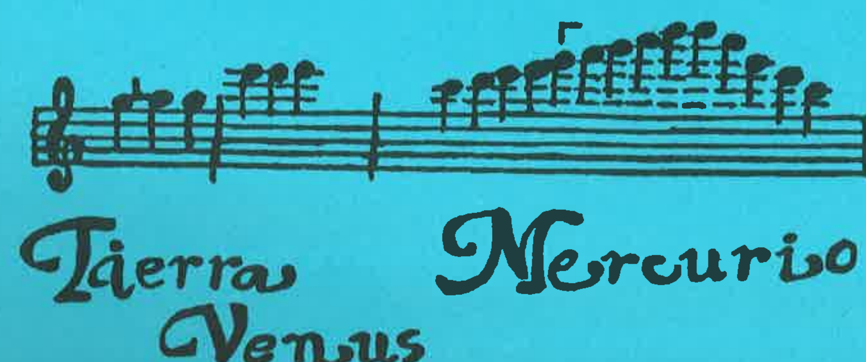
BOLETIN **4**

SOCIEDAD
CASTELLANA
PUIG ADAM
DE PROFESORES
DE MATEMATICAS.



JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Julio Fernández Biarge

Vicepresidentes:

Juan Ochoa Mélida (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Joaquín Gómez Rey (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: José Francisco Carballido Quesada

Vicesecretario: María Luisa Pacios

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Angel Martínez Losada

VIDA DE LA SOCIEDAD

- El día 25 de Mayo de 1984 se celebró la Asamblea General anual de la Sociedad, en los locales del Instituto "Isabel la Católica". Se procedió en ella a la renovación reglamentaria de algunos miembros de la Junta Directiva, que quedó constituída en la forma que aparece en la página anterior de este Boletín.

- Ese mismo día, la Sociedad ofreció una comida de homenaje al catedrático don Antonio Rodríguez Sanjuán, con motivo de su jubilación.

- Como anunciamos en nuestro anterior Boletín, el día 28 de Abril tuvo lugar en Cuenca un emotivo acto organizado por la Sociedad con motivo de la jubilación del catedrático don Juan Martino Casamayor.

- Organizado por la Sociedad, se celebró el "SEGUNDO CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS", cuya crónica se incluye en este número del Boletín.

- El día 1º de Octubre de 1984 tuvo lugar una Asamblea General Extraordinaria en la que se dió cuenta del estado económico de la Sociedad, y como consecuencia, se acordó elevar la cuantía de las cuotas, fijándolas en 1.700 pesetas para el curso 1984-85.

- También se acordó mantener el actual domicilio social provisional, pero centralizar la recepción de correspondencia en el

Apartado nº 9479
28080 MADRID

- En los últimos días de septiembre y en los primeros de octubre se han desarrollado los cuatro Cursos para Profesores de EGB y Enseñanzas Medias organizados por la Sociedad, con subvención del Ministerio de Educación y Ciencia. Los asistentes a los mismos habrán recibido por correo los certificados de asistencia visados por dicho Ministerio. Tuvieron lugar en el Instituto "Beatriz Galindo", amablemente cedido para ello por su dirección, y fueron los siguientes:

1. "ANALISIS DE DATOS: UNA NUEVA VISION DE LA ESTADISTICA DESCRIPTIVA", por Gonzalo ARNAIZ TOVAR.

2. "EL LENGUAJE LOGO APLICADO A LA ENSEÑANZA", por Ricardo AGUADO-MUÑOZ.

3. "LA REFORMA DE LAS ENSEÑANZAS MEDIAS", por José COLERA JIMENEZ.

4. "LA HISTORIA DE LAS MATEMATICAS COMO RECURSO DIDACTICO", por Agustín de la VILLA CUENCA.

- En la citada Asamblea General Extraordinaria se acordó hacer un llamamiento a los socios para que procuren que otros compañeros se incorporen a nuestra Sociedad. Publicamos en este número la lista de socios en el momento de cerrar la edición.

- Todos nuestros socios saben que el próximo día 12 de Enero de 1985 tendrá lugar el XXV aniversario del fallecimiento de nuestro maestro D. Pedro PUIG ADAM. La Sociedad unirá sus iniciativas a las de otras Instituciones que conmemorarán esa fecha recordando su persona y su obra; a ello dedicaremos gran parte de nuestro próximo número de este Boletín.

NOTICIAS

- Recientemente, después de una larga vida enteramente consagrada a la docencia y a la investigación matemática, han sido jubilados en el servicio activo, por haber cumplido la edad reglamentaria, los ilustres catedráticos de Universidad, don Enrique Linés Escardó y don Pedro Abellanas Cebollero. Reciban por ello nuestra cordial felicitación, con el deseo de que sigan, por muchos años, aportando a la ciencia matemática, y a los docentes, su actividad inestimable.

- La Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas ha publicado el número 9 de su Revista "NUMEROS". En línea ascendente continúan los entusiastas profesores de las islas la tarea emprendida en orden a mejorar la calidad de la enseñanza de la matemática. Nuestra enhorabuena.

- Asímismo, hemos recibido el número "cero" de la Revista THALES, órgano de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas de este nombre. Comienza con buen pie su andadura, pues, aparte de su magnífica presentación tipográfica, el contenido de los trabajos, en todas sus secciones, son de alta calidad. Le auguramos larga vida y, con nuestro agradecimiento por su atento saludo le ofrecemos nuestra fraternal colaboración.

- La Junta Directiva de la Real Sociedad Matemática Española, en su última reunión, tomó el acuerdo de modificar las fechas en que habitualmente se celebran los ejercicios de las Olimpiadas Matemáticas; la fase de distritos tendrá lugar este curso en los dias 18 y 19 de Enero de 1985, para alumnos de C. O. U. y la fase nacional, en los dias 22 y 23 de Febrero. El motivo de esta anticipación de fechas es dar a los ganadores un margen mayor para preparar su posible participación en la Olimpiada Matemática Internacional; por esta misma razón, la fase de distritos de la Olimpiada Matemática Nacional correspondiente al curso 1985-86 se anticipará a los últimos dias del mes de Junio o a los primeros de Julio, y a ella tendrán acceso los alumnos que en esa fecha hayan terminado sus estudios de B. U. P.

1. INFORMES

SEGUNDO CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS PARA ALUMNOS DE B.U.P.

Dada la buena acogida que el pasado año tuvo nuestro I Concurso de Resolución de Problemas para Alumnos de Primer Curso de B.U.P., nuestra Sociedad convocó un Segundo Concurso, como se informó en nuestro Boletín nº 3, pero esta vez extendiéndolo a los dos primeros cursos, aunque conservando el mismo ámbito territorial, en que actúa nuestra Sociedad.

Se inscribieron en este II Concurso 46 Centros, que seleccionaron y enviaron 140 alumnos. Las pruebas tuvieron lugar el pasado 16 de Junio, en el Instituto de Bachillerato "Beatriz Galindo" de Madrid, y consistieron en la resolución de cuatro problemas (distintos para primero y segundo cursos), cuyos enunciados publicamos al final de esta reseña.

El mismo día, por la tarde, en el Salón de Actos del Instituto citado, se realizó la entrega de premios a los ganadores, consistentes en un diploma y un lote de libros a cada uno de ellos.

Resultaron ganadores en cada curso, por orden de puntuación, los siguientes alumnos:

PRIMER CURSO DE B.U.P.

1. José María Hernández Carreño (I.B. Ramiro de Maeztu).
2. Pablo Ariza Molina (I.B. Miguel Servet).
3. Francisco José Montero de la Peña (I.B. Príncipe Felipe).

4. Gema López Manzanares (I.B. Rey Pastor).
5. María José Martín Hernández (I.B. Carlos III).

SEGUNDO CURSO DE B.U.P.

1. Alberto Garrido Arribas (I.B. de Cantalejo).
2. Carlos Ueno Jacue (I.B. Cervantes)(*).
3. Fernando Blasco Contreras (I.B. San Isidro)(*).
4. Juan Sevilla Moróder (Colegio Zurbano).
5. Juan Ignacio Barbero González (I.B. Ortega y Gasset).

Los señalados con (*) fueron también premiados el año pasado en nuestro I Concurso.

A todos ellos, nuestra cordial enhorabuena.

La Sociedad se complace en reiterar su agradecimiento a todos los que han hecho posible este II Concurso, con su colaboración: En primer lugar a la Inspección de Bachillerato del Distrito de Madrid, que hizo posible la difusión de la convocatoria, al Instituto de la Juventud del Ministerio de Cultura y al Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, que proporcionaron los lotes de libros entregados a los premiados, a la Dirección y personal del Instituto "Beatriz Galindo", por su colaboración durante la realización de las pruebas, y a todos los Centros que han acogido con entusiasmo nuestra convocatoria, seleccionando a sus mejores alumnos y enviándolos a participar en el Concurso.

PROBLEMAS PARA PRIMER CURSO

PROBLEMA 1ª

Los números $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ son términos consecutivos de una progresión aritmética. Demostrar que b^2, a^2, c^2, son también términos consecutivos de una progresión aritmética.

PROBLEMA 2ª

En un guardarropa entregan 5 personas sus sombreros, recibiendo cada una su correspondiente contraseña. Al ir a recogerlos, el encargado hace caso omiso de las contraseñas y devuelve los sombreros indiscriminadamente. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las personas reciba su propio sombrero?

PROBLEMA 3ª

La circunferencia inscrita en un triángulo A B C, es tangente al lado AB en el punto D. Demostrar que:

$$\overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA}\right)$$

PROBLEMA 4ª

Si a, b, c, d, son números reales mayores que 1, demostrar:

1) $ab > a + b - 1$

2) $abcd > a + b + c + d - 3$

PROBLEMAS PARA SEGUNDO CURSO

PROBLEMA 1ª

Los lados de un triángulo rectángulo forman una progresión geométrica. Hallar las tangentes de sus ángulos agudos.

PROBLEMA 2ª

Calcular:

$$\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \log \operatorname{tg} 89^\circ$$

PROBLEMA 3ª

Construir dos triángulos tales que:

1) Los ángulos del primero son iguales a los del segundo.
2) Dos lados del primero son iguales a otros dos del segundo, pero el tercero es distinto.

¿Qué pares de triángulos son los que cumplen estas condiciones?

PROBLEMA 4ª

Hallar varios ejemplos de funciones $f: x \to f(x)$, tales que $f[f(x)] = x$. ¿Qué propiedad es común a las gráficas de todas esas funciones?

2. ESTUDIOS Y DOCUMENTOS

ALFONSO EL SABIO EN EL RENACIMIENTO DE LA ASTRONOMIA EN LA EDAD MEDIA

Por José María Torroja
De la Real Academia de Ciencias

Con la decadencia de Grecia viene una época de estancamiento en el progreso de la Astronomía, que quedó comprendida en la "Sintaxis Matemática" de Tolomeo. El Imperio romano sintió evidente preocupación por el desarrollo de la Técnica, como lo prueban las numerosas vías, calzadas, y puentes que nos legaron, pero no fue así con la Ciencia pura, en especial de la Astronomía, prácticamente ignorada. Solamente pueden citarse nombres como los de los españoles Séneca (4 A.C. a 46 D.C.) y Cayo Julio Higinio (fl. 10 D.C.) y de Plinio el Viejo (23 a 79 D.C.). Y en la Europa Cristiana medieval San Agustín (254 a 430), Boecio (470 a 525), San Isidoro de Sevilla (560 a 636) y Beda el Venerable (673 a 735) que enriquecieron el conocimiento científico con sendas obras enciclopédicas.

Con la invasión de Europa por los árabes la ciencia cristiana quedó reducida en algunos monasterios en el norte de España (Vich y Ripoll) y en el de Monte Casino en Italia.

Los árabes, por el contrario, estaban interesados en la Astronomía. Por una parte, por la necesidad de orientarse en sus largas marchas por el desierto, con la observación de estrellas, y por otra la obligación de orar a horas determinadas y mirando a la Meca les obligaba a resolver el problema de la determinación de la hora y de la orientación de sus mezquitas.

Heredaron el legado científico de la cultura helenística en Alejandría, que a su vez había incorporado la astronomía egipcia, a la que al anexionarse Persia y Siria, añadieron la antigua astronomía caldea y babilónica, influidas a su vez por las viejas culturas india, egipcia y griega. Tradujeron numerosas obras griegas al árabe, entre ellas, por Ishaq ibn Hunayn, la "Sintaxis Matemática" de Tolomeo, que lo fué con el nombre de "Al-Magesto", e instalaron observatorios en Bagdad, Damasco, Maraga y Samarcanda, en los que pudieron repetir las determinaciones de la oblicuidad de la eclíptica, del movimiento del apogeo solar y construyeron nuevos catálogos de estrellas y tablas astronómicas. Esta astronomía desarrollada por los árabes en Oriente alcanzó su máximo esplendor en Bagdad a finales del siglo VIII y principios del IX con el califa Al-Mamun, época que coincidió con la fundación del emirato de los Omeyas en Córdoba, donde se inició un creciente desarrollo de la Astronomía que alcanzaría su máximo florecimiento en la primera mitad del siglo X bajo Abderramán III y Al-Hakem II, con lo que el centro de gravedad de la cultura árabe pasó de Bagdad a Córdoba. Y como antes ocurrió en Oriente ahora se crearán observatorios en Córdoba, en Granada, en Guadix y en Toledo. Y también aquí se construyen astrolabios y se crean escuelas de formación de observadores, peritos en el manejo de los instrumentos, y como antes en Oriente se inicia ahora en España una creciente actividad en la traducción de obras científicas, que si en Oriente lo fué del griego al árabe, ahora, en España es, fundamentalmente, del árabe al latín, pues también en Córdoba, como antes en Bagdad se crea una bien dotada biblioteca gracias a las gestiones de los emisarios que Abderramán y Al-Hakem habían enviado a Bagdad, El Cairo y Damasco para adquirir libros, que después habrían de ser traducidos. Pero esta interesante labor de traducción se había desarrollado no sólo en la España árabe, sino también en la España cristiana, en especial en el Monasterio de Ripoll y posteriormente en la que habría de conocerse como Escuela de Traductores de Toledo, cuya labor habría de culminar en tiempos de Alfonso X.

Entre los árabes que cultivaron la Astronomía en Al-Andalus, destacan abbas b Firnâs (fl. 887), Maslama de Madrid (fl. 1000), sus discípulos Ibn al Samh (979-1035) y ben Aflah (1114-1187), Avempace (1106-1138), ben Tufayl (1110-1185) y ibn al Saffâr (fl. 1305), y en especial Azarquiel (1029-1100).

Este toledano, Azarquiel, fué considerado por el historiador árabe contemporáneo ibn al Sacid (1029-1070) como "el más sabio de todos en la ciencia de los movimientos de los astros y de la construcción de las esferas" y "el más eminente entre la gente de nuestro tiempo en las observaciones astronómicas y en la ciencia de la estructura de las esferas y en cálculo de sus movimientos, y el más sabio de todos ellos en la ciencia de las tablas astronómicas y en la invención de los instrumentos para la observación de los astros".

Dice de él el judio Toledano Ishaq (1) "*Azarquiel, al principio, no era más que un hábil artista o forjador de hierro o metal, y que trabajaba en la confección de los instrumentos astronómicos que le encomendaban los sabios musulmanes y judíos de la ciudad de Toledo, a la cabeza de los cuales estaba ibn Said, verdadero mecenas por su generosidad protectora. Nuestro Azarquiel sorprendió a aquellos sabios, a las órdenes de los cuales trabajaba por su destreza e ingenio en la construcción de los instrumentos que le encargaban, y más por deberlo tan sólo a sus dotes naturales, pues no tenía una preparación científica. Visto lo cual se le facilitaron a Azarquiel las obras de los antiguos autores, las que con gran facilidad asimiló, de modo que ya en adelante no sólo pudo construir muy exactamente los instrumentos que se le encomendaban, sino que aún hizo otros que a aquellos primeros sabios no se les hubiera ocurrido. De esta manera Azarquiel se convirtió casi en maestro de aquella sociedad de sabios de Toledo, con los cuales durante muchos años continuó observando los movimientos astronómicos*".

Entre los instrumentos construidos por Azarquiel, el más importante es sin duda alguna, su azafea. De su obra La Azafea se efectuaron numerosas copias y traducciones al persa, latín, hebreo, castellano, etc., entre las que aparecen determinadas diferencias.

Entre las obras de Azarquiel fué famosa en su tiempo la clepsidra o reloj de agua que funcionó en Toledo, "*a orillas del Tajo, no lejos del sitio llamado Bab al-dabbâgin, la Puerta de los Curtidores, haciendo de suerte que se llenase de agua o se vaciasen del todo, según el creciente o menguante de la Luna*".

El fin de esta clepsidra se debió a la curiosidad de Alfonso X el Sabio que dió orden de que se desmontara para conocer su funcionamiento. La clepsidra se desmontó pero lueno no se consiguió que volviera a funcionar.

Varias de las obras de Azarquiel fueron incluidas en los "Libros del Saber de Astronomía" del rey Sabio, en particular la descripción de la azafea que "*fizo Azarquiel, el sabio astrolomiano de Toledo, a ondra del rey Almemun que era entonces sennor dessa cipdat*" "*Et despues fue a Sevilla. et fizo esta aça hea mesma en otra manera mas complida et mas acabada*" y el "Libro de la Lámina de los siete planetas" (2). También redactó Azarquiel el "Tratado sobre el movimiento de las estrellas fijas" y las conocidas como "Tablas toledanas", llamadas así por estar referidas a ese meridiano, y que fueron conocidas y utilizadas en toda Europa hasta la aparición de las "Tablas Alfonsies".

Mientras los árabes ocuparon la mayor parte de la península ibérica, se desarrollaron simultáneamente tres culturas, árabe, judia y cristiana. Esta última alrededor de los monasterios del norte en las que se habían concentrado quienes hubieron de huir de la persecución sarracena. Pero estas tres culturas no se desarrollaron independientemente, sino que existieron frecuentes relaciones entre ellas. Los cristianos del norte, conocedores del florecimiento de la cultura en el califato enviaron frecuentes emisarios a Córdoba de donde regresaron con copias o traducciones de las obras científicas más importantes. Estos cristianos del norte se agruparon principalmente en los Monasterios de Santa María de Ripoll, en San Juan de la Peña, en Vich y en Valvanera.

Los judíos crearon escuelas en Córdoba, Toledo y Lisboa y en otras ciudades andaluzas y aragonesas, destacando personalidades como Juan de Luna y Maimónides.

Entre los centros cristianos el más destacado fué el ya citado de Santa María de Ripoll, que llego a disponer de una nutrida Biblioteca en la que Millás Vallicrosa encontró un manuscrito, el señalado con el nº 225 (3), que contiene numerosos textos relacionados con la astronomía: construcción y manejo de astrolabios y de relojes así como cuestiones de astronomía de observación.

La fama de este Monasterio se extendió por toda Europa, lo que ocasionó visitas de estudiosos como el benedictino Gerberto de Aurillac (930-1003) que se trasladó a Vich y más tarde a Santa María de Ripoll. Fué preceptor de la familia imperial de Ottón I, arzobispo de Reims y de Rávena y más tarde, el año 999, fué elevado al solio pontificio con el nombre de Silvestre II. Copias de algunos manuscritos de Ripoll que Gerberto se llevó consigo fueron conocidas por Hermann Contracto que vivió en el Monasterio de Reichenau, en el lago de Constanza, quien contribuyó con Gerberto a dar a conocer el manejo del Astrolabio en Europa, donde entonces no se conocía más astronomía que la contenida en las obras enciclopédicas de San Isidoro y Beda.

En Santa María de Ripoll existieron numerosos copistas y traductores, lo que permitió el conocimiento en Europa de la riqueza de aquella biblioteca, como lo prueba la existencia de estas traducciones en manuscritos de los siglos X y XI en la Biblioteca Vaticana, en la Nacional de París y el British Museum.

Uno de estos traductores fué el judío oscense Mosé Sefardí, guien al convertirse al cristianismo cambió de nombre por el de Pedro Alfonso, y que tradujo y escribió obras sobre Matemáticas, Astronomía y Filosofía. Viajó por Europa, y en Inglaterra dejó dos discípulos Walcher de Malveru (fl. 1135) y Adelardo de Bath (1070-1150), que tradujeron y escribieron sobre matemáticas y astronomía.

Dos judíos españoles Abrahan bar Hiyya (1070-1136) y Abraham ibn Ezra (1092-1167) tradujeron del árabe al latín y al hebreo. En el siglo XII continúan las visitas a España y las traducciones por europeos interesados en la riqueza en manuscritos existentes en el norte. Entre ellos deben citarse las figuras de Hernann el Dálmata, Pedro el Venerable y Roberto el Chester cuya presencia en España se detecta entre 1138 y 1149.

La labor de todos estos traductores hizo posible el renacimiento científico de Europa, al llevarles la ciencia griega y la árabe que se había acumulado en la España Cristiana durante la dominación árabe de la península, lo que nos permite hoy conocer el contenido de obras clásicas, cuyos originales se han perdido. Por otra parte esto explica el gran número de nombres árabes que se utilizan hoy en la astronomía, en todos los idiomas como cenit, nadir, almicantarad, etc.

Este interés por las traducciones, iniciado en el norte de la Península en el siglo X, se incrementó en el XII en el que se detectan en distintos puntos de nuestro suelo una

serie de traductores, nativos y extranjeros, cristianos, árabes y judíos, agrupados alrededor de los centros en los que podían disponer de las obras originales. Uno de esos Centros fué Toledo, que tras su reconquista habría de transformarse en uno de los principales centros de la cultura en la Europa cristiana. En la capital del nuevo reino cristiano, y atraídos por esa riqueza de manuscritos se concentraron estudiosos cristianos, árabes y judíos.

El Arzobispo de Toledo Don Raimundo (1125-1152) se erigió en protector de estos grupos de estudiosos interesados en la traducción de obras científicas, naciendo así la que habría de llamarse Escuela de Traductores de Toledo, que más tarde apoyaría el también Arzobispo Rodrigo Jiménez de Rada (1170-1247) y por último el Rey Alfonso X el Sabio (1252-1284). Entre estos traductores, que no todos vivieron en Toledo, destacaron Platón de Tívoli en Barcelona, Hugo de Santalla en Tarragona, y los ya citados Roberto de Chester en Segovia y Hernann de Dálmata en León y Tolosa y entre los residentes en Toledo destacó Gerardo de Cremona (1119-1187).

Gerardo de Cremona vino deste Italia conocedor de la existencia del "Almagesto" en Toledo, donde aprendió el árabe y estudió matemáticas y astronomía, y donde luego tradujo más de ochenta obras de matemáticas, astronomía, física y medicina a través de versiones árabes. Tradujo a Aristóteles, Euclides, Arquímedes y Aristarco entre los clásicos griegos y a Azarquiel, Geber, al -Fargani, ibn Qurra entre los árabes. Otros visitantes europeos, como los ya citados Platón de Tívoli, Adelardo de Bath, Roberto de Chester, con Alfredo de Sareshel, Burgundo Pisa, Eugenio de Palermo, Miguel Scott, Guillermo de Moerbeke ... colaboraron con los españoles Domingo Gundisalvo, Juan de Sevilla, Marcos de Toledo, y los árabes y judíos Avendaut, Yudah b. Sanl, Jocobo b. Mahir y la familia ibn Tibbon. Muestra de la importancia de la labor desarrollada por esta Escuela de Traducto res está en el hecho de que en una relación de 43 obras de la Ciencia antigua traducidas al latín entre los siglos IV y el XIII, incluidas en la "Historia de la Ciencia" de Crombie, de 28 de ellas da el lugar en que se tradujeron, correspondiendo 17 a Toledo, una a Segovia, tres más a lugares no determinados en España, seis a Sicilia y otra a un lugar indeterminado de Italia.

Pero no fué sólo a través de las traducciones como colaboró la España cristiana medieval al resurgimiento de la Astronomía en Europa. A diversas obras sobre la construcción y el manejo del astrolabio, traducciones unas originales otros, siguieron hábiles constructores como ibn al-Saffar y b. Said al Sahli de Denia, Arzaquiel y Geber ben Aflah, con cuyos instrumentos se efectuaron observaciones.

Cuando Alfonso X subió al trono el 1 de junio de 1252 ya se venía interesando por la Astronomía. Conocía las Etimologías de San Isidoro que hizo traducir al castellano y conocía también la astronomía árabe, haciendo llamar a Toledo a sus principales cultivadores, árabes, judíos y cristianos, pues "*para Alfonso, la Ciencia no tenía fronteras, ni religiones, y acudía, sin distinción de sectas y oponiones, allí donde encontraba sabedores y especialistas*", iniciando así la labor que le llevaría a completar sus "Libros del Saber de Astronomía" y unas tablas astronómicas que habrían de ser conocidas y utilizadas en toda Europa: "Las tablas alfonsíes".

Continuando la obra de la Escuela de Traductores de Toledo hizo verter al castellano los "Cuatro libros de las estrellas fijas" (1256), el "Libro de la esfera o alcora" (1259), el "Libro de las Cruces" (1259), cuyo original se conserva en la Biblioteca Nacional, y que con el "Libro de los juicios de las estrellas" y el "Lapidario" constituyen sendos estudios de carácter astrológico.

"*Et mandó el Rey que se juntassen Aben-Ragel y Alquibitio sus maestros naturales de Toledo, Aben-Musio y Mohamad de Sevilla, y Josef Aben-Hali y Jacob Aben-Vena de Córdoba, y otros, más de cinquenta por todos, que truxo de Gascuña y de París con grandes salarios, y mandóles traducir el Quadripartito de Ptolomeo, y juntar libros de Mentesan y Algazel. Diose este cuyadado a Samuel, y Jehuda, Elconheso, Alfaquí de Toledo, que se juntassen en el Alcázar de Galiana, donde disputassen sobre el mouimiento del firmamento y estrellas. Presidian quando allí no estaba el Rey, Aben-Ragel y Alquibitio. Tuvieron muchas disputas desde el año de MCCLVIII hasta el MCCLXII. Y al cabo hizieron unas Tablas tan famosas como todos saben. Y después de haver hecho esta grande obra, y de haberles hecho muchas mercedes, los embió contentos á sus tierras, dándoles franquezas, y que fuesen libres ellos y sus dscendientes de pechos, derechos y pedidos, de que hay cartas fechas en Toledo doze dias andados del mes de mayor, era de MCCC*" (4).

Este párrafo aparece en la "Historia eclesiástica de la imperial ciudad de Toledo y su Tierra", de Jerónimo Román de la Higuera, cuyo original se conserva en la Biblioteca Nacional de Madrid. La existencia de este equipo de judíos, cristianos y árabes que colaboraron en la obra de Alfonso el Sabio fué ya confirmada por Abraham Zacuto (1452-1515), quien al referirse a Mosé ha-Kohen dice que "en todos los libros de los sabios he leído que en la investigación de aquel Rey tomaron parte numerosos y notables doctos judíos, cristianos y musulmanes (5).

En cuanto a la intervención personal del Rey en estos trabajos, el investigador inglés Procter (6) dice: "*Los principales trabajos producidos bajo el patronazgo de Alfonso no son composiciones individuales, aunque algunas de este tipo existen, sino grandes trabajos de cooperación en los que colaboraron muchas personas, que fueron debidos a la iniciati* *va del Rey, y que fueron realizados bajo su dirección personal, en los que el Rey, en efecto, desempeñó el papel de un editor general, de un editor que tomó seriamente su labor y que estuvo muy lejos de dejar en libertad a sus colaboradores"* y más adelante, continúa Procter: *"Parece que la revisión de los tratados para su inclusión en los Libros del Saber de Astronomía, fué parcialmente llevado a cabo, no en Toledo, sino en Burgos, y en cierto grado bajo la supervisión del Rey. Sabemos en particular que Alfonso mismo corrige el lenguaje del "Libro de las estrellas fijas en 1276 y que el "Libro de la açafeha" revisado, fué terminado en Burgos en 1277". "Alfonso después de que había encargado e instruído a sus eruditos los dejaba las manos libres, pero él intervenía posteriormente en aquellos tratados seleccionados para su incorporación a las dos colecciones".*

Sánchez Pérez (7) dice a este respecto: *"El Rey intervenía activamente en los trabajos, corregía y modificaba la redacción castellana y escribía los prólogos de los libros, cuyo contenido pone de manifiesto la personalidad científica de Alfonso X el Sabio".*

Podemos, pues, afirmar que Alfonso el Sabio dirigía personalmente los trabajos, revisando y corrigiendo los manuscritos de sus colaboradores, logrando así establecer un centro científico del que saldría la ciencia astronómica que llegaría posteriormente a todo Europa.

El Rey, además de llevar a Toledo a los mejores conocedores de la ciencia astronómica, procuró reunir cuantos libros árabes pudo, originales o traducciones del griego, y seleccionando los que consideró más interesantes, los hizo traducir al latín o al castellano, preparando lo que habría de ser una gran enciclopedia bajo el título de "Libros del Saber de Astronomía".

Fueron varios los traductores de que se tiene noticia que colaboraron con Alfonso el Sabio, siendo frecuente la colaboración de varios traductores que unos traducían al latín, otros al hebreo y otros al castellano.

Con esta labor de traducción culmina la valiosa tarea iniciada por el obispo Don Raimundo, que permitió el conocimiento en Europa de la Ciencia, y en particular de la Astronomía clásica y de la aportación árabe a su desarrollo.

La aportación de Alfonso X al desarrollo de la Astronomía está comprendida en sus dos obras científicas "Los Libros del Saber de la Astronomía" y las "Tablas Alfonsies", la primera de las cuales fué dada a conocer en una cuidada edición por la Real Academia de Ciencias, preparada por el Académico D. Manuel Rico y Sinobas (8). De ella se conservan códices originales en las bibliotecas de la Universidad Complutense, en la Nacional, en la del Escorial y en la de la Real Academia de Historia. Estos "Libros del Saber de Astronomía" apenas fueron conocidos en la Europa medieval, a diferencia de las "Tablas Alfonsies" que fueron ampliamente difundidas y utilizadas en toda Europa hasta después de Copérnico, y de las que aparecieron numerosas ediciones impresas en diversas ciudades europeas en 1483, 1487, 1488, 1490, 1492, 1493, 1518, 1521, 1524, 1545, 1553 y 1641, referidas a distintos meridianos: Oxford, Padua, Viena...

Los "Libros del Saber de Astronomía" se inician con un "Prólogo general et indice" que empieza diciendo (9) *"Este libro del Saber de astrologia, que mandó componer de los libros de los sábios antiguos que fablaron en esta sciencia. D. Alfonso. fijo del muy noble Rey D. Fernando, et de la Reyna donna Beatryz. et sennor de Castiella. de Toledo. de Leon. de Gallicia. de Seuilla. de Córdoba. de Murcia. de Jaen et dell Algarbe; et fabla en él de todas aquellas maneras por que se puede catar.*

et connosçer et entender el mouimiento de todos los cielos que se mueuen. et de las estrellas que son en ellos. tambien las del VIII. cielo á que llaman fixas. porque non an mouimiento ansi cuemo las otras VII. á que llaman planetas. porque son mouedizas en sí mesmas. Et otrossí por los cielos en que ellas estan, que se mueuen siempre".

La obra está dividida en dieciseís libros, el primero de los cuales está dedicado a la descripción de las constelaciones, las "figuras de la.VIII espera". En los nueve siguientes se describen una serie de instrumentos de observación: la "espera redonda", "las armellas del ataçyr en la alcora", el "astrolabio redondo", el astrolabio llano", "la lamina universal", la "azafeha" de Azarquiel, las "armellas", las "laminas de cada uno de los siete planetas", y el "quadrante con que rectifican" describiendo para cada instrumento "cuemo se deue fazer" y "cuemo se deue obrar con ella". En los libros XI a XV se describen con todo detalle cinco "relogios", el de "la piedra de la sombra" el "dell agua" el "dell argent uiuo", el de "la candela" y por último "de cuemo se deuen fazer las dos maneras del palacio de las horas". El Libro XVI "es de cuemo deuen fazer un estrumente llano para fazer ataçyr. et cuemo deuen obrar con éll".

La lectura de la obra resulta extraordinariamente amena, con párrafos curiosísimos como, cuando, al describir las constelaciones, dice refiriéndose a la osa menor (10).

"Mas agora queremos tonar á nuestra razón porque estas .XLVIII. figuras an assí nombre. Et tenemos que esto fué por tres razones. La primera por uista. ca segun los sábios que fablaron de esta figura en los libros dixeron que por ojo las uieran. et las connoscieran por las estrellas que son dentro en ellas. Et cuemo quier que en esto ay dubda porque maguer las estrellas grandes sean dentro en las figuras. por eso non muestran

el portrecho de una á otra porque esto deua á seer et non al. Assí luego cuemo de la ossa menor ca segun las estrellas grandes que en ella son a en el querpo quatro. et tres en la cola. Et si estas estrellas fuessen por sí non mostrarian sinon quadrángulo las quatro. et las tres linna drecha".

"Et quien lo mas quissiese ymaginar. et mostrar cuemo a manera de carro. ó de trabuquero con piértega. et aun pongamos que mostrase cuemo fayçion de bestia. también podia seer de leona, o de loba, o de perro cuemo de ossa. Et esso mismo dezimos de otra bestia que fuesse maslo. Et por ende es esto fuerte cosa de creer que por uista se uiesse aunque fuesse ell ayre muy mas claro en aquella o dizen que esto uieron que en otra. et el uiso de los omes muy mas sotil. Pero porque lo dixeron los sábios debemos atener que alguna cosa cierta uieron porque touieron que así era".

En cada uno de los libros, en un prólogo explica quién es el autor original, a quién encargó el Rey de su traducción, que en algunas ocasiones hizo repetir, y los capítulos que hizo añadir, como en el del Alcora (11), *"Mas nos fiziemos poner y quatro capitolos demás, que conuienen mucho á esta razon, ca son los primeros. et todos los otros vienen en pos estos. et sin ellos non podria seer bien ordenado el libro. et por ende los possiemos desta guisa".* Cada instrumento explica de que materia se debe construir *"cuemo doro, ó de plata, ó de cobre ó de laton. ó de fierro, ó de plomo, ó de estanno, ó destos metales bueltos unos con otros. ó de piedra, ó de tierra ó de fuste. Et mismo dezimos de cuero ó de panno ó de pergamino doblado de muchas doblas. et dotras muchas cosas que annascan los omes quando quieren mostrar sos sotilezas. Mas los que en estas cosas pararon mientes fallaron que de ninguna cosa nor era tan buena cuemo de fuste. por estas razones. ca si doro fuesse toda entera non la podríe fazer sinon ome muy rico. et demás serie muy peesada et si la fiziesen delgada torcer se ye, et non serie redonda drecha...".*

Muy curiosos son algunos de los relojes descritos, como el de agua, el de mercurio, el de las candelas, y el palacio de las horas.

Están descritos en este libro los instrumentos que habrían de utilizar los astrónomos del Rey Sabio para efectuar las observaciones necesarias para la posterior preparación de las "Tablas Alfonsíes".

Los "Libros del Saber de Astronomía" fueron una de las primeras obras escritas en castellano, y, desde luego, la primera obra científica redactada en nuestro idioma.

Para la preparación de las "Tablas Alfonsíes" que habían de sustituir a las "Tablas Toledanas" de Azarquiel, fué necesario efectuar observaciones para lo cual, el rey *"mandó fazer los estrumentos que dexo Ptolomeo en su libro del Almiesti"* (12). Y las observaciones por orden del rey, se efectuaron en Toledo entre los años 1262 y 1272 (13), *"por endereçar et corregir las diuersidades et desacordanças que parescieron en algunos logares de algunos de los planetas. et en otros mouimientos. Et nos obedescimos su mandado. que deue seer obedescidos et rehezimos los estrumentos lo meior que se pudo a seer. et trabaiamos en rectificar una sazon. et seguimos en rectificar el sol quanto un anno complido... Et rectificamos otrossi algunas coniunciones de los planetas quando se allega una á otra. et sus coniunciones quando se allegaban con algunas estrellas fixas. Et rectificamos muchos eclipsis de los solares. et de los lunares" "Et fezimos estas taulas sobre rayces que son sacadas de aquellos rectificamientos. et ayuntamos en ellas los capítolos que nos paresció fuese mester en esta obra. et possiemos nombre a este libro. el libro de las taulas Alfonsíes, porque fue fecho et copilado por su mandato..."* se observó efectivamente el Sol durante un año, y se observaron, desde Toledo, los eclipses de Sol de 5 agosto de 1263 y los de Luna de 24 de diciembre de 1265 y 19 de junio de 1266, observándose además, también desde Toledo, catorce estrellas. Las tablas están calculadas para el meridiano de Toledo *"Et la longura desta cibdat... es XXVIII grados".*

*****

¿Cuál fué la verdadera influencia de la obra de los grupos instalados en el Norte de España y la de Alfonso el Sabio en el progreso de la Astronomía en Europa en la Edad Media? Ya hemos citado la indudable e indiscutible influencia que tuvieron las "escuelas" creadas alrededor de los monasterios del Norte de España, en especial en Santa María de Ripoll. Los "Libros del Saber" del Rey Alfonso X, no fueron realmente conocidos en Europa pero sí sus "Tablas Alfonsíes" que, ya lo hemos dicho, se utilizaron en toda Europa hasta que, en 1627, fueron sustituidas por las "Tablas Rudolfinas" debidas a Kepler.

Menéndez y Pelayo, en su desmedido afán por destacar todo lo que pudo suponer influencia de la cultura española en Europa dice en su admirable obra "La Ciencia Española" (12): *"Toda la Astronomía que se supo en Europa desde el siglo XI al XVI, desde Juan de Sevilla hasta Regiomontano, o más bien hasta Copérnico es ciencia de origen español".* Pero una opinión más imparcial, es la del investigador alemán K. Garbers que dice: *"Así fue posible que en el siglo XII cuando la filosofía musulmana con Averroes, Alpetragius, Avempace, Ibn Tufail y Maimónides, por solo citar los nombres más conocidos, produjo sus más bellas obras, el cristianismo, que aquí, al contrario que en Oriente, era el elemento receptivo, pudiese preparar para el futuro la dirección científica, con un intenso trabajo en los centros de traducción instalados en Toledo y en Cataluña".*

BIBLIOGRAFIA

(1) J.M. MILLAS.- "Estudios sobre Azarquiel". Madrid-Granada, 1943.

(2) "Libros del Saber de Astronomía", t. 3.

(3) J.M. MILLAS.- "Nuevos Estudios sobre Historia de la Ciencia Española". Barcelona, 1960.

(4) "Libros del Saber de Astronomía", t. 5, p. 44.

(5) F. CANTERA.- "El Judío Salmantino Abraham Zacuto". R. RACEFN, XXVII, 1931.

(6) E.S. PROCTER.- "The Scientific Woork of the Cour of Alfonso X of Castilla". The Modern Language Review, XI, 1, 1945.

(7) J.A. SANCHEZ PEREZ.- "La Personalidad Científica y los Relojes de Alfonso X el Sabio". Murcia, 1955.

(8) "Libros del Saber de Astronomía del Rey D. Alfonso X de Castilla". Copilados, anotados y comentados por Manuel Rico Sinobas. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 5 tomos. Madrid, 1863.

(9) "Libros del Saber de Astronomía, t. 1 y 3.

(10) "Libros del Saber de Astronomía, t.1, p. 16.

(11) "Libros del Saber de Astronomía, t.1, p. 154.

(12) M. MENENDEZ Y PELADO.- "La Ciencia Española", t. II, p. 167. Madrid, 1933.

(13) K. GARBERS.- "La Matemática y la Astronomía en la Edad Media Islámica". Instituto Jorge Juan, C.S.I.C. Madrid, 1954.

EDUCACION E INFORMATICA

Por Julio Fernández Biarge
Catedrático de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales

En los siglos anteriores, las transformaciones sociales importantes se producían gradualmente, a lo largo de amplios períodos de tiempo; en los últimos años, en cambio, la situación se ha hecho muy diferente: Los cambios se suceden velozmente. Para la Educación, en particular, tanto lo que la Sociedad le exige, como los medios que le ofrece, cambian rápidamente y ello le obliga a adaptarse sobre la marcha a situaciones siempre nuevas y difícilmente previsibles con anterioridad.

Antes era posible planificar la Enseñanza sobre la base de un modelo estático de objetivos-estrategias-tácticas; si se trataba de formar profesionales de un cierto tipo, bastaba hacer un análisis de cual era la formación que necesitaban esos profesionales para su labor, fijar una estrategia para alcanzarla y diseñar los detalles tácticos exigidos por esa estrategia; el error de sustituir las necesidades futuras de esos técnicos por las que tenían en ese momento, no resultaba grave; hoy día, ese error puede de invalidar toda la planificación.

Los objetivos que la sociedad impone a la Educación son cambiantes cada vez con mayor frecuencia y en forma cada vez más difícil de prever. En esas condiciones todo modelo estático resulta inadecuado; las estrategias adoptadas han de ser, en consecuencia, no sólo dinámicas, sino adaptativas.

Basta tomar conciencia del hecho de que los profesores que hoy explican informática, investigación operativa o biología molecular, no pudieron estudiar estos temas en sus estudios universitarios, anteriores a la aparición de estas disciplinas.

Todo esto, nos lleva a pronosticar que la formación permanente habrá de imponerse cada vez más como parte sustancial de la Educación. Si esto es así, el Bachillerato y los Estudios Universitarios tendrán que cambiar sus objetivos, perdiendo el de aportar una base enciclopédica de conocimientos a la medida de lo que se supone ha de ser la actividad profesional, y atendiendo en primer lugar a sentar las bases para facilitar esa formación permanente.

La introducción de la Informática ha sido uno de los acontecimientos decisivos en los profundos cambios sociales que todos podemos detectar en la actualidad, dentro del fenómeno que se ha llamado "revolución post-industrial" e incluso "revolución informática", pero la misma profundidad de esos cambios, nos hace desechar la idea de que lo que la informatización de la sociedad exige a la Enseñanza es tan sólo la introducción en los cuestionarios de los temas que necesitan saber los informáticos de hoy día, o las personas que han de tratar con ellos.

La revolución Informática está afectando tan profundamente a la Humanidad que obliga a una urgente revisión de todo el proceso educativo.

Desde hace dos décadas se vienen alzando voces señalando la necesidad de esa reforma, su urgencia y las directrices generales que ha de seguir, y desde hace unos diez años, han comenzado a practicarse experiencias de enseñanza de la Informática en cursos generales, no destinados a profesionales de ella, en diversos países europeos. Pero la verdadera respuesta de la Enseñanza al desafío de la Informática no puede quedarse en incluir cursos de programación, hacer prácticas con ordenadores, y divulgar los conceptos fundamentales del tratamiento de la información, sino que ha de afectar, a través de cambios en los puntos de vista, objetivos y metodologías, a casi todas las asignaturas.

En España, hoy día, está ya en marcha un movimiento poderoso de reforma, llevado a cabo por algunos grupos de profesores, jóvenes en su mayoría, que va asentando en el profesorado las ideas necesarias para encauzar la Enseñanza con arreglo a las ideas expuestas antes, mientras en la Universidad se han introducido cursos de Informática en muchas carreras, aparte de haberse creado las Facultades y Escuelas Universitarias de Informática para la formación de investigadores y profesionales que trabajen en esa ciencia.

Cada vez va madurando más la idea de introducir temas relacionados con la Informática en el Bachillerato. Afortunadamente, la mayor parte de los que preconizan esta reforma muestran gran prudencia en sus conclusiones y nos previenen contra los peligros de tratar de comenzarla por la inclusión de una nueva asignatura con ese nombre. Una acción de este tipo, podría ser inconveniente por distintas razones.

En primer lugar, la implantación de una asignatura específica debería ser precedida por una tarea de formación del profesorado, difícil de improvisar, y además, habría que dotar a los centros de material adecuado para darle el necesario carácter práctico. Por otra parte, la introducción prematura de una asignatura de Informática, con carácter general, tendría el efecto de dar a esa enseñanza un carácter enciclopédico, a la medida de lo que vienen haciendo los informáticos de los últimos años, con temas que quedarían anticuados rápidamente, y sobre todo, desvinculado de las restantes asignaturas; a los profesores de éstas, les serviría de pretexto la existencia de la nueva asignatura para "no meterse en su terreno", lo que, sobre todo en Matemáticas, tendría consecuencias muy negativas.

Por ahora, han sido los profesores de Matemáticas los encargados de la introducción de la Informática, y es seguro que esto continuará así hasta que comience a formarse un profesorado específicamente preparado para todo lo relacionado con el tratamiento de la información, aunque en ocasiones ha habido valiosas aportaciones de profesores de otras disciplinas. Va creciendo el número de profesores de Matemáticas interesados por el tema, pero no con la rapidez deseable; las iniciativas particulares no son suficientes para acometer la tarea de actualización del profesorado en esta materia, que debería ser emprendida por la Administración.

Algunos se resisten a admitir que la simple introducción de una nueva tecnología -la Informática- pueda afectar sustancialmente a las Matemáticas y a su enseñanza; esta resistencia es fruto de un triple error: En primer lugar, el de clasificar a la Informática como una "simple" nueva tecnología, análoga a tantas otras introducidas en la sociedad por el progreso humano; a diferencia de otras tecnologías, la informática abre al hombre un nuevo campo de acción totalmente inexplorado anteriormente: El tratamiento de la información fuera de la mente humana.

Otro de los errores procede de la idea de que las Matemáticas son un sistema formal hipotético-deductivo y sólo eso, y de que su calidad se mide por el rigor empleado en su construcción, con lo cual no se comprende cómo una tecnología puede afectarle. En otras ocasiones me he pronunciado contra la simplicidad de esa concepción: Las Matemáticas son un sistema formal hipotético-deductivo en el mismo sentido que una escultura es un sólido al que se ha dado forma intencionada; pero lo que valora una escultura no es la dureza y ausencia de defectos del material sólido, sino el mensaje que mediante ella se transmite del escultor al que la contempla; no hay Matemática sin rigor, como no hay escultura sin sólido, pero no es ese rigor lo que valora una construcción matemática , sino la satisfacción que proporciona al que la recibe, en su deseo de ahondar en su comprensión o de auxiliarse con ella en la comprensión de otras ciencias.

El tercer error a que nos referíamos consiste en confundir el nombre "Matemáticas" de una asignatura de Bachillerato con el de la ciencia de igual denominación y suponer que el objetivo de esa asignatura es exclusivamente la enseñanza de Matemáticas, a ser posible "puras" y acabadas, y, naturalmente, abstractas. Esto olvida que la asignatura de Matemáticas no puede prescindir de la conexión de esa ciencia con la propia vida de los alumnos, que lo abstracto tiene su origen -mediante la abstracción- en lo concreto, y que, para el alumno, las construcciones abstractas de la Matemática se justifica porque permiten la comprensión de lo concreto que modelizan.

Los tres errores citados son los que inducen a creer en la invulnerabilidad de las Matemáticas frente a la acción de la Informática; hay que abandonar esa creencia; las Matemáticas mismas, y sobre todo la asignatura que trata de ella, se están viendo poderosamente influídas por la aparición de la microelectrónica aplicada al tratamiento de la información.

Es muy posible que la enseñanza de las Matemáticas cambie, además por el hecho de que la Informática ofrezca nuevos métodos didácticos, pero aún prescindiendo de ese aspecto, es mucho lo que un profesor de Matemáticas debe cambiar en los objetivos, la metodología y los contenidos de la enseñanza que imparte.

Uno de los objetivos de la educación ha de ser hoy la preparación para el cambio; no la preparación para <u>un</u> cambio, sino para vivir en una situación de cambio permanente. Esa preparación es incompatible con una enseñanza dogmática, que presenta una ciencia congelada, ocultando su génesis y su posible evolución.

No bastará con la supresión , en los programas, de las técnicas de cálculo con tablas de logaritmos, y de las preparaciones de las fórmulas trigonométricas para un cálculo de ese tipo, que ya no se volverá a utilizar, tras la proliferación de las calculadoras de bolsillo, sino que deberemos preguntarnos cuántos temas más de los que imponemos a nuestros alumnos quedarán anticuados antes de que esos alumnos terminen sus estudios superiores.

Las Matemáticas suelen aparecer expuestas a los alumnos en forma excesivamente dogmática. Las mismas razones que mueven a seleccionar unos temas en lugar de otros quedan ocultas para el alumno, y la invocación a la "autoridad" de los planificadores de la enseñanza es cada vez menos viable, en vista de los repetidos errores en que se ha venido cayendo. Todo eso debería cambiar; los objetivos de la asignatura de Matemáticas ya no pueden ser el suministrar un repertorio enciclopédico de conocimientos matemáticos, sino el dar a conocer la manera de pensar y de expresarse propia de las Matemáticas, y la posibilidad de elaborar modelos abstractos de los fenómenos reales, para poder manejarlos con los métodos del razonamiento deductivo, y con las máquinas informáticas.

Por otra parte, mientras no haya profesorado específicamente dedicado a la enseñanza de la Informática, parece razonable que sea el de Matemáticas el encargado de informar a los alumnos sobre las posibilidades de las nuevas técnicas de tratamiento de la información, es decir, de enseñarles los fundamentos y las aplicaciones de los ordenadores, de las bases de datos, de las pantallas gráficas, de las máquinas de control numérico, etc. así como de informarles sobre lo que son los programas, los códigos, los registros, los convertidores analógico -digitales, etc. Todo lo citado ha entrado ya a formar parte de la vida cotidiana, y en alguna parte del Bachillerato habrá que ocuparse de estos temas, que se han incorporado a la "cultura general". El profesor de Matemáticas no puede permanecer al margen de esos nuevos elementos culturales, y debe encontrar sitio

en su asignatura para enseñarlos a los alumnos. No obstante, hay un grave peligro en hinchar los cuestionarios de innecesarios detalles tecnológicos, clasificaciones, terminologías y datos, que además de salirse de las necesidades culturales, corren peligro de quedar anticuados en pocos años.

Nuestros alumnos tendrán cada vez mayores necesidades de expresarse con una precisión y claridad superiores a que las que se exigían en generaciones anteriores; ello se hace imprescindible si surge la necesidad de comunicarse con las máquinas informáticas. Uno de estos medios de expresión clara a que deben habituarse los alumnos es el de los organigramas o diagramas de flujo, que permiten expresar el algoritmo capaz de resolver un problema determinado. Es muy fácil explicar a cualquiera como se hace un organigrama, pero a muchas personas de formación clásica les cuesta trabajo construir los primeros e incluso interpretar otros ya hechos. Otro de los medios de expresión clara lo constituyen los lenguajes de programación para ordenadores . La proliferación de estos lenguajes y su rápida evolución hace poco recomendable dedicar un tiempo sustancial a enseñar uno o varios de ellos, pero como algunos son cada vez más fáciles de aprender, puede estar justificado el escoger uno para enseñarlo a los alumnos, a modo de ejemplo de lo que se puede conseguir con ellos.

Otro cambio, que la introducción de la Informática exige a la Enseñanza, afecta a la idea que estamos dando a nuestros alumnos sobre lo que es un problema y lo que constituye una solución válida; en Matemáticas, los problemas que se proponen acaban por formar una perspectiva deformada de la asignatura que se trata de ilustrar.

En primer lugar, convendrá que el alumno distinga desde el principio las dos fases de la resolución de un problema: la de programación y la de ejecución; en la primera se idea la pla nificación de las operaciones que conducirán a la deseada solución, y en la segunda se llevan a cabo esas operaciones. La posibilidad de entregar la fase de ejecución a una máquina, exige que el resultado de la fase de programación sea totalmente claro y exento de ambigüedades.

El tipo más sencillo de "programa", en el sentido anterior, es la "fórmula", o secuencia de operaciones indicadas para ser realizadas con los datos. Es una costumbre viciosa la de acostumbrar a los alumnos a que la resolución de todo problema acabe con una fórmula, que permite calcular el resultado si se introducen en ella los datos.

Normalmente, sólo unos pocos problemas, como la descomposición en factores primos, la formación de la tabla de éstos o el cálculo del m.c.d., se presentan a los alumnos como resueltos mediante un "programa", que no es una fórmula, sino un proceso descrito con mayor o menor precisión y claridad.

De ahora en adelante, debe desaparecer la obsesión por las soluciones explícitas, dadas mediante una fórmula, que lleva a clasificar como imposibles los problemas que no conducen a ellas, como la resolución de una ecuación de grado superior al segundo. Además, hay que acercar los problemas a la realidad, so pena de que la práctica de los mismos se convierta en una actividad deformante, en lugar de constituir un ejercicio enriquecedor. Este acercamiento tiene dos aspectos interesantes: La necesidad de tener en cuenta los medios disponibles y la economía de la ejecución de los programas que los resuelvan, y el reconocimiento explícito de que los problemas reales suelen ser complejos, aún cuando sean fáciles.

El primer aspecto, relativo a los medios disponibles, afecta al concepto mismo de problema y al de solución de éste. En muchas ocasiones he mostrado cómo el problema de calcular

$\int_1^2 \frac{dx}{x}$ tiene como solución $\log_e 2$, si se dispone de tablas de logaritmos o calculadores con funciones, pero el problema de calcular $\log_e 2$, tiene como solución la evaluación gráfica de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ si no se dispone de ellas, pero sí de papel milimetrado y útiles de dibujo.

En íntima relación con la consideración de los medios disponibles está la cuestión de la evaluación del esfuerzo exigido por la ejecución del programa que se presenta como solución del problema.

También deben acercarse los problemas presentados en las clases a los de la realidad en lo que se refiere a la complejidad que ordinariamente ofrecen éstos. Por supuesto que en Matemáticas hay que estudiar problemas super-simplificados, verdaderas abstracciones de los reales, puesto que los métodos de abordar éstos suelen basarse en la aplicación reiterada de los simplificados; pero ésto debe reconocerse explícitamente, en lugar de pretender que los problemas elementales estudiados tienen como propósito su aplicación directa a la realidad; hoy día disponemos de medios para abordar los problemas cuya dificultad reside en el elevado número de datos que se han de manipular, aun cuando sean sencillas las operaciones que hay que hacer con ellos.

Hay problemas cuya parte realmente matemática es casi inexistente, como es el de poner en orden una lista de números o nombres, que se da desordenada. Estos tipos de problemas, no sólo se ha ignorado sistemáticamente en la enseñanza de Matemáticas de Bachillerato, sino que se ha ido deformando la visión del campo de las aplicaciones dada a los alumnos, hasta el punto de que es difícil que reconozcan una de estas cuestiones como un verdadero problema.

Todo lo anterior nos muestra lo profundamente que el profesor de Matemáticas tendrá que cambiar su manera habitual de conducir la Enseñanza, si quiere atender a las exigencias de la sociedad cambiante a la que deberán incorporarse nuestros alumnos de los próximos años. También pone de manifiesto que ese cambio de nuestras enseñanzas no puede consistir simplemente en la introducción de una asignatura nueva, o en la adición de unos temas a los programas de Matemáticas, sino que los mismos objetivos de la Educación han de sufrir una seria revisión.

Algunos, cuando se dieron a conocer los primeros informes del Club de Roma en torno a los límites al crecimiento, los interpretaron en un sentido catastrofista, que señalaba un negro destino irremediable para la Humanidad; otros preferían seguir confiando en el poder de reacción del Hombre ante las circunstancias adversas, y pensaban que los problemas "se" irían solucionando a medida que se fuesen presentando como graves; yo me inclino a esta visión optimista, pero a condición de no caer en la trampa que encierra el impersonal empleado; los problemas no "se" irán arreglando, sino que los irán arreglando, si quieren sobrevivir, nuestros alumnos de hoy. El objetivo de nuestra Enseñanza debe ser simplemente ayudarles a emprender esa tarea. Nuestros alumnos se han de enfrentar a lo largo de su vida con problemas mucho más graves, y sobre todo más dinámicos, que los que tuvo cualquier generación pasada; ciertamente dispondrán de medios mucho más eficaces y poderosos, que, en gran medida, dependerán de la Informática. Ayudémosles, por tanto, a valerse de esos medios en su tarea de construir un mundo mejor.

LA EVOLUTA Y EL PAR DE BANDERILLAS

Por José Javier Etayo
De la Real Academia de Ciencias

En "La Codorniz" de aquellos mis tiempos solía aparecer una serie de ingeniosos y divertidos relatos, firmados me parece que por Vitinovski -quizá Victor Vadorrey, no lo sé- que invariablemente empezaban así: *"Por aquel entonces era yo un marino joven e inexperto..."*. Tentado he estado de elegir el mismo comienzo puesto que, ya que no marino, sí que era yo por entonces un estudiante joven e inexperto; y un tantico aficionado a los toros, también.

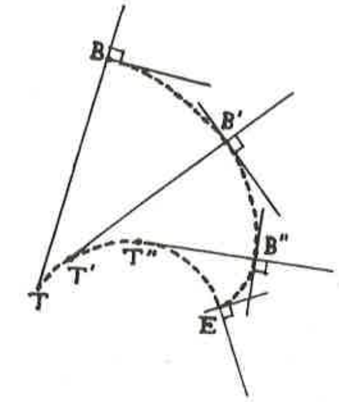
Y acertó a caer en mis manos un artículo del conde de Colombí en el que hablaba de un trabajo inédito que él poseía, obra de don Amós Salvador: una "tauromaquia" bien original, no sólo por la personalidad de quien la escribió, sino también por su contenido, que estaba dedicado a las relaciones entre la geometría y los toros.

Don Amós Salvador y Rodrigáñez no respondía, en efecto, al modelo clásico de autores de tauromaquias que desde Pepe Hillo han sido, siempre toreros o críticos y comentaristas taurinos. Fue, por el contrario, notable hombre público, inspector general de Caminos, Canales y Puertos, Senador Vitalicio, Ministro de Hacienda, de Agricultura, Industria, Comercio y Obras Públicas, Instrucción Pública, Bellas Artes y Fomento; Académico Numerario de Ciencias Morales y Políticas, de la Real Academia de San Fernando y de la de Ciencias, en cuya presidencia sucedió a Echegaray ; presidente de distintos consejos, como el de la Compañía Arrendataria de Tabacos; Gobernador del Banco de España; y autor de publicaciones muy diversas, lo mismo de estrategia militar o conservación de monumentos que de astronomía, regímenes de enseñanza o perspectiva... Tampoco resulta, pues, raro que escribiese sobre toros.

Aquella tauromaquia suya no cabía, por supuesto, en un artículo periodístico. Colombí, más taurino que geómetra, se limitaba a consignar algún detalle elemental y asequible a todos, como la forma circular del ruedo, por ejemplo. La única cosa interesante que mencionaba, sin comentarla, naturalmente, era la que va a ser objeto de esta pequeña nota: que en las banderillas al cuarteo el toro recorre una curva que es la evoluta de la que recorre el torero. Daba la impresión de que la incluía para que se viera que en aquellos apuntes había también profunda doctrina y no sólo imágenes simples, pero dejaba con las ganas de haber leído en su totalidad un texto que uno imaginaba lleno de tractrices, curvas de persecución y otras acreditadas construcciones. Ya que no he tenido ocasión de conocer ninguna de ellas, hagamos una breve descripción de la antes anotada.

A poco que el lector haya visto una corrida, aunque sea en televisión, recordará que, situado el toro en T y el banderillero en B, éste cita y sale corriendo en dirección que podemos suponer perpendicular a la recta BT. Así va describiendo una curva, BE, mientras el toro recorre en su persecución la curva TE, en cada uno de cuyos puntos la tangente pasará, naturalmente, por el punto de la curva BE en el que en aquel momento se encuentre el banderillero, ya que el toro mirará siempre hacia él. De este modo llegan los dos al punto E de encuentro de ambas trayectorias: es el momento del embroque en el que el banderillero clava su par (ver Figura).

Poco más o menos, éste sería un par al cuarteo. La descripción serviría igualmente para otros pares, como los "de poder a poder" o "de dentro a fuera": el toro está plantado al hilo de las tablas y el matador lo cita desde el estribo de la



barrera saliendo hacia el ruedo, hacia los medios, en la forma indicada.

Cabe así imaginar, en una consideración ideal del problema, que en cada posición de ambos protagonistas en un momento dado, T' y B' por ejemplo, la tangente en T' a TE, que habrá de pasar por B', sigue siendo perpendicular a la tangente en B' a BE; es decir, cada tangente a la curva TE es normal a la curva BE. Entonces, la curva TE, como envolvente de sus tangentes, será la envolvente de las normales a la curva BE o, lo que es lo mismo, es la evoluta de BE, como afirmaba el texto.

Es claro, por la manera de contarlo, que éste es un modelo ideal, como muchas veces ocurre en los modelos matemáticos, al cual sólo aproximadamente se ajusta el hecho real. Esa perpendicularidad que hemos supuesto entre las tangentes a ambas trayectorias en cada momento, no tiene por qué darse en la realidad; incluso difícilmente se dará. Con lo cual TE sería envolvente de rectas no necesariamente normales a BE y, por tanto, podría no ser exactamente su evoluta.

Pese a estas posibles y pequeñas inexactitudes, nada infrecuentes en los modelos teóricos, bien puede aceptarse éste de la evoluta para describir determinados pares de banderillas. Y como se trata, me parece, de un ejemplo suficientemente sugestivo y poco habitual, no estará de más que, burla burlando, lo elijamos para ilustrar y recordar la teoría de las envolventes y de la evoluta. Con lo cual alguna utilidad habremos conseguido extraer del tercio de banderillas.

Porque suelen decir algunos aficionados que se trata de una suerte inútil: una vez picado el toro, ¿qué daño pueden hacerle ya las banderillas? Pero que si subsiste es justamente por ser bella, con esa belleza que suele ir unida a la inutilidad. "*La verdadera belleza* -dice Felipe Sassone- *es casi siempre inútil. Inútil es la suerte de banderillas, pero inútil es también la estatua, el cuadro, el friso, la cenefa, la piedra preciosa, el perfume, el beso y la flor*".

RETICULOS EN LA MATEMATICA ELEMENTAL

Por Eugenio Roanes
Catedrático de la E.U. "Pablo Montesinos"

Esta sencilla estructura, que aparece dualmente como relación de orden y como estructura respecto de dos operaciones, subyace en diversos problemas propios de la Matemática Elemental, por lo que pueden ser de interés didáctico algunas de las consideraciones que se indican a continuación. Comencemos recordando brevemente la citada dualidad.

ORDEN RETICULAR Y ESTRUCTURA DE RETICULO

Una relación de orden $\prec$, entre los elementos de un conjunto $\mathcal{R}$, se dice que es un orden reticular, si para cada par de elementos, x e y, de $\mathcal{R}$, el subconjunto $\{x,y\}$ posee ínfimo (máximo de las cotas inferiores) y supremo (mínimo de cotas superiores), respecto de $\prec$.

Si $(\mathcal{R}, \prec)$ es un orden reticular, entonces entre los elementos de $\mathcal{R}$ pueden definirse las dos operaciones siguientes:

$$x \vee y = \text{supremo}\{x,y\} \quad ; \quad x \wedge y = \text{ínfimo}\{x,y\}$$

y estas dos operaciones ($\vee$ y $\wedge$), resultan ser conmutativas y asociativas y además verifican las dos propiedades simplificativas siguientes:

$$x \vee (x \wedge y) = x; \quad x \wedge (x \vee y) = x$$

por lo que se dice que $\mathcal{R}$ posee estructura de retículo respecto de $\vee$ y $\wedge$, o que $(\mathcal{R}, \vee, \wedge)$ es un retículo. (Las propiedades idempotentes siguen de las anteriormente citadas).

Recíprocamente, si en un conjunto $\mathcal{R}$ se definen dos operaciones, $\vee$ y $\wedge$, conmutativas, asociativas y simplificativas, es decir, si $(\mathcal{R}, \vee, \wedge)$ es un retículo, entonces entre los elementos de $\mathcal{R}$ puede establecerse la relación $\prec$, definida así:

$$x \prec y, \quad \text{sí y solo sí} \quad x \vee y = y \ (\text{es decir, si } \ x \wedge y = x)$$

que resulta ser una ordenación reticular. Por ello suele decirse, más explícitamente, que $(\mathcal{R}, \vee, \wedge, \prec)$ es un retículo.

El detalle de las demostraciones de lo anteriormente indicado, y de lo que se expondrá después, puede verse en libros no especializados que dedican un capítulo al tema, como son el (1), (3), (4) ó (6), de la bibliografía citada al final, e incluso en libros de iniciación, como (2) ó (7).

EJEMPLOS ELEMENTALES

A) La inclusión (no estricta) de partes de un conjunto E, es un orden parcial, tal que, para cada par de subconjuntos, X e Y, los subconjuntos de E en los que ambos están contenidos, poseen un mínimo (la unión de X e Y), y los subconjuntos de E contenidos en ambos, poseen un máximo (la intersección de X e Y), luego es un orden reticular, y en consecuencia $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, \subseteq)$ es un retículo, el retículo de partes de E.

B) Un número natural x se dice divisor del y, si existe un natural n, tal que $nx = y$. Se escribe $x|y$. Esta relación es de orden parcial, y para cada par de naturales, x e y, los números naturales de los que ambos son divisores, tienen un mínimo (el m.c.m. (x,y), que designaremos $x \vee y$), y los divisores comunes de ambos tienen un máximo (el m.c.d. (x,y), que designaremos $x \wedge y$), luego es un orden reticular, y en consecuencia $(\mathbb{N}, \vee, \wedge, |)$ es un retículo, el retículo de divisores de $\mathbb{N}$.

C) Si $\mathcal{L}(V)$ es el conjunto de subespacios vectoriales del plano vectorial V, la inclusión es un orden reticular, del que resultan, en el modo indicado anteriormente, dos operaciones, la suma y la intersección de subespacios, por lo que $(\mathcal{L}(V), +, \cap, \subseteq)$ es un retículo, el retículo de las variedades lineales de V.

D) Sea $\mathcal{C}(P)$ la familia de subconjuntos convexos del plano P. Si X e Y son dos subconjuntos convexos de P, su intersección es otro convexo, pero su unión puede no serlo. Ahora bien, la intersección de todos los convexos que contienen a X e Y es otro convexo, el mínimo convexo que contiene a ambos, llamado unión convexa de X e Y, que representaremos $X \vee Y$. Así $(\mathcal{C}(P), \vee, \cap, \subseteq)$ es un retículo, el retículo de los convexos de P.

E) En la introducción habitual de la integral de Riemann, se dice: una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ de reales, es un subconjunto finito de reales $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tales que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. La partición X se dice anterior a la $Y = \{y_0, y_1 \ldots, y_m\}$, y se escribe $X \prec Y$, si para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, existe $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, tal que $y_j = x_i$. Esta relación $\prec$ es una ordenación reticular.

F) Dos polígonos P_i, P_j se dicen no solapados, si no existe ningún triángulo contenido en ambos. Si los polígonos P_1, P_2, ..., P_n son no solapados, dos a dos, y su unión es el polígono P, se dice que determinan una descomposición de P, lo que se puede denotar: $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$. Esta descomposición se dice anterior a la $P = P'_1 \oplus P'_2 \oplus \ldots \oplus P'_m$, si para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que $P'_j \subseteq P_i$. Esta relación de anterioridad de descomposiciones de un polígono, P, es una ordenación reticular, y es muy útil a la hora de probar la transitividad de la equivalencia de polígonos (vía equidescomponibilidad), que permite formalizar el concepto de área, como puede verse en el tema 17 de (10).

RETICULOS DE BOOLE

Sea $(\mathcal{R}, \vee, \wedge, \prec)$ un retículo. Si cada una de las dos operaciones, $\vee$ y $\wedge$, es distributiva respecto de la otra, se dice que es un retículo distributivo.

Un elemento $i \in \mathcal{R}$, tal que para todo $x \in \mathcal{R}$, sea $i \prec x$ (es decir $i \vee x = x$, o equivalentemente $i \wedge x = i$), se llama elemento inicial del retículo. Análogamente, un elemento $u \in \mathcal{R}$, tal que para todo $x \in \mathcal{R}$, sea $x \prec u$ (es decir $u \vee x = u$, o equivalentemente $u \wedge x = x$), se llama elemento final del retículo. Obviamente, tanto i como u, si existen, son únicos.

En un retículo con elementos inicial y final, dado un elemento $x \in \mathcal{R}$, puede existir un elemento $x' \in \mathcal{R}$, que verifique las dos condiciones:

$$x \vee x' = u \;, \qquad x \wedge x' = i$$

en cuyo caso se dice que x' es complemento del x. Si cada elemento de un retículo tiene complemento, se dice que es un retículo complementario.

Los retículos distributivos y complementarios se llaman retículos de Boole (tradicionalmente álgebras de Boole).

El retículo de partes del conjunto E (ejemplo A) es de Boole, pues es distributivo (la unión es distributiva respecto de la intersección, y ésta respecto de aquella) y complementario ($\emptyset$ es el inicial, E el final, y el complemento de cada parte X, de E, es su complemento conjuntista). Otros ejemplos usuales son: los sucesos estocásticos del cálculo de probabilidades, el álgebra de proposiciones y el álgebra de interruptores (véase (5), por ejemplo).

El retículo de divisores de $\mathbb{N}$ (ejemplo B) es distributivo, pero no complementario, pues aunque posee inicial y final (uno y cero), no existe complemento del número 6, por ejemplo (no existe n, tal que $n \vee 6 = 0$ y $n \wedge 6 = 1$). No es pues de Boole.

El retículo $\mathcal{L}(V)$, del ejemplo C, es complementario, pero no distributivo (como contraejemplo basta considerar tres rectas vectoriales distintas). Por ello no es único el complemento de las rectas vectoriales (si fuera de Boole, el complemento sería único).

El retículo de los convexos de P (ejemplo D) no es distributivo, ni complementario. Como contraejemplo de distributividad basta considerar dos puntos distintos y su punto medio (como subconjuntos unitarios). Por otra parte, existen inicial y final ($\emptyset$ y P), pero no todo convexo tiene complemento convexo (un semiplano sí tiene, pero no una recta).

Los cuatro ejemplos precedentes hacen ver, que en un retículo, distributividad no implica complementariedad, ni recíprocamente. El análisis de estas propiedades en los ejemplos E y F se deja como entretenimiento al lector.

APLICACION DIDACTICA DE UN ISOMORFISMO DE RETICULOS

La aplicación inyectiva $h: \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ se dice que es un isomorfismo del retículo $(\mathcal{R}, \vee, \wedge, \prec)$ en el $(\mathcal{R}', \vee, \wedge, \prec)$, si para cada dos cualesquiera elementos x, y $\in \mathcal{R}$, se verifica: $x \prec y$, sí y solo si $h(x) \prec h(y)$. Esta condición equivale a las dos siguientes:

$$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y), \qquad h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$$

Trataremos a continuación una sencilla aplicación didáctica.

Los números naturales que son potencias de primo con exponente natural no nulo (como 2^3, 5^2, 7^1), se llaman primarios (por ser generadores de ideales primarios en el anillo principal de los enteros). Sea π el conjunto de los números primarios. Como caso particular del ejemplo A, será $(\mathcal{P}(\pi), \cup, \cap, \subseteq)$ un retículo.

Sea $h\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\pi)$ la aplicación que asocia, a cada natural x, el subconjunto de los números primarios que sean divisores de x. Así, si $x = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ es la descomposición primaria de x (en producto de primarios de distintas bases), entonces $h(x) = \{2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 5\}$. Considerando las descomposiciones primarias de dos números, x e y:

$$x = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r} \quad ; \quad y = p_1^{e_1'} \cdot p_2^{e_2'} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r'}$$

(en que algunos exponentes e_i, e_j' pueden ser nulos), es inmediato verificar que $x|y$, si y solo si $h(x) \subseteq h(y)$, es decir que h es isomorfismo del retículo $(\mathbb{N}, \vee, \wedge, |)$ en el $(\mathcal{P}(\pi), \cup, \cap, \subseteq)$.

Este isomorfismo permite reducir el cálculo del m.c.m. y m.c.d. de dos números, x e y, al cálculo de la unión e intersección, respectivamente, de h(x) y h(y). El detalle del desarrollo puede encontrarse en (9).

Este estudio de la divisibilidad sugerido es, sin duda, mucho más asequible a los alumnos que el basado en el algoritmo de Euclides, o en la consideración de los ideales del anillo de los enteros, y su utilización solo exige el estudio previo de la factorización prima de números naturales. Otra ventaja es la sencillez con que se obtienen las propiedades del m.c.d. y del m.c.m. por transferencia de estructura. (Notemos que aunque $\mathcal{P}(\pi)$ es de Boole, im(h) no es complementario, lo mismo que $(\mathbb{N}, \vee, \wedge, |)$.

Otro sencillo ejemplo de isomorfismo de retículos es el existente entre el álgebra de interruptores y la de proposiciones.

CONCLUSION

De lo expuesto, solo se desea concluir que los profesores de matemática no superior podemos explotar más esta sencilla estructura de retículo, que aparece subyacente en multitud de problemas elementales (divisibilidad en $\mathbb{N}$, particiones para integración Riemann, descomposiciones de un polígono, etc.).

El complemento al capítulo 5 de (8) es una excelente introducción al tema, a nivel de bachillerato, pero hay que hacer constar que el ejercicio de la página 130 es erróneo, ya que no es retículo, pues entre los círculos abiertos contenidos en otros dos, cuyas circunferencias borde sean secantes, no existe ninguno que contenga a todos ellos.

BIBLIOGRAFIA

(1) Dubreil - Dubreil Jacotin.- "Lecciones de Algebra Moderna", Ed. Reverté.

(2) Etayo.- "Conceptos y Métodos de la Matemática Moderna", Ed. Vicens-Vives.

(3) Hermes.- "La teoría de Retículos y su Aplicación a la Lógica Matemática", Instituto "Jorge Juan" de Matemática. C.S.I.C.

(4) Jacobson.- "Basic Algebra". Ed. Freeman.

(5) Kaye.- "Sistemas Booleanos".- Ed. Alhambra.

(6). Mac Lane - Birkoff.- "Algebra" (seconde edition), Ed. McMillan.

(7) Meschkowski.- "Introducción a la Matemática Moderna". Ed. Selecciones Científicas.

(8) Papy.- "Matemática Moderna", vol. V, Ed. Eudeba.

(9) Roanes.- "Didáctica de las Matemáticas", Ed. Anaya.

(10) Roanes.- "Introducción a la Geometría", Ed. Anaya.

UN PROBLEMA "GLOBALIZADOR"

Por Juan Linares Cáceres y Justino Alfonso González Pintado
Profesores de Matemáticas y de Prácticas del Metal, respectivamente,
en el Instituto Politécnico de Toledo

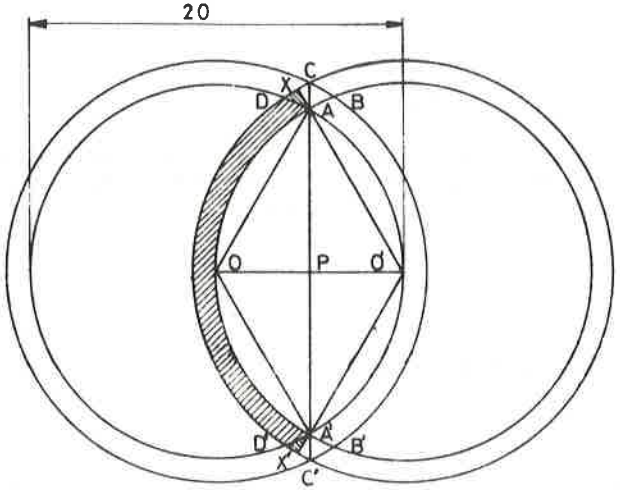
Es conocido el abandono de la enseñanza de la Geometría en los actuales planes de estudio. Sin entrar en los motivos que han conducido a esta situación lamentable, presentamos una experiencia de clase realizada en nuestro Centro por considerarla de interés teórico-práctico, objetivo primordial de una buena enseñanza de la matemática en la Formación Profesional. La cuestión nos fue planteada por los propios alumnos en conversación informal sostenida en el tiempo de recreo. Se trata del curioso problema conocido como "problema de la cabra".

Un prado circular, de 20 m de diámetro, es heredado por dos hermanos. Uno de ellos, poseedor de una cabra, desea conocer la longitud de la correa con la que ha de atar a la cabra para que alcance a comerse la hierba de la mitad del prado. La estaca de sujeción de la correa se colocará en la frontera del prado.

Propusimos el problema en dos clases de diferente nivel. En la primera los alumnos sólo podían utilizar conocimientos elementales de la Geometría que habían estudiado. En la segunda, los alumnos poseían ya nociones de Cálculo Integral.

Solución geométrica

El área del prado es $\pi \cdot 10^2$, ésto es, aproximadamente 314 m^2. La mitad es 157 m^2.



Si con centro en O' dibujamos la circunferencia de radio 10 m, el área del huso AOA'O', por el que puede pastar la cabra, dentro del prado, es 122,73 m^2. (El cálculo es sencillo). Por tanto, no alcanza a comerse la mitad de la hierba del prado. Le faltan 34,27 m^2. Debemos, por tanto, alargar la longitud de la correa. ¿En cuánto? Sea O'X la nueva longitud de la correa, ésto es, 10+x, x = $\overline{AX}$. Ahora el área contenida en el prado, es la anterior incrementada en la porción de corona circular ADD'A', que es la tercera parte de la corona completa, menos los dos triángulos ADX y A'D'X', por estar situados en el exterior del prado. Triángulos que podemos considerarlos aproximadamente como formando entre los dos un triángulo rectilíneo equilátero de altura $\overline{AX}$ = x. Y, en consecuencia, tenemos la ecuación que nos proporciona una solución aproximadamente del problema:

$$\frac{\pi(10+x)^2 - \pi\cdot 10^2}{3} - \frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{3} = 34{,}27 \text{ m}^2 ,$$

esto es,

$$(\pi-\sqrt{3})x^2 + 20\pi x = 102{,}81 \text{ m}^2$$

Ecuación que resolvemos mediante una calculadora de bolsillo, obteniendo x = 1,58 m y, por tanto, la longitud de la correa:

$$\boxed{l = 11{,}58 \text{ m}} .$$

Segunda solución

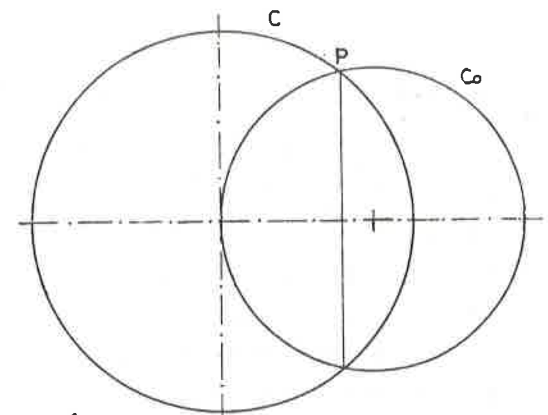
Sea C_0 la circunferencia contorno del prado, de radio 10 m, y C la correspondiente a la de radio 10+x, longitud de la correa.

Ecuación de C_0: $(x-10)^2 + y^2 = 100$

Ecuación de C : $x^2 + y^2 = r^2$ (radio desconocido)

La abscisa del punto P de intersección de ambas es:

$$x = \frac{r^2}{20}$$



Por tanto el área, cuya medida ha de ser la cuarta parte de la del prado, 25π, será:

$$\int_0^{\frac{r^2}{20}} \sqrt{20x - x^2}\, dx + \int_{\frac{r^2}{20}}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx = 25\,\pi$$

Calculadas las integrales, mediante los conocidos cambios de variable, se llega a la ecuación trascendente (incógnita r)

$$\frac{1}{2}\left[r\sqrt{400-r^2} - 100 \text{ arc sen } \frac{r^2-400}{400} - r^2 \text{ arc sen } \frac{r}{20}\right] + \frac{(200-r^2)\pi}{4} = 0$$

que puede resolverse, por aproximaciones sucesivas, si dispone mos de una calculadora que tenga la función "arc sen". No obstante, hemos elaborado el siguiente programa para el Sinclaire Z X Spectrum, que por interacción nos ha dado la solución:

$$r = 11{,}596164 \text{ m} .$$

Con error menor que una millonésima.

Obviamente la naturaleza del problema no exige este grado de aproximación en la solución. Es incluso absurdo, pero puede ser un buen pretexto para iniciar a los alumnos en las modernas técnicas informáticas necesarias hoy día en la formación profesional.

PROGRAMA

```
  5 BORDER Ø: PAPER Ø: INK 7
 1Ø PRINT "HOLA! ESTOY CALCULANDO LA LONGITUD DE LA CUERDA
    PARA AMARRAR A TU CABRA"
 5Ø LET A=11:LET B=12
 55 LET R=(A+B)/2
 6Ø LET C= 36Ø/6.28319
 65 LET D=4ØØ-R↑2
 7Ø LET E=R*(SQR D)
 75 LET I=1ØØ*C*ASN (-D/4ØØ)
 8Ø LET P=R↑2*C*ASN (R/2Ø)
 85 LET U=(D/4)*3.14159
 9Ø LET V=(E-I-P)/2+U
1ØØ LET AV=ABS V
11Ø IF AV<1/1ØØØØØ THEN GO TO 9ØØ
12Ø IF V>Ø THEN GO TO 2ØØ
13Ø IF V<Ø THEN GO TO 3ØØ
2ØØ LET A=R:GO TO 55
3ØØ LET B=R:GO TO 55
9ØØ PRINT "RADIO","VALOR F"
95Ø PRINT R,V:STOP
```


EL LABORATORIO DE MATEMATICAS

Por José Fco. Carballido Quesada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial (Madrid)

INTRODUCCION

En nuestra diaria labor como enseñantes de Matemáticas, muchas veces observamos la tendencia al memorismo en los conceptos y en la resolución de problemas que tienen una buena parte de nuestros alumnos. A mi juicio falta que calen más en los conceptos, en las consecuencias que de ellos se derivan y en las interconexiones que existen entre los distintos temas; asímismo opino que sería muy deseable que si no todos, al menos una buena parte de los resultados matemáticos que enseñamos, se incorporarán al bagaje intelectual de los alumnos y que éstos fueran capaces de utilizarlos en situaciones alejadas de las que habitualmente se plantean en la clase de Matemáticas. En el camino para lograr estos propósitos, sin duda ambiciosos, considero muy recomendable la creación de un Laboratorio de Matemáticas en el cual se proporcione a los alumnos la oportunidad de que practiquen con los conocimientos vertidos en el aula.

EL LABORATORIO DE MATEMATICAS

Básicamente consistiría en habilitar un local lo suficientemente amplio para albergar a los alumnos de un grupo y a los medios técnicos que juzgáramos convenientes para ayudar a conseguir los propósitos antedichos. Entre los citados medios y a título de ejemplo cabría destacar:

- Ordenadores personales. Aparte de sus clásicas aplicaciones en cálculo númerico, simulación de experimentos aleatorios, etc. ..., serían utilizados por los alumnos para los cálculos que surgieran en los trabajos de los que más adelante hablaremos.

- Construcciones para mostrar diversas cuestiones matemáticas, como maquetas para las incidencias entre rectas, planos y superficies; circuitos eléctricos para el estudio de las álgebras de Boole, etc.

- Instrumentos de medida, de los cuales muchos los podemos fabricar nosotros mismos o tomarlos de la realidad que nos rodea como el vúmetro de un magnetófono para mostrar la corrección logarítmica, goniómetro y clinómetro para la medida de ángulos, etc. Así como reproducciones o carteles de otros instrumentos antiguos y modernos: astrolabio, sextante, ...

- Equipo de video con una videoteca de programas pregrabados.

- Biblioteca.

De este laboratorio así constituido, destacaría como fines principales:

a) Constituir un campo de experimentación de la materia que se ha desarrollado en el aula.

b) Manejar de forma simultánea conceptos de distintas partes de la asignatura.

c) Servir de "puente" entre la enseñanza y la realidad.

Además la existencia de este laboratorio conllevaría la realización por parte de los alumnos de una serie de trabajos o prácticas.

PRACTICAS EN EL LABORATORIO

Las definiría como el estudio y resolución de problemas reales enunciados en términos no directamente iguales a los que figuran en el programa y en los contenidos de la asignatura, pero que son susceptibles de ser resueltos con dichos contenidos.

Características

Destacaría las siguientes:

a) Contribuyen a fortalecer los conocimientos teóricos por la necesidad que existe de aplicarlos.

b) Durante su realización los alumnos manejan apuntes, libros, opiniones y eventualmente otros medios como ordenador, aparatos de medida, etc.

c) Retroalimentan una motivación extra para la asignatura.

d) Brindan la posibilidad de que los estudiantes trabajen en grupo y así practiquen esta modalidad que complementa a la habitual.

Clases prácticas

a) De carácter específico. Son aquellas en las que se utilizan los conocimientos de un solo tema. Se em plean bien para servir de refuerzo en el aprendizaje de dicho tema, bien para conocer algunas de sus aplicaciones reales.

b) De carácter global. En éstas se manejan conocimientos de varios temas. Su empleo es aconsejable para poner de manifiesto las interconexiones que existen entre dichos temas o para conocer una posibilidad de aplicación conjunta.

EJEMPLOS DE PRACTICAS

Como ya se ha indicado anteriormente cada una de ellas sería realizada por un grupo de alumnos, debiendo al final confeccionar cada uno de los grupos una pequeña memoria con todo el proceso.

1) Matemática financiera

En un grupo de 3 alumnos uno jugará el papel de banquero, otro de comprador y el tercero de vendedor.

El comprador se dispone a adquirir un bien, un coche, por ejemplo, cuyo pago se realizará mediante una entrada y unas mensualidades. Dispone de una imposición a plazo fijo con una fecha de vencimiento futura y de un pagaré del Estado (que endosa a su valor actual). Como las cantidades resultantes no bastan para dar la entrada, pide a un banco un crédito pagadero en mensualidades.

Una vez facilitados los datos necesarios, en cada grupo se analizará la situación, se efectuarán los cálculos y se rellenarán los impresos mercantiles necesarios (fotocopías de originales).

Obsérvese que podemos disminuir la dificultad (suprimiendo la imposición a plazo fijo, por ejemplo) o aumentarla (añadiendo la hipótesis de la posesión de una cartera de valores), para poder adaptarnos así al nivel de los alumnos de cada grupo.

2) Estudio de una parcela poligonal

Bien sobre el mismo terreno o bien sobre un plano que lo represente (son recomendables los del Servicio Geográfico del Ejército 1:50.000) señalaremos a cada grupo el contorno de una parcela con forma de polígono irregular. Con la ayuda de un goniómetro y una cinta métrica o de un transportador de ángulos y una regla, según los casos, se procederá a calcular el área de dicha parcela.

3) Instalación de una alarma mediante rayo óptico

En este caso se deberá instalar en un hueco circular plano una alarma consistente en un foco emisor, una serie de pequeños espejos y un foco receptor (célula fotoeléctrica), estando todos estos elementos situados sobre el contorno interior del hueco. Suponiendo que la longitud máxima eficaz del rayo óptico es conocida y mayor que el diámetro del hueco circular, se deberá hallar la ubicación de los dos focos y de los espejos para que las áreas de los recintos limitados por los rayos sean iguales.

ESTUDIO DE LOS PROGRAMAS DE MATEMATICAS DE BACHILLERATO DE DISTINTOS PAISES

Por Paz Lucas Padín
I.B. Calderón de la Barca. Madrid.

En estos momentos en que se está preparando una reforma de las Enseñanzas Medias, parece conveniente repasar con detenimiento y objetividad los programas de Matemáticas vigentes en distintos países, así como el lugar que ocupa la enseñanza de esa disciplina en los respectivos planes de estudio.

El trabajo es difícil, pues en muchos países los planes de estudios son distintos según los Estados, cantones, escuelas, etc. En sucesivos números de este Boletín nos proponemos dar a conocer la información que hemos recogido acerca de diversas naciones.

Un análisis global de esa información, nos conduce a las siguientes conclusiones:

1ª) Las clases de Matemáticas en el Bachillerato dan un promedio de 4,5 horas a la semana por curso.

2ª) Hay una gran relación interdisciplinar con la Física, sobre todo en los ejercicios.

3ª) En casi todos los países se acaba el Bachillerato con un año más de edad que en España.

4ª) La Geometría y la Trigonometría ocupan un amplio espacio en los programas.

5ª) Se introduce un cierto formalismo, aunque no riguroso.

6ª) Se aplica la Informática para la resolución de problemas concretos de Matemáticas.

7ª) Se utilizan con frecuencia construcciones algorítmicas, quizá para su posterior empleo en Informática.

8ª) En casi todos los países hay procedimientos de selección de alumnos, pero éstos son muy variados. En Suiza hay un examen para acceso a los Liceos, en Inglaterra durante los dos primeros años se hace una especie de reválida, en Italia hay dos enseñanzas paralelas, una que habilita para entrar en la Universidad y otra que permite el estudio en Escuelas Técnicas, etc.

En los próximos números de nuestro Boletín daremos a conocer, como hemos dicho antes, información detallada sobre algunos países, y para que ésta resulte más completa, hacemos un llamamiento a los socios que dispongan de datos de interés sobre este tema, para que los pongan a disposición de los compañeros a través de esta publicación de nuestra Sociedad.

3. PROBLEMAS

3.1 PROBLEMAS RESUELTOS

SOLUCIONES RECIBIDAS A LOS PROBLEMAS 4ª, 5ª Y 6ª DE LA XXIV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS. PARIS, 1983. (Ver Boletines nos 2 y 3)

EJERCICIO Nº 4

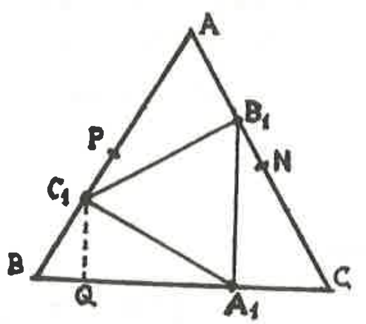
Sea ABC un triángulo equilátero y E el conjunto de los puntos de los segmentos AB, BC y CA (que incluyen a A, B y C). ¿Será cierto que en toda partición de E en dos subconjuntos disjuntos existe al menos un triángulo rectángulo cuyos tres vértices pertenecen al mismo subconjunto?

Justifique su respuesta

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Solución:

Sea ABC un triángulo equilátero de lado $\underline{a}$. Sean S_1 y S_2 los dos subconjuntos de una partición cualquiera de E en dos subconjuntos disjuntos.



Dos de los tres vértices pertenecen a un mismo subconjunto. Se puede suponer, sin restringir ninguna generalidad, que B y C pertenecen a S_1. Sea $A_1B_1C_1$ el triángulo equilátero inscrito tal que $CB_1 = AC_1 = BA_1 = \frac{2}{3}$ a, que es fácil ver que tiene sus lados perpendiculares a otros de ABC; sean N y P los puntos medios de AC y AB, respectivamente, y C_1Q perpendicular a BC.

Si P o N pertenecen a S_1, entonces uno al menos de los triángulos CPB o CNB tienen sus vértices en S_1 y son rectángulos. Supongamos que, por el contrario, P y N pertenecen a S_2; dos de los tres vértices del triángulo $A_1B_1C_1$ pertenecen a uno de los dos subconjuntos S_1 ó S_2; si pertenecen a S_1, uno de los triángulos rectángulos CA_1B_1, BC_1A_1 o CB_1C_1, al menos, tiene sus vértices en S_1; Sí C_1, $B_1 \in S_2$, entonces C_1, B_1, $N \in S_2$; si A_1, $C_1 \in S_2$, entonces A_1, C_1, $P \in S_2$; si A_1, $B_1 \in S_2$ y $C_1 \in S_1$, resulta: Sí además $Q \in S_1$, será C_1, Q, $B \in S_1$; si por el contrario, $Q \in S_2$, será B_1, A_1, $Q \in S_2$. Resumiendo, la contestación a la pregunta del enunciado es afirmativa.

Francisco Lorenzo Miranda
Instituto "Cervantes".

EJERCICIO Nº 5

¿Podrán encontrarse 1983 números enteros estrictamente positivos y distintos, menores o iguales que 10^5 tales que tres cualesquiera de ellos no sean términos consecutivos de una progresión aritmética?

Justifique su respuesta.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Solución:

Consideremos el conjunto C de los números naturales que, representados en base 3, cumplen las condiciones siguientes:

a) Tienen menos de 12 cifras.

b) La totalidad de sus cifras son 0 ó 1.

El mayor de dichos números será $111 \ldots 111_{(3} = 3^{10} + 3^9 + \ldots + 3 + 1 = (3^{11}-1)/2 = 88573 < 10^5$. El cardinal del conjunto C será igual a $VR_2^{11} = 2^{11} = 2048 > 1983$. Los elementos de C tienen la propiedad deseada, ya que el doble de uno cualquiera de ellos, escrito en base 3, tendrá todas sus cifras iguales a 0 ó a 2, y la suma, dos números distintos cualesquiera, pertenecientes a C, escrita en base 3, no puede tener todas sus cifras 0 ó 2; por tanto, en C no hay tres números en progresión aritmética y la respuesta al enunciado es afirmativa.

Juan Lobo

EJERCICIO Nº 6

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

Determinar cuando se cumple la igualdad.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Solución:

1ª) Si el triángulo es equilátero se verifica la igualdad, evidentemente. Siendo $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$, con $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, las longitudes de los segmentos determinados sobre los lados del triángulo por la circunferencia inscrita en él, se verifica $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, y los tres valores x, y, z, son positivos. Sustituyendo estos valores en la desigualdad del enunciado, ésta resulta equivalente a la:

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq (\sqrt{xyz}(x+y+z))^2$$

Esta desigualdad se puede escribir en la forma

$$(xy^3 + yz^3 + zx^3)\ (x+y+z) \geq \sqrt{x\,y\,z}(x+y+z)^2$$

que no es sino la conocida desigualdad de Cauchy $|\bar{U}|^2\ |\bar{V}|^2 \geq (\bar{U}\cdot\bar{V})^2$ aplicada a los vectores $\bar{U}(\sqrt{xy^3}, \sqrt{yz^3}, \sqrt{zx^3})$, $\bar{V}(\sqrt{z}, \sqrt{x}, \sqrt{y})$; como es sabido, la igualdad sólo tiene lugar cuando los vectores $\bar{U}$ y $\bar{V}$ son paralelos, o sea si

$$\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}$$

lo que implica

$$x = y = z$$

como se deseaba demostrar.

Juan Lobo.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA SECCION DE -VARIA- DE NUESTRO BOLETIN Nº 1

ENUNCIADO

Calcular el resto de 64322^{10000} al dividirlo por 17.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Solución:

Puesto que 17 es primo y 64322 no es múltiplo de 17,

$$64322^{16} \equiv 1 \text{ (mód. 17)} \quad \text{(congruencia de Fermat)}$$

y como 10000 es múltiplo de 16, el resto pedido es 1.

ENUNCIADO

Demostrar que las ternas (x,y,z) de números naturales que satisfacen $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$ forman un conjunto finito (Olimpiada Sueca, 1976). (En el enunciado se omitió la condición de ser los números naturales).

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Solución:

Por ser x, y, z positivos se deduce de la condición del enunciado que $x > 1000$, $y > 1000$, $z > 1000$; también se deduce que al menos uno de los sumandos del primer miembro es mayor o igual que $\frac{1}{3000}$. Suponiendo, por ejemplo, que es el primero, resulta $x \leq 000$. De todo ello se deduce que las soluciones consi deradas pertenecen al menos a uno de los conjuntos A = { (p,y,z)}, B = { (x,p,z)}, C = { (x,y,p)}, con x >1000, y >1000, z >1000, 1000 < p ≤ 3000.

Si (p,y,z) ∈ A, resulta $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{p-1000}{1000\,p}$ como condición; por ello, uno de los dos sumandos del primer miembro será mayor o igual a la mitad del segundo miembro; si lo es, por ejemplo, el primero, será $y \leq \frac{2000\,p}{p-1000}$, luego las soluciones pertenecientes al conjunto A son de los tipos (p,q,z) o (p,y,q) con $1000 < p \leq 3000$, $\frac{1000\,p}{p-1000} < q \leq \frac{2000\,p}{p-1000}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{z}=\frac{pq-1000\,(p+q)}{1000\,p\,q}$. Puesto que el número de valores que puede tomar p es finito, resulta también finito el número de valores de q, y, en consecuencia, los de y o los de z.

De todo ello se deduce que el número de soluciones pertenecientes a A es finito, y análogamente ocurre con el de las pertenecientes a B ó a C, con lo que queda probado lo deseado.

Francisco Lorenzo Miranda
Instituto "Cervantes.

3.2 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA XXV OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL

Los días 4 y 5 de Julio tuvo lugar en Praga la XXV Olimpiada Internacional de Matemáticas. La representación española fué la siguiente:

Prof. J.A. Navarro González
Prof. M.J. Gaspar Alonso-Vega

Alumnos participantes:

Aparisi Botella, Miguel (Alicante)
Brandt Sanz, Miguel (Pontevedra)
García Parrilla, Andrés (Zaragoza)
Genova Fuster, Gonzalo (Madrid)
Novaes Ledieu, Pablo (Madrid)
R. Tejera Gómez, Agustín (Burgos)

El equipo español ocupó el puesto 27 entre los 34 países participantes.

Las pruebas se relizaron en dos sesiones de 4 h 30 m de duración cada una de ellas. En la primera sesión se propusieron los tres primeros problemas y en la segunda los restantes:

PROBLEMA 1ª

x, y, z son números reales no negativos, tales que $x+y+z = 1$. Demostrar
$$0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq 7/27$$

PROBLEMA 2ª

Encontrar a, b, enteros positivos, que verifiquen:

1ª. El número ab(a+b) no es divisible por 7.
2ª $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ es divisible por 7^7.

Justifique la respuesta.

PROBLEMA 3ª

O, A son puntos dados en el plano. Para cada punto $X \neq O$, del plano, $W(X)$ es la medida radial, en sentido antihorario, del ángulo $\widehat{AOX}$, $(0 \leq W(X) < 2\pi)$, $C(X)$ representa la circunferencia de centro O y radio $\overline{OX} + \frac{W(X)}{\overline{OX}}$. Se dispone de un número finito de colores y cada punto del plano se colorea con uno de ellos. Demostrar que existe un punto Y del plano, con $W(Y) > 0$ y cuyo color aparece sobre la circunferencia $C(Y)$.

PROBLEMA 4ª

En un cuadrilátero convexo A, B, C, D, CD es tangente a la circunferencia de diámetro AB. Demostrar que la recta AB es tangente a la circunferencia de diámetro CD, sí y sólo si, BC y AD son paralelas.

PROBLEMA 5ª

Un n-ágono $(n>3)$ plano y convexo tiene de perímetro p y la suma de las longitudes de sus diagonales es d. Demostrar,

$$n-3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2$$

$[x]$ = parte entera de x.

PROBLEMA 6ª

Sean a, b, c, d, enteros impares, tales que se verifiquen:

1ª. $0 < a < b < c < d$.

2ª $ad = bc$

3ª $a+d = 2^k$ y $b+c = 2^m$, $k, m \in N$.

Demostrar que a = 1.

ESPERAMOS VUESTRAS SOLUCIONES

4- . PEQUEÑAS IDEAS -

PROCEDIMIENTO INTUITIVO PARA HALLAR LA FORMULA DE LA SUMA DE LAS CUARTAS POTENCIAS DE LOS N PRIMEROS NUMEROS NATURALES

En el nª 2 del Boletín, obtuve la suma:

$$\sum_1^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

M. de Guzmán, citaba un procedimiento para sumar los n primeros cubos, basado en la idea de que al aumentar en x el lado del cuadrado de lado a, el área de éste aumenta en $2ax + x^2$.

Obtenía allí:

$$\sum_1^n i^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \qquad (1)$$

Expresión que me va a permitir obtener la suma $\sum_1^n i^4$.

Se tiene:

$$n^4 + 2n^3 + n^2 = 4\sum_1^n i^3$$

Hagamos sucesivamente $n = 1, 2, 3, \ldots n$;

$$1^4 + 2\cdot 1^3 + 1^2 = 4\cdot 1^3$$

$$2^4 + 2\cdot 2^3 + 2^2 = 4(1^3+2^3)$$

$$3^4 + 2\cdot 3^3 + 3^2 = 4(1^3+2^3+3^3)$$

$$n^4 + 2\cdot n^3 + n^2 = 4(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$$

Sumando por columnas:

$$\sum_1^n i^4 + 2\sum_1^n i^3 + \sum_1^n i^2 = 4\left[1^3(n-1) + 1^3 + 2^3(n-2) + 2^3 + 3^3(n-3) + 3^3 + \right.$$
$$\left. + \ldots + n^3(n-n) + n^3\right] = 4n\sum_1^n i^3 - 4\sum_1^n i^4 + 4\sum_1^n i^3 = 4(n+1)\sum_1^n i^3 - 4\sum_1^n i^4$$

Y de aquí:

$$5\sum_1^n i^4 = \left[(4n+2)\sum_1^n i^3 - \sum_1^n i^2\right]$$

Y, por último,

$$\sum_1^n i^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} .$$

M. Rico. I.N.B. Fortuny.

5. VARIA

RESEÑA DE LIBROS

"Cuentos con cuentas".- Por Miguel de Guzmán. Editorial Labor. Barcelona, 1984. 123 págs.

En la misma línea didáctica de otro libro anterior del mismo autor, "Mirar y Ver"(*), el ilustre profesor y académico, Miguel de Guzmán, publica ahora éste, en el cual se revela como un gran didacta de la matemática. El estilo de sus narraciones, directo, ameno y brillante, conecta de inmediato con el lector, prendido y sorprendido por el interés de las situaciones planteadas. En el prólogo de la obra explica el autor la finalidad perseguida con esta publicación: "*El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y la belleza*".

Se ha dicho que en definitiva la matemática es sólo un juego. Los matemáticos ponen las reglas del juego -los axiomas- y mediante sus deducciones lógicas construyen el edificio coherente y sólido de sus teorías. Esto puede ser cierto; pero nada más alejado del proceso de su aprendizaje. Para llegar a esa perfección hay que comenzar por despertar en el alumno la curiosidad y el interés por el estudio de situaciones concretas, desarrollando en ellos las capacidades de observación, experimentación y crítica. La historia de la matemática, desde sus orígenes, nos ofrece bellos y numerosos problemas surgidos de la realidad circundante. En ocasiones de enunciado muy sencillo, pero de solución nada trivial, y aún difícil. Algunos hasta aho-

(*) Editorial Alhambra. Madrid, 1977.

ra continúan inexpugnables, pese a que matemáticos geniales se han ocupado -y como asegura M. de Guzmán divertido- en la búsqueda de la solución. Muchos de estos problemas han sido, sin embargo, origen de nuevas y útiles teorías que han contribuído al progreso de la matemática y de sus aplicaciones.

La Ciencia, decía Rey Pastor en memorable discurso, *es útil sobre todo porque es bella, y la Matemática*, según Dedekind, *la más bella creación del espíritu humano*. ¡Cuántas vocaciones de matemáticos no habrán surgido por haber tenido la fortuna de disponer en su enseñanza elemental de buenos maestros que supieron conducirlos por esta vía, plena de emociones vitales!

Muchos libros se han escrito de divulgación o vulgarización de la matemática -en su mayoría sólamente útiles para los que ya la saben- y sobre entretenimientos y curiosidades de los números y las figuras. Bien están; pero el libro escrito por el profesor Guzmán es de corte muy diferente y los supera. Es, en efecto, un texto entretenido, pero esencialmente es un libro de la mejor pedagogía de la matemática. En sus "cuentos" y en sus "juegos", se practica una didáctica activa, en la que por observación atenta, por la experimentación, por métodos intuitivos, se accede al descubrimiento y a la demostración rigurosa de la solución encontrada.

Y, aún más, del problema inicial surgen otros nuevos, que el profesor Guzmán- ¡estúpenda norma didáctica!- se limita a proponer como un desafío al lector para que éste sienta el placer de resolverlos por sí mismo. Aquí, si el estudioso se pone a la tarea, radica seguramente un buen mérito de la obra: sugerir, estimular, ¡saber callar!, como recomienda Santaló.

Los títulos de los nueve capítulos que componen este pequeño y delicioso libro, llevan los siguientes títulos:

1. Las matemáticas de un bocata.
2. Nim.
3. Los puentes de Könisberg.
4. Un grupo para solitarios.
5. El matemático como naturalista.
6. Cuatro colores bastan.
7. La rana saltarina.
8. El ajedrez recortado.
9. El secreto del salón ovalado.

El libro termina con una breve pero escogida bibliografía.

En cada capítulo se insertan notas históricas sobre la cuestión tratada y breves biografías de matemáticos universales.

J.R. P. I.

PEQUEÑA CONTRIBUCION AL REARME MORAL DE LOS MATEMATICOS

Por Marc Chaperon(1)

Desde hace tiempo, con ayuda de las restricciones de créditos, nos atenaza la duda: ¿no tendrá la República necesidad de los matemáticos? Pues bien, he aquí un medio sencillo de probarle (sobre todo si, como a veces sospecho, es Ella un poco analfabeta) que cometería un error grave privándose de nuestros recursos.

Se trata de, conociendo las tablas de la multiplicación por 10, 2, 3, 4 y la primera mitad de la tabla del 5, rehacer rápidamente las partes que faltan de las tablas del 5 al 9, contando con los dedos. Se alcanza este objetivo gracias a la fórmula (mágica)

$$(10-a)(10-b) = 10((5-a)+(5-b)) + ab$$

EJEMPLO:

Cálculo de SEIS por OCHO.- Tener, para empezar, los dos puños cerrados; decir SEIS, luego (enderezando el pulgar izquierdo) SIETE, (enderezando el índice izquierdo) OCHO, (enderezando el dedo medio izquierdo) NUEVE y (enderezando el anular izquierdo(2)) DIEZ; decir luego OCHO, después (enderezando el pulgar derecho) NUEVE y (enderezando el índice derecho) DIEZ. Contar los dedos que quedan doblados (CUATRO) y multiplicar este número por diez (CUARENTA). Multiplicar el número de los dedos enderezados de la mano izquierda (CUATRO) por el de los enderezados de la derecha (DOS) y añadir el resultado (OCHO) al de la primera operación (CUARENTA Y OCHO).

A falta de maravillar a la República sí que impresionaréis profundamente a los hijos de vuestros amigos (sería inútil intentar vencer la pereza de los vuestros) y a las más literarias de vuestras amistades.

Este método me lo ha enseñado un cochero de Gabes (Tunicia) cuya mayor alegría consistía, por otra parte, en asustar a las señoras sentadas en su calesa imprimiéndole un marcha infernal a los gritos de "¡Barra! ¡Barra!".

(1) Traducción del artículo publicado en la revista de la Société Mathématique de France "Gazette des Mathématiciens", nº 25 (1984), pág. 141.

(2) Si la posición en la que sólo el meñique queda doblado os es penosa o imposible, es lícito sustituir ese dedo pequeño por el pulgar.

CORRIGENDA

Por Isabel Alvaro
E.U.I.T. Industriales

Para puntualizar que en el Boletín nº 3, en el comentario que se hace sobre la conjetura de Mordell, por un descuido se dice: "... por ser la curva $X^n + Y^n = Z^n$ de género mayor que uno, para $n > 2$ ..." cuando en realidad debe ponerse $n > 3$, pues el genero de tal curva en general es $(n-1)(n-2)/2$, luego para $n = 3$ el género es 1. Ciertamente el resultado al que alude el artículo es cierto, ver por ejemplo, "An Introduction to the Theory of Numbers", G.H. Hardy y E.M. Wright, pero no se deduce del trabajo de Faltings.

Están adscritos a la Sociedad los Seminarios de Matemáticas de los siguientes institutos de bachillerato:

"SAN JUAN BAUTISTA".- San Nemesio s/n. MADRID 27.

"CALDERON DE LA BARCA".- Antonio Leyva 84. MADRID 19.

"FRANCISCO GINER DE LOS RIOS".- Avda. José Antonio s/n. SEGOVIA.

"ALONSO DE MADRIGAL".- Avda. de la Juventud s/n. AVILA.

"CERVANTES".- Embajadores 70. MADRID 12.

"De PARLA".- Juan Carlos I s/n. PARLA (Madrid).

"FORTUNY".- Fortuny 24. MADRID 10.

"EMPERATRIZ MARIA DE AUSTRIA".- Antonio Leyva 84. MADRID 19.

"VILLAVERDE".- Avda. Real de Pinto s/n. MADRID.

"MANUEL DE FALLA".- Avda. Olímpica s/n. MOSTOLES (Madrid).

"CASTILLA".- Alonso Velázquez s/n. SORIA.

LISTA DE SOCIOS

ADAN OLIVER, Miguel.- Gracia 6, port. 2ª, 2ª B. ALCAZAR DE SAN JUAN (Ciudad Real).

AGUADO-MUÑOZ PRADA, Ricardo.- General Cabrera 23. 28040 MADRID.

AIZPUN LOPEZ, Alberto.- Pl. San Amaro 1, 7ª. 28020 MADRID.

ALCALA DEL OLMO PEREZ, Angel.- Navarro y Ledesma 12. ALCALA DE HENARES (Madrid).

ALISA TUCURI, Valero.- San Pedro 43, 4ª B. 16001 CUENCA.

ALONSO MOVINA, Fernando.- Adrián Pulido 11. 28020 MADRID.

ALONSO PASTELLS, María Isabel.- María de Molina 34.- MADRID.

ALVAREZ ALVAREZ, Mª de los Angeles.- General Oráa 32. MADRID 6.

ALVAREZ HERNANDEZ, Pedro.- Gil Imón 6. MADRID 5.

ALVAREZ HERRERO, Fernando.- Conde de Cimera nº 4. MADRID 3.

ALVAREZ PASTOR, Mª de los Angeles.- Hoyelo 3. MADRID 7.

ALVARO HERNANDO, Isabel.- Avda. Córdoba 2, 9° H. MADRID 26.

AMIGO RODRIGUEZ, Domingo.- General Aranda 98. MADRID 29.

AMO ARIAS, Francisca del.- Alcántara, 3. MADRID 6.

ANECHINA PALACIOS, Carmen.- Victor de la Serna 17. MADRID 16.

APARICIO CASLON, Isabel.- Pl. República del Ecuador 3, 6ª izq. MADRID 16.

AREVALO GONZALEZ, Miriam.- Francos Rodríguez 14. MADRID.

ARIAS CABEZAS, José M.- Valmojado 79, 5ª D. MADRID 24.

ARRANZ MARQUEZ, Mercedes.- Pastrana 4. GUADALAJARA.

ARRIBAS DE COSTA, Antonio.- Sancho Dávila 24, 2ª E. MADRID 28.

ARRIERO VILLACORTA, Mª del Carmen.- Travesía del Castillo 10. SAN CLEMENTE (Cuenca).

AVILES SANCHEZ, Manuel.- Murcia 11. MADRID 7.

BARBERO SAMPEDRO, Carmen.- Francisca Moreno 3. MADRID 1.

BATISTA OCHOA, Mª. Nelda.- General Oráa 19, 1ª D. MADRID 6.

BECERRA SEPULVEDA, Mª Victoria.- San Raimundo 46, 1ª izq. 28020 MADRID.

BENITEZ LUMBRERAS, Mª Josefa.- Ronda de Sobradiel 80 (Parque Conde de Orgaz). MADRID 33.

BOLADO CARCAMO, Alicia.- Alfonso VI 44, 4ª izq. MIRANDA DE EBRO (Burgos).

BRAVO DE LA PARRA, Rafael.- I.N.B. "Modesto Navarro". LA SOLANA (Madrid).

CABAÑAS SERNA, Angel Luis.- Paseo Ramón Ugena 11. TOMELLOSO (Ciudad Real).

CALERO ROSILLO, Gonzalo.- Reina Mercedes 19.- MADRID 20.

CALVO-FERNANDEZ PEREZ, Salvador.- Atalaya 6, 2ª izq. CIUDAD REAL.

CALVO MARTIN, Emilia.- Molino de Viento 21.- MADRID 10.

CAMACHO GARCIA, Enrique.- Cristóbal Bordiu, 25. 28040 MADRID.

CAMARA PORTILLO, Elena.- Almazán 31, 2ªB. MADRID 11.

CANO SANCHEZ-SERRANO, Severiano J.- Avda. Oporto 72, 5ªB. MADRID 25.

CANO SEVILLA, Francisco.- Bristol 2. MADRID 28.

CARBALLIDO QUESADA, José Francisco.- Goya 44. MADRID 1.

CARBALLO VARGAS, Manuel.- Navas del Rey 33. MADRID 11.

CARRASCOSA IZQUIERDO, Félix.- Cuadro 44. PUERTOLLANO (Ciudad Real).

CASTIÑEIRA MERINO, Julio.- Echegaray 2. CUELLAR (Segovia).

COBO DOMENE, Mª Angeles.- San Roberto 9. MADRID 11.

COLERA JIMENEZ, José.- Claudio Coello 1, 4ª. COLMENAR VIEJO (Madrid).

CORRAL CAÑON, Antonio.- Ramiro Gómez de Garibay 14, 2ªA. ALCOBENDAS (Madrid).

CORRAL LOPEZ, Daniel-Juan.- Marroquina 2. MADRID 30.

CRIADO MANZANO, Juan Manuel.- Juan XXIII 4. COLMENAR VIEJO (Madrid).

CUARTERO SEGURA, Carolina.- Avda. de Bruselas 65. MADRID 28.

CHAVERO CENTENO, Jesús.- Antonio López 53.- MADRID 19.

DAVILA CAMPOS, Pablo.- Almansa 94, 13-E. 28040 MADRID.

DAVILILLO DE FRANCISCO, Carmen.- Corregidor Diego de Valderrábano 17, 8ªC. MADRID 30.

DIAZ PANIAGUA, Lucio.- Conj. Almenara 6, 2ªA.- LAS ROZAS (Madrid).

DIEZ CALZON, Pilar.- Atenea 30. MAJADAHONDA (Madrid).

DOMINGUEZ VERDIER, Mercedes.- Villabona 5, 3ªB. MADRID 26.

ESCRIBANO RODENAS, Mª del Carmen.- Gutiérrez de Cetina 57, 4ª I. 28017 MADRID.

ESTEVE AROLAS, Rodolfo.- Escultor García Mas 3, 8ª. VALENCIA 15.

ESTIRADO MARTIN, Mª Isabel.- Guadalete, bloque nª 20. MADRID 19.

ETAYO MIQUEO, José Javier.- Reina Victoria 70, 4ªB. 28040 MADRID.

FERNANDEZ BIARGE, Julio.- Cavanilles 25. MADRID 7.

FERNANDEZ DELGADO, Concepción.- Menéndez Pelayo 63, 4ª D. MADRID 9.

FERNANDEZ GONZALEZ, Fernando.- Fermín Caballero 44. MADRID 34.

FERNANDEZ-VALMAYOR CRESPO, Alfredo.- Avda. Valladolid 75, 2ªB. MADRID 8.

FERRANDIZ PRIETO, Eugenio.- Juan Montalvo 21.- 28040 MADRID.

FERRERO DE PABLO, Luis.- Meléndez Valdés 52. 28015 MADRID.

FLOREZ GERMAN, Cristóbal.- José Ortega y Gasset 3. MADRID 6.

FUENTES GONZALEZ, Immaculada.- Pintor Ribera 3, 7ªD. MADRID 16.

GANCEDO PRIETO, Delia.- Ciruela 24, 2ªC. CIUDAD REAL.

GARCIA ARRIBAS, Mª Gregoria.- Urbanización Montepríncipe A-4, nª 6. BOADILLA DEL MONTE (Madrid).

GARCIA BORGE, Mª Esther.- Corazón de María 7 bis. MADRID 2.

GARCIA CABEZA, Jesús.- Virgilio Fdez. Vega 14.- LILLO (Toledo).

GARCIA CASADO, Domingo.- Ulises 25. MAJADAHONDA (Madrid).

GARCIA DE CORTAZAR NEBREDA, Margarita.- Diego de León 60. MADRID 6.

GARCIA DOZAGARAT, Juan Manuel.- San Emilio 7, 3ªC. MADRID 17.

GARCIA GARCIA, José Luis.- Pl. de Basilea 4, 5ª. MADRID 28.

GARCIA-IZQUIERDO AVILA, Miguel.- Paseo Juan XXIII 46. MADRID 20.

GARCIA DE PEDRAZA, Lorenzo.- Romero Robledo 3, 2ª esc., 3ªA. MADRID 8.

GARCIA RAMOS, Ricardo.- Peña Santa 18.- MADRID 34.

GARCIA RIBEIRO, Mª Elisa.- Ramón Gómez de la Serna 35. MADRID 35.

GARCIA SERRANO, Fco. Javier.- Parque Sandra T-29ªB. GUADALAJARA.

GARCIA SOLANA, Ricardo.- Avda. Menéndez Pelayo 32. MADRID 7.

GARRIDO FERNANDEZ, Luis Mario.- Islas Cies 16, 7ªB. MADRID 35.

GARROTE ALEGRIA, Carmen.- Jacinto Benavente 14. CANTALEJO (Segovia).

GOMEZ GONZALEZ, Mª Jesús.- Eduardo Dato 15, 8ª. MADRID 10.

GOMEZ REY, Joaquín.- Sierra de Alcubierre 6, esc. izq., 2ªB. ALCORCON (Madrid).

GONZALEZ DIEZ, Gabino.- Avda. de Córdoba 2, 9ªH. MADRID 26.

GONZALEZ MANTEIGA, Mª Teresa.- Arturo Soria 44. MADRID 27.

GONZALEZ NAVARRO, Antonio.- Torres Miranda 20, 7ªA. MADRID 5.

GONZALEZ TEROL, Julia.- Villa de Marín 36, 1ªB. MADRID 29.

GUTIERREZ DE MOLINA, José L.- Orense 8, 13ªB. MADRID 20.

GUIERREZ PEREZ, Elena.- Ronda de Toledo 14.- MADRID 5.

GUTIERREZ VAZQUEZ, Santiago.- Menéndez Pelayo 21. MADRID 9.

GUZMAN OZAMIZ, Miguel de.- Virgen de Iciar 15. MADRID 23.

HERNANDEZ DOMINGUEZ, Jesús.- Extramuros 13. PASTRANA (Guadalajara).

HERNANDEZ IGLESIAS, Mª Luisa.- Jorge Manrique 27. MADRID 6.

HERRANZ MORANTE, Roberto.- Caravaca 3. MADRID 12.

HERRERO PALLARDO, Salvador.- Toledo 21. CIUDAD REAL.

HERRERO RUIZ, Francisco.- Duque de Sesto 11, 5ª F. MADRID 9.

IGLESIAS HERRANZ, Javier.- Virgen de Lluc nª 43. MADRID 27.

ISIDRO DE LIS, Agustín.- Angel 16, 1ªC. MADRID 5.

JIMENEZ JIMENEZ, Mª Esperanza. Ronda de Segovia 10. MADRID 5.

JIMENEZ SAIZ, Jaime.- San Pedro 15, 1ªC. CUENCA.

LAIZ CASTRO, José L.- Viña 6. MAJADAHONDA (Madrid).

LINARES CACERES, Juan Manuel.- Sta. Marta 3. OLIAS DEL REY (Toledo).

LOPEZ CORRAL, Luis.- Dirección Provincial de Educación, Avda. de los Mártires s/n. CIUDAD REAL.

LOPEZ DE ELORRIAGA Y UZQUIANO, Fco. Javier.- Almazán 27. MADRID 11.

LOPEZ FERNANDEZ, Luis.- Ambrosio Ballesteros 3, 2ª. TORRIJOS (Toledo).

LOPEZ RODRIGUEZ, Manuel.- Juan Duque 7, 3ªA. MADRID 5.

LOPEZ SANCHEZ, Jesús.- Pl. Alameda de Osuna 70. MADRID 22.

LORENZO MIRANDA, Francisco.- Avda. Cardenal Herrera Oria 301, 2ª izq. MADRID 35.

LOZANO GUERRA, Ana Mª.- Parque San Julián 5. CUENCA.

LUCAS PADIN, Paz.- Murcia 11, 5ªB. MADRID 7.

MANCEBO CUENCA, Rafel.- C.Residencial Interland Bl.2, 2ªA. MAJADAHONDA (Madrid).

MARCOS LORENZO, José L.- Virgen de la Soledad 18 C. GUADALAJARA.

MARTIN MARTIN, Miguel Angel.- Valmojado 253, 3ªA. MADRID 24.

MARTIN QUEVEDO, Ignacio.- Dr. García Tapia 123. MADRID 30.

MARTIN SANZ, Jesús.- Ronda de Santiago 9, 5ªA. ALCALA DE HENARES (Madrid).

MARTINEZ CARDEÑOSO, Jesús.- Clara del Rey 39, apto. 201. MADRID 2.

MARTINEZ LOSADA, Angel.- Costa Rica 13, 1ª. MADRID 16.

MARTINEZ DEL OLMO, Francisco.- Calerueza 20. MADRID 33.

MARTINEZ PERDIGUERO, Ignacio.- Pilar de Zaragoza 104, 4ªB. MADRID 28.

MARTINEZ SANCHEZ, José Antonio.- Ntra. Sra. de la Luz 22, 1ªB. MADRID 25.

MARTINEZ SANCHEZ, José Manuel.- Avda. Reina Victoria 13. 28040 MADRID.

MARTINEZ SANZ, Alfredo.- Pez Austral 11-BªD. MADRID 30.

MAYORA MARTINEZ, Purificación.- José Abascal 46, 8ªD. 28040 MADRID.

MEDIERO ALMENDROS, Manuel.- Edificio Ausias March. CABO DE LA HUERTA (Alicante).

MENA MIGUEL, Mª Pilar de.- Gravina 17, 2ª dcha. MADRID 4.

MIGUEL CASTANERA, Pedro M.- Sta. Engracia 138, 1ªD. 28003 MADRID.

MENDIOLA MUÑOZ DE MORALES, Vicente.- Obispo Estenaga 7, 7ªI. CIUDAD REAL.

MIGUELEZ POSADA, Agustín.- Carmen Cobeña 3, 4ªB. MADRID 5.

MOLINA GOMEZ, Julia.- Modesto Lafuente 29, 2ª dcha. MADRID.

MONGE FONT, Fco. Javier.- Cervantes 60, 1ªA. CALZADA DE CALATRAVA (Ciudad Real).

MOLERO APARICIO, María B.- Ronda de Atocha 7, 2ªJ. MADRID 5.

MONTAÑES CALVELO, Teresa.- I.B. "Luis Hidalgo". MORA DE TOLEDO (Toledo).

MONTES PAZOS, Amelia.- Siena 15, 4ªE. 28027 MADRID.

MORALES GONZALEZ, Mª Isabel.- Avda. del Manzanares 50, 9°B. MADRID 11.

MORALES MEDINA, Carmen.- Valderrey 35, 4ªD. MADRID 35.

MORATO GARCIA, Pedro-Severo.- Cisneros 28, esc.izq. 1ªC. ALCORCON (Madrid).

MORENO TORRES, Rosa M^{a}.- Alonso Cano 77. 28040 MADRID.

MORILLO BALSERA, M^{a} del Carmen.- Paseo de las Delicias 68,4ºC. MADRID 7.

MOYA LOZANO, M^{a} Victoria.- Fermín Caballero 25, 1ºD. CUENCA.

MURAIS GARCIA, M^{a} Dolores.- Estrella Polar 26, 2º izq. MADRID 30.

MUÑOZ FONSECA, Julio Fernando.- Corregidor Diego de Valderrábano 19, 10ºA. MADRID 30.

MUÑOZ GIMENEZ, M^{a} Teresa.- 1º de Mayo 21, 2ºE. PUERTOLLANO (Ciudad Real).

MUÑOZ HUERTAS, Antolina.- Agustín de la Fuente 23. CAMPO DE CRIPTANA (Ciudad Real).

OCHOA MELIDA, Juan.- Galileo 75, 1º. 28015 MADRID.

OLIVARES CICUJANO, Manuel.- Asturias 3, 1^{a}E, 2ºD. LEGANES (Madrid).

OLIVEIRA GONZALEZ, M^{a} José.- Riaño 5, 6ºB. MADRID 22.

OLIVEROS ALONSO, Fidel.- José Ortega y Gasset 44. MADRID 6.

ORTIZA CAPILLA, M^{a} Angeles.- Adrián Pulido 11. MADRID 20.

PABLO CRISTOBAL, Julia.- Alejandro Rodríguez 35, 3ºA. MADRID 20.

PACIOS JIMENEZ, M^{a} Luisa.- Atenea 17, Pinar del Plantio (MAJADAHONDA (Madrid).

PACHECO CASTELAO, José Miguel.- I.B. "San Cristóbal de los Angeles". MADRID 21.

PALACIOS DE BURGOS, M^{a} Jesús.- Acuerdo 24, 1º ext.dcha. MADRID 8.

PALANCAR ALMAZAN, Fernando.- Herbolarios 2. MADRID 17.

PAMOS MOZAS, José.- Polígono del Valle. Ed. "Marte", 6ºA. JAEN.

PASCUAL IBARRA, José Ramón.- Magallanes 44. 28015 MADRID.

PASTOR GRUESO, Mercedes.- Embajadores 35, 3º4. MADRID 12.

PEDREIRA MENGOTTI, Alicia.- Colonia Cables, blq. 2º, 2^{a} portería-2º. ARANJUEZ (Madrid).

PEREZ ALONSO, Antonio.- 53 Rue de la Pompe. 75016 PARIS (FRANCIA).

PEREZ FERNANDEZ, José Ramón.- Colonia Erillas 24. MADRID 18.

PEREZ RECIO, Felisa.- Aptdo. 133. SANTA POLA (Alicante).

PEREZ DE VARGAS, Alberto.- Torrelaguna 125, 8ºD. MADRID 27.

PIEDRAS MARTOS, M^{a} Angustias.- Cdor Diego de Valderrábano 19, 10ºA. MADRID 30.

PINTO SUAREZ, Isabel.- Bernardino Obregón 10, 4ºC. MADRID 5.

PIÑERO NAVARRO, Fernando.- Comandante Fortea 3. MADRID.

PRIETO VICENTE, Maravillas.- Pez Volador 12, 2º C. MADRID.

QUINTANILLA CRUZ, Victoriano.- Alcázar 25. CAMPO DE CRIPTANA. (Ciudad Real).

QUIÑONES LUDEÑA, Emma.- Brescia 13. MADRID 28.

REYES CASTRO, Miguel.- Avda. Ferrol del Caudillo 7, 6º4. MADRID 29.

RIAZA PEREZ, Román.- Arrieta 4. MADRID 13.

RICO SANCHEZ, Mercedes.- Villalar 6, 4º izq. MADRID 1.

RIVAS NIETO, Concepción.- Valderromán 38. MADRID 35.

RIVAS NIETO, Isabel.- Esperanza 15. CIUDAD REAL.

RIVIERE GOMEZ, Vicente.- Costanilla de los Desamparados 4. MADRID 14.

ROANES MACIAS, Eugenio.- Rios Rosas 3. 28040 MADRID.

ROBLEDO MONCADA, Emilio.- Urbanización "Montepríncipe". Parcela A-4, Chalet B-3. BOADILLA DEL MONTE (Madrid).

RODRIGUEZ BLANCO, M^{a} del Carmen.- San Modesto 46, 6ºA. MADRID 34.

RODRIGUEZ GARCIA, Fabián.- Alfonso X el Sabio 20, 2º izq. PARLA (Madrid).

RODRIGUEZ-CARMONA DE LA TORRE, Rosa.- Mar Caribe 4. MAJADAHONDA (Madrid).

ROLDAN MARTINEZ, Antonio.- Virgen del Val 15, 3ºB. MADRID 27.

ROMERO LOPEZ, Jesús.- Sta. María de la Cabeza 65, 7ºC. MADRID 5.

ROSA DEL BARRIO, Antonio de la.- Toribio Sanz 9. COCA (Segovia).

ROVIRA RUBIO, Juana.- Codorniz 8, 5ºB. MADRID 25.

ROVIRA RUBIO, Nemesia.- Fernando Delgado 8, 1ºC. MADRID 25.

RUBIALES CAMINO, Enrique.- Bravo Murillo 23. 28040 MADRID.

RUBIN DE CELIS ARENAL, M^{a} Luisa Paz.- Leñeros 38, 3ºB. MADRID 20.

RUIZ DOMINGUEZ, Manuel.- Fermín Caballero 28, 4ºA. MADRID 34.

RUIZ JIMENEZ, M^{a} Jose.- Doctrina 8, 1ºD. SORIA.

RUIZ LOPEZ, Carlos Javier.- Alférez Provisional 50. TOMELLOSO (Ciudad Real).

RUIZ LOPEZ, Francisco.- Felipe II 19, 4ºH. CIUDAD REAL.

RUIZ LOPEZ, M^{a} Pilar.- Alférez Provisional 50. TOMELLOSO (Ciudad Real.

RUIZ MARTIN, Juan de Dios.- Antonia Mercé 2. MADRID 9.

RUIZ MERINO, Andrés.- Ocaña 27, 9ªB.- MADRID 24.

SAN ROMAN RODRIGUEZ, Gregorio.- Alcalá 201, 3ªB. MADRID 28.

SANTOS MARTINEZ, Francisco Javier.- Villajoyosa 97, 1ªA. MADRID 21.

SANTOS SANCHEZ, Alejandro F.- Sangenjo 16, 10ªC. MADRID 34.

SANCHEZ CATALAN, Angel.- Corregidor José de Pasamonte 11, 4ªA. MADRID 30.

SANCHEZ-CARNERERO GUIJARRO, Juan.- Caidos de Villarta 1. VILLARTA DE SAN JUAN (Ciudad Real).

SANCHEZ MIELGO, José Pablo.- Avda. Martí Pujol 198-202, 6ª 1ª. BADALONA (Barcelona).

SANCHEZ VAZQUEZ, Gonzalo.- Júcar 6. SEVILLA.

SANZ DE ANDRES, Juan L.- José Zorrilla 30, 3ªA. SEGOVIA.

SOTILLO HERGUETA, Juan Antonio.- Camarena 102, 2ªC. MADRID 24.

SUAREZ FERNANDEZ, Manuel.- Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B., Pl. de Colmenares 1. SEGOVIA.

SUAREZ PRADERE, Francisco.- Príncipe de Vergara 81. MADRID 6.

TEJEDOR CARDABA, Gervasio.- Cáceres 2, 5ªB. SEGOVIA.

UREÑA PRIETO, Francisco.- David Rayo 6. CIUDAD REAL.

UREÑA PEREZ, Herminio.- Guardia 7, 1ª izq. VALDEPEÑAS (Ciudad Real).

URGORRI RODRIGUEZ, Pilar.- Jaime el Conquistador 46, 6ªT. MADRID 5.

VEIGA FERNANDEZ, Carmen de.- Marqués de Lozoya 2. MADRID 30.

VELAZQUEZ LOPEZ, Enrique.- Pico de los Artillernos 60, bajo C. MADRID 30.

VIGNOTE, Mª Jose.- Covarrubias 24. MADRID 10.

VILA CUENCA, Agustín de la.- Galileo 74, dpdo. 6ªC. 28015 MADRID.

VILLACORTA MAS, Luis.- Avda. Ferrol del Caudilla 31, MADRID 29.

VIU MORALES, Jesús.- Avda. Dr.García Tapia 110, 3ªD. MADRID 30.

VIZMANOS BUELTA, José Ramón.- Príncipe de Vergara 130, 4ªA. MADRID 2.

ZAMORANO GARCIA, Salvador.- Mota del Cuervo 20. MADRID 33.

ZANON BALLESTEROS, Antonio.- Benito Prieto 12, 3ªA. MADRID 19.