones llevadas a cabo para confeccionar el Boletín con su nuevo formato. D. Eugenio Roanes Lozano propuso la utilización de unas pastas de cartón mas duras para mejorar aún más su presentación y D. Victor Manuel Sánchez propuso la plastificación de sus cubiertas. Ambas propuestas quedan pendientes de presupuesto y estudio.
- e) D. Miguel Angel Gallardo propone la creación en el Boletín de una sección de Juegos Matemáticos, coordinada por él mismo. D. Julio Fernández Biarge pregunta si habrá suficientes publicaciones que justifiquen tal sección.
- f) Se informa sobre las dificultades que suponen el envío de la correspondencia al apartado de correos y propone que, en lo sucesivo, la correspondencia sea enviada a la sede de la Sociedad (actual despacho del secretario), es decir, a la dirección que figura en el remite de los sobres en que se envía el boletín en su nuevo formato.
- g) Se informa sobre la resolución aparecida en el «BOE» de 19 de enero de 1995, según el cual los profesores de alumnos ganadores de premios en la Olimpiada Matemática Nacional obtienen créditos académicos, proponiéndose que sea pedida análoga consideración para nuestro Concurso de Problemas.

**Punto tercero.** Nuestro tesorero, D. Alberto Aizpún, distribuye entre los asistentes copias del estado de cuentas, que explicó detalladamente, y narró algunas incidencias sobre el cobro de los recibos, sugiriendo la conveniencia de que los cambios de domicilio, así como de domiciliación de recibos, le sean comunicados a la mayor brevedad. El informe del tesorero se aprueba por unanimidad.

**Punto cuarto.** El presidente en funciones informó sobre las quejas recibidas de un nutrido subconjunto de nuestros socios de no recibir la revista SUMA. También informó que ello ha ocurrido pese a que las etiquetas con nuestro listado de socios han sido enviadas hasta tres veces a los encargados de distribuir SUMA. Como consecuencia se propone que si en el futuro no se normalizara tal distribución, habría que reconsiderar nuestra relación con la Federación.

**Punto quinto.** El presidente en funciones comunica la renovación de cargos directivos de la Sociedad, que propone su Junta Directiva:

- a) Se propone la continuidad de los vicepresidentes de Castilla-León y Castilla-La Mancha, que cesaban en el presente año.
- b) Debido a los problemas de salud que aquejan a nuestro querido Vocal de Relaciones Institucionales, D. José Manuel Martínez Sánchez, se propone proceder a

su sustitución por el actual Vocal de Actividades y Concursos, D. José Vicente García Sestafe, quien en breve podrá disponer del mucho tiempo libre que requiere este cargo. La Sociedad «Puig Adam» quiere dejar expresa constancia de su agradecimiento al Prof. D. José Manuel Martínez Sánchez y de su deseo de que tenga una pronta recuperación.

- c) Se propone a D. Martín Garbayo Moreno como nuevo Vocal de Actividades y Concursos.
- d) Como consecuencia del cambio de lugar de impresión del Boletín, al pasar a su nuevo formato, se propone la permuta de cargos entre D. Eugenio Roanes Lozano, que pasa a ser Vocal para la Gestión de Publicaciones, en sustitución de Doña Carmen García-Miguel, que pasa a ser Bibliotecaria. La Junta Directiva queda constituida como aparece en la página 4 de este boletín.

**Punto sexto.** No hay asuntos de trámite.

**Punto séptimo.** Ruegos y preguntas:

- 1) D. Joaquín Hernández propone enviar el Boletín al directorio de Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik y D. Juan Bosco Romero Márquez amplía esta iniciativa a otras instituciones.
- 2) D. Victor Manuel Sánchez propone hacer un libro de problemas propuestos en nuestra Olimpiada (con soluciones), en que él figure como editor y se mencione a los estudiantes que colaboren con él. Se propone el estudio de su publicación, bien por parte de la Sociedad o por parte de él con el beneplácito de la Sociedad.
- 3) D. Miguel Angel Gallardo amplía información sobre la nueva sección de juegos antes mencionada, sugiriendo la posibilidad de darla a conocer vía Internet.
- 4) D. Joaquín Hernández sugiere la posibilidad de organizar un concurso de problemas por equipos.

Se levantó la sesión a las catorce horas y veinte minutos.

## Don José María Torroja en el recuerdo

El 20 de diciembre del pasado año 1994, en su primera salida mañanera, el corazón fatigado del Profesor Torroja debió de pulsar el latido último dejándole caer fulminado. Lo abrupto del suceso y, sobre todo, lo imprevisto de la noticia que inmediatamente comenzó a circular nos llenó a todos de consternación. Muchos de los lectores conocieron, sin duda a D. José M.<sup>a</sup> Torroja como profesor o como compañero o como amigo, e incluso a través de este mismo Boletín, pues cuando se le pidió colaboración la brindó muy gustoso, como dispuesto estaba siempre a cualquier solicitud.

Pero como le recuerdan todos, seguramente, es como catedrático de Astronomía y Geodesia de nuestra Universidad; lo era desde 1945 hasta su jubilación, prorrogada con el nombramiento de Profesor Emérito. Habría que decir, sin embargo, que también había sido ingeniero geógrafo, astrónomo del Observatorio de Madrid, Presidente de la Comisión Nacional del ICSU y de la Real Sociedad Geográfica, Miembro de Honor de la Asociación Nacional de Ingenieros Geógrafos y del Colegio de Ingenieros Técnicos en Topografía, Consejero Nacional de Educación y del CSIC, Académico de Número de la Real Academia de Ciencias y su Secretario General durante más de diez años, como lo fue de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Y además otras muchas cosas, a las que habría que añadir sus actividades, casi novelables a veces porque eran tiempos difíciles, en la observación de eclipses con fines geodésicos, desde Suecia a El Aaiún, o en la incorporación de nuevas modalidades científicas, como la geodesia espacial, aprovechando los satélites artificiales, la creación del Observatorio del Teide y su participación en el de Calar Alto, en Almería, o sus estaciones para el estudio de mareas terrestres, como la montada en el Valle de los Caídos, etc.

No desmiente Torroja la estirpe familiar de notables matemáticos, ingenieros, profesores y académicos que brotan de la figura insigne de D. Eduardo Torroja, su abuelo, uno de los hombres que más contribuyeron a sacar a la matemática española de su postulación y acercarla a las fuentes creativas que en aquel tiempo, finales del pasado siglo,



las centraba en Alemania. Y sorprende de verdad comprobar cómo este nieto suyo, José María, ha desplegado una actividad que, vista en su conjunto, puede parecer frenética y que, sin embargo, la afrontaba con una aparente impasibilidad, sin mostrar agobio ninguno y haciendo las cosas ordenadamente y a su tiempo, que es seguramente el modo de hacer muchas y hacerlas bien.

No le faltaron, claro está, contradicciones y disgustos. Cómo no recordar, por ejemplo, su paso por el Decanato de la entonces Facultad de Ciencias y por el Vicerrectorado, luego, de la Universidad, en unos momentos de enorme virulencia y agitación política que golpeaba a quienes, como él, querían mantener viva la misión estrictamente universitaria de su Facultad. El amargo trance que le supuso resignar su cargo, incluso el abandono de algunos que deberían haberle apoyado, no le hizo caer, pese a todo, en descortesía ni en reproches: con actitud ejemplarmente caballerosa continuó imperturbable sirviendo a la Institución y colaborando amistosa y lealmente con todos. Y sin perder siquiera el sentido del humor.

Porque éste fue rasgo destacable de su carácter. Tras una máscara de imponente seriedad, que él sabía poner muy bien, guardaba un trasfondo bromista que destapaba en el momento oportuno. Algunos que fueron sus alumnos me han contado el temor que al principio les inspiraba su presencia y su cara, hosca a veces y siempre severa, hasta que el trato subsiguiente les demostraba que aquello no era más que apariencia, buscada o no, y que detrás había una persona extremadamente accesible y cordial.

Él explotaba con frecuencia esta doble vertiente para producir jocosos efectos. Yo creo que su momento culminante fue en la época de Decano, cuando nos sorprendía siempre con sus salidas, sobre todo en la comida que cada año reunía al profesorado de la Facultad. En una de ellas, cuando estaba de moda denostar a nuestra Universidad tildándola de «napoleónica», nos recibió con un gran retrato de Napoleón presidiendo el comedor; la mesa la presidía el Rector, a la sazón el ilustre ginecólogo Profesor D. José Botella Llusá. Llegada la hora de los brindis y discursos se levantó el Decano Torroja y explicó muy serio que sí, que como la Universidad era napoleónica había invitado a comer al mismísimo Napoleón, que allí estaba en efigie, el cual, excusándose por no poder asistir debido a sus ocupaciones, había enviado para representarle a su hermano Pepe Botella. Hay que reconocer que el Rector, al contestarle, supo estar a la altura de las circunstancias y, con extrema habilidad, improvisó unos jugosos comentarios sobre su «hermano».

Otra de las veces el discurso versó sobre la difícil situación financiera en que se encontraba la Facultad. Nos hizo una larga relación de las gestiones con que intentaba sanearla y que le llevaron finalmente a solicitar una entrevista con el Ministro de Hacienda; y para poder acreditar su actuación había grabado una cinta con la respuesta del Ministro a su petición de ayuda económica. La cinta que puso a continuación era una conocida sucesión de carcajadas acumuladas que no serían las del Ministro pero contagiaron a toda la concurrencia.

Él mismo solía contar anécdotas personales en las que una broma de la mejor ley aparecía rebozada en tintes de circunspecta gravedad. Como aquella vez en que, con oca-

sión de sus trabajos en el Observatorio del Teide, le entrevistaron en un periódico tinerfeño y le pidieron después una fotografía suya para ilustrar el artículo. Prometió enviarles una con la condición, inmediatamente aceptada, de que no dejaran de publicarla porque no tenía más copias. Y, efectivamente, les mandó una foto vestido de astrónomo de historieta, tocado con el clásico gorro puntiagudo tachonado de estrellas. (Naturalmente, no se publicó).

Contaba igualmente cómo en otro momento había mantenido en Nueva York un largo diálogo increíble con un desconocido que le había preguntado algo y al que, tras las primeras frases inglesas, siguió hablándole en español porque conoció que era el idioma del otro. Éste se manifestó totalmente asombrado del correcto español que manejaba Torroja y estaba convencido de que lo había practicado en Sudamérica, si es que no era de esa procedencia. Y Torroja que no, que nunca había estado al Sur de aquel paralelo. Al cabo de una conversación interminable, mantenida con su cara más seria, acabó confesándole que lo había aprendido en Madrid, su lugar de nacimiento. Puesto que él mismo lo contaba, queda constancia de que su colocutor no llegó a asesinarle.

O aquella vez, también en un congreso extranjero, cuando los participantes se iban inscribiendo en el hotel, añadiendo un título académico o profesional que el recepcionista transcribía aburridamente por la semejanza de todos ellos. Hasta que llegó el turno a Torroja y dijo muy serio que era torero. Ni qué decir tiene que despertó la admiración y el entusiasmo de todo el corro. Recuerda un poco a aquel *Boy* del P. Coloma que, tras su firma en el libro de recepción, colocó un sonoro y fantasioso «ingeniero jefe de las obras del canal de Otranto».

Muchas más cosas recuerdo y podría contar, como lo hemos hecho sus compañeros a raíz de su inesperada desaparición, pero aun lo dicho me deja un poco la impresión de que pueda tomarse como una trivial descripción de su figura. He de decir en mi descargo que ésta es la tercera nota que escribo sobre él y la primera en que me he permitido salirme de la estricta consideración de Torroja como hombre de ciencia. Próximamente, aunque probablemente no le alcance ya la salida de este número del Boletín, va a celebrar la Academia de Ciencias un homenaje a su memoria en el que se estudiará su actividad en los campos de la astronomía, la geodesia, la geografía y topografía y en el seno de la Academia misma. Tampoco está, pues, de más que haya querido ofrecer aquí -y estoy seguro de que a él le habría complacido- algunos aspectos de su persona que, siendo tan característicos, no cabe incluirlos en instancias más formales y protocolarias. Y es que, si de verdad deseamos aproximarnos al conocimiento de una persona, con la complejidad que casi siempre encierra, no deberíamos eludir, por más que pueda parecer frivolidad, hablar de estas «et dotras muchas cosas que aunaskan los omes quando quieren mostrar sos sotilezas».

A propósito he querido terminar con esa cita de Alfonso X que el propio Torroja transcribe en uno de los primeros ejemplares de nuestro Boletín. Es un artículo muy en la línea de los que él solía escribir y no estaría de más que volviéramos a repasarlo, tal vez como póstumo homenaje, pero en la seguridad también de disfrutar con su lectura.

Sólo eso nos quedará ya de él, sus obras, fundadas o escritas, su recuerdo y, sobre todo, su ejemplo de hombre de bien y de amigo fiel, cuya vida contemplamos transcendida ya —también en palabras del Rey Sabio— «en otra manera más complida e más acabada». Descanse en paz.

**J. J. Etayo**

## XXXI Olimpiada Matemática Española

### Fase Final

La fase final de la XXXI Olimpiada Matemática Española se ha celebrado en Castellón, durante los días 23 al 25 de febrero de 1995. Como es sabido esta Olimpiada está organizada por la Real Sociedad Matemática Española, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*.

En ella han participado los 64 seleccionados en los distritos en los que tuvo lugar la Primera Fase. Concurrieron tres alumnos de cada uno de los distritos de Baleares, Barcelona A, Burgos, Castellón, Extremadura, Granada, Jaén, La Laguna, La Rioja, León, Madrid I, Madrid II, Navarra, Oviedo, Salamanca, Sevilla, Valladolid y Zaragoza; dos de los de Alicante y Barcelona II y uno de cada uno de los de Cádiz, Córdoba, Huelva, Málaga, País Vasco y Santiago de Compostela.

La llegada de participantes tuvo lugar durante la tarde del jueves día 23; los alumnos, acompañantes, y Profesores Delegados de cada Distrito fueron alojados en la Residencia de Tiempo Libre «El Pinar», en El Grao. Tras su llegada, en el I. B. «Penyagolosa» se celebró la reunión de constitución del Tribunal y selección de los problemas que habrían de proponerse en las dos sesiones tradicionales. Esa noche, en el Teatro Principal, la Banda Municipal de Castellón ofreció un Concierto Extraordinario a todos los asistentes a la Olimpiada.

El viernes 24, tras la recepción oficial por el Excmo. Sr. Alcalde de Castellón en el Ayuntamiento, tuvo lugar la inauguración oficial de la Olimpiada en el Campus de Borriol de la Universidad «Jaume I» por el Magfco. y Excmo. Sr. Rector, acompañado, entre otras personalidades, por la Ilma. Sra. Subdirectora General de Becas del Ministerio de Educación y Ciencia, y el Prof. José Manuel Aroca, Presidente de la Real Sociedad Matemática Española.

Durante la tarde del viernes, mientras los estudiantes trabajaban en la resolución de los tres problemas de la primera sesión, los familiares fueron llevados de excursión, y los Profesores Delegados de los Distritos celebraron una sesión de trabajo. Por la noche, todos los participantes visitaron las instalaciones del Planetario de Castellón.

El sábado 25 de febrero tuvo lugar la segunda sesión de problemas; por la tarde, estudiantes, familiares y Profesores Delegados fueron llevados de excursión a Peñíscola, mientras el Tribunal calificaba los ejercicios. Tras una cena de gala en la Residencia «El Pinar», tuvo lugar la ceremonia de entrega de recompensas y proclamación de vencedores de la *XXXI Olimpiada Matemática Española*, en un emocionante acto conducido por el Prof. José Aymerich. Se repartieron en esta ceremonia los premios que la Subdirección General de Becas concede a los ganadores de la Primera Fase de la Olimpiada, junto con el diploma concedido por la R.S.M.E.; y seis medallas de oro, otras tantas de plata y otras seis de bronce, para los primeros 18 clasificados.

Los alumnos ganadores de medallas de oro representarán a España en la Olimpiada Matemática Internacional, del 13 al 25 de julio, en Canadá, y son los siguientes:

- |                                    |                          |                  |
|------------------------------------|--------------------------|------------------|
| 1. <b>Angel PAREDES GALAN</b>      | (Santiago de Compostela) | <b>36 puntos</b> |
| 2. <b>Jerónimo ARENAS GARCIA</b>   | (Sevilla)                | <b>32 puntos</b> |
| 3. <b>Luis FABIANI BENDICHO</b>    | (Zaragoza)               | <b>27 puntos</b> |
| 4. <b>Jaume ANDREU PASCUAL</b>     | (Baleares)               | <b>26 puntos</b> |
| 5. <b>Alejandro GARCIA GIL</b>     | (Madrid II)              | <b>26 puntos</b> |
| 6. <b>Ignacio FERNANDEZ GALVAN</b> | (Extremadura)            | <b>23 puntos</b> |

Los ganadores de las medallas de plata fueron

- |                                    |               |
|------------------------------------|---------------|
| <b>Lucio BLANCAS SOLANS</b>        | (Zaragoza)    |
| <b>Fernando REY MARTIN</b>         | (Madrid I)    |
| <b>Joaquim PUIG SADURNUI</b>       | (Barcelona B) |
| <b>José Carlos PRIETO HONORATO</b> | (Extremadura) |
| <b>Guillermo VEGA GORGOJO</b>      | (León)        |
| <b>Fernando RAMBLA BARRENO</b>     | (Cádiz)       |

Las de bronce correspondieron a

- |                                     |               |
|-------------------------------------|---------------|
| <b>Antonio J. MORENO HERNANDO</b>   | (Madrid II)   |
| <b>Juan J. LOPEZ ORDOÑEZ</b>        | (Córdoba)     |
| <b>Félix SALCEDO URESTE</b>         | (Madrid I)    |
| <b>Emma COTAZAR GARCIA-ESCUDERO</b> | (País Vasco)  |
| <b>Ana DE MIER VINUE</b>            | (Barcelona A) |
| <b>Marta PEREZ ESCACHO</b>          | (León)        |

Como se ve, de los seis seleccionados en los distritos de Madrid, uno ha obtenido oro, otro plata y dos bronce. Tres de estos cuatro fueron premiados en años anteriores en los **Concursos de Resolución de Problemas** de nuestra Sociedad, como señalábamos en nuestro Boletín anterior (n.º 39). También dos alumnos de la comunidad de Castilla-León han recibido medalla.

En nuestra sección de **PROBLEMAS PROPUESTOS** de este Boletín damos a conocer los enunciados de los seis que se propusieron en esta Fase Final de la Olimpiada. Cada uno fué calificado de 0 a 10 puntos, por lo que la puntuación máxima que podía obtenerse era de 60 puntos. Para valorar la dificultad de los problemas propuestos, damos a continuación las medias de las puntuaciones obtenidas en cada uno de ellos, por los seis primeros clasificados, por los 18 que obtuvieron medallas y por la totalidad de los participantes.

Problema	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º
Media 6 medallas oro:	7,8	2,2	3,5	8,2	3,3	3,3
Media 18 medallas:	5,7	1,9	3,5	5,7	2,1	3,4
Media de todos:	3,4	1,2	1,5	3,1	0,9	1,9

Destaca la extrema dificultad que tuvo el 2.º para los estudiantes y que en el 3.º y el 6.º (los dos de geometría) los seis primeros clasificados hayan obtenido puntuaciones medias iguales o incluso inferiores a las de los 18 con medalla.

El Tribunal estuvo formado por los Profesores Aroca Hernández-Ros (Presidente); Amengual Covas; Xambó Descamps; Conde Calero; Vila Doncel; Gil y Trilles; Aymerich Miralles; Sánchez-Rubio García y Bellot Rosado (Secretario).

Es obligado destacar la magnífica labor desarrollada por la Comisión Organizadora, presidida por el Prof. Antoni Gil y Trilles, que cuidó al máximo todos los detalles, tanto académicos como de atención a los familiares y acompañantes de los estudiantes. El éxito de la organización lo prueba el que éstos estuvieran dispuestos a formar una «Asociación de amigos de la Olimpiada».



**INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS  
Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADOS EN ESTE BOLETIN**

**Concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad**

Núm.	(Año)	Convocado en Boletín	Crónica/enunciados
I	(1983)	1	2, pág. 11
II	(1984)	3	4, pág. 7
III	(1985)	5	7, pág. 3
IV	(1986)	9	10, pág. 5
V	(1987)	13	15, pág. 3
VI	(1988)	17	19, pág. 17
VII	(1989)	20	22, pág. 9
VIII	(1990)	24	26, pág. 3
IX	(1991)	27	29, pág. 3
X	(1992)	30	32, pág. 3
XI	(1993)	33	34, pág. 9
XII	(1994)	36	38, pág. 3
XIII	(1995)	39	

**Olimpiada Matemática Española**

Núm.	(Año)	1.ª fase (distritos)	2.ª fase (final)
XX	(1984)	—	3, pág. 77
XXI	(1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII	(1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII	(1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV	(1987-88)	6, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV	(1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61
XXVI	(1989-90)	24, págs. 11 y 67	25, págs. 9 y 73
XXVII	(1990-91)	27, págs. 7 y 77	28, págs. 17 y 79
XXVIII	(1991-92)	30, págs. 19 y 67	31, págs. 11 y 81
XXIX	(1992-93)	33, págs. 5 y 71	34, págs. 17 y 71
XXX	(1993-94)	36, págs. 9 y 75	37, págs. 13 y 109
XXXI	(1994-95)	39, págs. 12 y 13	40, págs. 13 y 15

**Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas**

Núm.	(Año)	Lugar	Crónica y enunciados en Boletín n.º
I	(1986)	Colombia	8, págs. 11 y 83
II	(1987)	Paraguay	12, págs. 3 y 75
III	(1988)	Perú	18, págs. 5 y 73
IV	(1989)	Cuba	21, págs. 11 y 63
V	(1990)	España (Valladolid)	26, págs. 13 y 73
VI	(1991)	Argentina	30, págs. 15 y 65
VII	(1992)	Venezuela	32, págs. 11 y 71
VIII	(1993)	Méjico	35, págs. 5 y 65
IX	(1994)	Brasil	39, págs. 11 y 12

**Olimpiada Matemática Internacional**

Núm.	(Año)	Lugar	Crónica y enunciados en Boletín n.º
XXIV	(1983)	Paris	2, pág. 15
XXV	(1984)	Praga	4, pág. 67
XXVI	(1985)	Helsinki	7, págs. 9 y 89
XXVII	(1986)	Varsovia	10, pág. 11
			11, pág. 89
XXVIII	(1987)	Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX	(1988)	Australia	19, págs. 23 y 77
XXX	(1989)	Alemania (R.F.A.)	22, págs. 15 y 73
XXXI	(1990)	China	26, págs. 11 y 71
XXXII	(1991)	Suecia	29, págs. 11 y 79
XXXIII	(1992)	Rusia	32, págs. 9 y 69
XXXIV	(1993)	Turquía	35, págs. 3 y 63
XXXV	(1994)	Hong-Kong	38, págs. 9 y 79

# Resolución de sistemas de ecuaciones y sistemas dinámicos discretos

**Juan Bosco Romero Márquez \***

**Benito Hernández Bermejo \*\***

**María Angeles López y Sánchez Moreno \***

*\* I. B. «Isabel de Castilla» (Avila)*

*\*\* Dpto. de Física Fundamental, Universidad Nacional de Educación a Distancia*

## **Abstract**

En el presente trabajo se obtiene un conjunto de familias infinitas de métodos numéricos, interpretables como sistemas dinámicos no lineales, para la resolución de sistemas de ecuaciones arbitrarios en una o varias variables. Bajo esta perspectiva se examinan los problemas de estabilidad y convergencia. Se ilustra cómo estas familias incluyen algoritmos previamente conocidos como elementos particulares que, por tanto, se ven generalizados.

## **1. Introducción: raíz enésima de un número real positivo**

A modo de introducción del método general comenzaremos con el caso más sencillo de desarrollar algoritmos iterativos convergentes para el cálculo aproximado de la raíz enésima de un número real positivo utilizando para ello métodos elementales de aproximaciones recurrentes sucesivas, cuya construcción se basa en el desarrollo del binomio de Newton y en la serie geométrica.

La línea del método aquí expuesto es la siguiente:

Supongamos que queremos calcular la raíz  $n$ -ésima (siendo  $n$  un número natural) del número real  $a > 0$ , es decir, queremos encontrar la raíz positiva de la ecuación

$$x^n = a \quad (1)$$

Para,  $0 \leq i \leq n$ , (1) puede escribirse como:

$$x^{n-i} = \frac{a}{x^i} \quad (2)$$

Supongamos ahora que  $\alpha \in R$  es la solución exacta positiva de (1) y que  $r$  es una aproximación a  $\alpha$  en un cierto entorno de  $\alpha$ . Entonces, (2) puede escribirse como sigue:

$$[(x-r) + r]^{n-i} = \frac{a}{[(x-r) + r]^i} = \frac{a}{r^i \left(1 - \frac{r-x}{r}\right)^i} \quad (3)$$

Para establecer nuestros algoritmos usamos el siguiente lema:

**Lema:** Si  $x$  es un número real tal que,  $|x| < 1$ , y  $k$  es un entero positivo, entonces:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+k}{k} x^p = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad (4)$$

**Demostración:** véase [Ap].

Si en el primer miembro de (3) desarrollamos con el binomio de Newton, en el segundo miembro de (3) utilizamos el lema (4) y escogemos los términos lineales en  $(x-r)$  y  $(r-x)/r$ , ambos convergentes a cero, en los dos miembros  $((x-r)^p$  y  $((r-x)/r)^p$  tienden a cero cuando  $x \rightarrow r$ ,  $p > 1$ ,  $p \in R$ ], entonces podemos despejar  $x$  como función de  $r$  en un entorno de la raíz  $\alpha$  y obtenemos así una función que llamaremos  $x = x(r, i)$ :

$$r^{n-i} + (n-i)(x-r)r^{n-i-1} = \frac{a}{r^i} \left(1 + i \frac{r-x}{r}\right) \quad (5)$$

De aquí, llegamos a la siguiente familia finita de funciones racionales:

$$x_i = x(r, i) = \frac{(n-i-1)r^{n+1} + ra(i+1)}{(n-1)r^n + ia} \quad (6)$$

para  $i = 0, 1, \dots, n$  con  $(n-i)r^n + ia \neq 0$ . Las ecuaciones (6) se pueden considerar como  $n+1$  funciones  $x_i$  definidas sobre la variable  $r$ , en un entorno de la raíz  $\alpha$ .

Los  $n+1$  algoritmos convergentes por aproximaciones sucesivas que podemos asociar para la computación de una aproximación a la raíz  $n$ -ésima del número real  $x$ , se definen recurrentemente como sigue:

Tomamos  $x_0 = c > 0$ , que es un número racional o real arbitrario en un entorno de la raíz  $\alpha$ ; por ejemplo,  $x_0$  puede ser la parte entera de  $\alpha$ , en el caso en que se conozca el intervalo en que se encuentra la raíz. A partir de aquí tendríamos:

$$x_{m+1}(i) = \frac{(n-i-1)x_m^{n+1}(i) + a(i+1)x_m(i)}{(n-1)x_m^n(i) + ia} \quad (7)$$

para  $m \geq 0$ .

Planteamos al lector como cuestiones la demostración de que:

1. Los algoritmos previos son convergentes (ver sección 2).
2. Las  $n+1$  funciones racionales,  $x_i = x(r, i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  tienen todas a  $\alpha$  como punto de contacto e invariante.

La generalización natural de lo anterior resulta al obtener una familia infinita de funciones racionales, la cual nos da una familia infinita asociada de algoritmos convergentes para cada número real  $p$ :

$$x^{n-p} = \frac{a}{x^p}, \quad a > 0, \quad a \in R$$

Operando de forma paralela se pueden construir las relaciones homólogas a (7): otros algoritmos convergentes que dan aproximaciones sucesivas a la raíz  $n$ -ésima de cualquier número real positivo.

## 2. El caso $n = 2$ : análisis dinámico

Si consideramos, en particular, el caso  $n = 2$  para los valores de  $i$  enteros  $i = 0, 1, 2$  obtenemos  $x^2 = a$ ,  $x = a/x$ , y  $1 = a/x^2$ , respectivamente. El primero de estos tres métodos es el llamado algoritmo de Newton o aritmético; y el segundo es el algoritmo de aproximación armónico.

Vamos a considerar el primero de ellos (Newton). Sea  $\alpha$  la solución exacta, y  $r$  una aproximación a  $\alpha$ . Entonces:

$$[(\alpha - r) + r]^2 \approx 2r(\alpha - r) + r^2 = a$$

Si despejamos  $\alpha$  obtenemos:

$$\alpha(r) = \frac{r^2 + a}{2r}$$

Así pues el algoritmo es:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}, \quad n \geq 0 \quad (8)$$

Se observan tres regímenes bien diferenciados de comportamiento:

- $a > 0$ : en este caso se obtiene una convergencia muy rápida (en torno a 10 cifras significativas correctas en 6-8 iteraciones, dependiendo de la condición inicial y la precisión utilizada por la máquina). Cada condición inicial converge a la raíz de su mismo signo.
- $a = 0$ : este es un caso límite. La convergencia requiere un elevado número de pasos y toda condición inicial lleva a la (única) solución  $\alpha = 0$ .
- $a < 0$ : aquí no existe solución en  $\mathfrak{R}$ . El algoritmo experimenta una bifurcación y entra en un régimen de comportamiento caótico (ver [Ja] respecto al resto de esta sección).

La transición al caos es fácilmente constatable a simple vista a partir de las simulaciones numéricas, por dos aspectos:

1. La aparente aleatoriedad de las sucesivas imágenes de la transformación.
2. La divergencia (inestabilidad) de soluciones con condiciones iniciales muy próximas.

El comportamiento caótico puede caracterizarse formalmente según diversos criterios. Uno de los más utilizados es el cálculo de exponentes de Lyapunov. Dada una órbita  $\gamma = \{x_n, n = 0, 1, \dots\}$  se define su exponente de Lyapunov como

$$\lambda_\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_k)}{dx_k} \right| \quad (9)$$

donde  $f$  viene dada como  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Se demuestra que el comportamiento es caótico si y sólo si  $\lambda > 0$ : el exponente indica que dos puntos arbitrariamente próximos para un valor dado  $n = v$  se separan como  $e^{\lambda(n-v)}$  en iteraciones posteriores  $n > v$ .

Vamos a probar que el algoritmo es caótico para  $a = -1$ . Es decir:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

En vez de buscar una trayectoria cualquiera observamos que  $f(-x) = -f(x)$ . Por tanto si un punto verifica  $f(x) = -x$  tendrá período 2. Imponiendo esta última condición resultan dos puntos  $x = 1/\sqrt{3}$  y  $x = -1/\sqrt{3}$ , que son de hecho uno la imagen del otro. Así pues conocemos explícitamente la órbita:

$$\left\{ \dots, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \dots \right\}$$

Simplemente haciendo una derivada

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{x^2 + 1}{2x^2}$$

el cálculo del exponente es ahora inmediato:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{4/3}{2/3} \right) = \ln(2) > 0$$



Por tanto se demuestra. La elección de una órbita de período 2 se debe a que en este ejemplo concreto es la posibilidad más sencilla, dado que no existen puntos con período 1.

De lo anterior es fácil ver que para  $a = 1$  por ejemplo, los exponentes son negativos (sección 1, cuestión primera).

### 3. Resolución de la ecuación polinómica general

Resolvamos por el mismo método la ecuación polinómica

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = P(x) = 0 \quad (10)$$

donde  $P(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , con coeficientes reales o complejos,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Tenemos que si  $\alpha \neq 0$  es una posible solución de (10), y  $r$  es una aproximación a la misma, entonces:

$$\sum_{i=0}^n a_i [(x-r) + r]^i = 0$$

Desarrollando por el método del binomio de Newton y tomando la aproximación lineal como antes, llegamos a un algoritmo infinito convergente que nos da el cálculo aproximado de la raíz  $\alpha$ , de la ecuación

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ ó } a_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n$$

Alternativamente, podemos transformar la ecuación  $P(x) = 0$  en otra equivalente, si suponemos que la raíz  $\alpha$  de  $P(x) = 0$  es no nula (las raíces nulas son identificables por simple inspección de un polinomio y no presentan mayor interés en el problema que ahora nos ocupa). Por ejemplo:

$$\frac{P(x)}{x^m} = 0$$

y ahora utilizamos (4) o el binomio de Newton, dependiendo de si los valores que damos a  $m$  son o no positivos, y de si  $m$  es un número entero o real.

### 4. Ejemplo: distintos algoritmos iterativos para el cálculo de las raíces de la ecuación áurea

Como ilustración de lo anterior mostramos a continuación varios algoritmos iterativos para el cómputo de las raíces de la *ecuación áurea*:

$$x^2 = x + 1 \quad (11)$$

Las raíces de esta ecuación son los números áureos:

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \tau_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

**Algoritmo 1:** Si  $\alpha$  es la raíz de (11), entonces  $\alpha^2 = \alpha + 1$ . Así, si  $r \in I(\alpha, \rho)$ ,  $\rho > 0$ :

$$\alpha + 1 = [(\alpha - r) + r]^2 \approx 2r(\alpha - r) + r^2$$

donde se ha tomado la aproximación lineal. Por tanto:

$$\alpha = \alpha(r) = \frac{r^2 + 1}{2r - 1}, \quad r \neq \frac{1}{2} \quad (12)$$

El algoritmo asociado a (12) será pues:

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{2x_n - 1}, \quad n \geq 0 \quad (13)$$

En este caso se obtiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \tau_1, & x_0 > 1/2 \\ \tau_2, & x_0 < 1/2 \end{cases}$$

**Algoritmo 2:** Como  $\alpha = \alpha + 1/\alpha$  tenemos:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{r\left(1 - \frac{r-\alpha}{r}\right)} \approx 1 + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r-\alpha}{r}\right)$$

donde hemos tomado la aproximación lineal y  $r \in I(\alpha, \rho)$ , de modo que resulta:

$$\alpha = \alpha(r) = \frac{r^2 + 2r}{r^2 + 1}$$

De aquí se deduce el algoritmo para la computación de  $\alpha$ :

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2x_n}{x_n^2 + 1}, \quad n \geq 0$$

Los dominios de convergencia en este caso son:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \tau_1, & x_0 > 0 \text{ ó } x_0 < -2 \\ \tau_2, & 0 > x_0 > -2 \end{cases}$$

**Algoritmo 3:** Escribiendo (11) como  $1 = 1/\alpha + 1/\alpha^2$  y operando se obtiene trivialmente:

$$1 = \frac{1}{r\left(1 - \frac{r-\alpha}{r}\right)} + \frac{1}{r^2\left(1 - \frac{r-\alpha}{r}\right)^2} \approx \frac{1}{r}(1 + \alpha') + \frac{1}{r^2}(1 + 2\alpha')$$

donde  $\alpha' = (r-\alpha)/r$ . Por tanto el algoritmo es:

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n + 1)(3 - x_n)}{x_n + 2}, \quad n \geq 0.$$

Y se observa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \tau_1, & 3 > x_0 > 0 \\ \tau_2, & 0 > x_0 > -1 \end{cases}$$

**Algoritmo 4:** Expresamos (11) como  $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha$ , y con  $r \in I(\alpha, \rho)$  tenemos:

$$(\alpha - r + r)^3 = (\alpha - r + r)^2 + \alpha$$

Y la aproximación lineal nos da:

$$\alpha(3r^2 - 2r - 1) = 2r^3 - r^2 \Rightarrow \alpha(r) = \frac{r^2(2r-1)}{(r-1)(3r+1)}$$

Así llegamos al algoritmo:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2(2x_n - 1)}{(x_n - 1)(3x_n + 1)}, \quad n \geq 0.$$

Con esta situación se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \tau_1, & x_0 > 1 \\ \tau_2, & x_0 < -1/3 \end{cases}$$

**Algoritmo 5:** La última posibilidad que consideraremos resulta al tomar la expresión  $1/\alpha = 1/\alpha^2 + 1/\alpha^3$ . Desarrollando de manera análoga a las anteriores y tomando la aproximación lineal resulta:

$$1 + \alpha' = \frac{1}{r}(1 + 2\alpha') + \frac{1}{r^2}(1 + 3\alpha'), \quad \alpha' = \frac{r-\alpha}{r}$$

Así pues obtenemos:

$$\alpha(r) = \frac{2r^3 - 3r^2 - 4r}{r^2 - 2r - 3}, \quad r \in I(\alpha, \rho)$$

Y el algoritmo es:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 3x_n^2 - 4x_n}{x_n^2 - 2x_n - 3}, \quad n \geq 0.$$

Las raíces del numerador son  $\beta_1 = (3 - \sqrt{41})/4$ ,  $\beta_2 = 0$  y  $\beta_3 = (3 + \sqrt{41})/4$ .  
 Los dominios de convergencia en este caso vienen dados por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \tau_1, & \beta_2 < x_0 < \beta_3 \\ \tau_2, & \beta_1 < x_0 < \beta_2 \end{cases}$$

En estos tres últimos casos se observa que los dominios de convergencia no cubren toda la recta real. Fuera de dichas regiones, la convergencia a alguna de las soluciones se da por intervalos. Se propone al lector como ejercicio el análisis del comportamiento de los algoritmos en tales supuestos.

## 5. Sistemas generales. Ejemplos

De la teoría y los ejemplos precedentes se infiere que esta misma técnica puede utilizarse para aproximar ecuaciones trigonométricas, exponenciales, etc. De hecho, los sistemas de cualquier clase en las incógnitas  $x_1, \dots, x_n$  pueden resolverse aplicando los métodos anteriores.

**Ejemplo 1:** Calculemos los puntos comunes o de intersección de las cónicas:

$$C_1: x^2 + y^2 = a^2, a > 0$$

$$C_2: xy = b, b > 0$$

Si  $P(\alpha, \beta)$  fuera un punto de la intersección  $C_1 \cap C_2$ , entonces, para cada  $(r, s) \in I[(\alpha, \beta), \rho]$ ,  $\rho > 0$ , entorno del punto, podemos escribir:

$$[(x-r) + r]^2 + [(y-s) + s]^2 = a^2$$

$$[(x-r) + r][(y-s) + s] = b$$

Teniendo en cuenta los rangos de valores que toman las distintas variables podemos realizar la aproximación lineal correspondiente, de la que se obtiene:

$$2r(x-r) + 2s(y-s) = a^2 - r^2 - s^2$$

$$s(x-r) + r(y-s) = b - rs$$

Resolviendo en  $(x-r)$  e  $(y-s)$  llegamos a:

$$x = x(r, s) = \frac{r^3 + r(a^2 - s^2) - 2sb}{2(r^2 - s^2)}, r^2 \neq s^2$$

$$y = y(r, s) = \frac{-s^3 + s(r^2 - a^2) + 2rb}{2(r^2 - s^2)}, r^2 \neq s^2$$

Así hemos obtenido dos funciones racionales, en las variables  $r, s$ , definidas para  $r, s \in R, r^2 \neq s^2$ , continuas y diferenciables, y que pueden ser interpretadas como dos superficies en  $R^3$ , asociadas al sistema original. Entonces, si  $[x]$  denota la parte entera de un número real  $x$ , podemos construir el algoritmo iterativo asociado al problema:

$$(x_0, y_0) = ([\alpha], [\beta])$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + x_n(a^2 - y_n^2) - 2y_n b}{2(x_n^2 - y_n^2)}, \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$y_{n+1} = \frac{-y_n^3 + y_n(x_n^2 - a^2) + 2x_n b}{2(x_n^2 - y_n^2)}, \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

El rango de  $n$  es  $n \geq 0$ . Al igual que en el ejemplo de la sección 4, este algoritmo no es el único posible: otros pueden construirse mediante desarrollos similares a los allí empleados.

Se puede comprobar que el algoritmo anterior es convergente a la raíz  $(\alpha, \beta)$  del sistema y que, además, este punto es un invariante de las superficies.

**Ejemplo 2:** Resolvamos la siguiente ecuación trascendente:

$$e^x - \cos(x) = 1 \tag{14}$$

Sea  $\alpha$  la solución. Entonces:

$$1 = e^{\alpha-r} e^r - \cos(\alpha-r+r)$$

Desarrollamos la exponencial en serie de Taylor a primer orden en  $(\alpha-r)$  y el coseno mediante trigonometría elemental:

$$1 = (1 + \alpha-r) e^r - \cos(\alpha-r) \cos(r) + \sin(\alpha-r) \sin(r)$$

Desarrollando de nuevo en serie de Taylor a primer orden:

$$1 \approx (1 + \alpha - r)e^r - \cos(r) + (\alpha - r) \sin(r)$$

Y despejando  $\alpha$ :

$$\alpha(r) = \frac{1 + \cos(r) + r \sin(r) + (r-1)e^r}{e^r + \sin(r)}$$

Luego el algoritmo será:

$$x_{n+1} = \frac{1 + \cos(x_n) + x_n \sin(x_n) + (x_n - 1)e^{x_n}}{e^{x_n} + \sin(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

La ecuación (14) posee infinitas raíces: a cuál de ellas converja el algoritmo depende de la elección de  $x_0$ . Así:

1. Para  $x_0 = 1$  (0), al cabo de 4 (5) iteraciones obtenemos la raíz  $\alpha = 0,6013467677$ , que es la mayor.
2. Para  $x_0 = -1$ , tras 5 iteraciones resulta  $\alpha = -3,400592904$ .
3. Para  $x_0 = -2$ , después de 5 iteraciones tenemos  $\alpha = -2,789129646$ , etc.

En cada caso, todas las cifras son significativas. En este ejemplo se ponen de manifiesto tanto la velocidad como la flexibilidad del método.

## 6. Conclusiones

Se ha presentado aquí un método que genera familias infinitas de algoritmos iterativos convergentes, que equivalentemente son interpretables como sistemas dinámicos no lineales, para la resolución de sistemas de ecuaciones generales en una o más variables. Estos algoritmos han sido comprobados en la práctica, para ejemplos concretos, mediante una rutina en TURBO PASCAL ejecutada sobre un PC con procesador 386. Sin excepción se observa una convergencia rápida, desde los dominios apropiados, hacia la solución correcta al cabo de unos pocos pasos (en los mejores casos obtuvimos aproximaciones a soluciones trascendentes con 9 cifras decimales correctas al cabo de 3 iteraciones, tomando un entero como valor de partida) y en tiempos de computación instantáneos (menores al segundo).

El comportamiento ya visto de los algoritmos en el espacio de parámetros puede resumirse como sigue:

1. Si hay una o más soluciones, el algoritmo converge desde un dominio de la recta real a alguna de ellas, dependiendo de la condición inicial. A menudo esta dependencia obedece reglas simples.
2. Si los parámetros del sistema varían de modo que éste se vuelve incompatible, se produce una bifurcación que lleva a un comportamiento de tipo caótico.

Los algoritmos expuestos, aparte de su generalidad o de su interés teórico por los aspectos de su desarrollo que quedan pendientes, ofrecen una amplia posibilidad de elección que se adapte a la implementación concreta que requiera cada caso. Es aquí donde los criterios de robustez, velocidad de convergencia y economía en tiempo de cálculo deberán ser tenidos en cuenta para seleccionar el algoritmo óptimo entre los infinitos posibles.

## 7. Bibliografía

- [Ac] F. S. ACTON, *Numerical Methods that usually work*, MAA, 1990.
- [Ap] T. APOSTOL, *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona, 1978.
- [Br] S. BREUER, G. ZWAS, *Comput. Educ.* 12, n.º 2, 289 (1988).
- [Da] N. I. DANILINA, N. S. DUBROVSKAYA, O. P. KVASHA, G. L. SMIRNOV, *Computational Mathematics*, Mir, Moscú, 1988.
- [De] B. P. DEMIDOVICH, I. A. MARON, *Computational Mathematics*, Mir, Moscú, 1987.
- [Di] J. DIEUDONNE, *Calcul Infinitesimal*, Hermann, París, 1968.
- [Fr] C. E. FRÖBERG, *Introduction to Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1969.
- [Ga] N. GASTINEL, *Analyse numerique lineaire*, Hermann, París, 1974.
- [He] P. HENRICI, *Elements of Numerical Analysis*, John Wiley, New York, 1964.
- [Hi] F. B. HILDEBRAND, *Introduction to numerical analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1956.
- [Ho] A. S. HOUSEHOLDER, *Principles of numerical analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1953.
- [Ja] E. A. JACKSON, *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Kn] K. KNOPP, *Theory and applications of infinite series*, Dover, New York, 1990.
- [Ra] A. RALSTON, *Análisis Numérico*, Limusa, México, 1976.
- [St] J. STOER, E. BULIRSCH, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [Yo] D. M. YOUNG y R. TODD GREGORY, *A Survey of Numerical Mathematics*, Tomos I y II, Dover, New York, 1973.



# Funciones continuas y derivables en ninguna parte empleando el programa Derive

Iván Castro Chadid

*Pontificia Universidad Javeriana  
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias  
Fax: 9057-1-2850503, Santafé de Bogotá - Colombia*

## Resumen

Se contribuye una función que permite generar infinitas funciones continuas y derivables en ninguna parte empleando pocos recursos matemáticos; a continuación se presenta un programa en el paquete DERIVE para simularla en el computador.

Sean  $a$  y  $b$  números naturales mayores que 1. Se define la función:

$$f_a^b: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que si  $x \in [0, 1]$  tiene representación en base  $a$ :

$$x = 0.a_1a_2\dots a_n\dots$$

entonces  $f_a^b(x)$  tiene representación en base  $b$ :

$$f_a^b(x) = 0.b_1b_2\dots b_n\dots$$

siendo  $b_1 \in \{0, b-1\}$  y además:

$$\begin{cases} b_1 = 0 & \text{si } a_1 = 0 \\ b_1 = b-1 & \text{si } a_1 \neq 0 \\ b_i = b_{i-1} & \text{si } a_i = a_{i-1}, \quad i \geq 2 \\ b_i \neq b_{i-1} & \text{si } a_i = a_{i-1}, \quad i \geq 2 \end{cases}$$

**Teorema.**— $\forall_a, b \in \mathbb{N}$ , tales que  $a > b > 1$ ,  $f_a^b$  es una función continua y derivable en ninguna parte.

**Demostración.**—Sea  $x \in [0, 1]$  con representación en base  $a$ :

$$x = 0.a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

entonces  $f_a^b(x)$  tiene representación en base  $b$ :

$$f_a^b(x) = 0.b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

1. Veamos que  $f_a^b$  es continua en  $x$ .

En efecto, sea  $\varepsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{b}{\varepsilon} < b^n$ , luego  $\frac{1}{b^{n-1}} < \varepsilon$

Si  $x' \in [0, 1]$  es tal que  $0 < |x' - x| \leq \frac{1}{a^n}$  entonces  $x'$  tiene representación en base  $a$ :

$$x' = 0.a_1 a_2 \dots a_n d_{n+1} d_{n+2} \dots$$

y  $f_a^b(x')$  tiene representación en base  $b$ :

$$f_a^b(x') = 0.b_1 b_2 \dots b_n t_{n+1} t_{n+2} \dots$$

luego

$$|f_a^b(x) - f_a^b(x')| \leq \frac{1}{b^n} < \varepsilon$$

De lo anterior se desprende que  $f_a^b$  es continua en  $x$ .

2. Veamos que  $f_a^b$  no es derivable en  $x$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Encontramos un  $x_n \in [0, 1]$ , tal que:

$$f_a^b(x_n) = 0.b_1 b_2 \dots b_{n-1} c_n d_{n+1} d_{n+2} \dots$$

en donde  $c_n \neq b_n$  pero  $d_{n+k} = b_{n+k}$ ,  $\forall k \geq 1$ .

Es obvio que si escogemos los primeros  $n-1$  dígitos (en base  $a$ ) de  $x$ , obtenemos que los primeros  $n-1$  dígitos (en base  $b$ ) de  $f_a^b(x_n)$  coinciden con los primeros  $n-1$  dígitos (en base  $b$ ) de  $f_a^b(x)$ .

Escojamos el término  $c_n$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} c_n = a_{n-1} & \text{si } a_n \neq a_{n-1} \\ c_n \neq a_{n-1} & \text{si } a_n = a_{n-1} \end{cases}$$

Escojamos el término  $d_{n+1}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} d_{n+1} = c_n & \text{si } a_{n+1} \neq a_n \\ d_{n+1} \neq c_n & \text{si } a_{n+1} = a_n \end{cases}$$

Continuando para  $k \geq 2$ , escojamos el término  $d_{n+k}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} d_{n+k} = d_{n+k-1} & \text{si } a_{n+k} = a_{n+k-1} \\ d_{n+k} \neq d_{n+k-1} & \text{si } a_{n+k} \neq a_{n+k-1} \end{cases}$$

Es claro que:

$$|x - x_n| \leq \frac{1}{a^n} \quad \text{y} \quad |f_a^b(x_n) - f_a^b(x)| = \frac{b-1}{b^n} \quad (1)$$

Sea  $\delta > 0$ . Por el principio de Arquímedes tenemos que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$\forall k \geq n$ ,  $\frac{1}{a^{k-1}} < \delta$ . Pero de acuerdo con (1) podemos concluir que:

$$\left| \frac{f_a^b(x_n) - f_a^b(x)}{x_n - x} \right| \geq (b-1) \left( \frac{a}{b} \right)^n$$

como  $a > b$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{b} \right)^n = \infty$$

por lo tanto  $f_a^b$  no es derivable en  $x$ .

**PROGRAMA EN DERIVE PARA CONSTRUIR LAS ANTERIORES  
FUNCIONES CONTINUAS Y DERIVABLES EN NINGUNA PARTE**

$$S(x) := x - \text{FLOOR}(x)$$

La función  $Q(x, n, a)$  genera el  $n$ -ésimo dígito (en base  $a$ ) de la parte no-entera del número real  $x$ .

$$Q(x, n, a) := \text{FLOOR}[a^n S(x)] - a \text{FLOOR}[a^{n-1} S(x)]$$

$$R(x, n, a, b) := \text{IF}(n = 1, \text{IF}(Q(x, 1, a) = 0, 0, b - 1),$$

$$\text{IF}(Q(x, n, a) = Q(x, n - 1, a), R(x, n - 1, a, b), |b - 1 - R(x, n - 1, a, b)|))$$

La función  $F(x, m, a, b)$  toma el real  $x$  que está en el intervalo  $(0,1)$ , lo desarrolla en base  $a$ , calcula el coeficiente  $n$ -ésimo  $R(x, n, a, b)$  de la imagen (que es un dígito en base  $b$ ) para todo  $n$  entre 1 y  $m$ , y finalmente produce un real que coincide con la imagen de  $x$  en las primeras  $m$  cifras de su parte no-entera.

$$F(x, m, a, b) := \text{SUM}[R(x, n, a, b)/b^n, n, 1, m]$$

**Ejemplo:**

Construya la siguiente función:

$$T(m, a, b, j, d) := \text{VECTOR} \left( [x, F(x, m, a, b)], x, 0, 1, \frac{j}{d} \right)$$

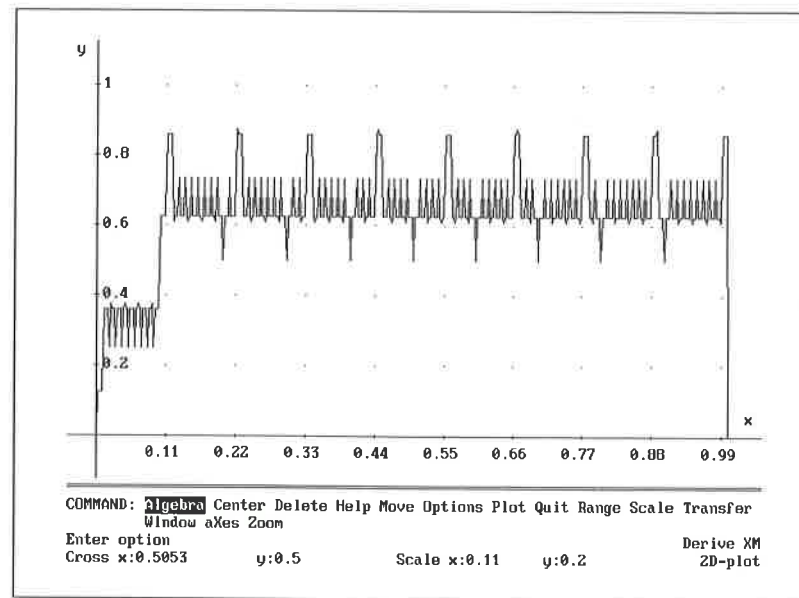
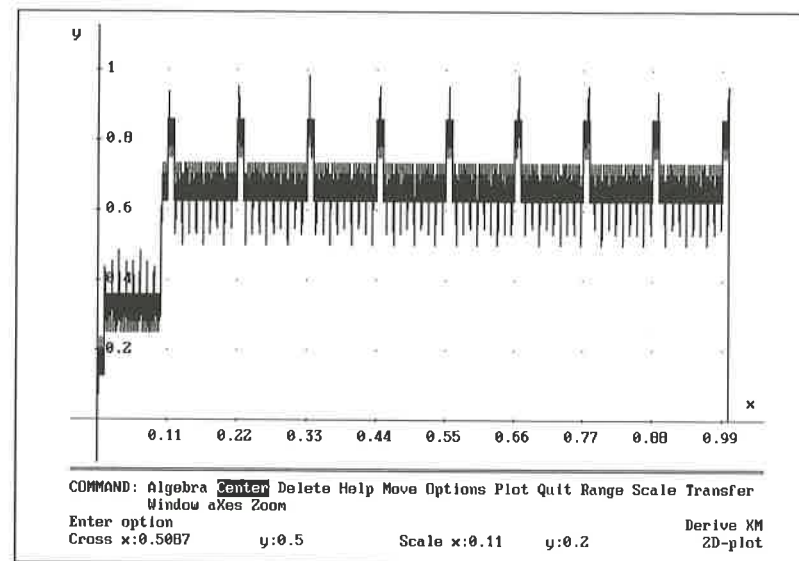
Tome las siguientes opciones del programa DERIVE:



Al simplificar y hacer el gráfico de

- a)  $T(6, 10, 2, 1, 12000)$     b)  $T(6, 10.2, 1, 12000)$

se obtiene:



### Observación:

Mediante un proceso análogo al desarrollado anteriormente se pueden genera funciones continuas y derivables en ninguna parte.

### Bibliografía

- [1] CASTRO, I., *Cómo hacer Matemáticas con DERIVE*, Ed. Reverté Colombiana, S.A., Santafé de Bogotá, 1993.
- [2] LLAMAS, A., *Una función continua y derivable en ninguna parte*, Matemática Enseñanza Universitaria (1980), Bogotá, 39-42.
- [3] *User Manual DERIVE Versión 3.01. A Mathematical Assitant, For Your Personal Computer*, Soft Warehouse, Inc. Honolulu, Hawaii U.S.A., 1994.

## Implementación de un paquete de dibujos de frisos

**Martín Garbayo Moreno\***  
**Eugenio Roanes Lozano\*\***

\* Dept. Didáctica de las Matemática

\*\* Dept. Algebra,

Fac. de Educación (Univ. Complutense Madrid)

### Abstract

Como indicábamos en nuestro anterior trabajo sobre diseño de rosetones, una de las razones que nos impulsó al desarrollo de estos programas fue la constatación de que la mayoría de los paquetes de programas de dibujo que incorporan posibilidades gráficas para trasladar, girar, reflejar,... una región del plano previamente marcada, trabajan aplicando la transformación deseada a cada píxel de la región en cuestión, lo que provoca que los procesos sean costosos en cuanto a uso de memoria, en cuanto al espacio necesario para su almacenamiento, así como lentos de ejecución.

El objetivo de este nuevo programa es dibujar frisos, de cualesquiera de los grupos posibles, con motivos diseñados por el usuario. Siguiendo con la línea establecida, en el dominio que se replica, los movimientos que se realizan (con las flechas del teclado) se traducen a órdenes de la Geometría de la Tortuga y son almacenadas en registros definidos por el programa en memoria dinámica. Por si hubiera reflexiones (tanto horizonta-

---

\* e-mail: garbayo@eucmos.sim.ucm.es

\*\* e-mail: eroanes@eucmos.sim.ucm.es



les como verticales), los ángulos se consideran orientados. A partir de este dominio se construye la célula. En la replicación posterior basta efectuar la traslación correspondiente, orientar la posición inicial de la tortuga y volver a ejecutar la serie de órdenes.

Nuestro paquete ha sido desarrollado en Turbo-Pascal, usando nuevamente la implementación de la *Geometría de la Tortuga [RR1]*, y funciona en ordenadores compatibles PC con tarjeta VGA o superior (en el modo 640 x 480 puntos, 16 colores, normas del BGI de Borland).

## 1. Los siete grupos de frisos

Consideremos una figura plana  $F$  (un subconjunto de puntos del plano) y denominemos  $S_F$  al conjunto de isometrías  $f$  del plano tales que  $f(F) = F$  (globalmente, no punto a punto). Se dice que  $F$  es un friso centrado en la recta  $c$ , a la que denominaremos centro del friso, si deja invariante a  $c$  y sus traslaciones forman un grupo cíclico infinito.

Definimos **dominio** de un friso como una parte de él tal que ninguna parte propia suya puede generar el friso aplicando transformaciones de su grupo de isometrías.

Así mismo definimos **célula** de un friso como una mínima parte de él que lo genera mediante traslaciones.

De acuerdo con la notación anterior, se demuestra que basta usar las siguientes isometrías para definir la célula de un friso a partir del dominio:

- Reflexiones respecto de la recta  $c$  o perpendiculares a dicha recta.
- Giros con centro perteneciente a  $c$  y de  $180^\circ$  de amplitud.
- Reflexión con deslizamiento de eje  $c$  y módulo del vector de la traslación igual a la mitad del que define la del friso.

Combinando todas las posibilidades a que dan lugar las condiciones anteriores y siguiendo las definiciones de [Ma] con una adaptación para frisos de la nomenclatura dada para grupos cristalográficos planos por D. Schattschneider, podemos definir:

- Un friso es del tipo F1 si no posee centros de simetría, no tiene ejes de simetría y no permanece invariante por ninguna reflexión con deslizamiento.
- Un friso es del tipo F2 si posee centros de simetría pero no tiene ejes de simetría.
- Un friso es del tipo F1m si no posee centros de simetría y el centro del friso es un eje de simetría.
- Un friso es del tipo Fm1 si no posee centros de simetría, si posee un eje de simetría, pero el centro del friso no es un eje de simetría.
- Un friso es del tipo F1g si no posee centros de simetría, no tiene ejes de simetría pero si es invariante por una reflexión con deslizamiento.

- Un friso es del tipo F2m si posee centros de simetría y el centro  $c$  es un eje de simetría.
- Un friso es del tipo Fm2 si posee centros de simetría y ejes de simetría, pero el centro del friso no es uno de tales ejes.

La siguiente tabla resume las anteriores definiciones:

Tipo de friso	Centro de simetría	Eje de simetría distinto del centro del friso	El centro del friso es eje de simetría	Reflexión con deslizamiento
F1	no	no	no	no
F2	si	no	no	no
F1m	no	no	si	no
Fm1	no	si	no	no
F1g	no	no	no	si
F2m	si	no	si	no
Fm2	si	si	no	no

Ejemplos de los anteriores frisos serían:

- F1: F F F F F F F F F F F F F F F F
- F2: S S S S S S S S S S S S S S S S
- F1m: D D D D D D D D D D D D D D D D
- Fm1: A A A A A A A A A A A A A A A A
- F1g: D W D M D W D M D
- F2m: I I I I I I I I I I I I I I I I
- Fm2: M W M W M W M W

## 2. Originalidad del paquete

Implementación El objetivo del programa es dibujar frisos de cualquiera de los grupos posibles, fundiendo las ideas recogidas en [A-d] así como las usadas en los programas existentes para el dibujo de rosetones, frisos y pavimentos.

En el diseño del dominio que se va a replicar, siempre se consideran dos puntos para determinar cada uno de los elementos que definirán a aquél. Cada uno de estos ele-

mentos se almacenará en uno o dos registros definidos con seis campos: uno tipo *byte* (1 byte de tamaño en memoria), dos tipo *word* (2 bytes) más tres tipo *real* (6 bytes). 23 bytes en total por registro. Con esto, cada uno de los elementos considerados ocupará:

- Nada, Segmento, Circunferencia o Relleno: Un registro en el que el primer campo identifica el elemento, los dos siguientes el color y el ancho (ceros en el caso de nada), ocupando avance, giro y 0 los tres restantes.
- Arco: Dos registros para almacenar el código de arco, color, ancho, giro, avance, centro del arco y ángulos que definen su amplitud.

Para una explicación más detallada sobre la obtención de cada uno de los parámetros anteriores, diríjase a [GR].

### 3. Manejo del paquete

Al arrancar el programa, éste muestra la pantalla de presentación (figura 1). Pulsando cualquier tecla se accede a la primera pantalla, en la que se ofertan dos opciones: dibujar un friso o leerlo del disco (figura 2).

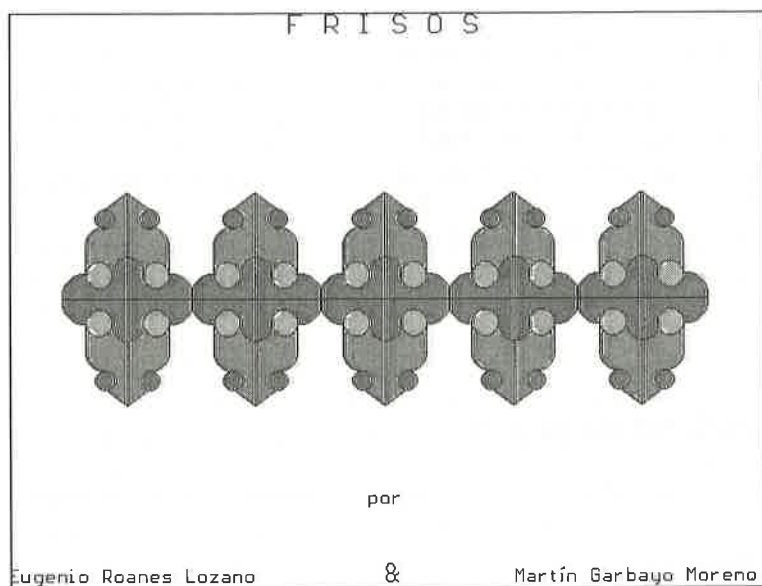


Figura 1

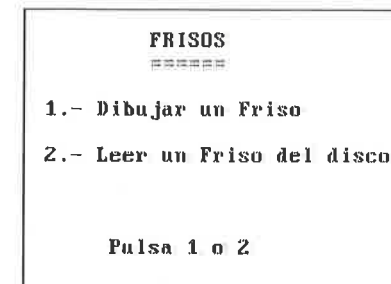


Figura 2

Si se elige la opción 1, se ofrece la posibilidad de colorear regiones delimitadas o no (figura 3).

~~¿Quieres disponer de la posibilidad de rellenar zonas cerradas con un color elegido por tí? PULSA 1 O 2~~

Figura 3

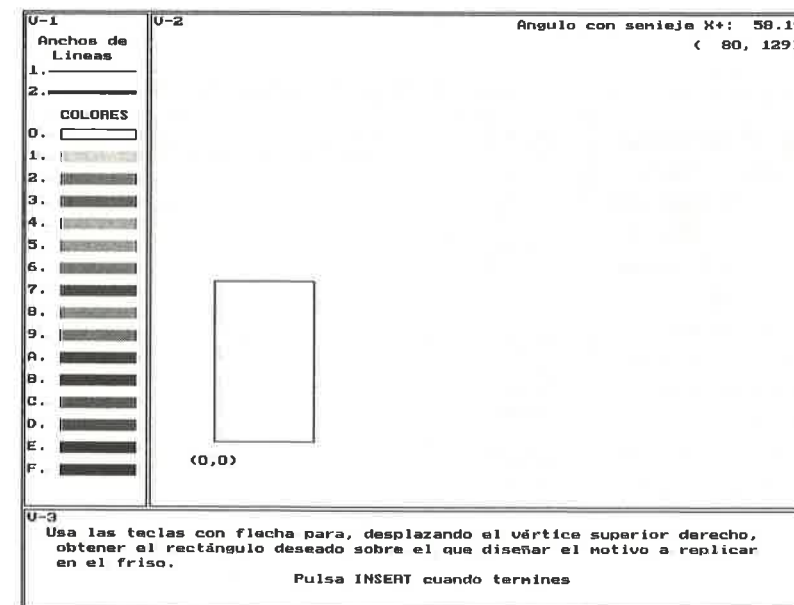


Figura 4

### 3.1. Manejo si no hay opciones rellena

Tanto si se pulsa S como n anteriormente, la siguiente pantalla (figura 4) es el pupitre de dibujo, en el que se muestra un rectángulo con proporciones «áureas» y se ofrece la posibilidad de modificar dichas dimensiones. Aparece siempre en el vértice superior derecho de la pantalla las coordenadas del vértice superior derecho del rectángulo en cuestión (en pixels), así como el ángulo determinado por la diagonal que pasa por dicho vértice y el lado inferior del rectángulo.

Una vez elegidas las dimensiones del rectángulo-dominio, aparece una cruz-cursor en el vértice inferior izquierdo del rectángulo y el mensaje de la ventana inferior del pupitre pasa a ser el de la figura 5.

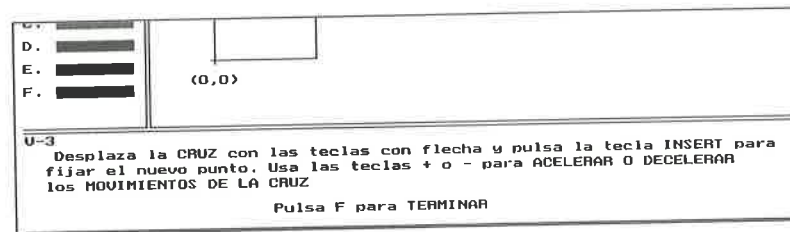


Figura 5

Se fija el nuevo punto desplazando el cursor mediante las flechas del teclado. Su posición en coordenadas cartesianas así como el ángulo que forma con el semieje x + el segmento de extremos el último punto seleccionado anteriormente y el punto actual, se explicitan continuamente en la esquina superior derecha de la pantalla (figura 6).

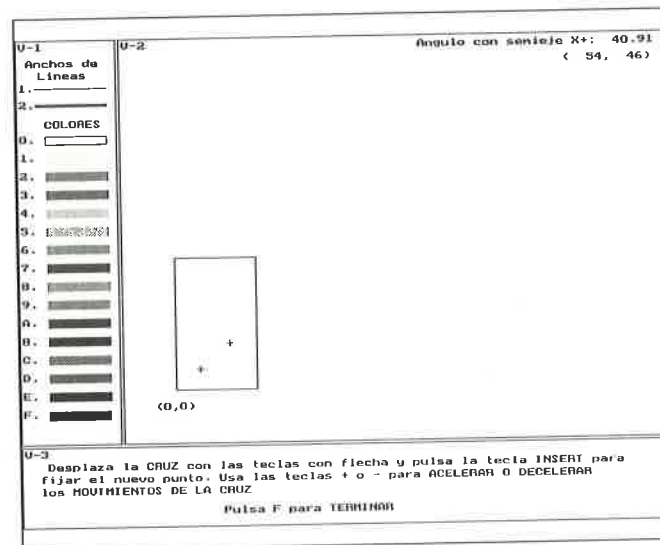


Figura 6

La velocidad de desplazamiento del cursor se puede variar con las teclas + y -. Fijado el segundo punto, la ventana inferior izquierda del pupitre ofrece las diferentes posibilidades para unir dichos puntos (figura 7), pidiendo a continuación el ancho del trazo (figura 8) y el color del mismo (figura 9).

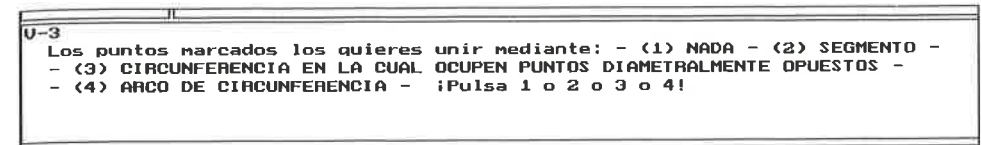


Figura 7



Figura 8

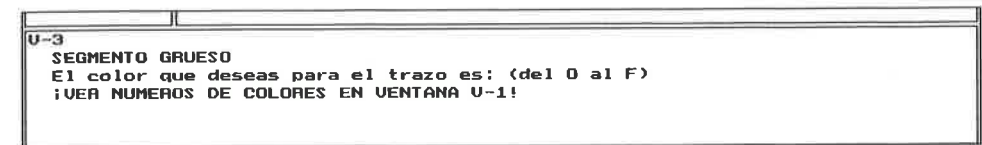


Figura 9

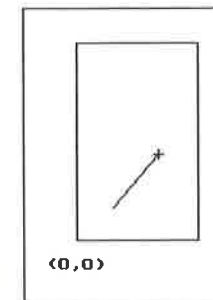


Figura 10

Las figuras 10 y 11 muestran el resultado de unirlos con segmento fino color 7 y con circunferencia de trazo grueso y color F.

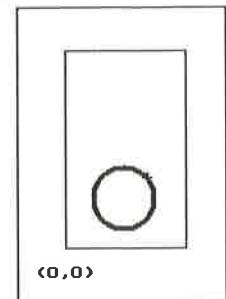


Figura 11

Si se elige unirlos mediante un arco de circunferencia, hay que dar a qué lado de la cuerda que determinan ambos puntos está el arco, y podemos variar su amplitud con las flechas (figuras 12 y 13).

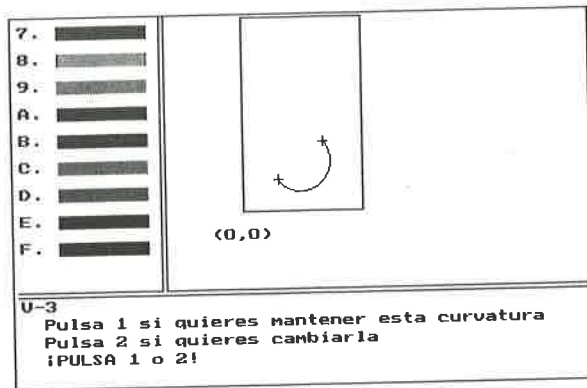


Figura 12

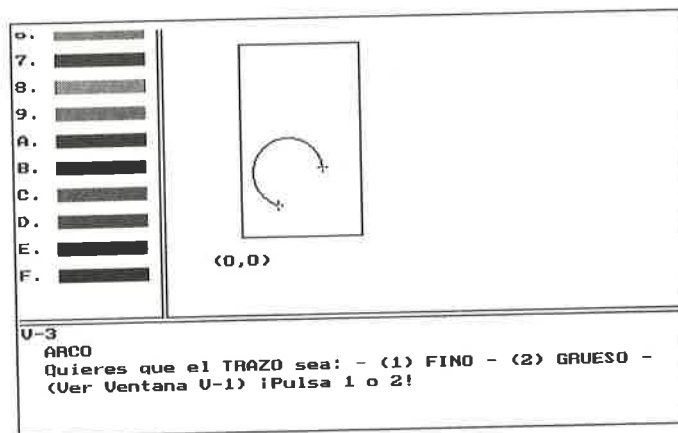


Figura 13

De nuevo se puede desplazar el cursor y repetirse el proceso.

### 3.2. Manejo si hay opciones rellena

Varía únicamente en que la ventana inferior (figura 14) ofrece una opción 5 de relleno de color de una región. En este caso no se elige color para el trazo, siendo éste siempre blanco, aunque sí se puede decidir la anchura del mismo.

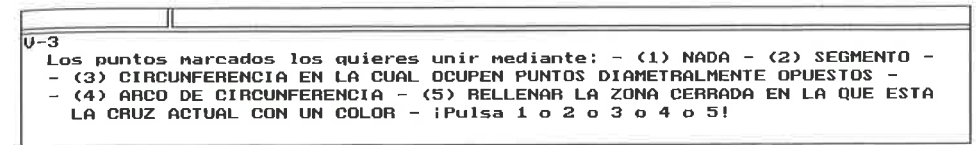


Figura 14

Para rellenar de color, el borde debe delimitar una región cerrada. Basta con desplazar el cursor al interior de dicha zona y elegir el color deseado para el relleno (figuras 15 y 16).

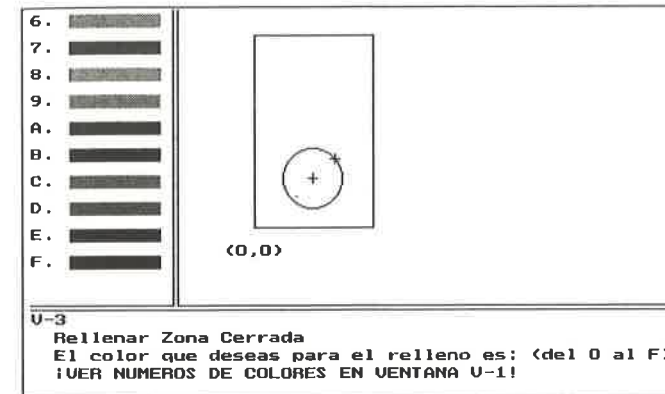


Figura 15

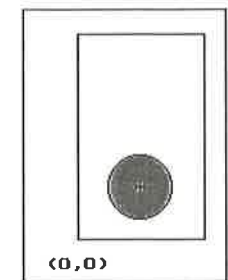


Figura 16

### 3.3. Dibujo de un friso

Una vez finalizado el diseño del dominio, pulsando la letra F se accede a la pantalla de la figura 17. En ella aparecen numerados del 1 al 7 los siete tipos de frisos y una representación de cada uno de ellos. Basta elegir uno de dichos números y el dominio será replicado según la definición del friso elegido, quedando representado éste.

1.- Friso tipo f1 :

2.- Friso tipo f2 :

3.- Friso tipo fm :

4.- Friso tipo fm1 :

5.- Friso tipo fig :

6.- Friso tipo f2n :

7.- Friso tipo fn2 :

Elige el tipo de friso que quieres diseñar.  
Pulsa 1 o 2 o 3 o 4 o 5 o 6 o 7.

Figura 17

Las figuras 18, 19, 20, 21, 22 y 23, muestran ejemplos de dominios y los frisos completos obtenidos a partir de éstos.

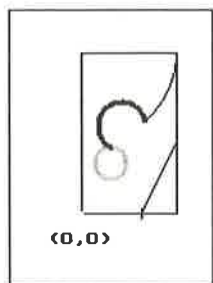


Figura 18

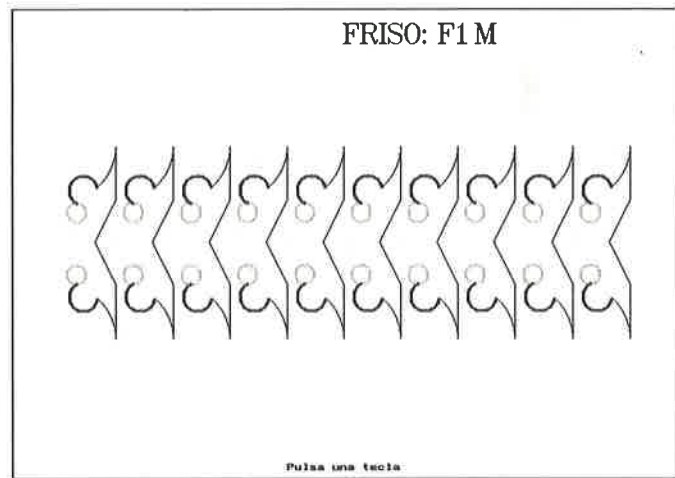


Figura 19

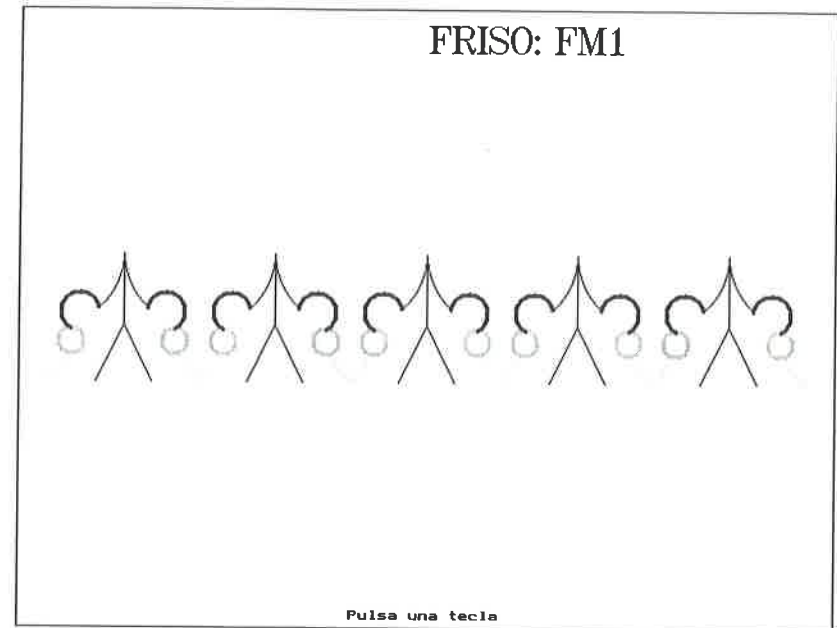


Figura 20



Figura 21



Figura 22



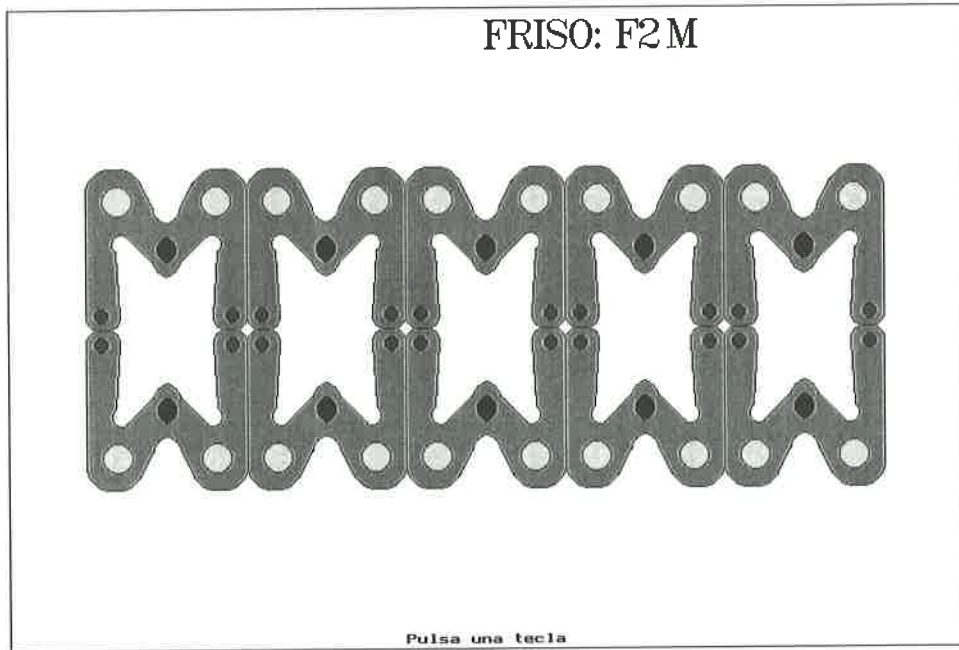


Figura 23

### 3.4. Análisis de los movimientos que dejan invariante al friso

Tras representarse el friso, pulsando una tecla aparece la ventana de la figura 24. Si se elige la opción 1 se marcará el dominio, los movimientos que generan la célula, así como la traslación que define al friso (figuras 25 y 26).

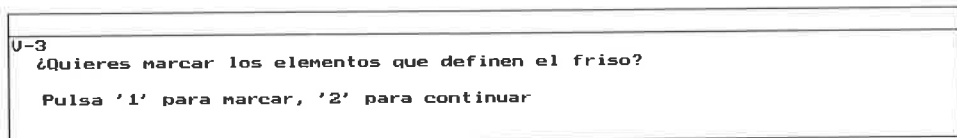


Figura 24

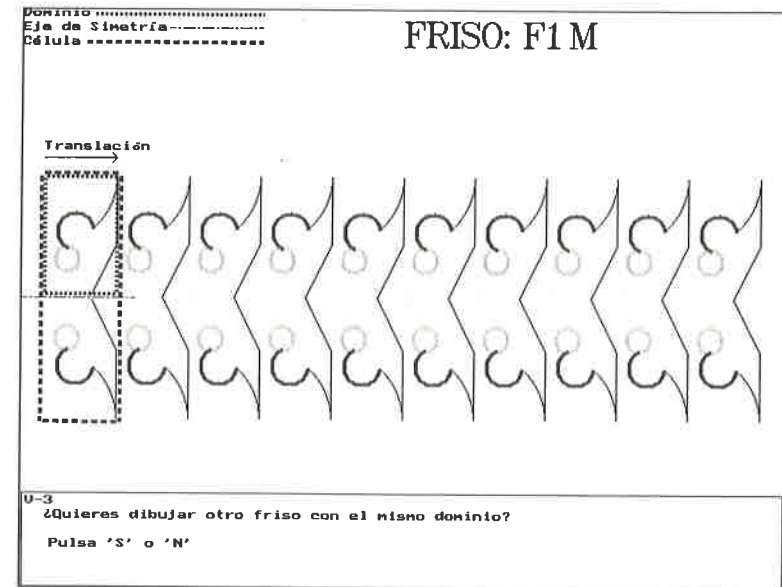


Figura 25

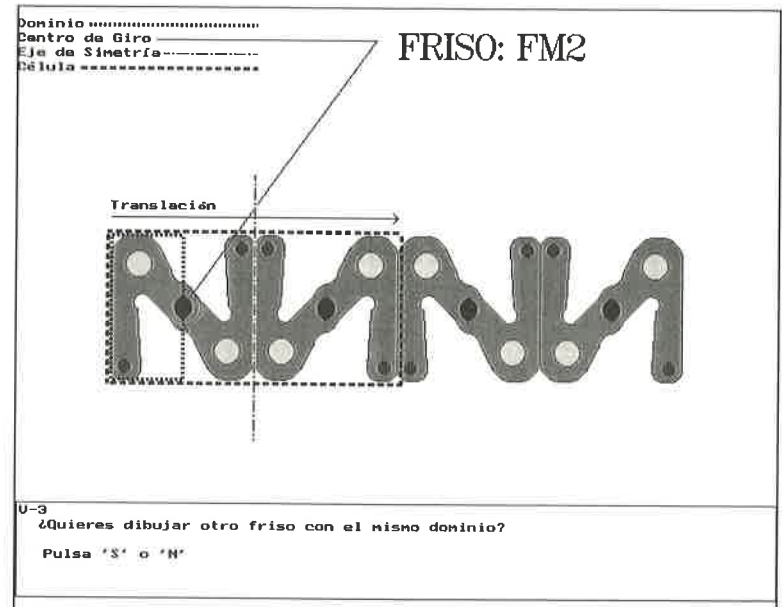


Figura 26

A continuación se ofrece la posibilidad de dibujar otro friso con el mismo dominio (figura 27), pasando, si se elige S, a la pantalla de la figura 17 (repetiéndose de nuevo el proceso).

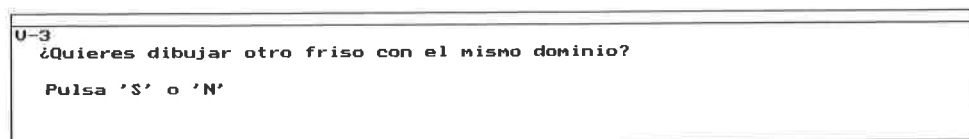


Figura 27

### 3.5. Grabar un friso en el disco

Antes de salir, se ofrece la posibilidad de grabar en disco el friso dibujado (figura 28). El nombre del archivo se dará a continuación sin extensión, añadiéndosele automáticamente la extensión .FRI.

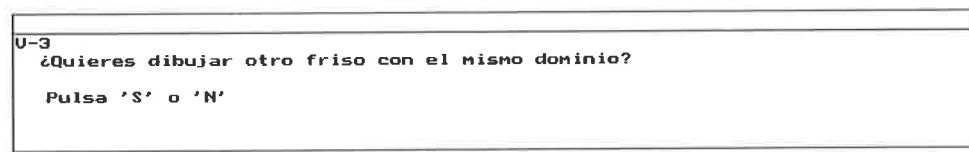


Figura 28

### 3.6. Cargar un friso

La segunda opción de la primera pantalla consiste en leer un friso del disco. Basta con elegir la opción 2 y teclear el nombre del friso. éste se cargará y representará en pantalla, pudiéndose repetir para el dominio que lo define todo el proceso indicado a partir de 3. 3.

## 4. Almacenamiento de la información

La secuencia de órdenes de la tortuga se almacena en memoria dinámica y se ejecuta sucesivas veces (una por cada dominio).

Para dar una idea de la bondad del tratamiento en cuanto al pequeño tamaño de los bloques de órdenes a memorizar, indicaremos que los archivos correspondientes a las figuras 20 y 23 ocupan respectivamente 184 y 782 bytes (no Kb).

## Bibliografía

- [A-d] H. ABBELSON, A. DISSA: *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*. M. I. T. , 1981.
- [APR] C. ALSINA, R. PÉREZ, C. RUIZ: *Simetría dinámica*. Ed. Síntesis, 1989.
- [Am] M. A. ARMSTRONG: *Groups and Symmetry*. Springer-Verlag, 1988.
- [Bo] Y. BOSSARD: *Rosaces, Frises et Pavages*. Ed. Cedic, 1977.
- [GR] M. GARBAYO, E. ROANES L.: *Implementación de un paquete de dibujo de rosetones (Grupos de Leonardo)*. Boletín de la Sociedad «Puig Adam», núm. 37, págs. 87-96.
- [Ma] G. E. MARTIN: *Transformation Geometry. An Introduction to Symetry*. Springer-Verlag, 1982.
- [RR1] E. ROANES M., E. ROANES L. : *Desarrollo de una implementación mejorada y flexible de la «Turtle geometry»*. III Encuentro de Geometría Computacional. Univ. de Zaragoza, 1-3 Julio, 1992.
- [RR2] E. ROANES M., E. ROANES L.: *Simulación didáctica de los Grupos de Simetría en el Arte Hispano-Musulmán*. Pub. Pablo Montesino. Univ. Complutense, 1993.
- [RR3] E. ROANES M., E. ROANES L.: *MACO. Matemáticas con ordenador*. Ed. Síntesis, 1988.
- [RR4] E. ROANES M., E. ROANES L.: *Nuevas tecnologías en Geometría*. Ed. Complutense, 1994.
- [ - ] -: *Manuales Turbo-Pascal, v. 7.0*. Borland, 1993.

## Acerca de la red de tenis (con DERIVE)

Eugenio Roanes Lozano\*  
Eugenio Roanes Macías\*\*

*Dpto. Algebra, Fac. de Educación (Univ. Complutense)*

*\* Este coautor es además Monitor Nacional de Tenis por la RFET*

### Resumen:

Los sistemas de cómputo algebraico se muestran, a veces, impotentes para resolver completamente ciertos problemas, por lo que, en tales casos, se está comenzando a combinar cálculo simbólico y numérico. Presentamos aquí un sencillo ejemplo para ilustrar lo antedicho. Se trata de calcular el área de la superficie cubierta por una red de tenis, tal como se dispone habitualmente en los clubs de tenis, para compararla con su posición teórica, prescrita por la Federación de Tenis. Sorprendentemente, esta diferencia no es pequeña, según se muestra a continuación, usando sólo herramientas de Matemática Elemental y DERIVE.

### Introducción

En una pista de tenis, los dos postes de la red deben ser colocados en diferente posición, según que se vaya a jugar «simples» (dos jugadores) o «dobles» (cuatro jugadores).

El reglamento de este deporte indica que para jugar simples los postes deben estar en posición de simples (más próximos) y el cable del que cuelga la red debe quedar muy tenso y sujeto en su centro por una cinta vertical (cuyo otro extremo se fija al suelo),

---

\*eroanes@fi.upm.es

\*\*roanes@ecmos.sim.ucm.es

para así asegurar que la altura de la red en su centro sea la correcta. Así se hace en los partidos de campeonato individuales de cierto nivel, por lo que a esta posición de la red la denominaremos *posición de campeonato*. En tal caso, la forma del borde superior de la red puede describirse por dos segmentos concatenados iguales, formando una letra «uve» muy abierta.

Pero lo habitual es jugar simples con la red colgando de los postes en la posición de dobles (más separados entre sí) y sin cinta vertical en el centro, limitándose los jugadores a ajustar la altura correcta de la red en su centro, regulando la tensión de la red. En tal caso, la forma del borde superior de la red puede describirse por una curva catenaria. Así ocurre en la mayoría de los clubs, por lo que a esta posición de la red la denominaremos *posición de club*.

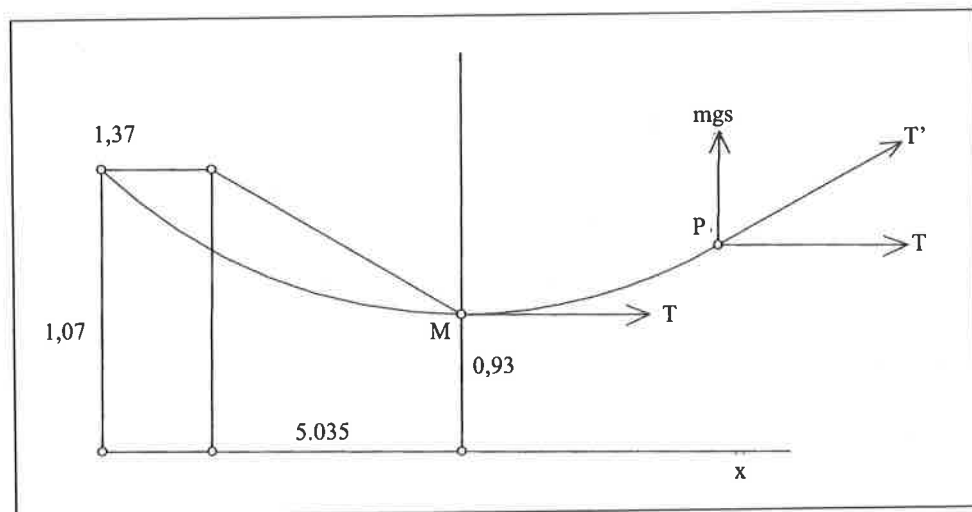
## 1. Dimensiones

Altura de los postes (tanto en simples como en dobles): 1,07 m.

Altura de la red en su centro (tanto en simples como en dobles): 0,93 m.

Distancia del centro de la red a los postes de simples: 4,115 m + 0,93 m = 5,035 m.

Distancia del centro de la red a los postes de dobles: 4,115 m + 1,37 m + 0,93 m = 6,405 m.



## 2. Ecuaciones

Introduzcamos un sistema de referencia en el plano de la sección vertical de la pista que contiene a la red, cuyo eje de abscisas sea la línea de tierra y cuyo eje de ordenadas sea el eje de simetría de la red.

### 2.1. Posición de club

Para simplicidad de cálculo, supondremos el peso de la red (de nylon) acumulable al peso del cable que la soporta (de acero). Denotemos por  $T$  a la tensión (horizontal) en el punto medio,  $M$ , del cable. Siendo  $P$  un punto arbitrario del cable,  $s$  la longitud del arco de cable de extremos  $M$  y  $P$ , y  $m$  la masa de la unidad de longitud de cable, el peso del arco de cable de extremos  $M$  y  $P$  será  $-mgs$ . En consecuencia, la tensión,  $T'$ , del cable en  $P$  resultará de componer  $T$  (horizontal) con la reacción,  $mgs$  (vertical), ante el peso de dicho arco del cable. En la posición de equilibrio, la dirección del cable en  $P$  será la dirección de  $T'$ . Por tanto, denotando por  $y$  a la función que define la posición del cable en equilibrio y denotando por  $\varphi$  al ángulo de  $T'$  con  $T$ , se tiene

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan \varphi = \frac{mgs}{T}$$

de donde, derivando, resulta

$$y'' = \frac{mg}{T} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{mg}{T} \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

luego designando abreviadamente por  $k$  al cociente  $mg/T$ , se obtiene la ecuación diferencial del cable de la red de tenis

$$y'' = k \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

Mediante el cambio de variable  $y' = z$ , se transforma en la ecuación de variables separables

$$z' = k \cdot \sqrt{1 + z^2}$$

que vamos a integrar con ayuda de DERIVE. Cargando el archivo ODE1. MTH (en el modo *Utility*), se integra la ecuación anterior, mediante la expresión de autor

$$\text{SEPARABLE}(k, (1 + z^2)^{(1/2)}, x, z, 0, 0)$$

ya que, para  $x = 0$  es  $z = y' = 0$  (pendiente horizontal). Aplicando el comando *Simplify*, se obtiene

$$\text{LN}(\sqrt{z^2 + 1} + z) = k \cdot x$$

y resolviendo esta ecuación respecto de la variable  $z$ , resulta

$$z = \frac{e^{k \cdot x}}{2} - \frac{e^{-k \cdot x}}{2}$$

Al restituir el cambio de variable  $y' = z$ , vuelve a obtenerse otra ecuación de variables separables, que puede integrarse mediante la siguiente expresión (donde *RHS* es la función lado derecho de la igualdad, que incluye Derive 3):

SEPARABLE (RHS (#3), 1, x, y, 0, 0.93)

ya que para  $x = 0$  es  $y = 0.93$  (altura de la red en su centro). Aplicando el comando *Simplify*, se obtiene

$$y - 0.93 = \frac{e^{k \cdot x}}{2 \cdot k} - \frac{e^{-k \cdot x}}{2 \cdot k} - \frac{1}{k}$$

es decir, la catenaria de ecuación

$$y = 0.93 + (1/k) \cosh(kx) - 1/k$$

debiendo ahora determinar la constante  $k$  por la condición de ser  $y = 1.07$  para  $x = 6.405$  (altura de la red en el poste)

$$1.07 - 0.93 = \frac{e^{k \cdot 6.405}}{2 \cdot k} - \frac{e^{-k \cdot 6.405}}{2 \cdot k} - \frac{1}{k}$$

Notemos que, a diferencia de otros Sistemas de Cómputo Algebraico, DERIVE transforma todas las entradas numéricas (incluso las dadas en coma flotante) a su expresión fraccionaria.

Desafortunadamente, Derive no puede resolver la anterior ecuación trascendente (respecto de la variable  $k$ ), por lo que nos conformaremos con una aproximación numérica, suficiente para nuestro propósito.

Para obtener tal aproximación, haremos uso del método de bisección. Este método, basado en el teorema de Bolzano, debido a su carácter recursivo, puede ser implementado fácilmente en DERIVE:

BOLZANO (f, x, p1, p2, e): = IF (ABS (p1 - p2) < e OR ~  
 LIM [f, x, (p1 + p2)/2] = 0, (p1 + p2)/2, ~  
 IF [lim (f, x, p1) \* lim [f, x, (p1 + p2)/2] > 0, ~  
 BOLZANO (f, x, (p1 + p2)/2, p2, e), ~  
 BOLZANO (f, x, p1, (p1 + p2)/2, e)))

Los argumentos de la función BOLZANO son:  $f$  (función),  $x$  (variable),  $p1$  (extremo inferior),  $p2$  (extremo superior) y  $e$  (cota superior de error). Se supone que  $f(p1)$  y  $f(p2)$  son de distinto signo. En nuestro caso,  $f$  será la función

$$w(k) := (1/k) * \text{COSH}(6.405 * k) + (0.93 - 1/k) - 1.07$$

la cual toma valores de distinto signo en 0.001 y en 0.02 (como puede comprobarse con el comando *sign* de DERIVE), por lo que el proceso recursivo puede comenzar a partir de  $p1 = 0.001$  y  $p2 = 0.02$ . Eligiendo como cota de error  $e = 0.00001$ , al pedir a DERIVE que calcule

BOLZANO (w(k), k, 0.001, 0.02, 0.00001)

el sistema devuelve 0.00682153, por lo que tomaremos como valor aproximado de la constante  $k$

$$k_0 = 0.00682$$

lo que nos lleva a considerar la función de red en posición de club en la forma:

$$F(x) := (1/k_0) * \cosh(k_0 * x) + 0.93 - 1/k_0.$$

Las aproximaciones que DERIVE devuelve para  $F(0)$  y  $F(6.405)$  son, respectivamente, 0.930005 y 1.06988.

## 2.2. Posición de campeonato

De acuerdo con lo indicado en la introducción, el borde superior de la mitad derecha de la red es un segmento de extremos los puntos (0, 0.93) y (5.035, 1.07), luego la ecuación de la recta que contiene a dicho segmento es

$$G1(x) = 0.93 + m \cdot x$$

siendo, de acuerdo con lo indicado en 1, la pendiente de dicha recta

$$m = \frac{1.07 - 0.93}{5.035}$$

En consecuencia, la ecuación del borde superior de la red completa en posición de campeonato es

$$G(x) = 0.93 + m \cdot \text{ABS}(x)$$

## 2.3. Diferencia de áreas

La diferencia de áreas puede ser calculada por integración de la función diferencia de las funciones  $F$  y  $G1$ , siendo los límites de integración inferior y superior, respectivamente, 0 y la distancia del centro de la red a uno de los postes de simples. Por simetría de la red, el área que ha de ser calculada será doble del valor de esta integral definida.



Calculando con ayuda de DERIVE, esto es, integrando entre las posiciones teóricas de los postes de simples, resulta

$$2 * \text{INT} [F(x) - G(x), x, 0, 5.035]$$

y aproximando, se obtiene el resultado  $-0.415067$  (valor negativo, como era previsible).

### 3. Representación gráfica de la red

La forma de la red (considerada como un obstáculo a superar por los jugadores) puede ser obtenida en Derive mediante las siguientes funciones definidas por partes, obtenidas a partir de las funciones  $F$  y  $G$  anteriormente consideradas

$$FF(x) := \text{IF} [\text{NOT ABS}(x) > 604.5, F(x), 0]$$

$$GG(x) := \text{IF} (\text{ABS}(x) < 503.5, G(x), \text{IF} (\text{NOT} (\text{ABS}(x) < 503.5 \text{ OR } \sim \text{ABS}(x) > 604.5), 107, 0))$$

Haciendo un plot para representar ambas funciones simultáneamente, se obtienen las gráficas de ambas posiciones de la red. Y para sacar el mejor provecho de las posibilidades gráficas del sistema (teniendo en cuenta la forma de la red de tenis), puede utilizarse, por ejemplo, la *overlay position* y elegir escalas 1.5 para abscisas y 0.25 para ordenadas.

### 4. Conclusión

Una adecuada combinación de cálculo simbólico y numérico ha permitido resolver automáticamente este sencillo problema con ayuda de DERIVE. Hemos llegado a concluir que la superficie cubierta por la red de tenis (para «simples») en su posición ortodoxa supera a la que cubre tal como se dispone habitualmente en los clubs de tenis en

*!!! más de 0,4 metros cuadrados !!!*

por lo que quienes practican este deporte a cierto nivel no han de conformarse con verificar la altura de la red en su centro.

#### Bibliografía

- [1] J. L. LLORENS: *Introducción al uso de DERIVE*, Pub. Univ. Politécnica de Valencia (1993).
- [2] PUIG ADAM: *Curso teórico-práctico de Ecuaciones Diferenciales aplicado a la Física y Técnica*, Biblioteca Rey Pastor - Puig Adam (1950).
- [3] A. RICH, J. RICH, D. STOUTEMYER: *DERIVE User Manual*, Soft Warehouse (1994).
- [4]— : *Reglamento de la Real Federación Española de Tenis*, RFET (1993).

## El Monasterio de El Escorial, un trozo de Guadarrama ordenado por la Geometría

Concepción Romo Santos

*Catedrática de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid*

### Introducción

Al iniciarse las obras de El Escorial, en un reino de Castilla llevado por un crecimiento demográfico notable, la región de Madrid está aún poco poblada. De esta manera el Rey para su nueva capital y para su obra de El Escorial tiene mucho espacio disponible pues Felipe II era amante de la naturaleza, del canto de los ruiseñores y de algún que otro paseo por el campo para ir de caza o pesca.

La arquitectura del Monasterio de El Escorial es escenario de una época. La estudiaremos brevemente así como la vida y obra de sus principales arquitectos.

### 1. El Escorial. Biografía de una época

Toda arquitectura es escenario, pero el Monasterio de San Lorenzo el Real de El Escorial es mucho más. Primero ocupó una parte de los pensamientos de su rey Felipe. En la cabeza del rey católico fue creciendo y ajustándose el programa: templo conmemorativo, panteón real, palacio, monasterio, colegio y biblioteca. Luego se proyectó y trazó enteramente en un gabinete creado expresamente para esta ocasión en los Alcázares de Madrid, lo que constituía una novedad absoluta en la España de la época. Ya puesta en marcha la gran tarea, miles de españoles de todas las procedencias, a los que se sumaron

algunos flamencos, franceses e italianos, gastaron parte de su existencia en su construcción. Convocados por una capacidad de contratación hasta entonces desconocida se reunieron en una nueva Babel de profesionales, que obligó a unificar el sistema de medida. La vara de Burgos se convirtió así en una nueva medida utilizada no sólo aquí, sino en cuatro continentes. Para el control de la obra se urdió un entramado burócratico y administrativo de una complejidad tal, que ha hecho pensar que fué un modelo a escala del armazón del nuevo estado moderno.

Desde sus obras, entre granito, cal y pizarra, ingenios, bueyes y barro, se gobernó gran parte del mundo conocido con órdenes escritas con mala letra en los márgenes de los papeles. El Monasterio se cruzó en la vida de los principales artistas y artesanos de la época. Así Miguel Angel, Vasari, Tiziano, El Greco, Leoni, Cellini..., tuvieron contacto con la gran construcción. Luego ya erigida se convirtió en el simbolo físico más contundente del poder del soberano. Y todo ello sucedió en menos de 25 años. Mientras, en claro contraste, la gran obra de la cristiandad —San Pedro de Roma— sólo veía crecer una parte de su fábrica: la cúpula.

¿Se puede explicar una época con un edificio? Desde luego, si el edificio es El Escorial y la época el reinado de Felipe II, sí. Otra cosa es cómo hacerlo.

Hemos acotado «La época» en el período 1.555 a 1.598, es decir, en el espacio de tiempo en el que Felipe II tuvo el poder. Y así, aparecen tres actos: El Escorial en idea y proyecto, El Escorial en construcción, El Escorial culminado y habitado.

Desencadenada la aventura por la victoria española en San Quintín, el único escenario bélico que vivió en su vida Felipe II, pudo a partir de ahí pensarse en un templo conmemorativo al santo de la onomástica. La muerte del emperador Carlos, movió a la idea de incluir un panteón real según el mandato de su testamento. El establecimiento permanente de la corte, antes itinerante, en Madrid permitió configurarlo también como palacio, cerrando la red del Alcázar, de Aranjuez, El Pardo y Valsain y orientó en su ubicación. Debía existir un monasterio de Jerónimos siguiendo la positiva experiencia real de Yuste. La finalización del Concilio de Trento con sus nuevos criterios e importante presencia española, pudo hacer pensar en un colegio o universidad, y el evidente interés humanista del rey Felipe en la existencia de una gran Biblioteca.

Durante la trabajosa y problemática construcción, mientras se discute si las obras deben realizarse a jornal, o cómo mejorar las cabrias, se decide elevar dos plantas para acoger a cien monjes, se ponen en duda las propias trazas de la Basílica y se acude al Consejo de la Academia de Florencia, Herrera desentierra un procedimiento clásico del prelabrado en cantera que racionalice la construcción.

En estos años se atesoran todo tipo de obras de arte, constituyéndose el monasterio en una auténtica «Cámara de Maravillas». Y el rey, que había visto morir a sus cuatro mujeres y a seis de sus hijos, muere a los 71 años, a las 5 de la madrugada del 12 de septiembre de 1.598, dentro de El Escorial, su obra.

Mientras el Monasterio de El Escorial ahí sigue. Pueden ustedes ir a verlo cuando quieran. Es posible que parte de aquella época siga flotando por sus espacios.

## 2. La región de Madrid en tiempos de Felipe II

Al iniciarse las obras de El Escorial, en un reino de Castilla llevado por un crecimiento demográfico notable, la región de Madrid está aún poco poblada. La misma villa de Madrid no es aún más que una población de tamaño medio, muy inferior a Toledo y Valladolid, incluso a Salamanca y Segovia. En 1.561 hay 4.500 vecinos, aproximadamente 20.000 habitantes. Madrid está alejada de todo lugar de consideración con la única excepción de Alcalá de Henares y se conforma con una corona de pueblos pequeños: en 1.561, Barajas, Leganés, Vallecas, Fuenlabrada, incluso Getafe, tienen más de 300 a 400 vecinos; entre Madrid y la muralla montañosa de Guadarrama-Gredos, las dos únicas poblaciones notables son Colmenar Viejo con 899 vecinos y San Martín de Valdeiglesias con 704 (aproximadamente 4.000 y 3.200 habitantes). Eso quiere decir que el rey para su nueva capital y para su obra de El Escorial tiene mucho espacio disponible pues Felipe II era amante de la naturaleza, del canto de los ruiseñores y de algún otro paseo por el campo para ir de caza o pesca.

## 3. La vida cotidiana en tiempos de Felipe II. Los gastos de un día

Tanteo de lo que parece ha menester mi señora dona Isabel con una mujer de servicio para el gasto ordinario de cada día.

De dos panecillos, ocho maravedies.....	8 mrs
De frutas y ensalada para principio y postre .....	10 mrs
De dos libras de carnero para comer y cenar .....	36 mrs
De tocino y verduras .....	8 mrs
De una vela.....	4 mrs
De sal, agua y especias .....	6 mrs
De leña, carbón para calentar y guisar .....	12 mrs
De un pan para la mujer de servicio .....	16 mrs
De media libra de carnero y media de vaca.....	15 mrs
De vino.....	6 mrs
Del salario de la mujer del servicio .....	17 mrs
Para cosas extraordinarias de cada día demás de los sobredichos, en que se considera botica, falta de salud, lavar la ropa y otro algún regalo para algunos días..	17 mrs
Que montan cada día .....	150 mrs

De manera que los dichos ciento cincuenta maravedies cada día hacen en los 365 días del año, considerando el día de pescado lo mismo que el día de carne, treinta y cuatro mil y setecientos cincuenta maravedies.

Que hacen ciento y cuarenta y seis ducados.

(Instituto Valencia de Don Juan, Envío 71, fol. 510)

#### 4. La historia arquitectónica del Monasterio de El Escorial

La historia arquitectónica del Monasterio de El Escorial, está formada realmente por una cadena de reformas y ampliaciones sobre el proyecto primitivo, tanto en su estructura y forma, como en sus usos. Aunque el resultado final que ha llegado ante nosotros aparece como un elemento cristalizado y arquitectónicamente unitario y puro.

La primera ampliación del Monasterio se hizo sobre la primera idea del «cuadro», como era llamada la planta del Monasterio. El rey Felipe II y Juan Bautista de Toledo lo ampliaron al doble de la superficie que habían trazado los monjes jerónimos en el replanteo del lugar.

Posteriormente Juan de Herrera, amplía en dos plantas la zona de convento y colegio, ya que en el proyecto primitivo tenía cuatro plantas en su mitad este y dos en la mitad oeste, quedando por tanto el alero de todo el edificio en la misma cota. Hizo desaparecer también cuatro torres, dos en la fachada principal y otras dos en el centro de las fachadas sur y norte, y dos campanarios en la zona de palacio que formarían con los dos existentes un cuadrado en torno al cimborrio de la basílica.

El patio de palacio es transformado perdiendo su forma cuadrada por la inclusión de un pabellón de servicios en forma de T que subdivide al gran patio que tendría una importancia similar al patio de los Evangelistas, en dos pequeños patios y otro mayor de forma rectangular, conocido como Patio de Coches.

#### 5. Los grandes arquitectos de El Escorial

Además de Juan de Herrera intervinieron en las obras del Monasterio los siguientes hombres :

- Juan de Minjares, aparejador de El Escorial.
- Juan Bautista Monegro, arquitecto y escultor, autor del San Lorenzo de la fachada principal.
- Francisco de Mora, ayudante de Juan de Herrera.
- Francisco Paciotto, ingeniero militar, sus ideas se utilizaron en el diseño final de Juan de Herrera.
- Tibaldi, arquitecto.
- Juan Bautista de Toledo. Además de la traza universal del complejo de El Escorial, Toledo realizó el patio de los Evangelistas.
- Pedro de Tolosa, arquitecto.
- Gaspar de Vega.
- Fray Antonio de Villacastín, obrero mayor de las obras de El Escorial.

## Matemáticas para Juegos

Nueva sección del Boletín de la Sociedad Puig Adam

Coordinada por Miguel Angel Gallardo Ortiz

*Profesor de la Universidad Carlos III*

La Sociedad de Profesores de Matemáticas «Puig Adam» inaugura una sección especializada en juegos, abierta a todos sus miembros y a otros profesores eventualmente invitados a colaborar en ella.

No vamos a descubrir aquí las estrechas relaciones que desde siempre han mantenido las Matemáticas y la teoría y la práctica del juego, en cualquiera de sus modalidades y estilos de éste, ni tan siquiera la obvia utilidad educativa del juego inspirado en las Matemáticas. No creemos que, aquí y ahora, sea necesario.

Lo que sí debemos hacer, desde ahora, es divulgar, proponer y seleccionar colaboraciones con un criterio abierto y sugerente.

En principio, no se trata sólo de hacer matemáticas recreativas, sino que lo ideal sería que desde esta nueva sección se dieran a conocer el talento y la curiosidad que despiertan los juegos más atractivos, y que se puedan modelizar matemáticamente.

Así, la progresión conceptual que va de los tan antiguos, pero todavía fascinantes Tangrams chinos, hasta el famoso Tetris, pasando por el genial cubo de Rubik, adapta a cada momento de la historia de las Matemáticas el gusto por el juego inteligente, del que quisiéramos hacernos portavoces y eco.

Alan Turing, en su más que recomendable artículo «Computing Machinery and Intelligence», considera que la inteligencia artificial estará madura cuando no sea discernible de la natural, al menos en escenarios como el que actualmente ofrece Internet, especialmente por la disponibilidad de programas telemáticos como «telnet», «talk», o los IRCs que posibilitan la multiconferencia escrita, y en tiempo real, eliminando virtual-



mente las distancias, incluso a escala planetaria. Construir programas y protocolos que permitan jugar así al ajedrez, póker, mus, o a nuevos juegos que todavía no podemos siquiera adivinar, es sólo una cuestión de tiempo y dedicación matemática e informática, y en menor medida, de los recursos técnicos que, en principio, cabría suponer más necesarios, y que cada vez son más accesibles.

Y para bien o para mal, estamos muy cerca de ver a un campeón mundial de ajedrez inhumano. En cualquier PC se puede simular nuestro juego favorito, y no resulta nada fácil estar a la altura de nuestro implacable adversario informático. Eso no significa, ni mucho menos, que consideremos recomendable pasar horas y horas ante una pantalla tratando de descubrir la estrategia y las tácticas de un programa de ordenador. Antes al contrario, el juego debe ser, para cualquier mentalidad matemática, un vehículo de comunicación y, sobre todo, una sana fuente de relaciones intelectuales y humanas.

En números anteriores de este Boletín ya hemos hecho referencia a las autopistas de la información y a la enorme utilidad que tienen para los matemáticos. Como no podría ser de otra manera, el juego es una de las actividades que despierta mayores pasiones y dedicaciones en la llamada red de redes telemáticas.

Internet es un medio prácticamente ideal para jugar, superando virtualmente las distancias y las diferencias entre personas y culturas. Y como no podría ser de otra manera, está dando lugar a toda una explosión de actividades lúdicas, muchas de las cuales sólo pueden ser comprendidas por medio de las Matemáticas. Nuestra primera intención es la de conectar con el fenómeno del juego en Internet, y divulgar, aquí y ahora, las mejores referencias que encontremos en la red.

Aunque el correo electrónico no es el recurso más adecuado para jugar, por lo lento que sería el desarrollo de cualquier partida, sí que es muy útil para mantener el contacto con aficionados con los que deseamos compartir experiencias y referencias.

El coordinador de la sección «Matemáticas para Juegos», que desde esta publicación espera la más amplia y entusiasta colaboración de socios y amigos, personalmente no tiene ninguna duda de que estamos en el albor de una nueva era lúdica, y es evidente que estará representada por una generación de juegos imposibles de desarrollar sin las nuevas tecnologías o las matemáticas.

Mi querido Vocal para Publicaciones, Prof. Dr. Fernández Biarge, ya me ha prevenido sobre lo difícil que es mantener en nuestro boletín la fertilidad de una sección tan ambiciosa como ésta.

Pero como coordinador de la sección de «Matemáticas para Juegos», ya he hecho mi primera apuesta, tal vez más basada en la experiencia que en la intuición. Desde esta sección, y su esfera de influencia, gracias a nuestra vocación matemática, podemos y debemos participar en las decisiones técnicas que tiene que tomar la autoridad del Juego, y el momento no puede ser más oportuno, a mi juicio, ya que se han transferido recientemente las competencias en materia de Juego a las Comunidades Autónomas y es muy posible que ello vaya a provocar una estimulante demanda de dictáme-

nes e informes periciales de matemáticos e ingenieros, distribuida por toda nuestra geografía.

Como no podría ser de otra manera, la industria del juego, que es con diferencia una de las más rentables de nuestro país en términos de beneficios por inversión empresarial, necesita de cantidades ingentes de matemática, ingeniería y creatividad.

Desde esta sección cultivaremos tanto como nos sea posible la literatura lúdica matemática y haremos las reseñas de textos publicados que nuestros lectores y colaboradores nos propongan.

Nadie puede captar mejor que un matemático todas las sutilezas estadísticas que se aprecian en un casino, o en tómbolas, rifas, bingos o sorteos. Y sólo desde las matemáticas se puede demostrar una irregularidad sistemática en el juego que se supone de azar. En este sentido, nada nos agradaría más que recibir comentarios y, mucho mejor aún, estudios que demuestren sesgos y tendencias no aceptables en cualquier tipo de juego de apuesta.

En Estados Unidos se celebran, desde 1991, las denominadas BARGE, «Big August Rec. Gambling Excursion», en las que aficionados al juego asisten a una convención multitudinaria, compartiendo experiencias, fuentes de información, y por supuesto, visitan casinos y organizan campeonatos y exhibiciones. Tal vez nosotros, con la ayuda de algún patrocinador, también podamos visitar casinos y salas de juego con este mismo espíritu, muy pronto.

Además, el tipo de juegos en redes de ordenadores que antes hemos descrito, instrumentalmente necesita de algoritmos y protocolos con los que representar el dinero de las apuestas. Una de las mejores formas de poner a prueba los algoritmos criptográficos y los protocolos con los que representar el dinero electrónico es, precisamente, la frecuente utilización de fichas, o de cuentas de crédito, para hacer pequeñas apuestas telemáticas.

Y la simulación de realidades, o de ficciones, puede dar enormes satisfacciones a la imaginación, además de hacer asequible la contemplación y entendimiento de lo más difícilmente accesible.

Es decir, que el juego, tal y como aquí queremos entenderlo, no sólo sirve para desarrollar la inteligencia, lo cual es por otra parte innegable, sino que también permite concebir y poner a prueba la más avanzada tecnología para medios de pago y crédito, basada en una codificación criptográfica de complejidad matemática creciente. Si un sistema está diseñado a prueba de jugadores, es muy posible que resista cualquier otra prueba, en cualquier momento y lugar.

En definitiva, esta sección pretende tomar muy en serio al juego, siempre desde el punto de vista matemático, pero nunca con la solemnidad del burro sino con toda la inteligencia que, nos consta, merecen nuestros lectores, y también, así los esperamos, nuestros activos colaboradores.

**Nota:** para mayor agilidad en la correspondencia, los comentarios, y las propuestas para publicación pueden dirigirse a:

Miguel Angel Gallardo (APEDANICA)  
Apartado Postal 17.083  
28080 Madrid

O bien, y siempre que ello sea posible, al

**E-mail:** [gallardo@batman.fi.upm.es](mailto:gallardo@batman.fi.upm.es)

## Congresos

### JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA DE MATEMATICAS CON DERIVE

Santander 28-30 junio 1995

Para información e inscripciones, dirigirse al Comité Organizador:

Dpto. de Matemática Aplicada a la Técnica  
Universidad de Valladolid  
E.U. Politécnica  
C/ Francisco Mendizabal, 1  
47014 VALLADOLID  
Tel: 983 - 42 35 11 (mañanas: Carlos Marijuán)  
983 - 42 35 12 (tardes: Alfonso Población)

### VI ENCUENTRO DE GEOMETRIA COMPUTACIONAL (6 EGC)

Universitat Politècnica de Catalunya  
Barcelona, 5-7 julio 1995

Para información e inscripciones, dirigirse al Comité Organizador:

Ferrán Hurtado (coordinador)  
Facultat d'Informatica  
C/ Pau Gargallo, 5  
08028 Barcelona  
Tel: (91) 401 69 22 - Fax: (91) 401 70 40 - email: [6egc@ma2.upc.es](mailto:6egc@ma2.upc.es)



**X ESCUELA DE VERANO DE INFORMATICA Y VIDEO  
I.C.E. DE LA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID**

Información: GRUPO LOGO-MADRID  
Apartado 43074 MADRID-28080  
Tel: (91) 719 48 70 - Fax: (91) 717 30 52

**VII JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE  
Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS**

**Madrid, 14, 15 y 16 Septiembre 1995**

Convoca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas  
Organiza: SMPM «EMMA CASTELNUOVO»  
Facultad de Matemáticas - Ciudad Universitaria - 28040 Madrid  
Tel. + Fax: (91) 394 45 80

**EACA 95  
PRIMER ENCUENTRO DE ALGEBRA COMPUTACIONAL  
Y APLICACIONES**

**Santander, 18-19 Septiembre 1995**

Para información e inscripciones, dirigirse al Comité Organizador:

email: eaca95@matsun1.unican.es

**CONGRESO DE ECUACIONES DIFERENCIALES  
Y APLICACIONES (CEDYA)  
CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA (CMA)**

**Vic (Barcelona)  
18 al 22 de septiembre de 1995**

Para información e inscripciones, dirigirse al Comité Organizador:

Comité Organizador del XIV C.E.D.Y.A./IV C.M.A.  
Estudis Universitaris de Vic  
C/ Miramarges, 4 - 08500 Vic  
Fax: (93) 889 10 63 - e-mail: cedyamaia.ub.es

**CONGRESO «BLAS CABRERA:  
SU VIDA, SU TIEMPO, SU OBRA»**

**Islas Canarias, 5-12 noviembre 1995**

Para información e inscripciones, dirigirse al Comité Organizador:

Francisco González Redondo  
Dpto. Algebra (D 3517) Facultad de Educación (UCM)  
C/ Juan XXIII, s/n  
28040 Madrid  
Tel: (91) 397 62 48  
Fax: (91) 397 62 63

**V SIMPOSIO INTERNACIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
ELFRIEDE WENZELBURGER**

**16 al 18 de octubre, 1995  
Ciudad de Mexico, México**

*Mesas Redondas \* Conferencias \* Exhibiciones \* Talleres*

*Organizado por la Maestría en Educación Matemática UACPyP, CCH  
Universidad Nacional Autónoma de México*

Comité Organizador del V Simposio Internacional en Educación Matemática  
ELFRIEDE WENZELBURGER (Maestría en Educación Matemática)  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Oficinas Admvas. 2, 1.º Piso  
Ave. Universidad 3000  
04510-México D. F. MÉXICO  
Tel. (52-5)-622-2340  
Fax: (52-5)-616-2297  
e-mail: mcruzaredvax1.dgsca.unam.mx

Costo de inscripción: US\$40. 00 (incluye Memorias y comida de clausura)

**ICME 8 (SEVILLA 1996)**  
**VIII CONGRESO INTERNACIONAL**  
**DE EDUCACION MATEMATICA**

**14 al 21 de julio de 1996**

El Comité Español del VIII Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8), en nombre de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) y de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas tiene el placer de anunciar que dicho Congreso tendrá lugar en Sevilla del 14 al 21 de julio de 1996.

El ICME-8 pretende continuar la serie de Congresos con el objetivo de ampliar el desarrollo de la educación matemática para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

**Programa del Congreso**

El ICME-8 contendrá un rico programa científico que cubrirá las más importantes áreas de la educación matemática y hará frente a los cruciales problemas que puedan ser de interés para los 3.500-4.000 participantes que se espera acudan a este Congreso.

Las principales actividades incluirán Conferencias Plenarias y Ordinarias, Grupos de Trabajo, Grupos Temáticos, Mesas Redondas, Talleres, Presentaciones Nacionales, Comunicaciones Breves, Proyectos, Películas y Exposiciones Especiales. Habrá también Exposiciones de libros, software y diversos materiales para la enseñanza. Los grupos de Estudio del ICMI y los organizadores de los distintos Seminarios del ICMI, contribuirán al Programa presentando informes de sus actividades. También se realizarán encuentros especiales durante el Congreso. Cada participante recibirá un ejemplar de las Actas del Congreso.

Los idiomas oficiales del Congreso serán el español y el inglés. El francés y el portugués, como idiomas de los países limítrofes, podrán ser hablados y traducidos de manera informal en los grupos de trabajo, grupos temáticos y grupos de estudio. No obstante, la mayoría de las sesiones se desarrollarán en inglés. Distintas informaciones, servicios y traducciones estarán disponibles en otros idiomas.

Para propuestas acerca del Programa Científico, dirigirse por escrito al Presidente del Comité Internacional de Programa.

**Segundo Anuncio**

El Segundo Anuncio, que se publicará durante el segundo semestre de 1995, contendrá una completa y detallada información sobre los programas científico y social del Congreso, así como, Boletines de Inscripción, de Alojamiento y de Presentaciones Cortas. Para recibirlo, puede dirigirse a:

SAEM THALES Facultad de Matemáticas  
C/ Tarfia, s/n 41012 SEVILLA  
Tél.: (95) 462 36 58  
Fax: (95) 423 63 78  
e-mail: icme8@obelix.cica.es

**Nota:** Los socios de la «Sociedad Puig Adam», como los de las otras sociedades matemáticas federadas, tendrán un descuento en su cuota de inscripción.

## Problemas propuestos

### Problemas propuestos en la Fase Final de la XXXI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA celebrada en Castellón de la Plana

#### Problema 1.º:

Se consideran conjuntos  $A$  de 100 números naturales distintos, que tengan la propiedad de que si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son elementos cualesquiera (iguales o distintos) de  $A$ , existe un triángulo no obtusángulo cuyos lados miden  $a$ ,  $b$  y  $c$  unidades. Se denomina  $S(A)$  a la suma de los perímetros de los triángulos considerados en la definición de  $A$ . Calcula el valor mínimo de  $S(A)$ .

#### Problema 2.º:

Recortamos varios círculos de papel (no necesariamente iguales) y los extendemos sobre una mesa de modo que haya algunos solapados (con parte interior común), pero de tal forma que no haya ningún círculo dentro de otro.

Pruébese que es imposible ensamblar las piezas que resultan de recortar las partes no solapadas y componer con ellas círculos disjuntos.

#### Problema 3.º:

Por el baricentro  $G$  de un triángulo  $ABC$  se traza una recta, que corta al lado  $AB$  en  $P$  y al lado  $AC$  en  $Q$ .

Demuestra que:

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$$

**Problema 4.º:**

Halla las soluciones enteras de la ecuación

$$p(x + y) = xy$$

siendo  $p$  un número primo.

**Problema 5.º:**

Demuestra que en el caso de que las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^3 + mx - n &= 0, \\ nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 &= 0 \\ (n \neq 0) \\ (m \neq 0) \end{aligned}$$

tengan una raíz común, la primera tendrá dos raíces iguales, y determina entonces las raíces de las dos ecuaciones en función de  $n$ .

**Problema 6.º:**

Siendo  $AB$  un segmento fijo y  $C$  un punto variable dentro de él, se construyen triángulos equiláteros de lados  $AC$  y  $CB$ ,  $ACB'$  y  $CBA'$ , en el mismo semiplano definido por  $AB$ , y otro de lado  $AB$ ,  $ABC''$ , en el semiplano opuesto. Demuestra:

- Las rectas  $AA''$ ,  $BB''$  y  $CC''$  son concurrentes.
- Si llamamos  $P$  al punto común a las tres rectas del apartado a), hallar el lugar geométrico de  $P$  cuando  $C$  varía en el segmento  $AB$ .
- Los centros  $A'''$ ,  $B'''$  y  $C'''$  de los tres triángulos forman un triángulo equilátero.
- Los puntos  $A'''$ ,  $B'''$ ,  $C'''$  y  $P$  están sobre una circunferencia.

## Problemas resueltos

**PROBLEMA 4.º (BOLETÍN N.º 36)**

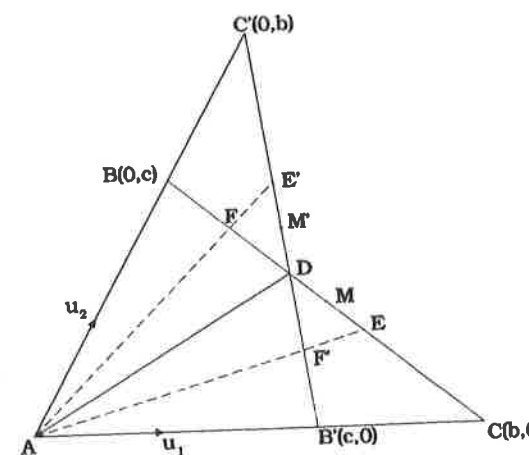
Sea  $AD$  la bisectriz interior del triángulo  $ABC$ . Sean  $E$ , el punto simétrico de  $D$  respecto del punto medio de  $BC$ , y  $F$  el punto de  $BC$  tal que  $BAF = EAC$ . Demostrar que

$$\frac{BF}{FC} = \frac{c^3}{b^3}$$

**Solución**

Al realizar una simetría respecto de la recta  $AD$ , esta recta queda invariante y el triángulo  $ABC$  se transforma en el triángulo  $AB'C'$ , estando  $B'$  en la recta  $AC$  y  $C'$  en la recta  $AB$ . Los puntos  $D$ ,  $M$  (punto medio de  $BC$ ),  $E$  y  $F$  se transforman en los puntos  $D' = D$ ,  $M' = E'$  y  $F' = F$  que cumplen las mismas propiedades que sus originales. Y además, por construcción de  $F'$ , ¡ $F'$  es el punto de corte de las rectas  $AE$  y  $B'C'$ !

Tomemos como referencia euclídea  $\{A, u_1, u_2\}$ , donde  $u_1$  y  $u_2$  son los vectores unitarios



siguientes:  $u_1 = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{\vec{AC}}{b}$ ,  $u_2 = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\vec{AB}}{c}$ .

Observemos que si  $\vec{BF} = \lambda \vec{BC}$ , entonces  $\vec{FC} = (1 - \lambda) \vec{BC}$ , y por lo tanto

$$\frac{BF}{FC} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$

- 1) Los vértices de los triángulos tienen coordenadas: A (0,0), B (0,c), C (b,0), B' (c,0) y C' (0,b).
- 2) El punto D es el punto de corte de la recta BC con la recta AD cuyo vector director es (1,1) y pasa por el origen, y por tanto, su ecuación es  $y = x$ .

La recta BC tiene de ecuación vectorial:

$$\vec{x} = \vec{AB} + \lambda \vec{BC} = (0,c) + \lambda(b, -c) = (\lambda b, c - \lambda c)$$

Al cortar con  $y = x$ , queda  $\lambda b = c - \lambda c$ , luego  $\lambda = \frac{c}{b + c}$

Por consiguiente,  $\vec{BD} = \frac{c}{b + c} \vec{BC}$

- 3) El punto medio M de BC cumple:

$$2\vec{BM} = \vec{BC}$$

- 4) Para E tenemos:

$$\vec{BE} = \vec{BM} + \vec{DM} = \vec{BM} + \vec{BM} - \vec{BD} = 2\vec{BM} - \vec{BD} = \left(1 - \frac{c}{b + c}\right) \vec{BC} = \frac{b}{b + c} \vec{BC}$$

De donde

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = (0, c) + \frac{b}{b + c} (b, -c) = \left(\frac{b^2}{b + c}, c - \frac{bc}{b + c}\right) = \frac{1}{b + c} (b^2, c^2)$$

- 5) El punto F' es el corte de AE con B'C'. Como la ecuación general de AE es

$$\frac{x}{b^2} = \frac{y}{c^2}$$

Y la ecuación vectorial de B'C' es

$$\vec{x}' = \vec{AC}' + \lambda \vec{B'C}' = (c, 0) + \lambda(-c, b) = (c - \lambda c, \lambda b)$$

El punto F' verifica  $B'\vec{F}' = \lambda B'\vec{C}'$ , donde  $\lambda$  cumple  $\frac{c - \lambda c}{b^2} = \frac{\lambda b}{c^2}$ . Por tanto

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{c^3}{b^3}$$

Y según la observación del principio

$$\frac{BF}{FC} = \frac{B'F'}{F'C'} = \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{c^3}{b^3}$$

NOTA. El proceso seguido aquí demuestra también el teorema de la bisectriz interior, pues en el apartado 2) se obtuvo

$$\vec{BD} = \frac{c}{b + c} \vec{BC}$$

de donde

$$\vec{DC} = \left(1 - \frac{c}{b + c}\right) \vec{BC} = \frac{b}{b + c} \vec{BC}$$

Por consiguiente

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$$

**Bienvenido Jiménez Martín.**  
I. B. «Alonso de Madrigal». Avila.



**PROBLEMA 7.º (BOLETÍN N.º 36)**

Sea  $a$  un número real dado. Calcular los números reales  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que verifican el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1^2 + ax_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_2 \\ x_2^2 + ax_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_3 \\ &\dots \\ x_{n-1}^2 + ax_{n-1} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_n \\ x_n^2 + ax_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_1 \end{aligned}$$

**Solución**

A) Resolvamos en primer lugar el caso  $n = 2$ :

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + ax + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = y \\ y^2 + ay + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x \end{cases}$$

Se trata de hallar los puntos de corte de dos parábolas que son simétricas respecto de la recta  $y = x$ . Por tanto los puntos de corte de una de ellas, pongamos la primera, con la recta  $y = x$  serán puntos de corte de las dos parábolas (aunque puede haber otros que no estén sobre la recta).

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x^2 + ax + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = y \\ y = x \end{cases}$$

resulta como solución única

$$x = -\frac{a-1}{2}, \quad y = -\frac{a-1}{2}$$

Esto implica que la recta  $y = x$  es tangente a las dos parábolas y que éstas no se cortan en más puntos. Vémoslo de modo analítico.

El sistema (1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \left(x + \frac{a-1}{2}\right)^2 + x = y \\ \left(y + \frac{a-1}{2}\right)^2 + y = x \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones y simplificando resulta:

$$\left(x + \frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a-1}{2}\right)^2 = 0$$

que tiene como solución única la que indicábamos anteriormente.

Veamos a continuación el caso general, utilizando las ideas descubiertas en el caso  $n = 2$ .

B) Caso general

El sistema propuesto inicialmente puede escribirse:

$$\begin{cases} \left(x_1 + \frac{a-1}{2}\right)^2 + x_1 = x_2 \\ \left(x_2 + \frac{a-1}{2}\right)^2 + x_2 = x_3 \\ \dots \\ \left(x_{n-1} + \frac{a-1}{2}\right)^2 + x_{n-1} = x_n \\ \left(x_n + \frac{a-1}{2}\right)^2 + x_n = x_1 \end{cases}$$

Sumando todas sus ecuaciones y simplificando, resulta:

$$\left(x_1 + \frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{a-1}{2}\right)^2 + \dots + \left(x_{n-1} + \frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(x_n + \frac{a-1}{2}\right)^2 = 0$$

cuya única solución es  $x_1 = -\frac{a-1}{2}, x_2 = -\frac{a-1}{2}, \dots, x_n = -\frac{a-1}{2}$

**Bienvenido Jiménez Martín**

I. B. «Alonso de Madrigal (Avila).

**PROBLEMA 9.º (BOLETÍN N.º 36)**

Determinar todos los números naturales  $n$  tales que el número:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)$$

tiene exactamente tres divisores primos.

**Solución**

Usaremos continuamente el siguiente hecho elemental: si el número  $b$  es múltiplo de  $m$ , entonces el siguiente múltiplo de  $m$  es  $b + m$ .

Llamemos  $a_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$ . Éste número es siempre múltiplo de  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ , ya que al ser el producto de 4 números consecutivos  $n, n+1, n+2$  y  $n+3$ , exactamente uno será múltiplo de 4, el que está dos lugares detrás o dos delante será múltiplo de 2 y otro (que puede coincidir con alguno de los anteriores) será múltiplo de 3. Por lo tanto  $a_n$  tiene siempre los divisores primos 2 y 3. Por consiguiente, si verifica el enunciado, será de la forma

$$a_n = 2^r 3^s p^t \quad \text{con } r \geq 3, s \geq 1, t \geq 1 \text{ y } p \text{ primo, } p \geq 5.$$

Observemos que al ser  $p \geq 5$  un divisor primo de  $a_n$ , exactamente uno de los cuatro números consecutivos  $n, n+1, n+2$  y  $n+3$  tiene que ser múltiplo de  $p$ .

El primer  $n$  que cumple lo pedido es  $n = 2$ . Veamos si hay más.

Consideremos los siguientes casos para los cuatro números consecutivos  $n, n+1, n+2$  y  $n+3$ .

A) -Alguno es múltiplo de 6 (y por lo tanto de 2 y de 3).

Podemos distinguir tres subcasos:

A1) El múltiplo de 6 es el 2.º o el 3.º.

Entonces el anterior y el siguiente no pueden ser múltiplos ni de 2 ni de 3 y deberían ser potencias de  $p$ , lo cual es imposible.

A2) El múltiplo de 6 es el 1.º.

Tenemos que los cuatro números consecutivos tienen que ser de la siguiente forma:

$$n = 2^i 3^j, n+1 = p^k, n+2 = 2^h, n+3 = 3^m$$

donde los exponentes verifican:  $i, j, k \geq 1; h, m \geq 2$  (ya que  $n > 2$ ).

Por lo tanto  $2^i 3^j + 2 = 2^h$ . Y dividiendo entre 2:

$$2^{i-1} 3^{j+1} = 2^{h-1}$$

Si fuese  $i > 1$ , entonces el número de la izquierda sería impar y el de la derecha par, lo cual es imposible. Luego  $i = 1$  y será  $n = 2 \cdot 3^j$ .

También se tiene que verificar  $2 \cdot 3^j + 3 = 3^m$ . Dividiendo entre 3:

$$2 \cdot 3^{j-1} + 1 = 3^{m-1}$$

Si fuese  $j > 1$ , entonces el número de la izquierda no sería múltiplo de 3 y el de la derecha sí, lo cual es imposible. Luego  $j = 1$  y será  $n = 6$ . Con lo cual

$$a^6 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$$

y  $n = 6$  verifica lo pedido.

A3) El múltiplo de 6 es el 4.º.

Los cuatro números consecutivos tienen que ser de la forma:

$$n = 3^m, n+1 = 2^h, n+2 = p^k, n+3 = 2^i 3^j$$

donde los exponentes verifican:  $i, j, k, m \geq 1; h \geq 2$ .

Razonando como en el caso anterior, debería ser  $2i3j-2 = 2h$ . Y dividiendo entre 2:

$$2^{i-1}3^{j-1} = 2^{h-1}.$$

Si fuese  $i > 1$ , entonces el número de la izquierda sería impar y el de la derecha par, lo cual es imposible. Luego  $i = 1$  y será  $n + 3 = 2 \cdot 3^j$ .

También tiene que verificarse  $2 \cdot 3^j - 3 = 3^m$ . Dividiendo entre 3:

$$2 \cdot 3^{j-1} - 1 = 3^{m-1}.$$

Si fuese  $j > 1$ , entonces el número de la izquierda sería múltiplo de 3 menos 1 y el de la derecha sería múltiplo de 3 (si  $m > 1$ ) o 1 (si  $m = 1$ ), lo cual es una contradicción. Luego  $j = 1$  y será  $n + 3 = 6$ . Con lo cual  $n = 3$ ,

$$a_3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

y  $n = 3$  verifica lo pedido.

**B) Ninguno es múltiplo de 6.**

Entonces exactamente dos son múltiplos de 2, uno distinto de los anteriores es múltiplo de 3 y el que falta tiene que ser múltiplo de p. Además cada uno de ellos tiene que ser una potencia del primo del cual es múltiplo. Tenemos solamente dos posibilidades (según que los múltiplos de 2 ocupen lugares impares o pares):

B1)  $n = 2^i, n + 1 = 3^j, n + 2 = 2^m, n + 3 = p^k$ , donde  $k \geq 1; i, j, m \geq 2$  (ya que  $n > 2$ ).

Obsérvese que el múltiplo de 3 no puede ser el 4.º pues el 1.º sería múltiplo de 6.

Se tiene que verificar  $2^i + 2 = 2^m$ , y dividiendo entre 2

$$2^{i-1} + 1 = 2^{m-1}$$

lo cual es imposible.

B2)  $n = p^k, n + 1 = 2^i, n + 2 = 3^j, n + 3 = 2^m$ , donde  $k \geq 1; i, j, m \geq 2$ .

Razonando exactamente igual que en el caso anterior se llega a contradicción. En resumen: los únicos números  $n$  que verifican el enunciado propuesto son: 2, 3 y 6.

**Bienvenido Jiménez Martín**  
I. B. «Alonso de Madrigal» (Avila).

**PROBLEMA 10.º (BOLETÍN N.º 36)**

Se traza una elipse tomando como eje mayor el mayor de los lados de un rectángulo dado, de manera que la elipse pase por el punto de intersección de las diagonales. Pruébese que si se une un punto de la elipse, exterior a dicho rectángulo, con los extremos del lado opuesto, las rectas así determinadas dividen al eje mayor en segmentos que están en progresión geométrica.

**Solución 1**

Puesto que una elipse de semiejes  $a$  y  $b$  ( $a > b$ ) podemos obtenerla de una circunferencia de radio  $a$ , mediante una transformación afin que deje invariante el eje mayor, vamos a resolver el problema para una circunferencia de radio  $a$ , uno de cuyos diámetros es el lado de un cuadrado.

Se trata de probar que los segmentos DF, FG y GC están en progresión geométrica, es decir que se verifica:

$$q^2 = p \cdot r,$$

donde  $DF = p$ ,  $FG = q$  y  $GC = r$ .

Los triángulos rectángulos ADF y EHF son semejantes, por tanto

$$\frac{p}{p'} = \frac{2a}{h}, \text{ o sea } p = \frac{2a p'}{h}$$

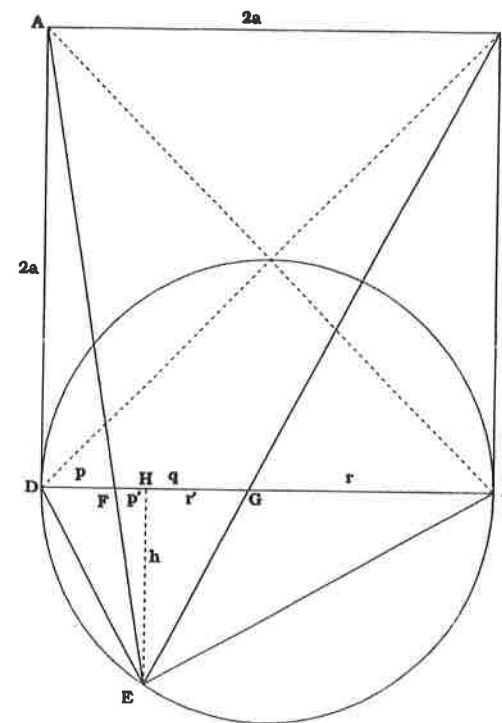
Llamando  $k = \frac{2a}{h}$ , podemos escribir

$$p = k \cdot p'.$$

Análogamente, los triángulos rectángulos BCG y EHG son semejantes, por tanto

$$\frac{r}{r'} = \frac{2a}{h}$$

Luego  $r = k \cdot r'$ .



Por otro lado, el triángulo EDC es rectángulo y aplicando el teorema de la altura:

$$h^2 = (p + p')(r' + r).$$

Sustituyendo los valores de  $p$  y  $r$  obtenidos

$$h^2 = (k \cdot p' + p')(r' + kr'), \text{ es decir } h^2 = (1 + k)2p'r'.$$

Volviendo a la ecuación primera  $q^2 = p \cdot r$ , sustituyendo los valores  $q$ ,  $p$  y  $r$  en función de  $k$ ,  $p'$  y  $r'$ , nos queda

$$(p' + r')^2 = k \cdot p' \cdot k \cdot r', \text{ o sea, } (p' + r')^2 = k^2 \cdot p' \cdot r'.$$

Y sustituyendo el valor de  $k$

$$h^2 (p' + r')^2 = 4a^2 \cdot p' \cdot r'$$

Por otra parte, según la figura,  $p + q + r = 2a$ , luego  $k \cdot p' + (p' + r') + k \cdot r' = 2a$ , y por tanto  $(1 + k)(p' + r') = 2a$ , y elevando al cuadrado

$$(1 + k)^2 (p' + r')^2 = 4a^2$$

Multiplicando miembro a miembro esta última expresión por la obtenida anteriormente  $h^2 = (1 + k)^2 p' r'$ , resulta

$$h^2 \cdot (1 + k)^2 (p' + r')^2 = (1 + k)^2 p' r' \cdot 4a^2$$

Simplificando  $(1 + k)^2$ , queda

$$h^2 (p' + r')^2 = 4a^2 \cdot p' \cdot r'$$

que expresa la relación geométrica entre los segmentos, según acabamos de ver.

Para obtener el mismo resultado para la elipse de semieje mayor  $a$  y semieje menor  $b$  y tal que el eje mayor  $2a$  es el lado de un rectángulo y el otro lado del rectángulo es  $2b$ , aplicaremos una transformación afín.

Consideremos un sistema de coordenadas rectangulares de eje  $X$  la recta  $DC$  y de eje  $Y$  la perpendicular por el centro de la circunferencia. En este sistema la circunferencia de la figura tiene por ecuación  $x^2 + y^2 = a^2$  y el cuadrado tiene de vértices  $A(-a, 2a)$ ,  $B(a, 2a)$ ,  $C(a, 0)$  y  $D(-a, 0)$ . Consideremos la transformación afín que «achata» la cir-

cunferencia convirtiéndola en una elipse y de modo que el punto  $(0, a)$  se transforme en el punto  $(0, b)$ . Esta transformación tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{a}y \end{cases}$$

Con lo cual, despejando  $x$  e  $y$  y sustituyendo en la ecuación de la circunferencia, resulta

$$x'^2 + \frac{a^2 y'^2}{b^2} = a^2$$

Dividiendo entre  $a^2$  y quitando las primas, queda la ecuación de la elipse de semiejes  $a$  y  $b$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En esta transformación afín el eje  $x$  queda fijo, y el cuadrado  $ABCD$  se transforma en el rectángulo  $A'B'CD$  donde  $A' = (-a, 2b)$  y  $B' = (a, 2b)$ . El punto  $E$  de la circunferencia se transforma en un punto  $E'$  de la elipse. Pero como las afinidades conservan los puntos de corte de las rectas,  $F$  y  $G$  siguen siendo los puntos de corte de las rectas  $DC$  con  $E'A'$  y  $DC$  con  $E'B'$  respectivamente. De aquí se sigue la relación geométrica entre los segmentos del eje mayor de la elipse, pues son los mismos que en el caso de la circunferencia.

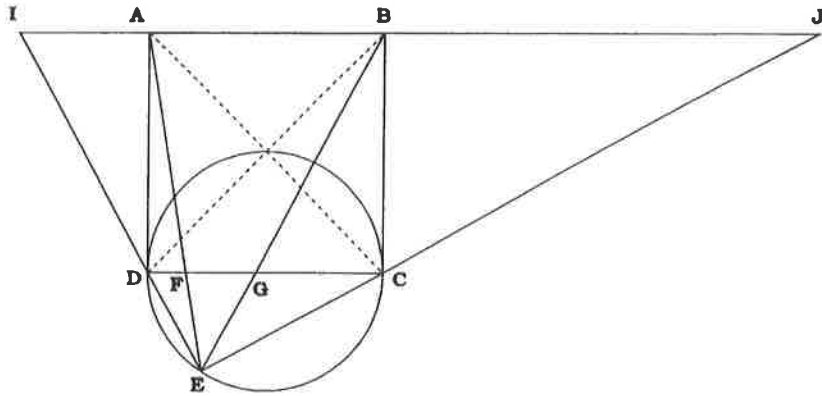
## Solución 2

Consideremos en primer lugar que se trata de una circunferencia.

Con la notación de la figura se tiene que el triángulo  $DEC$  es rectángulo en  $E$  por ser  $DC$  un diámetro.

Los triángulos rectángulos  $IAD$  y  $CBJ$  son semejantes por tener un ángulo agudo igual:

$$\angle IDA = \angle DCE = \angle BJC$$



Por lo tanto

$$\frac{IA}{BC} = \frac{AD}{BJ}$$

y como  $BC = AD = AB$ , se tiene

$$IA \cdot BJ = AB^2$$

que expresa que los segmentos  $IA$ ,  $AB$  y  $BJ$  están en progresión geométrica.

Tengamos en cuenta la siguiente propiedad elemental: si los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  están en progresión geométrica de razón  $R$ , entonces si los multiplicamos por  $k$ ,  $ka$ ,  $kb$  y  $kc$  están también en progresión geométrica de razón  $R$ .

Por lo tanto, si aplicamos la homotecia de centro  $E$  que transforma el punto  $I$  en el punto  $D$ , transformará los segmentos  $IA$ ,  $AB$  y  $BJ$  en  $DF$ ,  $FG$  y  $GC$  respectivamente y éstos serán proporcionales a aquéllos y por la propiedad citada estarán también en progresión geométrica.

Para obtener el resultado para la elipse, basta hacer una «contracción» hacia la recta  $DC$  y de modo que  $A$  se transforme en  $A'$  según se explicó antes.

Una consecuencia importante del método de demostración seguido es el siguiente **procedimiento para construir puntos de la elipse de semiejes  $a$  y  $b$** .

Se traza la circunferencia de radio  $a$ .

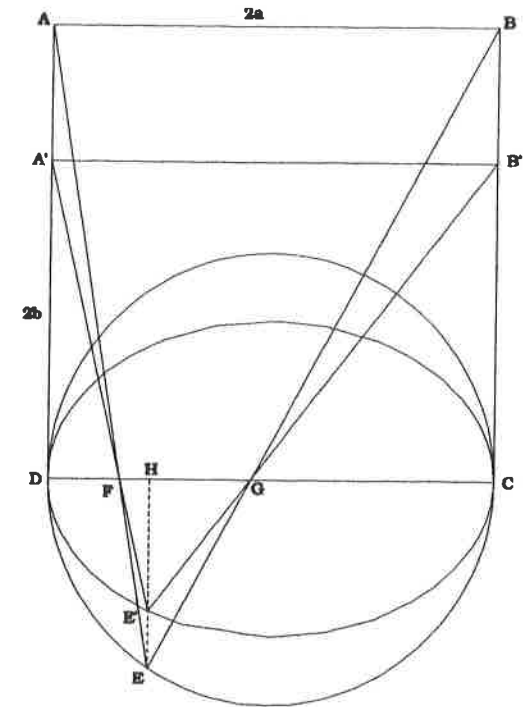
Se traza el cuadrado  $ABCD$  de lado  $2a$  y de modo que  $DC$  sea un diámetro de la circunferencia.

Sea  $A'$  en  $AD$  y  $B'$  en  $BC$  de modo que  $DA' = CB' = 2b$ .

Sea  $E$  un punto cualquiera de la circunferencia, exterior al cuadrado.

Sean  $F$  y  $G$  los puntos de corte de  $DC$  con las rectas  $AE$  y  $BE$ , respectivamente.

Pues bien, el punto  $E'$  intersección de las rectas  $A'F$  y  $B'G$  es un punto de la elipse, según hemos probado. Es más, como  $EE'$  es paralela a  $AD$  (en la transformación afín anterior, todo punto  $P$  se transforma en otro  $P'$  que está en la paralela al eje  $Y$  por  $P$ ), se puede obtener  $E'$  como corte entre la recta  $A'F$  (o  $B'G$ ) y la recta paralela a  $AD$  por  $E$ .



**Bienvenido Jiménez Martín**  
I. B. «Alonso de Madrigal» (Avila).

### PROBLEMA 2.º (BOLETÍN N.º 38)

$ABC$  es un triángulo isósceles, con  $AB = AC$ . Se cumple que

- (i)  $M$  es el punto medio de  $BC$  y  $O$  es el punto de la recta  $AM$  tal que  $OB$  es perpendicular a  $AB$ .
- (ii)  $Q$  es un punto cualquiera del segmento  $BC$ , distinto de  $B$  y de  $C$ .
- (iii)  $E$  está en la recta  $AB$  y  $F$  en la recta  $AC$ , de tal manera que  $E$ ,  $Q$  y  $F$  son distintos y están alineados.

Demostrar que  $OQ$  es perpendicular a  $EF$  si y sólo si  $QE = QF$ .



### Solución

Según la figura, donde D está en la recta AB y DB = AB, los ángulos ODB, OBM, BAM y OAC son iguales, ya que OBD y OBA son triángulos rectángulos iguales por construcción, AM es la bisectriz de BAC y perpendicular a BC, y en el también triángulo rectángulo OBM, el ángulo OBM tiene el mismo complementario MBA que BAM, éste como ángulo del triángulo rectángulo BAM.

También los ángulos complementarios de los anteriores son iguales: DOB, BOM, ABM y AOC.

Sea  $\gamma$  el ángulo BOQ y A' el punto de la recta AC tal que  $\angle AOA' = \gamma$ .

Los triángulos OBQ y OAA' son semejantes por tener dos ángulos iguales. Luego

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OQ}{OA'} \Leftrightarrow \frac{OB}{OQ} = \frac{OA}{OA'} = k$$

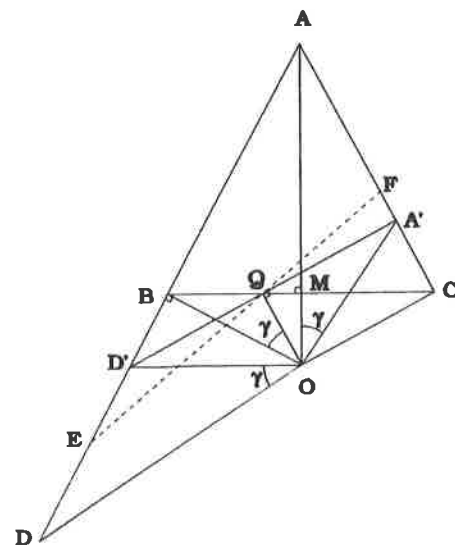
Sea S la semejanza dada por  $S = H(O, k)$  o  $G(O, \gamma)$  donde  $G(O, \gamma)$  es el giro de centro O y ángulo  $\gamma$  y  $H(O, k)$  es la homotecia de centro O y razón  $k$ . Es claro que  $S(O) = O$ ,  $S(B) = Q$  y  $S(A) = A'$ .

Por otra parte, si D' es el punto de la recta AB tal que el ángulo  $\angle DOD' = \gamma$ , se verifica que S(D) es un punto de QA' (pues D está alineado con B y A y S conserva la alineación) y también está en OD', luego  $S(D) = D'$ .

Por las propiedades de la semejanza, S transforma puntos alineados en puntos alineados, conserva los ángulos y transforma los segmentos en otros proporcionales. Por lo tanto, D', Q y A' están alineados, OQ es perpendicular a D'A' pues OB lo es a DA y  $QA' = QD'$  ya que  $BA = BD$ .

Si EF es perpendicular a OQ, se sigue que  $E = D'$  y  $F = A'$  y por tanto  $QE = QF$ .

Recíprocamente, si  $QE = QF$  y supongamos que fuese  $F \neq A'$  (y por tanto  $E \neq D'$ ), entonces el cuadrilátero ED'FA' es tal que sus diagonales se cortan mutuamente en sus puntos medios Q (pues  $QA' = QD'$  y  $QF = QE$ ) y sería un paralelogramo y por consiguiente FA' paralela a ED' en contradicción con que se cortan en A. Por lo tanto  $F = A'$  y  $E = D'$  y EF es perpendicular a OQ.



**Bienvenido Jiménez Martín.**  
I. B. «Alonso de Madrigal». Avila.

### Índice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.º	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números													
		1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º				
1	Varios	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	—	—	—	—	—	—	—	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	—	—	—	—	—	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	—	—	—	—	—	—	—	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	—	—	—	—	—	—	—	C
6	Varios	7	7	16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	—	—	—	—	—	—	—	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	—	—	—	—	—	—	—	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	—	—	—	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	—	—	—	—	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	—	—	—	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	—	—	—	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	—	—	—	—	—	—	—	C
14	Varios	15	15	15	15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	—	—	—	—	—	—	—	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	—	—	—	—	—	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	—	—	—	—	—	—	—	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	—	—	—	—	—	—	—	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	—	—	—	—	—	—	—	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	—	—	—	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	—	—	—	C
	OI-89-Cuba	26	27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	—	—	—	C
	Oposiciones	31	30	29	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	—	—	—	—	—	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	—	—	—	—	—	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	—	—	—	C
26	OMI-90-China/	32	XX	XX	32	XX	XX	XX	32	XX	34	—	—	—	C
	OI-90-Valladolid	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	—	—	—	—	—	C
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	—	—	—	—	—	—	—	C
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	C
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	XX	XX	33	33	33	—	—	—	C
	OME-f1-91	33	34	34	34	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	XX	XX	XX	35	—	—	—	C
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	XX	35	34	—	—	—	—	—	—	—	—	C
32	OMI-92-Moscú/	35	XX	XX	XX	XX	XX	38	35	XX	38	—	—	—	C
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
33	OME-f1-92/f1-92(v)	XX	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	—	—	—	C
	/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	—	C
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	—	—	—	—	—	—	—	—	C
35	OMI-93-Turq./	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	39	—	—	—	C
	OI-93-Méjico/PNS	XX	XX	39	39	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	C
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	—	—	—	C
37	OME-f2-94/PNS	40	XX	XX	40	XX	XX	XX	40	—	—	—	—	—	C
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	C
39	OI-94-Brasil/OME-	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	C
	f1-94/f1-94(v)	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	—	C
40	OME-f2-95-	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	C

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 o 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. PNS = Propuestos por nuestros socios.

## INSTRUCCIONES PARA EL ENVIO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACION EN EL BOLETIN

Por haber sido cambiado el modo de impresión del Boletín a partir del número 39, nos vemos obligados a cambiar las normas de presentación de originales, que deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo siguiente:

### Copias en papel (por duplicado)

Escritas con un procesador de texto en hojas DIN A-4.

Los artículos comenzarán con el título, nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el boletín).

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: «Problema número (Boletín número)», tal como suelen aparecer en el boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

### Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3. x o superior), conteniendo dos archivos:

- a) archivo del documento para el procesador de texto utilizado
- b) archivo del documento en código ASCII.

Este último es el que más probablemente utilizará la imprenta.

Si se desea, las figuras pueden incluirse en archivos de extensión TIF (en otro caso se captarán por escaneado)

### Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

## RELACION DE OTROS ARTICULOS QUE HAN SIDO ADMITIDOS PARA SER PUBLICADOS EN PROXIMOS NUMEROS DE ESTE BOLETIN

- Geometría Computacional: la Geometría contra reloj, por *Manuel Abellanas*.
- Sombras cónicas, por *José Miguel Celorrio Laseca*.
- Imagen mental de los estudiantes de bachillerato sobre el concepto de función, por *M.ª Dolores de Prada Vicente*.
- Parchis de operaciones, por *A. Teresa Castañeda Escudero y Miguel Angel Sanz Poyo*.



**SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS  
BOLETIN DE INSCRIPCION (CENTROS)**

D. ....  
como ..... del Centro .....  
domiciliado en .....  
Ciudad ..... Codº Postal..... Telef. ....

**SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR**

Con esta fecha autorizo al Banco .....  
Sucursal o Agencia ..... en .....  
Dirección de la misma .....  
para que cargue en mi cuenta:...../...../...../...../  
abierta al nombre: .....  
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1994-95 y siguientes.

Fecha ..... de ..... de 1995

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 ptas).  
Remítanse ambas partes a  
**Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Apartado 9479. 28080-MADRID.**

Fecha ..... BANCO: .....  
Sucursal o Agencia ..... en .....  
Dirección de ésta.....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta:...../...../...../...../  
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, hasta  
nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos .....  
Dirección .....