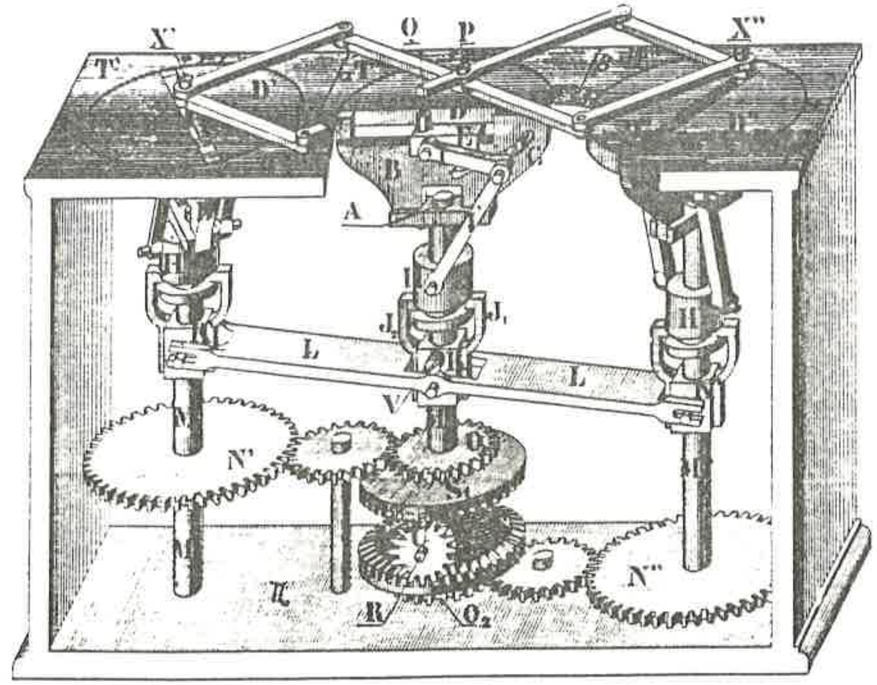
SOCIEDAD "PUIG ADAM"



BOLETIN NUM. 38
OCTUBRE DE 1994

DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM"
DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Octubre de 1994

n° 38 (1994-95)

- Toda la correspondencia deberá dirigirse al

Apartado n° 9479
28.080 -- MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de J. Fernández Biarge

- - -

- La portada de este número reproduce una de las máquinas diseñadas por Torres Quevedo.

Gran parte del presente boletín está dedicado a este genial inventor, con motivo de la próxima celebración del III Simposio acerca de su vida, su tiempo y su obra.

- - -

INDICE Pág

XII CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS 3

XXXV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS (Hong Kong) 9

NOTICIAS 11

ANALOGIA. MAQUINAS ALGEBRAICAS DE TORRES QUEVEDO, por F. González de Posada 15

TORRES QUEVEDO COMO PRECURSOR DE LA INFORMATICA, por A. Hernando González 31

TORRES QUEVEDO. CONTROVERSIA MAQUINAS-PENSAMIENTO, por A. Hernando González ..43

BIBLIOGRAFIA SOBRE T. Q. por R. E. Fernández Terán .53

GENERALIZACION DEL RSA MEDIANTE POLINOMIOS, por Policarpo Abascal 55

HISTORIA DE LA ENSENANZA DE LAS MATEMATICAS EN LA U.C.M. por Concepción Romo Santos 61

RESEÑA DE LIBROS 73

PROBLEMAS PROPUESTOS 79

PROBLEMAS RESUELTOS 81

NOTAS 87

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
Jose Javier Etayo Gordejuela

Vicepresidente por Madrid:
Eugenio Roanes Macias
Vicepresidente por Castilla - La Mancha:
Salvador Herrero Pallardo
Vicepresidente por Castilla - Leon:
Juan Bosco Romero Márquez

Vocal de actividades y concursos:
José Vicente García Sestafe
Vocal de relaciones institucionales:
Jose Manuel Martínez Sánchez
Vocal de gestión de publicaciones:
Carmen García-Miguel Fernández
Vocal de redacción de publicaciones:
Julio Fernández Biarge

Secretario:
Francisco González Redondo
Vicesecretario:
Miguel Angel Gallardo Ortiz
Tesorero:
Alberto Aizpún López
Bibliotecario:
Eugenio Roanes Lozano

XII CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

El *XII Concurso de Resolución de Problemas* , convocado por nuestra Sociedad y por el *Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras,* se celebró, como estaba anunciado, el sábado 25 de Junio de 1994, en los locales de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E.G.B. *"Pablo Montesino"*, de la Universidad Complutense de Madrid, que como el año anterior, nos fueron amablemente cedidos por su dirección para este acto.

Este año, el número de alumnos participantes ha sido de 143, muy por encima del registrado en años anteriores. Cada Centro podía enviar hasta un total de seis alumnos seleccionados. Participaron en las pruebas 49 de Primer Curso, 42 de Segundo y 52 de Tercero. Entre ellos, había bastantes procedentes de provincias muy alejadas de Madrid.

A los alumnos de cada curso se les propusieron cuatro problemas, para resolverlos en dos tandas de hora y media cada una. Al final de esta crónica damos sus enunciados.

En la tarde del mismo dia de las pruebas se hizo la entrega de premios y diplomas a los cinco ganadores de cada curso. El acto estuvo muy concurrido y en él, nuestro Presidente pronunció unas palabras de aliento para todos los participantes y de felicitación a los premiados y a los profesores que los prepararon. Agradeció la colaboración de la firma *"Coca-Cola" de España*, que, como en años anteriores ha costeado los premios entregados a los ganadores.

Al igual que el pasado año, el nivel medio de preparación de los paticipantes ha sido bastante bajo, siendo muchos los alumnos que no han podido iniciar siquiera la resolución de ninguno de los problemas propuestos. Si bien algunos de ellos eran de naturaleza diferente a la de los que se suelen resolver en el Bachillerato, estaban, en cambio, en la linea de los que habitualmente se proponen en las Olimpiadas Matemáticas, aunque más sencillos que éstos. Ello es así, porque este Concurso trata de ser una preparación para esas competiciones, y efectivamente, de sus ganadores en años anteriores han salido algunos de los que han obtenido medallas olímpicas.

Damos a continuación la lista de los alumnos premiados, con indicación de los Centros que los presentaron:

PRIMER CURSO:

1° - **Cristina LACASA IBAIBARRIAGA**, del *Colegio Miravalles* de Huarte (Navarra).
2° - **Teodoro SEOANE AMADO**, del *Colegio El Prado* de Madrid.
3° - **Pablo VEGAS GONZÁLEZ**, del *Colegio Santa María del Pilar* de Madrid
4° - **Pablo ANGULO ARDOY**, del *I. B. Cervantes* de Madrid.
5° - **Ramón CANO SANTANA**, del *Colegio Santa María del Pilar* de Madrid

SEGUNDO CURSO:

1° - **Alejandro RUIZ GONZÁLEZ**, del *Colegio de San Viator* de Madrid.
2° - **Irene DONAIRE VILLA**, del *Colegio JOYFE* de Madrid.
3° - **Rebeca PALMA POLO**, del *I. B. La Serna* de Fuenlabrada (Madrid).
4° - **Carlos GARCÍA GARCÍA**, del *Colegio RIMA* de Alcorcón (Madrid).
5° - **Federico YUSTE CONEJERO**, del *I. B. J. Caro Baroja* de Fuenlabrada (Madrid).

TERCER CURSO:

1° - **Alejendro GARCÍA GIL**, del *I. B. Miguel Delibes* de Madrid.
2° - **Tamara ILLESCAS MOLINA**, del *I. B. Arquitecto Pedro Gumiel,* de Alcalá de Henares (Madrid).
3° - **Ignacio MARTÍNEZ GONZÁLEZ**, del *I. B. Gerardo Diego,* de Pozuelo de Alarcón (Madrid).
4° - **Félix SALCEDO URESTE**, del *Colegio Retamar* de Madrid.
5° - **José Gabriel GARCÍA ORTEGA**, del *I. B. Azorín,* de Elda-Petrel (Alicante).

- - - -

Señalaremos que **Irene Donaire Villa**, clasificada en segundo lugar en Segundo Curso, quedó en tercer lugar como alumna de Primero en nuestro Concurso de 1993, que **Tamara Illescas Molina**, clasificada en segundo lugar de Tercer Curso, fué la primera de Primero en 1992, y que **Félix Salcedo Ureste**, cuarto de Tercer Curso, fué segundo como alumno de Segundo Curso en 1993.

Los enunciados de los problemas propuestos fueron los siguientes:

PRIMER CURSO:

1. Consideramos la sucesión

$$0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots$$

y llamamos $S(n)$ a la suma de los n primeros términos. Calcular $S(n)$.

- - -

2. Sea el sistema:

$$(xy - y - 2)(x^2 - 4x + y^2 - 2y) = 0$$
$$(yx - x - 2)(y^2 - 4y + x^2 - 2x) = 0$$

Se sabe que tiene un número finito de soluciones. Hallar si este número de soluciones es par o impar.

- - -

3. Una figura F recortada en cartulina o papel tiene forma de paralelogramo, uno de cuyos ángulos mide 45 grados y uno de cuyos lados mide $3\sqrt{2}$ veces lo que el otro. Se trata de transformar F en otra figura, R, de forma rectangular, cuyo lado menor y área sean respectivamente iguales a los de F, efectuando repetidamente la operación c consistente en cortar (en línea recta) y pegar de otro modo las dos partes resultantes. Razonar el modo de hacerlo, junto con un dibujo explicativo, tratando de que sea lo menor posible el número de veces que se ha de realizar la operación c.

- - -

4. Dado el cuadrado $ABCD$, construir un pentágono en el cual los puntos A, B, C y D sean vértices consecutivos y cuya área sea $3/2$ de la del cuadrado. ¿ Cuántas soluciones tiene este problema ?

- - -

SEGUNDO CURSO:

1. Entre los números cero y uno se define una operación $*$, del siguiente modo:

$$a * b = a + b - ab$$

y se pide calcular el resultado de las siguientes operaciones:

1) $b * (b * b)$
2) $(ab) * b$
3) $(a * b)b$

- - -

2. Se considera un cuerpo C con forma de tronco de pirámide regular cuyas bases son cuadrados de lados a y b $(a < b)$, siendo h la altura. Al cortar C simultáneamente por cuatro planos perpendiculares a las bases y que contengan a los lados de la base menor, se descompone C en varios cuerpos que, convenientemente ensamblados o acoplados (todos), dan lugar a una pirámide cuadrangular regular y un ortoedro (prisma cuadrangular recto). Dibujarlos y calcular la longitud de las aristas de la pirámide y del ortoedro que se han obtenido.

- - -

3. En un triángulo equilátero ABC, cuyo lado mide 3, se inscribe otro triángulo equilátero DEF, de modo que DE es perpendicular a AC, EF es perpendicular a BC y FD es perpendicular a BA. Hallar la longitud del lado de este triángulo.

- - -

4. Un comité de 13 miembros decide elegir por votación a su presidente. Hay tres candidatos, A, B y C. De los miembros del comité, m tienen sus preferencias en el orden ABC (es decir, prefieren al A y en su defecto al B), n prefieren el orden CBA, p prefieren el CAB y los otros q el orden BCA. Los números m, n, p, q, son enteros positivos distintos.

Discuten sobre cuál de estos métodos adoptar para realizar la votación:

a) Cada miembro vota a uno; se elige el más votado.

b) Cada miembro vota a dos; se elige el que reúna más votos.

c) En la primera vuelta, cada miembro vota a uno; en la segunda vuelta, cada miembro vota a uno de los dos que más votos obtuvieron en la primera, y se elige el más votado en esta segunda vuelta.

Resulta que si se elige el método a), gana el candidato A; si se elige el b), gana el B; y si se elige el c), gana el C. No hay empate en ningún caso.

¿ Cuáles eran los números m, n, p, q ? Razonar la respuesta.

- - -

TERCER CURSO:

1. En un papel cuadriculado, cuyas cuadrículas son de un centímetro de lado, se señala un punto arbitrariamente. Probar que las sumas de los cuadrados de las distancias en centímetros desde ese punto a cinco vértices cualesquiera de la cuadrícula, es igual o superior a 4.

Encontrar los puntos y vértices para los que esa suma es igual al mínimo, 4.

- - -

2. En el plano de una circunferencia dada, de centro O, se toma un punto exterior variable, P, y se trazan las tangentes PT y PT'. La circunferencia de diámetro PT' corta en X a PT y en Y a XO.

Probar que el ángulo XYT, de vértice Y, es constante.

- - -

3. En un tetraedro de vértices A, B, C, D, se considera cualquier sección producida por un plano paralelo a dos aristas opuestas y que no contenga a ninguna de ellas.

Demostrar que el perímetro de la sección es constante, cualquiera que sea el plano que la produzca.

- - -

4. En un anuncio luminoso, un punto de luz recorre las aristas de un cubo a partir del vértice fijo A. En cada vértice la probabilidad de seguir por una u otra de las aristas concurrentes en él es 1/3, y el punto sigue su recorrido hasta llegar al vértice opuesto al A, donde se apaga.

Si en recorrer cada arista tarda 5 segundos, ¿ Cuál es la probabilidad de que el punto permanezca encendido más de medio minuto ?

- - -

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADOS EN ESTE BOLETIN

Concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad

nº (año)	Convocado en Boletín	Crónica/enunciados
I (1983)	1	2, pág. 11
II (1984)	3	4, pág. 7
III (1985)	5	7, pág. 3
IV (1986)	9	10, pág. 5
V (1987)	13	15, pág. 3
VI (1988)	17	19, pág. 17
VII (1989)	20	22, pág. 9
VIII (1990)	24	26, pág. 3
IX (1991)	27	29, pág. 3
X (1992)	30	32, pág. 3
XI (1993)	33	34, pág. 9
XII (1994)	36	38, pág. 3

Olimpiada Matemática Española

nº (año)	1ª fase (distritos)	2ª fase (final)
XX (1984)	- -	3, pág. 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV (1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61
XXVI (1989-90)	24, págs. 11 y 67	25, págs. 9 y 73
XXVII (1990-91)	27, págs. 7 y 77	28, págs. 17 y 79
XXVIII (1991-92)	30, págs. 19 y 67	31, págs. 11 y 81
XXIX (1992-93)	33, págs. 5 y 71	34, págs. 17 y 71
XXX (1993-94)	36, págs. 9 y 75	37, págs. 13 y 109

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

nº (año)	lugar	Crónica y enunciados en boletín nº
I (1986)	Colombia	8, págs. 11 y 83
II (1987)	Paraguay	12, págs. 3 y 75
III (1988)	Perú	18, págs. 5 y 73
IV (1989)	Cuba	21, págs. 11 y 63
V (1990)	España (Valladolid)	26, págs. 13 y 73
VI (1991)	Argentina	30, págs. 15 y 65
VII (1992)	Venezuela	32, págs. 11 y 71
VIII (1993)	Méjico	35, págs. 5 y 65

Olimpiada Matemática Internacional

nº (año)	lugar	Crónica y enunciados en boletín nº
XXIV (1983)	París	2, pág. 15
XXV (1984)	Praga	4, pág. 67
XXVI (1985)	Helsinski	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986)	Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987)	Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX (1988)	Australia	19, págs. 23 y 77
XXX (1989)	Alemania (R.F.A.)	22, págs. 15 y 73
XXXI (1990)	China	26, págs. 11 y 71
XXXII (1991)	Suecia	29, págs. 11 y 79
XXXIII (1992)	Rusia	32, págs. 9 y 69
XXXIV (1993)	Turquía	35, págs. 3 y 63
XXXV (1994)	Hong-Kong	38, págs. 9 y 79

XXXV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS HONG KONG - 1993

35th International Mathematical Olympiad

La *XXXV Olimpiada Internacional de Matemáticas* se celebró en Hong Kong, en el mes de Julio de 1994.

Las pruebas se realizaron los dias 13 y 14. Se propusieron, como de costumbre, **seis** problemas, cuyos enunciados pueden verse en la sección de **Problemas Propuestos** de este Boletín. Se realizaron en dos sesiones, de cuatro horas y media cada una.

El primer problema fué propuesto por la delegación de Francia, el 2° por las de Armenia y Australia, el 3° por la de Rumania, el 4° por la de Australia, el 5° por la del Reino Unido y el 6° por la de Finlandia.

Cada problema fué calificado con una puntuación de 0 a 7, por lo que cada alumno podía obtener **un máximo de 42 puntos**.

También en esta ocasión, los ejercicios propuestos fueron realmente difíciles. A pesar de ello, los seis estudiantes procedentes de U.S.A. alcanzaron los 42 puntos posibles, lo que costituye un éxito sin precedentes.

Las medallas de oro se otorgaron a partir de los 40 puntos, las de plata a partir de los 30 y las de bronce de 19 en adelante. No hubo, como otros años, premios especiales para alguna solución.

Los representantes españoles no pudieron repetir la brillante actuación del año anterior, en el que obtuvieron una medalla de plata y otra de bronce, consiguiendo tan sólo dos **menciones honoríficas**.

Estos fueron los resultados:

Jerónimo ARENAS GARCÍA, de Sevilla
(5° clasificado en la XXX O.M.E.) 13 puntos (M. H.)

Javier GARCÍA de BRINGAS, de Córdoba
(7° clasificado en la XXX O.M.E.) 13 puntos (M. H.)

Miguel Anxo BERMÚDEZ CARRO, de Galicia
(6° clasificado en la XXX O.M.E.) 11 puntos

David SEVILLA GONZÁLEZ, de Madrid
(4° en la XXIX O.M.E. , 1° en la XXX O.M.E., M. H. en la VIII O. Iberoamericana M.) 3 puntos

Tomás BAEZA OLIVA, de Madrid
(2° clasificado en la XXX O.M.E.) 2 puntos

Miguel CATALINA GALLEGO, de Valladolid
(3er clasificado en la XXX O.M.E.) 1 punto

- - - -

Del 14 al 25 de Septiembre, se celebrará en Fotaleza (Brasil) la *IX OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS*.

La representación española en ella estará constituida por los los tres primeros de la relación anterior, junto con **Antonio ROJAS LEÓN**, que obtuvo medalla de plata en la XXXIV O. Internacional de M. (Turquía), medalla de oro en la VIII O. Iberoamericana de M. (Méjico) y la máxima puntuación en la XXX O. M. E., y que todavía cumple los requisitos para concurrir a la *IX O. I. M.*

- - - - - - -

EDITORIAL

En 1995 se cumple el primer Centenario de la Publicación de la *Memoria sobre las máquinas algébricas* de Leonardo Torres Quevedo. <<suceso extraordinario en el curso de la producción científica española>> en palabras de Eduardo Saavedra. Con este motivo la asociación **Amigos de la Cultura Científica** ha convocado el III Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra", que se celebrará del 24 al 28 de Abril de 1995, y tiene prevista la exhibición de dos exposiciones conmemorativas "Leonardo Torres Quevedo Máquinas algébricas y Automática" y "Los dirigibles de Torres Quevedo". Todos estos actos, que tendrán lugar en Pozuelo de Alarcón (Madrid), suponen la continuación de una intensa tarea iniciada en 1982 de la que pueden destacarse algunas fechas especialmente significativas:

1986. Conmemoración del Cincuentenario de la Muerte de Torres Quevedo, culminados con la inauguración de la estatua en bronce del sabio montañés en Santa Cruz de Iguña (Cantabria).

1987. Celebración del I Simposio en Molledo (Cantabria).

1991. Exhibición de las exposiciones "Leonardo Torres Quevedo en y desde Cantabria" y "Leonardo Torres Quevedo (máquinas e inventos)", ambas en la Asamblea Regional de Cantabria, y "Leonardo Torres Quevedo: 75 años de transbordador sobre el Niágara" en Camargo (Cantabria). Celebración del II Simposio en el marco de la Universidad en el Real Valle de Camargo.

El *Boletín* de la **Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas** no ha querido dejar pasar la oportunidad de prologar las actividades que tendrán lugar en Madrid en 1995 dedicando una parte importante de este número a Leonardo Torres Quevedo, con el ánimo de contribuir a las tareas de justa recuperación y adecuada valoración de tan insigne figura de la Ciencia y la Técnica españolas. Sirvan nuestra portada, los artículos que se reproducen con el permiso de Amigos de la Cultura Científica y de los respectivos autores, publicados todos ellos en las *Actas del II Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra"* (Madrid, 1993, 358 págs.), y las diferentes notas informativas que los acompañan como estímulo para el estudio y la investigación en torno a su vida y su obra.

Amigos
de la
Cultura Científica

Ateneo
de
Pozuelo

III SIMPOSIO "LEONARDO TORRES QUEVEDO: SU VIDA, SU TIEMPO, SU OBRA"

Pozuelo de Alarcón (Madrid), 24 a 28 de abril de 1995

[PRIMERA CIRCULAR]

INFORMACIÓN GENERAL

Amigos de la Cultura Científica consideró oportuno, una vez concluidos los actos conmemorativos del Cincuentenario de la muerte de Leonardo Torres Quevedo (18-12-86), culminados con la inauguración en Santa Cruz de Iguña de la estatua en bronce del sabio montañés: a) continuar sus esfuerzos en pro de la **recuperación de la memoria** de tan insigne figura de la ciencia y de la ingeniería, b) **facilitar los estudios** conducentes a su justa valoración histórica, y c) **difundir su obra**. Para la atención de estas finalidades decidió institucionalizar la organización de Simposios.

En 1987 se celebró el **I Simposio**, en **Molledo (Cantabria)**, municipio en el que se integran el pueblo de **Santa Cruz de Iguña**, donde nació el inventor, y el barrio de **Portolín**, donde se encuentra la casa de "Doña Jimena", hoy tristemente desaparecida, en la que vivió el matrimonio Torres Quevedo-Polanco Navarro, y donde él concibió sus primeras ideas sobre máquinas algébricas y realizó las experiencias iniciales del transbordador.

En 1991 se celebró el **II Simposio**, integrado en las actividades de la **Universidad en el Real Valle de Camargo**. Se conmemoró en aquella ocasión una efemérides harto significativa: los 75 años de funcionamiento ejemplar del **Transbordador sobre el Niágara**. Y se hizo complementariamente con la exhibición en Cantabria de tres exposiciones: <<Leonardo Torres Quevedo *en y desde* Cantabria>>, <<Leonardo Torres Quevedo (máquinas e inventos)>>, ambas exhibidas en la **Asamblea Regional de Cantabria**, y <<Leonardo Torres Quevedo: 75 años de transbordador sobre el Niágara>> en la propia **Universidad en el Real Valle de Camargo**. Se editaron las Actas de este II Simposio.

En 1995 puede conmemorarse aquel <<suceso extraordinario en el curso de la producción científica española>> (en palabras de Eduardo Saavedra) que significó la *Memoria sobre las máquinas algébricas* editada en Bilbao en 1995. En este marco se concibe este **III Simposio**, completado con la posible exhibición de dos nuevas exposiciones: <<Leonardo Torres Quevedo: Máquinas algébricas y Automática>> y <<Los dirigibles de Torres Quevedo>>..

SECCIONES

1. Leonardo Torres Quevedo: su vida y su tiempo.
2. Máquinas algébricas.
3. Automática, Informática, Cibernética.
4. Dirigibles, naves, torpedos.
5. Ingeniería española (1850-1936).
6. Otros temas.

COMUNICACIONES

El Simposio está concebido con Conferencias, Ponencias y Comunicaciones.

Las Comunicaciones que se presenten al Simposio deberán versar sobre los temas recogidos en el título del Simposio o en los de las Secciones, y ser inéditos y originales: un Comité Científico velará por su calidad.

Los **resúmenes** de las Comunicaciones -con extensión máxima de una página DIN-A4 y especificación de título, autor y centro- deberán estar en posesión de la Secretaría del Comité Organizador antes del **31 de enero** de 1995. El Comité Científico decidirá sobre la aceptación definitiva de los resúmenes y presentación en el Simposio antes del **15 de febrero**. Se editarán en un volumen que se entregará a los participantes en el acto inaugural.

Los **textos** definitivos de las Comunicaciones se entregarán en el Simposio al presidente de la sesión en la que se exponga. Todas las comunicaciones leídas integrarán las **Actas oficiales** del Simposio.

Queda abierta la posibilidad de una edición especial conmemorativa. En este caso, un Comité Científico nombrado al efecto seleccionará las conferencias, ponencias y comunicaciones que se publicarán en el libro.

IDIOMAS

La lengua oficial del Simposio es el castellano. No obstante se admiten trabajos en inglés y francés, siempre que se presenten acompañados de un resumen en castellano.

INSCRIPCIÓN

Tipos y Cuotas de inscripción (*)

A. General .... 15.000 Ptas.
B. Estudiantes .... 5.000 Ptas.

(*) Todos los inscritos antes del 31 de septiembre de 1994 recibirán junto con el recibo correspondiente las Actas del II Simposio.

Los estudiantes deberán adjuntar Certificado acreditativo de su condición en el momento de formalizar la inscripción en el Simposio.

CORRESPONDENCIA

Para información complementaria sobre el Simposio y, en general, sobre el programa "Leonardo Torres Quevedo", dirigirse a:

III SIMPOSIO "LEONARDO TORRES QUEVEDO: SU VIDA, SU TIEMPO, SU OBRA"

Francisco A. González Redondo
Edif. "Pablo Montesino"
Facultad de Educación (U.C.M.)
c/ Santísima Trinidad, 37
28010 MADRID

Tel.: (91) 3946684
Fax.: (91) 3946672

M. Dolores Redondo Alvarado
Departamento de Física e Instalaciones
E.T.S. Arquitectura (U.P.M.)
Avda. Juan de Herrera, 4
28040 MADRID

Tel.: (91) 3366518, 3366569
Fax.: (91) 3366554

EL CONCEPTO DE ANALOGIA. BREVE ENSAYO EN TORNO A LAS *MAQUINAS ALGEBRICAS* DE TORRES QUEVEDO

F. González de Posada

E. T. S. Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid.

INDICE

INTRODUCCION.

1. PRIMERA PARTE. EN TORNO A LAS MAQUINAS DE CALCULAR.

1.1. Primera clasificación básica, de naturaleza prioritariamente conceptual.
1.2. Finalidad de la *máquina algébrica* de Torres Quevedo.
1.3. Segunda clasificación básica, de naturaleza prioritariamente instrumental e histórica.
1.4. Una clasificación general.

2. SEGUNDA PARTE. CONCEPCIONES ANALOGICAS.

2.1. La analogía general 'matemática del continuo-física clásica'.
2.2. La analogía 'matemática-mecánica (cinemática)': las *máquinas algébricas* de Torres Quevedo.
2.3. La analogía intrafísica: las teorías físicas analógicas.
2.4. La semejanza física: los modelos reducidos.
2.5. En torno a la analogía Naturaleza-Física.

3. TERCERA PARTE. CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS EN TORNO A LAS *MAQUINAS ALGEBRICAS* DE TORRES QUEVEDO.

3.1. Concepto general de *máquina algébrica*, según Torres Quevedo.
3.2. Concepto cinemático de *máquina algébrica*, según Torres Quevedo.
3.3. Torres Quevedo como 'cinematizador de la matemática'.
3.4. La obra escrita de Torres Quevedo sobre *máquinas algébricas*.

INTRODUCCION[1]

Los temas relacionados con las Máquinas de Calcular, Automática, Cibernética e Informática no pueden faltar en ninguna aproximación a la obra de Torres Quevedo.

El hecho de que no se anunciara ninguna *comunicación* en el ámbito capital de la obra de Torres Quevedo de las máquinas de calcular -cuestión que conocíamos por nuestra singular situación de presidente de Amigos de la Cultura Científica y de animador del Simposio- nos exigía moralmente realizar un esfuerzo añadido para dedicarle una atención especial aunque fuera modesta. Aquí radica la razón del trabajo que se presenta como *ponencia* y no como *comunicación* científica: que en el II Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra" se hable de sus *máquinas algébricas*[2].

Por otra parte, se aproxima la fecha del centenario de su primera memoria, presentada al Gobierno español en solicitud de ayuda en 1893, informada favorablemente por **Eduardo Saavedra** (Academia de Ciencias) en enero de 1894 y editada por Torres Quevedo en Bilbao en junio de 1895, acontecimiento que deseamos conmemorar también solemnemente. Para ello es conveniente iniciar la creación de un ambiente apropiado, anunciando con tiempo y en lugar oportuno la efeméride. Este II Simposio constituye un marco ideal.

Además, conviene recordar que el tema de las *máquinas algébricas* -expresión más significativa de las utilizadas por Torres Quevedo- fue precisamente el que le abrió las puertas de la fama de genial inventor consagrándolo como tal en torno a sus cincuenta años, a comienzos de nuestro siglo[3].

La lectura de la obra de Torres Quevedo se hace, a veces, difícil, como consecuencia de la evolución de los conceptos, de la creación de otros nuevos más o menos próximos y perturbadores, y del significado tantas veces no preciso y cambiante de determinadas palabras y expresiones claves. Esto invita a trabajos de naturaleza propia de los Fundamentos de Física: aumentar la *claridad* y el *orden* en los conceptos.

---

[1] Este trabajo se incluye en las *Actas del II Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra"* celebrado en el mes de julio de 1991 en el marco de la Universidad en el Real Valle de Camargo (Cantabria).

[2] Mucha satisfacción nos produjo el título -y más tarde ¡claro es!, el contenido- de la conferencia del profesor E.L.Ortiz a quien habíamos cursado una invitación especial como conferenciante en el Simposio. La analogía "máquina aritmética de calcular (cálculo mecánico)-construcciones geométricas de los nomogramas (cálculo geométrico)" la trata extensamente el Profesor Ortiz en el trabajo "Leonardo Torres Quevedo y Julio Rey Pastor: el cálculo geométrico y el cálculo mecánico en la escuela matemática española".

[3] Para una visión más completa sobre la obra de Torres Quevedo puede verse el libro *Leonardo Torres Quevedo* publicado en la colección "Biblioteca de la Ciencia Española" (Madrid, Fundación "Banco Exterior", 1992), en el que se incluyen reproducciones de los trabajos más importantes de Torres Quevedo.

PRIMERA PARTE. EN TORNO A LAS MAQUINAS DE CALCULAR.

1.1. Primera clasificación básica, de naturaleza prioritariamente conceptual.

Leonardo Torres Quevedo publicó su primera memoria sobre máquinas de calcular en 1895[4]. Así comenta nuestro maestro don **José García Santesmases**[5], máximo especialista español en los tiempos recientes de estos temas, el suceso ya casi centenario:

> <<Esta primera Memoria fue informada favorablemente por el Académico D. **Eduardo Saavedra** con un exhaustivo trabajo. En él se señalan las máquinas y procedimientos de cálculo utilizados hasta entonces. Señala indistintamente las **máquinas analógicas** y **digitales** (como las de **Pascal** y la de **Babbage**), aunque no las designa con estas definiciones modernas, si bien destaca la diferencia entre unas y otras, según operen con **magnitudes continuas** o **magnitudes discretas**". (La impresión en negritas es nuestra).

El párrafo anterior nos introduce y aproxima magistralmente al tema en su vertiente **conceptual**; las máquinas pueden clasificarse básicamente en dos tipos según operen con magnitudes continuas (en cuyo caso se denominan **analógicas**) o con magnitudes discretas (en cuyo caso se denominan **digitales**).

Este breve ensayo en torno al inventor español se concibe, y por tanto puede considerarse, como de **objetivo pedagógico** y con una finalidad de organización elemental del conocimiento básico, de importancia y actualidad, relativo a las máquinas de calcular y al concepto de analogía en el ámbito de la físico-matemática. La separación de conceptos mediante clasificaciones disjuntas con denominaciones apropiadas constituye una necesaria, urgente e imprescindible tarea.

1.2. Finalidad de la *máquina algébrica* de Torres Quevedo.

También interesa a nuestro trabajo presente la vertiente **referencial** a Torres Quevedo. Una cuestión intrínseca al tema objeto de estudio, propio de su esencia, consiste en caracterizar la finalidad de la máquina de calcular analógica. En 1900 presentó Torres Quevedo la memoria de título <<Machines à calculer>>[6] a la Academia de Ciencias de París. En el informe de

---

[4] TORRES QUEVEDO, L. (1895). *Memoria sobre las máquinas algébricas* (Imprenta de la Casa de Misericordia, Bilbao).

[5] GARCÍA SANTESMASES, J. (1980). *Obras e inventos de Torres Quevedo* (Instituto de España, Madrid).

[6] TORRES QUEVEDO, L. (1901). <<Machines à Calculer>> en *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France, Tome XXXII*, Núm. 9 (París).

Academia francesa[7] los redactores, después de exponer los méritos del proyecto que permite la construcción de una máquina para la resolución de ecuaciones de ocho términos, dicen:

> <<En resumen, Mr. Torres ha dado una **solución teórica, general y completa, del problema de la construcción de relaciones algébricas y trascendentes mediante máquinas**; además ha construido, efectivamente, máquinas de un manejo cómodo, para la resolución de ciertos tipos de ecuaciones algébricas que se presentan frecuentemente en las aplicaciones>>. (La impresión en negritas es nuestra).

Francia es la tierra de **Blaise Pascal** y de **Thomas de Colmar**, posiblemente las dos primeras figuras en la relación histórico-cronológica de las máquinas de calcular. Ellos, con **Leonardo Torres Quevedo**, probablemente, constituyen el triunvirato fundamental[8].

1.3. Segunda clasificación básica, de naturaleza prioritariamente instrumental e histórica.

Las denominadas *máquinas algébricas* (máquinas de calcular) de/por Torres Quevedo se encuadran dentro de las máquinas analógicas; es decir, de aquellas que operan con variables de tipo continuo. Pero las máquinas de calcular, a su vez, se clasifican también con buena precisión y nitidez de contornos, según las denominaciones y caracterizaciones siguientes: a) de tipo mecánico; b) de tipo electromecánico; y c) de tipo electrónico.

Esta segunda clasificación está en concordancia, por otra parte, con su aparición histórica, al adoptarse unas técnicas cada vez más cómodas, más factibles y más precisas.

1.4. Una clasificación general.

Las clasificaciones disjuntas establecidas anteriormente, consideradas como primera (de naturaleza prioritariamente conceptual) y segunda (de naturaleza prioritariamente histórica e instrumental) son ciertamente independientes pero también pueden considerarse complementarias y desde esta perspectiva una y otra pueden desempeñar alternativamente los papeles de primer y segundo adjetivo. Así puede completarse la primera clasificación (independientemente de que existieran o no máquinas representativas de todas ellas) de la forma siguiente:

---

[7] DEPREZ, M.; POINCARE, H.; y APPELL, P. (1900). <<Rapport sur un Mémoire de M. TORRES intitulé: "Machines à calculer">>. *Comptes rendus, 130*, 1-3 (2 avril 1900).

[8] MUSEE NATIONAL DES TECHNIQUES. CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS (1990). *De la Machine à Calculer de Pascal à l'ordinateur. 350 Ans d'Informatique* (Paris).

$$\textbf{máquina analógica}\begin{cases}\textbf{mecánica}\\ \textbf{electromecánica}\\ \textbf{electrónica}\end{cases}$$

$$\textbf{máquina digital}\begin{cases}\textbf{mecánica}\\ \textbf{electromecánica}\\ \textbf{electrónica}\end{cases}$$

o bien, puede completarse la segunda de modo inverso intercambiando el orden de los adjetivos, resultando:

$$\text{máquina mecánica}\begin{cases}\text{analógica}\\ \text{digital}\end{cases}$$

$$\text{máquina electromecánica}\begin{cases}\text{analógica}\\ \text{digital}\end{cases}$$

$$\text{máquina electrónica}\begin{cases}\text{analógica}\\ \text{digital}\end{cases}$$

En el ámbito de las máquinas de calcular analógicas nos estamos refiriendo al *primer Torres Quevedo* -al de las máquinas algébricas y el integrador-. Pero hubo después un *segundo Torres Quevedo* -aún de mayor gloria-, el de la Automática, que considera ya dos tipos de autómatas

> << ... según que las circunstancias que regulan su acción actúen de forma continua o por intermitencias>>.

Estos últimos son **sistemas digitales o numéricos**. Para el diseño de sistemas con intermitencias necesita funciones de conmutación, introduciendo los circuitos de conmutación mediante relés, única posibilidad en aquella época. Aboga, este *segundo Torres Quevedo*, por el uso de **sistemas electromecánicos**. Tres son los aparatos de Torres Quevedo de trascendencia histórica en este área: el **telekino**, el **autómata ajedrecista** *(los ajedrecistas)* y el **aritmómetro electromecánico**; D. Leonardo no conoció la era de la electrónica. El aritmómetro electromecánico constituye un eslabón clave, fundamental, en la historia de las máquinas de calcular.

Unas consideraciones complementarias resultan de interés.

Primera. La relación de sus trabajos (véase 3.4) es importante para conocer su datación y facilitar la valoración histórica.

Segunda. Torres Quevedo, con relativa frecuencia, acompañaba sus "memorias" escritas con máquinas o dispositivos elementales como ejemplos de sus concepciones. Veamos las palabras finales de la memoria "Sur les machines à calculer", presentada en 1900 a la Academia de Ciencias de París[9]:

> <<Pongo a disposición de la Academia el proyecto detallado de mi máquina y varios modelos que he construido para ensayar algunos mecanismos nuevos. Mi máquina no contendrá más que mecanismos corrientes o mecanismos ya ensayados por mí: hay que creer que se obtendrán los resultados que acabo de anunciar.
>
> Entre los modelos que presento, hay uno que sirve para calcular las raíces reales de las ecuaciones trinomias. Permite obtener las raíces muy rápidamente y con una exactitud suficientemente grande para poder aplicarse útilmente.>>

Tercera. La "gran máquina de calcular" (para resolver ecuaciones de ocho términos) parece que se construyó desde 1910 hasta 1920 (cuando sus preocupaciones básicas -nuevas- eran de otra naturaleza), constituyendo el hecho una prueba fehaciente de su tenacidad y de su calidad de proyecto mecánico y de exigencia a los constructores, así como de las dificultades constructivas del invento.

SEGUNDA PARTE. CONCEPCIONES ANALOGICAS.

Existen diferentes acepciones, más o menos próximas, del término "analogía" en los ámbitos de la Física y de la Matemática objetos de nuestra atención actual. Describiremos sucintamente, a continuación, algunos de los más interesantes[10].

2.1. La analogía general 'matemática del continuo' - 'física clásica'.

Expondremos, en primer lugar, un cuadro esquemático pero claro, a nuestro juicio, explicativo y representativo de la cuestión de la analogía que denominamos "matemática del continuo-física clásica".

[9] TORRES QUEVEDO, L. (1900). <<Sur les machines à calculer>>. *Comptes rendus*, 130, 1-3.

[10] Parece conveniente insistir en el trabajo de E.L.Ortiz en el que se estudia extensamente la analogía "cálculo mecánico-cálculo geométrico". En comunicación a este Simposio A. Hernando ha hablado de la analogía "mente-máquina".

ANALOGÍA GENERAL

MATEMÁTICA ⟷ FÍSICA

Objeto de estudio: una	Modelo físico de la fórmula algebraica o MÁQUINA ANALÓGICA
fórmula algébrica o ecuación matemática →	fenómeno o problema físico
que establece una *relación* entre valores simultáneos de *variables numéricas continuas* (reales)	que establece la *misma relación* entre valores simultáneos de *magnitudes reales continuas*
$x_1 = f(x_2, x_3, \ldots, x_n)$	$X_1 = f(X_2, X_3, \ldots, X_n)$

de modo que se establece la correspondencia biunívoca entre las variables numéricas reales y las medidas de cantidades de determinadas magnitudes físicas, siguiente:

$$R \ni x_1 \longleftrightarrow X_1 \in "x_1" \equiv R$$
$$R \ni x_2 \longleftrightarrow X_2 \in "x_2" \equiv R$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R \ni x_n \longleftrightarrow X_n \in "x_n" \equiv R$$

Solución matemática de la fórmula algebraica ←	Solución del problema físico o RESULTADO físico
	valor determinado de X_1

$$R \ni x_1 \longleftrightarrow X_1 \in "x_1" \in R$$

Las *variables* x_i y X_i tales que

$$x_i \leftrightarrow X_i, \forall i \in I_n = \{1,2,\ldots,n\}$$

se denominan *analógicas*, y las ecuaciones

$$x_1 = f(x_2, x_3, \ldots, x_n) \longleftrightarrow X_1 = f(X_2, X_3, \ldots, X_n)$$

son *ecuaciones analógicas*. En resumen, el problema matemático se resuelve mediante un modelo físico.

Una analogía implica y exige, por tanto:

1º. Una correspondencia entre variables continuas reales matemáticas y magnitudes físicas reales.

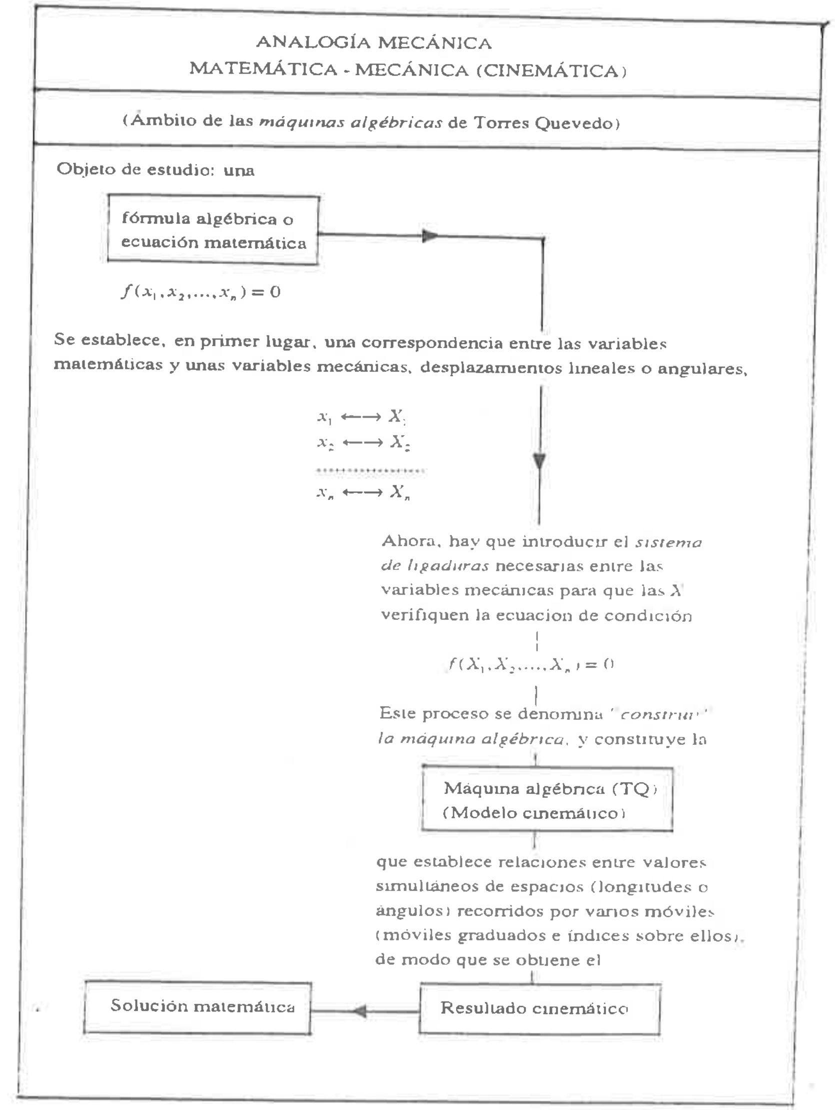
2º. Una correspondencia entre las ecuaciones que ligan las variables matemáticas (en la fórmula algébrica) y las magnitudes físicas (en la ley física o ecuación del fenómeno físico representado por el modelo físico o máquina algébrica).

En síntesis: una correspondencia entre variables matemáticas y físicas que subsiste en la relación formal objeto de estudio y de modelo[11].

2.2. La analogía 'matemática-cinemática': las *máquinas algébricas* de Torres Quevedo.

Haremos también, en primer lugar, un cuadro esquemático

[11] Un estudio denso sobre todos estos temas pueden verse en GONZALEZ DE POSADA, F. *et al.* (1992): *Teorías Físicas Analógicas de Transporte de Tipo Fourier. Lecciones teóricas y Experimentales*. (Madrid. GTAD-E.T.S. Arquitectura).



2.3. La analogía intrafísica: las teorías físicas analógicas.

En relación con el aspecto conceptual del tema objeto de estudio -el concepto de analogía- es necesario tratar, aunque sea brevemente, esta acepción del concepto de analogía en física, la relativa a las *teorías físicas analógicas (entre sí)*; es decir, subconjuntos de teorías físicas que responden a un mismo esquema filosófico y a un idéntico formalismo matemático.

Un caso especialmente interesante es el denominado de las *teorías físicas analógicas de transporte de tipo Fourier*[1] que integra, entre otras, las siguientes teorías físicas: a) teoría analítica del calor de Fourier, b) teoría de la conducción eléctrica en medio continuo de Ohm, c) teoría de la hidráulica del medio permeable de Darcy, y d) teoría de la difusión de Fick: teorías que son tales que pueden establecerse entre ellas las siguientes condiciones necesarias y suficientes:

1ª. Una correspondencia biunívoca entre magnitudes; y

2ª. Las magnitudes analógicas verifican ecuaciones formalmente idénticas.

Por otra parte, para que dos sistemas concretos de una y otra teoría sean *sistemas físicos analógicos* (correspondientes a dos teorías físicas analógicas) es preciso que cumplan, además, las siguientes condiciones necesarias y suficientes:

3ª. Semejanza geométrica de recintos.

4ª. Correspondencia, según la 1ª, de condiciones de contorno e iniciales.

2.4. La semejanza física: los modelos reducidos.

Los *modelos reducidos* pueden considerarse también como otro tipo de analogía. En este caso se trata del estudio de un problema o fenómeno físico en el seno de una teoría física en la que se consideran sistemas geométricamente semejantes y se elige un tipo de semejanza física, de modo que se estudia un fenómeno o problema mediante una semejanza parcial que se fundamenta en la reproducción analógica de la(s) variable(s) considerada(s) como más características del fenómeno.

Se fundamenta en la *Teoría de la semejanza* y ésta en el *Análisis Dimensional*.

[1] VITKOVITCH, D. (ed.) (1966). *Field Analysis. Experimental and Computational Methods* (Van Nostrand, London). Tambien puede verse GONZALEZ DE POSADA, F. *et al.* (1993): "Aplicación de la Teoría Dimensional a las teorías físicas analógicas de transporte de tiupo Fourier" en BUSTOS, E. *et al.* (eds.): *Actas del I Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia* (Madrid, UNED), pp. 387-390.

2.5. En torno a la analogía Naturaleza-Física.

Con un carácter aún más general puede considerarse como analogía la relación Naturaleza-Física o Realidad-Ciencia Física.

El objeto -y el objetivo- de la Física es el 'conocimiento exacto' de la Naturaleza, pero, de momento al menos, aún se encuentra muy lejos de alcanzarlo.

La relación que existe entre ambas, vista desde la Naturaleza, puede considerarse como de *representación*; la Naturaleza se representa mediante la Física. Esta *representación* es de mucha más enjundia que la relativa a los denominados *sistemas de representación* de la Geometría descriptiva: éstos sólo tienen en cuenta, básicamente, forma y tamaño, aspecto y dimensiones, que, complementariamente, pueden ampliarse con el color (y la sombra). La *representación física* es, además, una representación de substancia, de materia, de naturaleza y, más aún, una *representación matemática*.

Pero, no obstante, es una representación, con dos notas que pueden considerarse limitativas, condicionantes o restrictivas.

Primera. Se trata de una *representación parcial*: es decir, unos aspectos o fenómenos de la Naturaleza se representan (o se estudian) mediante una determinada teoría física; otros, mediante otra; y así, sucesivamente. La Física no es 'una' sino un 'conjunto de teorías físicas'.

Segunda. Se trata de una *representación ideal*, mediante la creación y formalización de conceptos referidos a las propiedades de la Naturaleza y la formulación de relaciones (matemáticas) legaliformes entre dichos conceptos.

Esta relación Naturaleza-Física, vista desde la Física, puede considerarse como de *referencia*. La Física -las teorías físicas, diríamos mejor- se refiere a la Naturaleza, a la Realidad - las teorías físicas se refieren a determinados aspectos de la Naturaleza, diríamos mejor-.

En los párrafos anteriores se ha tratado la matemática como 'perfección de lo abstracto' y la física como 'perfección de lo concreto' (de la realidad inmediata). La Física no se identifica con la Naturaleza. Se conforma con *interpretarla matemáticamente* de la *mejor manera posible*. Lo hace, además, parcialmente, mediante diferentes teorías -no siempre conexas ni compatibles- que interpretan más o menos bien determinados conjuntos de fenómenos.

El objetivo constante -históricamente- de la Física ha sido (puede expresarse en sentido fuerte) 'matematizar la Naturaleza', expresar el comportamiento de ésta mediante leyes físicas (en realidad, leyes matemáticas ... pero que relacionan no variables perfecta y puramente abstractas ... sino magnitudes 'físicas' supuestas 'reales', 'concretas'.

La Física es, pues, en cierto sentido, y puede considerarse como tal, una representación analógica de la Naturaleza, una manera simbólica y formal de expresar, de interpretar y de predecir la conducta de la Naturaleza.

TERCERA PARTE. OTRAS CONSIDERACIONES EN TORNO A LAS *MAQUINAS ALGEBRICAS* DE TORRES QUEVEDO.

Las primeras, en sentido histórico, máquinas analógicas fueron de naturaleza mecánica (de tipo mecánico). Entre éstas ocupan lugar de honor las de Torres Quevedo.

3.1. Concepto general de *máquina algébrica*, según Torres Quevedo.

Como texto maduro, definitivo, casi final de esta etapa primera y clásica, cuando ya prepara el "cambio de tercio" hacia otros derroteros (dirigibles, telekino, transbordador) puede considerarse el discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias[12], 1901. Reproduzcamos unos párrafos suyos. (La palabra 'elementos' del texto torresquevediano debe leerse hoy también como 'magnitudes').

<< ... una máquina algébrica es un aparato que impone entre los valores simultáneos de diferentes elementos las relaciones expresadas matemáticamente en una fórmula analítica. Todo aparato que permita reproducir a voluntad un fenómeno físico, cuyas leyes estén formuladas matemáticamente puede en rigor denominarse máquina algébrica.
... en general, cada uno de los elementos de un fenómeno sometido a leyes matemáticas está representado por una variable, y las variables todas están sujetas a ciertas condiciones indicadas en una fórmula, a la cual -por ser ella expresión de la ley del fenómeno- satisfarán constantemente los valores simultáneos de todos los elementos ... Esta circunstancia permite deducir de los valores de algunos de entre ellos, que sean conocidos, los que corresponden a los otros, y determinar así, por medio del cálculo, ciertas magnitudes, sin necesidad de medirlas directamente. Pues lo mismo permitirá procediendo a la inversa, sustituir a un cálculo un experimento: los datos que habían de servir para efectuar el cálculo determinarán las condiciones en que el experimento ha de verificarse: siendo preciso que, al producirse el fenómeno, cada elemento correspondiente a una de las variables conocidas alcance el valor que a esta variable se

[12] TORRES QUEVEDO, L. (1901). <<Maquinas algébricas>> en *Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la recepción pública del Sr. D. Leonardo Torres y Quevedo* (Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid).

atribuye, para que entonces midiendo los elementos restantes, obtengamos directamente el valor de las incógnitas>>.

3.2. Concepto cinemático de *máquina algébrica* según Torres Quevedo.

a) Opción por la cinemática.

Torres Quevedo, que estudia diferentes analogías físicas, opina que las analogías físicas más adecuadas son las mecánicas ya que

<<...[la Cinemática presenta] ventajas incontrovertibles y sólo de ella pueden esperarse soluciones generales en la construcción de máquinas algébricas...
...utilizar otro principio no sería práctico.>>

A este respecto escribe García Santesmases[13] :

<<Naturalmente, Torres Quevedo tenía razón en opinar así, en el contexto científico de la época en que vivía. Tenían que llegar los progresos de la electricidad y ya no digamos la aparición de la electrónica, así como el progreso de la metrología para que el mundo de las calculadoras y, de forma más amplia, el mundo tecnológico, cambiara drásticamente>>.

b) La noción de ligadura en Torres Quevedo (breve glosa de sus ideas).

Una máquina algébrica es un sistema material -conjunto de cuerpos rígidos de formas apropiadas- que permite calcular la variable dependiente en función de las independientes mediante unas ligaduras entre determinados puntos del sistema que expresan las ecuaciones de condición; es decir, los valores simultáneos de las coordenadas de estos puntos.

Las ligaduras -perfectamente establecidas- permiten todo movimiento compatible con la ecuación e impide todo movimiento incompatible.

Es posible, según Torres Quevedo, construir (establecer las ligaduras) un sistema cualquiera de ecuaciones.

Las ligaduras son mecanismos (de relación de elementos).

Es posible construir una perfecta analogía entre sistemas mecánicos y fórmulas algébricas.

<<... en una máquina se impone cierta dependencia entre los valores

[13] Op.cit., pág. 107.

simultáneos de dos ángulos variables, lo mismo que una ecuación, representa en lenguaje algebraico, cierta dependencia entre los valores simultáneos de dos variables abstractas>>.

En resumen: <<Máquina (cinemática) es un instrumento que enlaza varios móviles e impone mecánicamente ciertas relaciones entre los valores simultáneos de sus desplazamientos>>.

Para establecer el sistema de ligaduras necesario para representar la ecuación algébrica se precisan dispositivos especiales. Torres Quevedo utiliza algunos pre-existentes, innova otros y finalmente crea otros absolutamente novedosos y sin precedentes. La consideración y descripción de estas generalidades matemático-mecánicas no constituyen objeto de este trabajo[14]: limitémonos a no hurtar en esta ocasión las palabras aritmóforos, husillo sin fin, generador de polinomios, integrador, así como citar la 'máquina de resolver ecuaciones' numéricas de ocho términos.

3.3. Torres Quevedo como 'cinematizador de la matemática'.

¿Y qué representa, entonces, el concepto de analogía matemática-física objeto de nuestro estudio? Aunque la palabra suene un tanto extraña el objetivo de una máquina analógica consiste ni más ni menos que en **fisizar la matemática**. Como hemos visto, dada una ecuación matemática, se trata de *construir* (expresión plena de Torres Quevedo) una máquina que relacione (mediante ligaduras en la teoría física analógica) las magnitudes físicas correspondientes de modo idéntico a las variables matemáticas en la ecuación matemática. La solución (o soluciones) del problema físico análogo o analógico es (o son) la solución (o soluciones) de la fórmula algébrica.

El proceder de las máquinas analógicas se fundamenta, ciertamente, en esta idea: fisizar la matemática.

La física, siempre, es 'analógica' (no idéntica, no perfecta) y en sus leyes, más o menos aproximada. A esto se añaden los problemas inherentes a la metrología y a las deficiencias de construcción de los aparatos, instrumentos, etc.; las imperfecciones y los errores estarán siempre presentes como añadidos de la no identidad de física y Naturaleza.

Torres Quevedo fue originalísimo y pionero en determinados aspectos de este fisizar la matemática, que, en su caso, consistió en cinematizar la matemática. En esta línea podríamos

[14] GONZALEZ DE POSADA, F. (1990): <<Leonardo Torres Quevedo>> en *Investigación y Ciencia* (Edición en español de *Scientific American*), 166, 80-87 (julio 1990). Este trabajo también se publica en la recopilación GARCIA TAPIA, N. (1994): *Historia de la Tecnica*. (Barcelona. Libros de Investigación y Ciencia), pp. 109-116.

haber titulado este ensayo más periodística y atractivamente "Torres Quevedo, cinematizador de la matemática".

3.4. La obra escrita de Torres Quevedo sobre *máquinas algébricas*.

La obra escrita de Torres Quevedo relativa a las **máquinas de calcular analógicas de tipo mecánico**, está integrada por los siguientes trabajos:

1) *Memoria sobre las máquinas algébricas*, 107 págs. (Imprenta de la Casa de Misericordia. Bilbao, 1895). [Presentada *manuscrita*, en 1893, en solicitud de ayuda al Gobierno español, que recaba informe a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Acompaña noticia de algunas máquinas calculadoras anteriores. La memoria editada incluye el <<Informe>> de Eduardo Saavedra, de enero de 1894, que se publicó en *Anuario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1895*. La *Memoria* -íntegra- se reproduce en la *Revista de Obras Públicas* , *XLIII*, 169-170, 177-178, 185-186, 193-194, 201-205, 209-215, 217-222, 225-227, 233-240, 241-246, 249-259, 257-262, a lo largo de doce números, desde el 22 al 33, de 1985, desde el 10 de agosto al 30 de noviembre].

2) <<Sur les machines algébriques>>. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, *121*, 245-249 (29 Juillet 1895).

3) *Machines algébriques*, 13 págs. (Association Française pour l'Avancement des Sciences. Congrès de Bordeaux. Au Secrétariat de l'Association. París, 1895).

4) <<Sur les machines à calculer>>. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, *130*, 1-3 [Comunicación presentada a l'Académie des Sciences de París, el 19 de febrero de 1900, con la Memoria *Machines à Calculer*. Existe un *Rapport* sobre dicha Memoria, de 2 avril 1900, de Deprez, Poincaré y Appell].

5) <<Sobre la utilidad de emplear ejemplos cinemáticos en la exposición de algunas teorías matemáticas>>, en *Ateneo de Madrid. Sesión inaugural de la Sección de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 19 de noviembre de 1900*, págs. 7-11 (Est. Tipográfico <<Sucesores de Rivadeneira>>. Madrid, 1900).

6) *Machines à Calculer*, 20 págs., 5 planchas de dibujos. (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France, Tome XXXII, Nº 9. París, 1901).

7) *Máquinas algébricas*, en *Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la recepción pública del Sr. D. Leonardo de Torres y Quevedo*, págs. 1-33. Contestación (págs. 35-54) a cargo de Francisco de Paula Arrillaga, 19 de mayo de 1901.

(Madrid, 1901). [Se publica también en *Revista de Obras Públicas*, *XLIX*, 195-196, 205-209 (1901, 23 de mayo y 6 junio). Se edita una versión francesa: *Machines algébriques*, 31 págs. (Edición de *Revue de Questions Scientifiques*. Abril 1902. Société Scientifique de Bruxelles. Imprimerie Polleunis & Ceuterix. Louvain. 1902)].

8) <<Sur les rapports entre le calcul mécanique et le calcul graphique>>. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, *29*, 1-6 (París, 1901).

9) <<Sur l'utilité des examples cinématiques dans l'exposition des théories mathématiques>>. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, *29*, 7-12, (París, 1901).

10) *Sur la construction des Machines algébriques*, 32 págs. (Edición de *Revue de Mécanique*. Septembre et octobre 1901. Dunod. París, 1901).

11) <<Sobre un sistema de notaciones y símbolos destinados á facilitar la descripción de las máquinas>>. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, *IV*, 429-442 (1906). [Se publica también en *Revista de Obras Públicas*, *LV*, 25-30 (17 enero 1907); y como folleto editado por la *Revista de Ingeniería* (Madrid, 1907)].

12) <<Construction mécanique de la liaison exprimée par la formule $d\beta/d\alpha = \text{tang}\ \omega$>>. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, *152*, 33-34 (1911)[15].

[15] A modo de conclusión sí puede apuntarse que se ha convocado el III Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra". Se celebrará en Pozuelo de Alarcón (Madrid), los días 24 a 28 de abril de 1995. Todos aquellas personas interesadas en conocer más cosas sobre esta figura capital de la Historia de la Ciencia y de la Tecnica encontrarán allí el lugar adecuado.

TORRES QUEVEDO COMO PRECURSOR DE LA INFORMATICA MODERNA

A. Hernando González

Instituto de Formación Profesional "Enrique Flórez". Burgos.

INTRODUCCION.

En relación con el mundo de los autómatas y las máquinas de calcular se pueden distinguir dos etapas en la obra de Torres Quevedo. En la primera se dedica al diseño y realización de diversas máquinas analógicas de tecnología mecánica que eran más que notables, y, sin duda, estaban entre las más avanzadas e importantes del momento. En la segunda lleva a cabo un giro copernicano, centrándose en el estudio teórico, diseño y realización de algunos "prototipos" de máquinas digitales con componentes electromecánicos.

En este trabajo nos limitaremos al estudio de esta segunda etapa, sobre la cual pueden establecerse, ya desde el principio, dos afirmaciones:

a) La influencia de Torres Quevedo en la historia "real" de la informática es prácticamente nula, debido a que ni sus máquinas, ni sus trabajos teóricos fueron suficientemente conocidos por la mayoría de los autores posteriores.

b) Sin embargo, todos los autores que han estudiado su obra coinciden en señalar su importancia y sus notables anticipaciones[1].

Lo que trataremos aquí es de dar más precisión a esta segunda afirmación, de manera que quede mejor dibujada en el contexto histórico. Para ello vamos a estudiar la obra de Torres Quevedo indicando las analogías, diferencias y contrastes con algunos de los trabajos más significativos realizados en la época (1935-50) que vio nacer la moderna informática.

[1] Se puede consultar, por ejemplo, García Santesmases, José: *Obra e inventos de Torres Quevedo* (Instituto de España, Madrid, 1980), que es la obra más completa disponible: también da abundantes referencias bibliográficas. En González de Posada, Francisco: "Leonardo Torres Quevedo" en *Investigación y Ciencia*, Julio de 1990, se encuentra una síntesis más actualizada de la obra. De este mismo autor puede verse el nº 5 de la Colección "Biblioteca de la Ciencia Española" de la Fundación Banco Exterior, donde además de un denso estudio introductorio se recogen reproducciones facsímil de los principales trabajos de Torres Quevedo y se actualiza la bibliografía científica del inventor.

1. LA OBRA DE TORRES QUEVEDO.

1.1. Primeras Consideraciones.

Torres Quevedo trabajó durante muchos años en la realización de máquinas algébricas analógicas utilizando tecnología mecánica, consiguiendo notables logros, pero siempre dentro de lo que era la tecnología y la forma de hacer dominante en su periodo. Sin embargo, pese al éxito conseguido, abandonó este campo en el que era una autoridad indiscutible y pasó a desarrollar autómatas con unas características muy diferentes y, en una buena parte, completamente inéditas.

Aunque Torres Quevedo es más conocido por sus realizaciones prácticas, su reflexión teórica es de gran importancia. De hecho, cabe considerar sus máquinas como una "demostración" de que sus ideas eran correctas y podían llevarse a la práctica aunque fuera de forma limitada. No obstante, esta profunda reflexión teórica, que le llevó a conseguir avances importantísimos, está resumida de forma extremadamente concisa y clara en su texto más importante: *Ensayos sobre Automática* [2], que apenas llega a las treinta páginas. Esta "nota", como él la llama, es, sin duda, uno de los textos cumbres de la historia de la informática, y pasamos a comentarla a continuación.

1.2. Aportaciones de la obra "Ensayos sobre automática".

1.2.1. Innovaciones teóricas generales.

- Clasificación de los autómatas en dos tipos: los que actúan siempre de la misma forma, y los que pueden variar el "comportamiento" según las circunstancias. En estos segundos se requiere: "que el autómata intervenga en un momento dado para alterar bruscamente la marcha de las máquinas, las cuales puede decirse que serán gobernadas por él." [3] Estas máquinas es lo que hoy llamaríamos digitales. Conviene recordar que el "redescubrimiento" de este tipo de máquinas por parte de Aiken, Zuse, Stibitz, etc. fue uno de los motores principales que hicieron posible la construcción de los primeros ordenadores. Para Torres Quevedo las máquinas analógicas son dispositivos capaces de realizar un cálculo por "analogía" con un fenómeno físico, es decir, al construir una máquina de este tipo, disponemos las partes de forma que, al obedecer a una determinada ley, realicen un cálculo. Por el contrario

[2] *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, XII*, p. 391-419. Aquí citaremos esta obra por su aportación en: *Torres Quevedo*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid 1978, p. 47-71. La vocación teórica de esta obra queda clara desde el principio, ya que el título completo es: *Ensayos sobre Automática. Su definición, extensión teórica de sus aplicaciones.*

[3] Op. cit., p. 48.

sus máquinas digitales llevan a cabo sus operaciones de una forma, por así decir, abstracta y directa, sin el intermedio de un fenómeno físico, aunque, evidentemente, dependan en sus detalles del tipo de tecnología usado.

- Como consecuencia, propone la creación de una rama específica dedicada al estudio de este tipo especial de máquinas, a su diseño, construcción y posibilidades: la Automática [4]. O sea, prevé y aconseja la articulación teórica de esta rama, con lo que está prefigurando grandes ramas de la moderna informática. Es evidente que, de haberse seguido su consejo, se podría haber desarrollado mucho antes parte de estas disciplinas.

- Este tipo de máquinas pueden aplicarse a cualquier tipo de problemas. En efecto, no se refiere únicamente a máquinas destinadas a realizar cálculos matemáticos, es más, considera a estas últimas como un caso particular. Un ejemplo de máquinas dedicadas a otros problemas son los ajedrecistas. Hay que recordar que, posteriormente, en la década 1935-45 se resuelven de forma casi exclusiva problemas matemáticos, y sólo a partir de las contribuciones de Neumann y Turing se empieza a comprender la generalidad de las posibles aplicaciones.

- Demostración de que es posible construir máquinas con capacidad de imitar diversos tipos de comportamiento y, en particular, con capacidad de actuar de diversa forma según sean las circunstancias:

> "Intentaré demostrar en esta nota -desde un punto de vista teórico- que siempre es posible construir un autómata cuyos actos, todos, dependan de ciertas circunstancias más o menos numerosas, obedeciendo a reglas que se pueden imponer arbitrariamente en el momento de la construcción.[5] "

La elaboración de esta demostración se da a renglón seguido, y resulta tan sencilla como rigurosa. En efecto, basta hacer corresponder a cada entrada una posición, de entre las posibles, de un grupo de conmutadores, de forma que el autómata se pueda "comportar" de forma diferente en cada una de las distintas entradas. Esto también es un avance enorme, ya que está hablando de la importancia y necesidad de crear máquinas que sean capaces de ejecutar más de un algoritmo, o sea, que puedan llevar a cabo programas con ramas condicionales. Sobre ello insistiremos un poco más adelante.

Ahora veremos algo sobre un tipo importante de máquinas, las destinadas a realizar cálculos.

1.2.2.1. Diseño de los aritmómetros.

Torres Quevedo enumera en esta obra una serie de especificaciones generales que

[4] Op. cit., p. 49.

[5] Op. cit., p. 50.

permiten construir un aritmómetro capaz de realizar una secuencia cualquiera y arbitraria de operaciones matemáticas. Para ello debe haber elementos en esos aritmómetros capaces de lo siguiente[6]:

- Anotar un valor particular desplazando el móvil correspondiente. Hoy diríamos: almacenar un número en memoria.

- Ejecutar las cuatro operaciones aritméticas. Esto se hace utilizando las tablas correspondientes a esas operaciones, que se codifican por medio de conexiones.La única diferencia con los diseños modernos es que éstos últimos utilizan el sistema binario. De hecho, la no utilización de este sistema es la diferencia más importante entre los diseños modernos y los de Torres Quevedo.

- Comparar cantidades. Esto permite además la incorporación de ramas condicionales en función del resultado de la comparación.

- Impresión de los resultados. Utilizando unas conexiones adecuadamente conectadas a una máquina de escribir.

Este diseño tiene un carácter perfectamente moderno, además de ser indudablemente el más perfecto de los realizados hasta ese momento. Sólo se puede echar en falta la no aparición de operaciones de tipo lógico, pero eso hubiera sido prácticamente imposible de prever en el momento en el que se escribe esta obra.

Por falta de espacio, no vamos a indicar con detalle cómo eran los mecanismos que emplea para cada una de estas tareas, no obstante, señalaremos que los conmutadores consistían en electroimanes que, cuando pasaba corriente por ellos, atraían algún elemento móvil que cerraba o abría otro circuito (en otros casos actuaba sobre una corredera que modificaba las conexiones, o sobre otros mecanismos ingeniosos). De esta forma, el autómata "actuaba" de diferente forma según cual fuese la entrada inicial, o, lo que es igual, según hubiese o no corriente en el circuito de entrada.

Este tipo de tecnología fue el que utilizaron Aiken y Zuse, entre otros, para construir los primeros computadores. La única diferencia estaba en la mayor cantidad y fiabilidad de los componentes utilizados por ellos, pero el sistema es básicamente el mismo que empleó el inventor cántabro.

1.2.2.2. Diseño efectivo de un aritmómetro.

Torres Quevedo, en esta misma obra, aborda el diseño de un autómata concreto que

[6] Op. cit., p. 54-60.

realiza un determinado cálculo[7], elige el problema de forma que haya que guardar algún dato en la memoria y que sea necesario utilizar ramas condicionales (hay una resta), es decir, escoge el caso más difícil para ver que siempre es posible el diseño y la construcción de la máquina.

El corazón de la máquina es un "tambor de programación" (esta terminología no es de Torres Quevedo) que, a medida que gira en forma discreta (cada uno de esos giros equivale a un paso de programación), deja unas conexiones activas y otras no, de forma que el tambor "ordena" a unos o a otros elementos actuar. Por ejemplo, hace que se sume, se reste, se compare, se guarde un número en memoria, se ejecute un bucle, etc.

Si cambiáramos el cálculo, sólo sería necesario cambiar el tambor de programación, de manera que, en principio, no sería tan difícil construir una máquina programable. En realidad, Torres Quevedo sí hace una codificación del programa, similar a las que luego utilizaron los primeros computadores, pero no desarrolla específicamente la idea de máquina programable, aunque, en realidad, eso seguramente era debido a que las dificultades para llevar sus diseños a la práctica eran demasiadas como para poder permitirse ese lujo.

1.2.2.3. Cómo llevar a la práctica los diseños teóricos. Dificultades que aparecen.

Sobre estos problemas, Torres Quevedo da las siguientes recomendaciones[8]:

- Es preferible utilizar componentes electromecánicos. Esto era una novedad y contradecía de forma radical las ideas establecidas, cosa que el propio Torres Quevedo indica: "Generalmente se preconizan para estos aparatos las soluciones exclusivamente mecánicas". Pese a esta creencia, él se convenció paulatinamente de que ese tipo de "cambios bruscos" eran mucho más fáciles de reproducir con componentes electromecánicos. Como ya hemos indicado, la base tecnológica de la revolución en computación de los años treinta pasa por la construcción de máquinas digitales con componentes electromecánicos. Es decir, por el redescubrimiento de las ideas de Torres Quevedo.

- Necesidad de utilizar la notación exponencial (que Torres Quevedo llama principio de numeración decimal). Este sistema, entonces ya adoptado en muchas máquinas, es ahora universalmente utilizado. Los constructores de los primeros ordenadores a veces renunciaron a él, fundamentalmente para evitar hacer demasiado complicadas las máquinas.

- Hacer una evaluación de la fiabilidad de los componentes y de los resultados.

Torres Quevedo reconoce que los componentes electromecánicos eran menos fiables que los mecánicos, pero indica que, con el debido cuidado, se podrán obtener mejores resultados en el futuro. Recuérdese que uno de los inconvenientes es que le resultaba muy

[7] Op. cit., p. 60-65.

[8] Op. cit., p. 67-71.

difícil disponer de un número suficiente de componentes. También indica la posibilidad de utilizar procedimientos redundantes para aumentar la fiabilidad de los resultados.

1.3. La imitación efectiva del comportamiento humano.

Uno de los aspectos en los que la capacidad de anticipación de Torres Quevedo resulta más extraordinaria es en la relativa a las posibilidades de las máquinas. En los propios *Ensayos sobre Automática* indica que la máquina deberá ser capaz de "imitar" cualquier tipo de comportamiento, aun aquellos que parecen más propios de los humanos. Lo veremos en dos apartados.

1.3.1. Comportamiento condicionado.

En *Ensayos sobre Automática* Torres Quevedo deja bien claro, como hemos indicado, que el comportamiento condicional del autómata puede ser tan complejo como queramos. Además diseña sus aritmómetros de forma que ejecuten "miniprogramas" absolutamente equivalentes a la sentencia moderna: GOTO (esta posibilidad se incorporó a los primeros ordenadores, por ejemplo al Mark I), pero además también previó la utilización de bucles condicionales, equivalentes a: IF .... THEN (esta capacidad no se desarrolló en la historia posterior hasta que su necesidad se hizo evidente, por ejemplo el Mark I sólo la incorporó después de 1945)[9].

Aquí la reflexión teórica de Torres Quevedo da frutos, ya que consigue unos diseños más modernos que los que se produjeron hasta 1945. Por otro lado, los célebres y prodigiosos ajedrecistas se concibieron con la intención de demostrar que se podía llevar a la práctica un autómata con un comportamiento condicionado tan desarrollado como se quisiera, y además aplicándolo a un problema no estrictamente matemático (ya hemos dicho que tampoco fue normal la aplicación de los ordenadores a problemas no matemáticos antes de 1945).

La diferencia esencial entre Torres Quevedo y los autores posteriores está en que éstos fueron resolviendo los problemas y ensanchando el campo de la informática a medida que el propio desarrollo de la disciplina y de sus aplicaciones se lo iba pidiendo sin que jugara un papel importante la reflexión teórica. Por el contrario, Torres Quevedo, que nunca pudo ver la proliferación de las aplicaciones prácticas, desde una pura reflexión teórica llega a unas ideas más poderosas y modernas.

En este punto, debemos recordar que la obra de Babbage anticipa algunas de las ideas de Torres Quevedo en lo que a bucles condicionales se refiere, sin embargo, y por razones de espacio, no nos detendremos en un análisis más detallado.

[9] Ver Ceruzzi, P.E., Reckoners. Connecticut, 1983, p. 55. Se puede consultar esta obra para más detalles sobre la construcción de los primeros ordenadores (1935-50).

1.3.2. Comportamiento aleatorio.

Casi más increíble que lo anterior es la clara intención que muestra Torres Quevedo de dotar de un comportamiento aleatorio a alguno de sus autómatas, con ello, muy probablemente, se quería completar una laguna en la imitación del comportamiento de los humanos, puesto que, aunque algunas veces es reflexivo, otras parece más bien cosa aleatoria. Por ello Torres Quevedo dispuso un mecanismo en sus ajedrecistas, por medio del cual el autómata "perdía momentáneamente la razón" y se comportaba como una persona atontada jugando sin orden ni concierto. También previó esta posibilidad en su máquina: los Jugadores Autómatas, que no llegó a terminar.

Uno de sus colaboradores más cercanos, López del Castillo[10], indicaba respecto de los autómatas torresquevedianos que los más complejos eran justamente los que podían combinar el comportamiento azaroso con el determinista, cosa que justamente pretendió conseguir con Los Jugadores Autómatas. En este campo no hemos encontrado ningún predecente de las ideas de Torres Quevedo, y tampoco parece haber habido un interés por las posibilidades de dotar de comportamiento aleatorio a los ordenadores hasta 1945. Lo cual resulta coherente con lo que venimos indicando: al faltar en la historia posterior un auténtico estímulo teórico, estos problemas ni siquiera se planteaban.

Precisamente en 1950 (cuando los aspectos teóricos cobran importancia) Turing afirmaba que era capaz de reproducir el pensamiento aleatorio por medio de su ordenador de Manchester, con lo que sentaba las bases para el desarrollo de la sentencia RANDOM de los modernos lenguajes de programación [11]. Es decir, retomaba las posiciones de Torres Quevedo justamente 35 años más tarde.

1.4. Algunas de las realizaciones prácticas.

No vamos a detenernos aquí demasiado, sólo lo necesario para indicar algunos de sus logros, bien conocidos por otra parte, en la realización efectiva de máquinas. Es muy importante, sin embargo, recordar que todas sus máquinas "digitales" (a excepción del telekino) eran prototipos construidos con la intención de demostrar que sus ideas eran viables, y no con la intención de obtener resultados "prácticos".

Recordemos sumariamente algunas de sus realizaciones:

- El *telekino*. Es importante ya que durante su construcción empezó a darse cuenta de

[10] López del Castillo, M., <<Los jugadores autómatas de Leonardo Torres Quevedo>>. *Revista de Obras Públicas*, 1959.

[11] Turing, A., *Máquinas de Cómputo e Inteligencia*. Mind, 1950.

las posibilidades de los mecanismos electromecánicos de tipo digital. El telekino además fue el primer mando a distancia que se construyó en el mundo.

- Los *ajedrecistas*. Como hemos dicho su construcción trata de mostrar hasta qué punto se podía reproducir el comportamiento condicional. Estos aparatos son capaces de dar el mate de torre y rey contra rey. Problema relativamente sencillo, pero que requiere que el autómata "tome" gran cantidad de decisiones.

- Los *jugadores autómatas*. Ya hemos indicado que en ellos trataba de imitar, aunque de forma esquemática, la complejidad del comportamiento, mezclando la toma de decisiones de forma determinista con la efectuada de forma aleatoria.

- La construcción de diversos *aritmómetros*. Concebidos también como prototipos y no como aparatos que pudieran dar resultados prácticos. En ellos mantiene las líneas generales de los diseños de sus *Ensayos sobre Automática*, sólo las completa, abordando la división (para lo cual no duda en utilizar un sistema que, de nuevo, requiere la utilización de bucles condicionales), cuando llevó a la práctica su Aritmómetro de 1920 [12]. Estas realizaciones se mantienen por debajo de sus posibilidades teóricas por evidentes limitaciones de equipamiento y tecnología.

Pese a ello en estos prototipos muestra que sus limitaciones son puramente cuantitativas, llevando lo esencial de sus ideas a la práctica. No olvidemos que Torres Quevedo era un genio en la construcción de aparatos de "alta tecnología" (sus máquinas analógicas, funiculares y dirigibles así lo avalan).

2. COMPARACION CON LA OBRA DE OTROS AUTORES.

Siempre dentro del carácter esquemático que venimos adoptando, vamos a complementar el anterior apartado, indicando brevemente las líneas maestras del desarrollo de los primeros ordenadores (1935-1950), terminaremos recordando -dentro de este contexto- los logros y limitaciones de la obra torresquevediana.

2.1. Algunas características del desarrollo histórico que condujo a la construcción de los primeros ordenadores.

Indicaremos de forma sumaria algunas características que nos parecen importantes (a algunas de las cuales ya hemos aludido), en lo que tienen de analogía o contraste con la obra precursora de Torres Quevedo.

[12] Ver. Torres Quevedo, <<Arithmomètre électromécanique>>, en *Les Machines à Calculer*, sept.-oct. 1920, París.

- Es un desarrollo en paralelo (varios grupos en USA, Alemania, Inglaterra y Francia por lo menos), cada autor desconoce los trabajos de los demás. Normalmente se parte (al menos en el aspecto teórico) de cero [13].

- Todos ellos construyen máquinas digitales con componentes electromecánicos (exactamente lo preconizado por Torres Quevedo).

- Todos tienen componentes mucho más fiables y en un número mucho mayor que los usados por Torres Quevedo (piénsese en los 2600 relés binarios del Z3 de Zuse, o las 3000 ruedas del Mark I).

- La causa determinante que condujo a la construcción de estos primeros aparatos fue la necesidad ineludible de contar con instrumentos que permitiesen la realización de cálculos más largos. Es decir, una necesidad práctica. De hecho, la casi totalidad de los investigadores más sobresalientes en este campo eran jóvenes científicos que tenían que hacer largos, repetitivos y tediosos cálculos. La construcción de sus ordenadores fue una labor, al menos, en principio, completamente ad hoc. La diferencia con Torres Quevedo no puede ser más elocuente, el trabajo de éste está presidido por la reflexión teórica y la maduración paciente del diseño. Además Torres Quevedo tenía una larga carrera a sus espaldas cuando abordó estos problemas.

- Algunos de los primeros ordenadores estaban destinados a la resolución de problemas por medio de procesos iterativos, lo que obligaba a realizar, como mínimo, bucles incondicionales.

- La mayoría de los diseñadores se dieron pronto cuenta de las ventajas de la utilización del sistema binario. Torres Quevedo nunca llegó a proponer la utilización de este sistema, lo cual es la limitación más severa de su obra.

- Algunas de estas máquinas son auténticamente programables, aunque el programa se modificaba al cambiar las conexiones en determinadas partes de la máquina.

- En los primeros años (1935-45) no hay apenas interés por los aspectos teóricos y generales, sólo a partir de 1945 se incrementará de forma exponencial la investigación de estos aspectos.

- No se plantearon en los primeros momentos problemas relativos a la analogía de las máquinas con el cerebro humano, que luego pasarían a ocupar un papel central, al menos en el aspecto polémico del desarrollo de la cibernética.

[13] Para todo lo referente a este apartado, se puede consultar Ceruzzi, op. cit. Otra obra muy asequible es: Bernstein, J. *The Analytical Engine*, Random House Inc. NuevaYork, 1963.

- Como lógica consecuencia de la falta de estudio de los aspectos más teóricos, no se desarrollan los bucles condicionales (hasta 1945), ni tampoco las posibilidades de reproducir pautas aleatorias (hasta aproximadamente 1950).

- Todos estos avances se completaron entre 1945 y 1950 con la introducción de la tecnología electrónica, la idea de que el programa se podía cargar en memoria, el desarrollo de la lógica de circuitos, la teoría de información, y, un poco después, con la aparición de los primeros lenguajes de programación.

2.2. Logros y limitaciones de la obra de Torres Quevedo.

Una vez caracterizado, aunque mínimamente, el contexto recordaremos sumariamente los logros quevedianos más significativos.

Tras una larga maduración, se da cuenta de que máquinas que puedan realizar cambios "bruscos" pueden -y aquí está la clave- hacer que la máquina responda de diferente forma según sea la entrada, eso le lleva directamente a introducir dos novedades cruciales en sus máquinas: diseño digital y componentes electromecánicos. Estas dos ideas eran completamente inéditas en ese momento y el despegue de la informática, como acabamos de ver, parte de su redescubrimiento.

Este tipo de máquinas le permite ensanchar el campo de la Automática, resultando que el autómata es capaz de ralizar una secuencia de operaciones arbitraria, de dar respuesta condicionada, y de dar respuesta aleatoria. Hasta entonces sólo se habían ocupado las máquinas de la primera de las tres, y aun de forma incompleta. Ya hemos visto antes las mejoras que realizó en este primer campo. Respecto del segundo aspecto señalar que le da un desarrollo extraordinario, y que no existe apenas otro precedente que el de Babbage. Por último no parece aventurado señalar la prioridad absoluta de Torres Quevedo en lo que se refiere a la incorporación de respuestas aleatorias. También conviene recordar que Torres Quevedo también es un precursor de la utilización de la automática para problemas en general y no meramente matemáticos o de cálculo.

No conviene perder de vista que todos los logros de Torres Quevedo arrancan de una diferencia crucial con la obra de otros autores: mientras que, en general, los demás consideran a las máquinas como *instrumentos o auxiliares adecuados* para resolver algunos de los problemas en los que estaban interesados. Torres Quevedo se esfuerza por estudiar las máquinas autómatas *en sí mismas*, sus características y posibilidades, siendo el primero en tomar conciencia de la especificidad, importancia y autonomía de esta rama de la ciencia, que él denominó Automática.

Por último, recordar algunas de sus limitaciones:

- No introdujo el sistema binario. Este es el único punto en el que son claramente superiores los diseños de los años 1935-45 a los de Torres Quevedo.

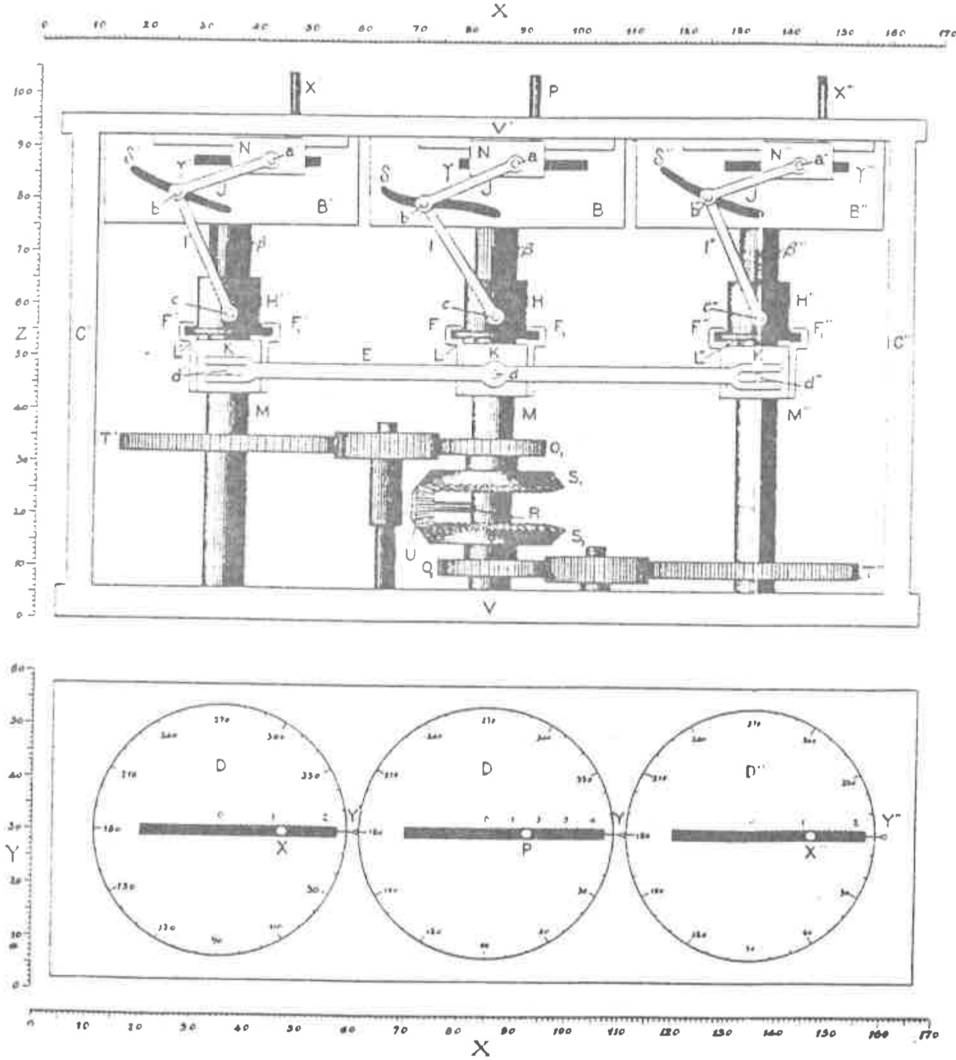
- No llega a desarrollar la idea de programa. Probablemente porque no disponía de tecnología suficientemente potente para que esta idea tuviera una utilidad real.

- No utiliza el algebra de Boole. Consecuencia evidente de su no utilización del sistema binario.[14]

[14] Para adquirir una perspectiva global sobre la obra de Torres Quevedo, además de los trabajos referidos en las diferentes notas anteriores, puede consultarse la obra colectiva, con edición de González de Posada, F.: Alonso Juaristi, P. y González Redondo, A.: *Actas del II Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su obra, su tiempo"*. (Madrid, Amigos de la Cultura Científica, 1993).

Construcción mecánica de la fórmula

$$\rho(\cos\alpha + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\,\alpha) = \rho'(\cos\alpha' + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\,\alpha') \times \rho''(\cos\alpha'' + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\,\alpha'')$$



TORRES QUEVEDO Y LA CONTROVERSIA SOBRE MAQUINAS Y PENSAMIENTO

A. Hernando González

Instituto de Formación Profesional "Enrique Flórez". Burgos.

INTRODUCCION.

Vamos a referirnos en este trabajo a los textos de Torres Quevedo en los que aborda el problema de la analogía mente-máquina, tratando de hacer una valoración crítica de los mismos, para lo cual compararemos sus ideas y textos con otros de autores bien conocidos.

1. LA POLEMICA CIBERNETICA.

1.1. La analogía mente-máquina.

Como he indicado en otro trabajo anterior [1], los primeros tiempos del desarrollo de la informática estuvieron marcados por la falta de cobertura teórica. Esta situación se invirtió de manera absoluta hacia finales de la década de los cuarenta, cuando se empezó a cobrar conciencia de la flexibilidad y generalidad de los problemas que podían abordar los ordenadores. Como consecuencia de ello, aparece una corriente influyente que afirma que las analogías entre la mente humana y los ordenadores son más que considerables, no faltando algunas exageraciones. Todo ello fue producto, en gran medida, de los éxitos espectaculares en el desarrollo de los primeros ordenadores que abonaron la idea de que en seguida podrían rivalizar en todos los campos con la mente. Como era de esperar, estas ideas desataron casi de inmediato una polémica que llega hasta nuestros días. Su momento más "efervescente" tuvo lugar en torno a 1950, y sus actores más destacados fueron, sin duda, Turing, Wiener y Von Neumann. Los tres se muestran bastante optimistas sobre las capacidades y posibilidades de los ordenadores, fruto de ello son algunos famosos textos, que se sitúan entre lo científico y lo filosófico, en los que exponen sus ideas. Estas obras, consideradas desde entonces como

[1] Hernando González, A.:"Torres Quevedo como precursor de la Informática moderna", publicado en el Boletín de la Sociedad "Puig Adam".

clásicas, han sido editadas, comentadas y discutidas ampliamente.

Por razones de espacio sólo reseñaremos una de las obras que mejor caracterizan el tono y el contenido de esta polémica tal y como se presentó a comienzos de la década de los cincuenta.

1.2. El juego de imitación de Turing.

Nos ocuparemos aquí de la obra: *Máquinas de cómputo e inteligencia* [2] aparecida en 1950 y debida a Turing. Este texto aparece de forma infalible en todas las antologías sobre el tema, y de una forma generalizada es considerado como una de las contribuciones clásicas a su discusión. Además, para nuestro estudio, resulta adecuado su análisis, ya que nos proporciona una útil comparación con algunas de las ideas de Torres Quevedo. En esta obra se diseña un juego que consiste en utilizar las contestaciones a una serie de preguntas que le hacemos a "algo" que está en otra habitación, con el objeto de averiguar si ese "algo" es un hombre o una máquina [3].

Turing plantea inicialmente este juego en conexión con la siguiente pregunta: ¿Pueden pensar las máquinas?

Como esta pregunta le parece a Turing un poco ambigua y demasiado expuesta a interpretaciones contrapuestas, prefiere el test del juego de imitación, que es el que utiliza en toda la obra. De hecho, utiliza repetidas veces el test de la imitación para tratar de refutar los diversos argumentos de los que creen que las máquinas no pueden pensar.

Para evitar extendernos demasiado, vamos a considerar solamente cuatro de las objeciones, las dos primeras porque marcan puntos extremos de contacto y de alejamiento con la obra de Torres Quevedo; y las otras dos porque aparecen muchas veces en el comentario y crítica que hicieron diversos autores de las ideas del español, sobre todo, de las que aparecen en algunos pasajes de sus *Ensayos sobre Automática* que luego reproduciremos.

A) Argumentos sobre la informalidad del pensamiento [4].

Aquí afirma Turing que es capaz de reproducir con un ordenador el comportamiento determinista, sino también el aleatorio, indicando que era capaz de generar números "casi" aleatorios. Sin embargo, como ya indicamos en un trabajo anterior, Torres Quevedo ya había hecho autómatas con capacidad de actuar de forma aleatoria. Es decir, Torres Quevedo había

[2] Aparecido originalmente en la revista *Mind*, se cita por su edición en la compilación de Anderson: *Controversia sobre mentes y máquinas*, en su edición española, (Tusquets, Barcelona, 1984) pp. 11-50.

[3] Puede verse, sobre estos temas, Dou Más de Xexás, A. (1987): "" en Actas del I Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra". (Amigos de la Cultura Científica, Madrid, 1994).

[4] Op. cit., pp. 38-40.

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN (CENTROS)

D. ... ...

como . ...del Centro . ...

.. ..

domiciliado en ... ...

ciudad ... ... Codº Post. ... Telfº.. ... .

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR.

Con esta fecha autorizo al Banco . ...

Sucursal o Agencia ... ... en .. ..

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en nuestra cuenta .:..../..../../........./.

abierta al nombre: ... ...

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1994-95

y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1994

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 pta).

Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...

Dirección de ésta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta :..../..../../........./.

los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...

Nombre de la cuenta... ... ...

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

D. ... ... Teléf.(...)... ... .

Dirección particular . ...

Ciudad ... ... Codº Postal .. ... .

Centro de trabajo ... ...

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco . ...

Sucursal o Agencia ... ... en .. ..

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en mi cuenta ..... :..../..../../........./.

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1994-95

y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1994

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 pta).

Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...

Dirección de ésta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta :..../..../../........./.

los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...

Dirección ... ...

respondido a la objeción bastantes años antes que Turing la formulase.

B) La objeción matemática[5].

Prácticamente, ésta es la única objeción que no podía plantearse en la época de Torres Quevedo. Esta objeción se apoya en diversos teoremas matemáticos que imponen ciertos límites a los sistemas formales en general y, en particular, a los sistemas de computación y que habían sido desarrollados en los años treinta -el propio Turing había elaborado alguno de estos teoremas-. Indicamos esta objeción porque tiene gran importancia en toda la polémica, llegando sus ecos hasta el presente.

C) La objeción teológica[6].

Esta objeción usaba diversas ideas extraídas de la religión y de la teología que estaban, o al menos así lo consideran algunos autores, en abierta contradicción con la afirmación de que las máquinas pueden pensar. Como veremos, este tipo de objeción o, al menos, de reparo ronda con frecuencia en varios de los comentarios sobre el pensamiento de Torres Quevedo.

D) Objeción de Lady Lovelace[7].

Lady Lovelace, única hija de Lord Byron y persona notable por varios conceptos, en su análisis de la Máquina Analítica de Babbage, enunció la objeción que lleva su nombre:

> "La máquina analítica no tiene pretensiones de *originar* nada. Puede hacer *todo lo que* nosotros sepamos cómo ordenarle que haga. Puede seguir análisis, pero no tiene capacidad de anticipar relaciones analíticas o verdaderas cualesquiera. Su dominio es ayudarnos para hacer *disponible* lo que ya conocemos. [8] "

Turing, por el contrario, opina que la potencia y la flexibilidad de las máquinas es tan grande que puede darse el caso de que alguna de ellas lleve a cabo una tarea y no sepamos cómo lo ha hecho, debido a la complejidad del proceso y a que la máquina también puede aprender. No obstante, incluso las máquinas dotadas de mecanismos de aprendizaje caen dentro de la argumentación de Lady Lovelace, debido a que, en todo caso, nosotros somos los que construimos la máquina para que aprenda de tal o cual modo.

De todas formas, la posición de Turing se dibuja mejor cuando indica que si se asume la objeción de Lovelace se supone que no hay mérito en la deducción de consecuencias a partir

[5] Op. cit., pp. 27-29.
[6] Op. cit., pp. 25-27.
[7] Op. cit., pp. 35-37.
[8] Citado en Beernstein, J.: *The Analytical Engine*. 1963. Se cita por la edición española (Barcelona, 1986) pp. 65-66.

de principios generales, pero nos parece que, aun aceptando con Turing la importancia de los resultados que se pueden obtener con los ordenadores, se pueden seguir utilizando los argumentos de Lady Lovelace como un buen antídoto para evitar confusiones y malentendidos en este punto, así como exageraciones en la analogía mente-máquina.

Más adelante veremos cómo las opiniones de Torres Quevedo sobre estos temas son muy similares a las de Lady Lovelace, por lo que esta objeción es la más importante a la hora de analizar las ideas del inventor español.

2. TORRES QUEVEDO Y LA CONTROVERSIA SOBRE MAQUINAS Y PENSAMIENTO

2.1. La posición de Torres Quevedo.

En nuestro trabajo anterior sobre Torres Quevedo como precursor de la Informática moderna vimos algunos textos de su obra *Ensayos sobre Automática*, en los que Torres Quevedo indica la necesidad de que el autómata tenga capacidad para actuar de distinta manera según sean las circunstancias. Insistiremos ahora en este punto a través de otros textos de esta misma obra, que, como los ya citados, más parecen obra de los años cincuenta, que de 1914:

> "El autómata procede en todo como un ser inteligente que sigue ciertas reglas, y me interesa hacer observar especialmente que procede como un ser inteligente en el momento en que hay que escoger un camino en cada caso particular[9] ".

Un poco más adelante indica:

> "Se afirma generalmente que un autómata jamás puede proceder por tanteos, y convenía demostrar que esta afirmación está mal fundada, por lo menos cuando se conocen con precisión las reglas que es necesario seguir en los tanteos, y ése es el único caso que nos interesa [10] ".

Torres Quevedo, en un punto anterior de esta obra, expone de forma más detallada sus ideas, afirmando una vez más que un autómata *sí* puede "tomar decisiones". En su argumentación recuerda que Descartes creía que se podría hacer una máquina que fuese una imitación perfecta de un animal, pero que era imposible que una máquina "hablara de forma

[9] Torres Quevedo, L.: *Ensayos sobre Automática* (originalmente de 1914 en Rev. R. Acad. Cienc. Madrid), se reproduce en el catálogo de la exposición organizada por el Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 1978, edición que citamos aquí, pp. 66 ss. Una reimpresión facsímil, junto con el resto de las obras más importantes del sabio puede verse en González de Posada, F. (ed.): Leonardo Torres Quevedo. (Fundación Banco Exterior, Madrid, 1992).

[10] Op. cit., pp. 66-67.

razonable": "Admite fácilmente que el autómata pueda hablar, pero no concibe que pueda hablar *razonablemente*".

Para Torres Quevedo la refutación de estas ideas es sencilla, basta con disponer los sistemas de entrada-salida de sus autómatas de forma conveniente y:

> "A cada discurso corresponderá una posición del sistema, y por consiguiente, un electroimán.
>
> Podemos suponer que éste dispare un fonógrafo sobre el cual se halle inscrita la respuesta a la pregunta que ha provocado su movimiento, y de este modo tendremos un autómata capaz de discutir de *omni re scibile*. [11] " (Cita 1)

Y para precisar más su posición añade un poco más adelante:

> "No hay entre los dos casos la diferencia que veía Descartes. Pensó sin duda que el autómata, para responder razonablemente, tendría necesidad de hacer él mismo un razonamiento, mientras que en este caso, como en todos los otros, sería su constructor quién pensara por él de antemano. [12] " (Cita 2)

Este texto nos da pie para hacer los siguientes comentarios:

a) Torres Quevedo plantea algo muy similar al juego de la imitación, y afirma que siempre se puede construir un autómata que sea capaz de discutir *de omni re scibile*. Para ello basta demostrar que la "salida" o respuesta de un autómata puede variar dependiendo de la entrada de datos, cosa que, como indica Torres Quevedo, se puede hacer con algo tan sencillo como un conmutador basado en elementos electromecánicos. Las dificultades son puramente *cuantitativas*, claro que eso no afecta la generalidad de la argumentación.

Turing, como hemos visto en el apartado anterior, trata de demostrar que se puede llevar *efectivamente* a la práctica en un momento en que las disponibilidades reales eran mucho mayores. Sin embargo, la idea que subyace es la misma.

En realidad, en este punto concreto, la obra de Turing no aporta nada nuevo, además la argumentación de Torres Quevedo es más sencilla y absolutamente demostrativa. Turing hace hincapié en el aspecto cuantitativo porque, cuando escribe su obra, parece ése el punto más importante, pero, en realidad, desde una perspectiva teórica, eso es completamente irrelevante.

b) Además de fundamentar su propia posición, expone las fuentes, en este caso Descartes, de donde se nutren las ideas opuestas a sus puntos de vista e indica exactamente cuál es su punto débil.

[11] Op. cit., pp. 53.

[12] Op. cit., pp. 54.

Torres Quevedo acierta en la elección del autor y del texto, porque toda la tradición filosófica que apoya las ideas opuestas a las suyas arranca precisamente de Descartes y del texto citado.

Acabamos de ver como Torres Quevedo no se contenta sólo con elaborar principios generales y llevarlos a la práctica en la construcción de sus autómatas, sino que también se ocupa del trasfondo filosófico que dificulta la comprensión de las nuevas ideas.

c) Por último, hay que señalar que Torres Quevedo limita las capacidades de las máquinas a las de las que les den sus constructores, como queda reflejado en la cita 2, por lo que viene a indicar que únicamente se puede decir que las máquinas piensan en el sentido de que los que las han construido han pensado por ellas. Con esto se aproxima a la opinión de Lady Lovelace y se separa de la de Turing. De otro modo: Una cosa es que mediante autómatas se pueda "imitar" el comportamiento humano en las más variadas circunstancias, y otra bien distinta es llevar demasiado lejos las analogías entre mente y máquina.

Esta última consideración nos lleva directamente a los problemas semánticos que indudablemente están en el fondo de toda esta polémica. Sobre este punto, Torres Quevedo en una ocasión hacía una precisión tan penetrante como sencilla:

> "No se entienda que al decir de un autómata que observa, siente, discurre, etc., me mueve el afán de exagerar la importancia de la máquina o de llamar la atención con paradojas. Si debiera renunciar a esas palabras porque las máquinas ni observan, ni discurren, ni sienten, tropezaría con las mismas dificultades que si me obligaran a describir una estatua sin hablar de la cabeza ni de las manos, ni de los pies, ni de ningún otro miembro, porque las estatuas no tienen miembros, sino únicamente trozos de mármol o de piedra berroqueña con apariencia de tales [13] ".

Obviamente, Torres Quevedo no comparte la opinión de Turing de que si el ordenador fuera capaz de pasar el juego de la imitación debería ser considerado como un humano; por el contrario, lo único que se podría decir es, eso, que "imitaba" bien su comportamiento, como los buenos escultores imitan cuerpos.

En realidad, algunas de las exageraciones en la analogía mente-máquina provienen de un fondo filosófico behaviorista. Es decir, de la suposición de que dos sistemas que se comportan de la misma manera son -a todos los efectos relevantes- equivalentes. Además con ello se quiere tratar de trivializar otros temas relativos a las sensaciones, la conciencia, etc..

[13] Torres Quevedo, L.: *Mis inventos y otras páginas de vulgarización*, (Madrid, 1917), pp. 52-53. En esta obra se recogen algunos de los trabajos del inventor publicados anteriormente y diversos comentarios sobre sus inventos.

cuando, por desgracia, el desarrollo de la informática no ha podido hacer nada para aclararlos siquiera un átomo, como tampoco los escultores más famosos han sido de mucha ayuda a la hora de estudiar, por ejemplo, el funcionamiento del píloro.

2.2. Algunas reacciones a las ideas de Torres Quevedo.

A pesar de la indudable importancia de la aportación de Torres Quevedo, no se le cita en las obras más célebres de la polémica que son el texto de Turing reseñado, el libro *Cibernética* de Wiener y algunos artículos de Neumann. Tampoco suele aparecer citado en las obras de otros autores que tratan sobre esta polémica; sin embargo, muchas de sus ideas vuelven a aparecer y también el pasaje de Descartes a que alude y que otros muchos autores tratan de refutar (ignorando, por supuesto, la previa aportación quevediana). [14]

No obstante, en un área mas limitada (España y, a veces, Francia), sí es posible encontrar algunos comentarios a los pasajes de sus *Ensayos sobre Automática* a que hemos aludido. Por ejemplo, Arrillaga y Carracido (dos de los científicos españoles más importantes del momento), poco tiempo después de su publicación, comentan con cierto cuidado el atrevimiento de Torres Quevedo en la cita 1, y recuerdan que la cita 2 "desvanece todo asomo de materialismo" (Arrillaga) [15] .

Esto ya nos pone en la pista de que la "objeción teológica" va a andar rondando en casi todos los comentarios que se hagan sobre la obra de Torres Quevedo [16] . Precisamente en el momento de cumplirse el primer centenario del nacimiento de Torres Quevedo (1952), y cuando la polémica cibernética estaba en su máximo apogeo, vamos a encontrar algunos otros comentarios.

El primero es el de su propio hijo Gonzalo quien en 1951 utilizaba la cita 2 precisamente para oponerse a las exageraciones de los "cibernéticos" [17] .Más opuesto todavía a las ideas de los "modernos cibernéticos" se muestra Puig Adam, llegando a decir al comentar la cita 1: "Torres Quevedo se deja llevar en este párrafo de un entusiasmo extrapolador del que también hacen gala, corregida y aumentada, los cibernéticos actuales. ¡Hasta en eso había de

[14] Un estudio muy documentado sobre estas cuestiones es el de Pérez-Vitoria, A.: "La obra de Leonardo Torres Quevedo en las Historias de las Ciencias y en las de las Técnicas" en *Actas del II Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra"*. (Madrid, Amigos de la Cultura Científica, 1993).

[15] Arrillaga, Francisco de Paula, "Discurso" pronunciado con motivo de la entrega de la Medalla Echegaray a Torres Quevedo, Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Madrid, 1916. El otro comentario al que hemos aludido está en Rodríguez Carracido, José, "Contestación" al "Discurso" de ingreso de Torres Quevedo en la Real Academia Española, Madrid, 1920.

[16] Puede verse el trabajo de Dou Mas de Xexás, A.: "Problemas filosóficos suscitados por la obra de Torres Quevedo" (Instituto de España, Madrid, 1981).

[17] Torres Quevedo y Polanco, Gonzalo, "Torres Quevedo y la Automática", *Revista de Obras Públicas*, CIX 99-109, 1951.

adelantárseles! [18] "

En el homenaje que se le rindió en la Real Academia de Ciencias con motivo del centenario de su nacimiento, también intervienen, además de Puig Adam, Campos Estrems y algunos autores extranjeros que vuelven a insistir en los límites de la "moderna cibernética". El científico frances Couffignal, precursor de la informática en su país y discípulo de d'Ocagne, es el que hace un análisis más detallado, volviendo a abundar en los argumentos próximos a la objeción teológica, aunque realiza una argumentación más amplia y no exenta de interés. Precisamente, su parte de más alcance enlaza con lo que hemos indicado respecto del behaviorismo de Turing. En efecto, Couffignal [19] dice que, respecto de las máquinas analógicas, se puede afirmar con más garantía que tratan de reproducir la estructura de un determinado sistema, pero una máquina digital que realice un determinado cálculo no es preciso que presente analogía con otro sistema (por ejemplo, la mente) que sea capaz de llevar a cabo ese mismo cálculo, ya que, de hecho, no existe ningún indicio que demuestre que esa analogía existe más allá de la obtención del resultado. En consonancia con ello, y el tiempo le ha dado la razón, también indica que la mente se irá conociendo más por el estudio directo de su estructura que a través de extrapolaciones basadas en el funcionamiento de los ordenadores. Aquí evidentemente Couffignal está atacando directamente las ideas de Wiener que repetía ardorosamente que se podrían averiguar muchas cosas del cerebro a través de la teoría del feedback y de otras partes de la teoría de la computación, si bien es verdad que trataba de apoyar sus ideas con datos obtenidos del estudio directo de la estructura cerebral.

Para terminar esta parte, y por razones de espacio, vamos a resumir apresuradamente el fondo de casi todos esos comentarios que se produjeron al hilo de este homenaje y del centenario de Torres Quevedo:

A) No deja de ser un poco extraño que en un homenaje a uno de los precursores de la Cibernética se insista tanto en sus límites y dificultades.

B) El fondo de casi todas las críticas corresponde a la objeción teológica y tiene un fondo demasiado ideológico.

C) Algunas de estas críticas están, no obstante, bien fundadas, y la perspectiva del tiempo así nos lo indica, particularmente las que se refieren a la crítica del optimismo desmedido de algunos autores que casi llegaban a identificar máquinas y mentes.

D) Hay un reconocimiento generalizado de que la cibernética es un tema central, no sólo del desarrollo científico, sino también de la cultura en general. Lo cual vuelve a hablar de la

[18] Puig Adam, P.: "Torres Quevedo. El cálculo mecánico y la Automática". *Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, XLVII, 21-47.

[19] Couffignal, Louis: "Méthodes et limites de la cybernétique" *Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, XLVII, 63-82.

importancia de la obra precursora de Torres Quevedo.

3. LA MAQUINA DE JUGAR AL AJEDREZ DE SHANNON.

No podemos entrar ni siquiera mínimamente en los detalles de la polémica, únicamente señalaremos algunas cosas que son relevantes para la adecuada valoración de la obra quevediana.

El optimismo inicial de Neumann, Wiener y Turing se va mitigando, y, posteriormente, diversos autores reconocen que se han exagerado las posibilidades de los ordenadores. Por desgracia, y de forma general, la obra de Torres Quevedo y los pasajes a los que hemos aludido quedan completamente olvidados, siendo muy escasas sus referencias en las obras consultadas. Sin embargo, por lo menos uno de los grandes autores de estos primeros momentos reconoció la importancia de Torres Quevedo, nos referimos a Claude Shannon. Precisamente este autor adopta una posición similar a la de Lady Lovelace y el inventor español, siendo uno de los primeros en criticar desde posturas menos cargadas de ideología los excesos de Turing y Wiener. Además, como hemos dicho, en un artículo titulado: Una máquina para jugar al ajedrez, cita la obra quevediana en este campo, después de referirse al célebre y, casi con toda seguridad, fraudulento caso del autómata de von Kempelen:

> "Un intento más honesto para jugar al ajedrez fue hecho en 1914 por un inventor español llamado L. Torres Quevedo, que construyó un aparato que jugaba un final de rey y torre contra rey. La máquina jugando en el lado del rey y la torre, llegaba al jaque mate en pocas jugadas, hiciese lo que hiciese su contrincante humano.
>
> Como se puede dar un conjunto explícito de reglas para jugar adecuadamente en un final de este tipo, el problema es relativamente simple, pero la *idea* era muy avanzada para este periodo [20] ".

Nos parece importante y significativo este texto en el sentido de que, al menos, uno de los grandes autores del período reconoció la importancia y valía de la obra quevediana. Pero además, Shannon se hace eco, justamente al final de este célebre artículo, de las ideas de Torres Quevedo (y de Lady Lovelace), para apoyar sus propios puntos de vista, alejándose con ello de la excesiva euforia y poco rigor semántico de algunos de sus contemporáneos.

Nosotros cerraremos este breve trabajo precisamente con este pasaje, que nos sirve para recordar por última vez cómo muchas de las más "revolucionarias" ideas de los años cincuenta habían sido ya discutidas y expuestas rigurosamente por un olvidado inventor llamado Torres Quevedo:

[20] Shannon, C. <"Una máquina de Jugar al ajedrez" en *Scientific American*, Febrero 1950. La citamos por la edición española, Grijalbo, Barcelona, 1975, p. 100.

"La máquina toma decisiones, pero las decisiones se tuvieron en cuenta y se prepararon al hacer el programa. En resumen, la máquina no va de ninguna manera más allá de lo que hayamos puesto dentro. Torres Quevedo resumió adecuadamente la situación cuando indicó respecto a su máquina de finales que era necesario definir mejor los límites dentro de los cuales hace falta realmente pensamiento, porque corrientemente se clasifica como pensamiento muchas cosas que puede hacer el autómata [21] ".

[21] Op. cit., p. 111.

BIBLIOGRAFIA BASICA PARA EL ESTUDIO DE LA VIDA Y LA OBRA DE LEONARDO TORRES QUEVEDO

Tal y como se informó oportunamente en las páginas de este *Boletín*, en el mes de abril de 1995 se reunirán en Pozuelo de Alarcón (Madrid) numerosos estudiosos de esa personalidad destacadísima de la Ciencia y la Técnica españolas que es Leonardo Torres Quevedo en el marco del III Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra". Para todos aquellos interesados en conocer más detalles sobre estas cuestiones, o necesiten bibliografía para posibles comunicaciones que puedan presentarse a este Simposio quizá sea oportuno recordar algunas referencias básicas acompañadas de breves comentarios:

GARCIA SANTESMASES, J. (1980): *Obra e inventos de Torres Quevedo*. Madrid: Instituto de España. [Estudio intrínseco y técnico de los diversos inventos del sabio]

GONZALEZ DE POSADA, F. (1990): "Leonardo Torres Quevedo". *Investigación y Ciencia*. nº 166 (julio), pp. 80-87. [Estudio detallado y actualizado de la obra de Torres Quevedo]

GONZALEZ DE POSADA, F. y GONZALEZ REDONDO, F. A. (1991): *Leonardo Torres Quevedo en y desde Cantabria*. Madrid: Amigos de la Cultura Científica. [Catálogo de la exposición del mismo título exhibida en Santander, en la sede de la Asamblea Regional de Cantabria]

GONZALEZ DE POSADA, F. (ed.) (1992 [illegible] *nardo Torres Quevedo*. Madrid: Fundación Banco Exterior. [Se divide en dos [illegible] la primera se extiende, contextualiza y completa el artículo de Investigació[illegible]encia. En la segunda se reproducen los trabajos escritos más representativos del inventor]

GONZALEZ DE POSADA, F., ALONSO JUARISTI, P. y GONZALEZ REDONDO, A. (eds.) (1993): *Actas del II Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra"*. Madrid: Amigos de la Cultura Científica. [Se recopilan los diferentes trabajos presentados y las conferencias dictadas en este Simposio. Revisión actualizada de numerosos aspectos concretos de la obra de Torres Quevedo]

GONZALEZ DE POSADA, F. y GONZALEZ REDONDO, F. A. (1994): *Actas del I Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra"*. Madrid: Amigos de la Cultura Científica. [Se recopilan los diversos trabajos, de naturaleza eminentemente documental, presentados al I Simposio]

REGISTRO DE LA PROPIEDAD INTELECTUAL (1988): *Patentes de invención de Don Leonardo Torres Quevedo*. Madrid: Ministerio de Industria y Energía. [Contiene la reproducción facsímil de todas las patentes españolas de Torres Quevedo, junto con las memorias explicativas, fotografías complementarias y patentes extranjeras correspondientes]

RODRIGUEZ ALCALDE, L. (1974): *Biografía de Leonardo Torres Quevedo*. Santander: Institución Cultural de Cantabria-CSIC. [Se trata de la biografía 'oficial' del inventor, realizada con la colaboración de la familia Torres Quevedo]

VARIOS AUTORES (1978): *Leonardo Torres Quevedo*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. [Catálogo de la exposición del mismo título exhibida en el Palacio de Cristal del Parque del Retiro de Madrid]

ROSARIO E. FERNANDEZ TERAN

Generalización del RSA mediante Polinomios.

POLICARPO ABASCAL
E.U.I.I.eI.I de Gijón
Universidad de Oviedo

1 Introducción

Un polinomio en una variable $f(x)$, sobre un cuerpo finito F_q con q elementos induce una función de F_q en F_q que envia a a $f(a)$. Si esta función es biyectiva, $f(x)$ se dice polinomio permutacional.

Los polinomios permutacionales han sido estudiados desde Hermite (1863) y Dickson (1897) y siguen despertando el interés de numerosos autores ya que existen muy pocos algoritmos que sean buenos para decidir si un polinomio es permutacional y, además, las aplicaciones que tienen son muy variadas.

Este trabajo refleja las distintas clases conocidas de polinomios permutacionales y algunos de sus criterios y caracterizaciones.

Recientemente, los polinomios permutacionales han adquirido un considerable interés en la construcción de sistemas criptográficos para la segura transmisión de datos de forma secreta, debido a sus características de facilidad de manejo y de permutabilidad de elementos de cuerpos finitos.

2 Definición y Criterios de Permutabilidad

Definición 1 *Se dice que $f \in F_q[x]$ es un polinomio permutacional de $F_q[x]$ si la función polinomial asociada*

$$\begin{array}{rccc} f: & F_q & \longrightarrow & F_q \\ & c & \longrightarrow & f(c) \end{array} \quad \textit{es una permutación.}$$

Esto equivale a decir que $\{f(c)/c \in F_q\} = F_q$.

Obviamente, f es polinomio permutacional de $F_q[x]$ si y sólo si $\prod_{c \in F_q} (x - f(c)) = x^q - x$.

Teorema 1 (Criterio de Hermite) *[1] Sea F_q de característica p.*

Entonces $f \in F_q[x]$ es polinomio permutacional de F_q si y sólo si

1. f tiene una única raíz en F_q

2. *para todo* $t \in N$ *con* $1 \leq t \leq q-2$ *y* $t \not\equiv 0$ *mod* p *la reducción* $f(x)^t$ *mod* $(x^q - x)$ *tiene grado menor o igual que* $q-2$.

Corolario 1 *Si* $d > 1$ *es un divisor de q-1 entonces no hay ningún polinomio permutacional de* F_q *de grado d.*

Como puede verse en el teorema siguiente se puede modificar la condición 1 del Criterio de Hermite.

Teorema 2 *Sea* F_q *de característica p. Entonces* $f(x) \in F_q[x]$ *es polinomio permutacional de* F_q *si y sólo si*

1. *la reducción de* $f(x)^{q-1}$ $mod(x^q - x)$ *tiene grado q-1*
2. *para todo* $t \in N$ *con* $1 \leq t \leq q-2$ *con* $t \not\equiv 0$ *mod* p *la reducción de* $f(x)^t$ *mod* $(x^q - x)$ *tiene grado menor o igual que* $q-2$.

Teorema 3 *Sea* $f(x) \in F_q[x]$. $f(x)$ *es polinomio permutacional de* F_q *si y sólo si*

existe $g_1(x)$ *de* $F_q[x]$ *tal que* $g_1(f(x)) \equiv x$ *mod* $(x^q - x)$ *ó*

existe $g_2(x)$ *de* $F_q[x]$ *tal que* $f(g_2(x)) \equiv x$ *mod* $(x^q - x)$.

Además $g_1(x)$ *y* $g_2(x)$ *son polinomios permutacionales.*

Nota 1 *Dados* $p_1, \ldots, p_n$ *primos distintos dos a dos y* $q = p_1 \ldots p_n$. *Entonces* $f(x)$ *es polinomio permutacional de* Z_{p_i} *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *si y sólo si* $f(x)$ *es polinomio permutacional sobre* Z_q.

3 Algunos tipos de polinomios permutacionales.

Teorema 4 1. *Todos los polinomios lineales sobre* F_q *son polinomios permutacionales.*

2. *Los monomios* x^n *son polinomios permutacionales de* F_q *si y sólo si m.c.d.(n,q-1)=1.*

Teorema 5 *Sea* F_q *un cuerpo de característica p. Entonces el p-polinomio*

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x^{p^i} \quad \in F_q[x]$$

es polinomio permutacional de F_q *si y sólo si* $L(x)$ *sólo tiene la raíz 0 en* F_q.

3.1 Polinomios de Dickson

Una familia importante de polinomios permutacionales es la formada por los polinomios de Dickson, su interés radica fundamentalmente en su facilidad de manejo pese a la aparente artificiosidad de su expresión y una de sus aplicaciones es su utilización como criptosistemas.

Dado un anillo R conmutativo con identidad, para cada $a \in R$ se define el POLINOMIO de DICKSON $g_k(x, a)$ sobre R por

$$g_k(x, a) = \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{k}{k-j} \begin{pmatrix} k-j \\ j \end{pmatrix} (-a)^j x^{k-2j}$$

Además, se puede demostrar fácilmente que:

$$g_k(x, ab^2) = b^k g_k(b^{-1}x, a) \qquad para \quad todo \qquad a, b \in F \quad b \neq 0.$$

Luego si $F = F_q$ con q par, cada polinomio de Dickson $g_k(x, a)$ con $a \in F_q^*$ se puede expresar en términos de $g_k(x, 1)$:

y si $F = F_q$ con q impar, cada polinomio de Dickson $g_k(x, a)$ $a \in F_q^*$ se puede expresar en términos de $g_k(x, 1)$ ó de $g_k(x, c)$, siendo c un elemento fijo que no sea cuadrado perfecto en F_q.

El caso a = 0 es elemental: $g_k(x, 0) = x^k$

Teorema 6 *Los polinomios de Dickson* $g_k(x, a)$, $a \in F_q^*$ *son polinomios permutacionales de* F_q *si y sólo si m.c.d.*$(k, q^2 - 1) = 1$.

Teorema 7 *[2] Dados* $p_1, \ldots, p_n$ *primos distintos dos a dos y* $q = p_1 \ldots p_n$. *Los polinomios de Dickson* $g_k(x, a)$, $a \in \{1, -1\}$ *son polinomios permutacionales de* Z_q *si y sólo si m.c.d.*$(k, (p_1^2 - 1) \ldots (p_n^2 - 1)) = 1$.

Los polinomios de Dickson $g_k(x, 0)$ *son polinomios permutacionales de* Z_q *si y sólo si m.c.d.*$(k, (p_1 - 1) \ldots (p_n - 1)) = 1$.

4 Esquema de utilización de los polinomios permutacionales como clave pública

En este apartado se va a dar un esquema de la utilización de los polinomios permutacionales como criptosistemas de clave pública.

Como esquema, en el que se basan todos los autores [2] aunque con alguna ligera modificación, se da el siguiente:

- Sea un polinomio con coeficientes racionales f(x) de $Q[x]$
- Sean p y q dos primos tales que:

$$f(x)(mod p) \text{ es polinomio permutacional de } F_p[x]$$
$$f(x)(mod q) \text{ es polinomio permutacional de } F_q[x]$$

- Se considera N = p.q
- Ahora, se pasa a la función de cifrado E:

$$\begin{array}{lll} E: Z_N & \longrightarrow Z_N & \\ u & \longrightarrow v = E(u) = f(u) \pmod N & \end{array}$$

donde u es el mensaje que se desea cifrar y enviar.

- Para construir la función de descifrado se debe tener en cuenta que E es un endomorfismo de anillos y no de cuerpos, luego no se puede considerar el inverso de f(x) como polinomio de Z_N.
- La obtención de la función de descifrado D es de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} D: Z_N & \longrightarrow Z_N \\ v & \longrightarrow u^* = D(v) = E^{-1}(v) \end{array}$$

donde u^* se computa de la siguiente manera:

$$u_p \equiv u^* = E^{-1}(v) = f^{-1}(v)(mod p)$$
$$u_q \equiv u^* = E^{-1}(v) = f^{-1}(v)(mod q)$$

y de esta forma u^* es la solución de este sistema de congruencias. Como esta solución es única se tiene que $u^* = $ u.

Ahora fijando la atención en las funciones de cifrado y descifrado de este esquema se puede ver que:

- E sólo necesita del par (N , f(x))
- D necesita la terna (p , q , f(x))

Entonces se concluye este esquema dando como clave pública el par $(N, f(x))$ y guardando como información confidencial para descifrar los mensajes el par (p, q).

Notemos que para valores "grandes" de p y q descomponer N es un problema computacionalmente intratable con los algoritmos conocidos.

A continuación se dan unos ejemplos de la aplicación de polinomios permutacionales como sistemas criptográficos.

1. Sean p, q dos primos "grandes" y N = p.q.

   Sea $g_n(x,\omega)$ con $\omega = \pm 1$ y n verificando m.c.d.(n,$(p^2$-1)$(q^2$-1)) = 1.

   Con estas propiedades se tiene que $g_n(x,\omega)$ es polinomio permutacional sobre Z_N y Z_p y Z_q, con lo cual, además, se puede obtener su inversa sobre cada uno de los cuerpos Z_p y Z_q:

   $g_n^{-1}(x,\omega) = g_k(x,\omega)$ es el inverso en Z_p con kn $\equiv$ 1 (mod p^2-1)

   $g_n^{-1}(x,\omega) = g_m(x,\omega)$ es el inverso en Z_q con mn $\equiv$ 1 (mod q^2-1)

   Y ahora ya se puede aplicar el esquema explicado anteriomente.

   Este criptosistema fué propuesto por Muller y Nobauer [3] y Ecker [4].

2. Sean p, q dos primos "grandes" y N = p.q.

   Sea f = x^n con m.c.d.(n , (p-1).(q-1)) = 1.

   Entonces f es polinomio permutacional sobre Z_N y Z_p y Z_q, con lo cual, además, se puede obtener su inversa sobre cada uno de los cuerpos Z_p y Z_q:

   $f^{-1} = x^m$ es el inverso en Z_p donde n.m $\equiv$ 1 (mod p-1)

   $f^{-1} = x^k$ es el inverso en Z_q donde n.k $\equiv$ 1 (mod q-1)

   Y ahora ya se puede aplicar el esquema explicado anteriomente.

   Este criptosistema es el conocido RSA y lo propusieron Rivest, Shamir y Adleman [5].

EJEMPLO:

Supongamos que queremos enviar el mensaje:

LA NOCHE ES OSCURA

que equivale a

1100-1314-0207-0404-1814-1802-2017-0023.

Se consideran $p = 59$ y $q = 47$ entonces $N = 2773$.

Entonces $f(x) = x^3$ es polinomio permutacional de Z_{59} y Z_{47}, y por lo tanto lo es tambien del anillo Z_{2773}.

Entonces, para cifrar utilizamos la biyección:

$$\begin{array}{rrcl} E: & Z_{2773} & \longrightarrow & Z_{2773} \\ & 1100 & \longrightarrow & 1100^3 = 1595 \\ & 1314 & \longrightarrow & 0556 \\ & 0207 & \longrightarrow & 1689 \\ & 0404 & \longrightarrow & 0097 \\ & 1814 & \longrightarrow & 0755 \\ & 1802 & \longrightarrow & 1793 \\ & 2017 & \longrightarrow & 2098 \\ & 0023 & \longrightarrow & 1075 \end{array}$$

Entonces se obtiene el siguiente mensaje cifrado en Z_{2773}:

$$1595 - 0556 - 1689 - 0097 - 0755 - 1793 - 2098 - 1075$$

Este es el mensaje que se enviará.

Para descifrar el mensaje el receptor deberá seguir los siguientes pasos:

Se consideran los respectivos polinomios inversos en Z_{59} y Z_{47} del polinomio permutacional $f(x)$:

$$g_1(x) = x^{39} \quad en \quad Z_{59}$$
$$g_2(x) = x^{31} \quad en \quad Z_{47}$$

Y se tiene, aplicando $g_1(x)$ y $g_2(x)$ a cada uno de los caracteres cifrados, que (en este caso lo haremos para 1595):

$$D_1: \begin{array}{ccc} Z_{59} & \longrightarrow & Z_{59} \\ 1595 & \longrightarrow & 1595^{39} = 38 \end{array} \qquad D_2: \begin{array}{ccc} Z_{47} & \longrightarrow & Z_{47} \\ 1595 & \longrightarrow & 1595^{31} = 19 \end{array}$$

$$g_1(1595) \equiv 38 (mod 59)$$
$$g_2(1595) \equiv 19 (mod 47).$$

Para terminar, se aplica el Teorema de los Restos Chino para obtener la solución del sistema de congruencias:

$$x \equiv 38 (mod 59)$$
$$x \equiv 19 (mod 47)$$

y se obtiene como solución única $x = 1100$ que es el carácter original de 1595.

Así, se obtiene el mensaje original:

$$1100 - 1314 - 0207 - 0404 - 1814 - 1802 - 2017 - 0023.$$

Referencias

[1] R.LIDL & H. NIEDERREITER. *Finite Fields. Encyclopedia of Mathematics and its applications* Vol. 20. Addison-Wesley.

[2] J. VON ZUR GATHEN. *Algorithms for permutation polinomials*. Technical Report.

[3] G. MULLEN & H. NIEDERREITER. *Dickson Polinomials over Finite Fields and Complete mappings*. Canada Math. Bull. Vol 30 (1). 1987.

[4] A. ECKER. *Uber die Mathematischen Grundlagen einiger Chiffreirverfahren*. Computing 29 (1982) . 277-287.

[5] R. RIVEST . A. SHAMIR & L. ADLEMAN. *A Method of Obtaining Digital Signatures and Public-key Cryptosystems*. Conm. Assoc. Comput. Mach 21 (1978) 120-126.

HISTORIA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

por Concepción Romo Santos
Catedrática de Algebra
Universidad Complutense de Madrid

Introducción .- Los Reyes de España, don Juan Carlos y doña Sofía presidieron el 18 de mayo de 1.993 la apertura de los actos commemorativos del VII centenario de la Universidad Complutense en el paraninfo de San Bernardo. Más de seiscientos invitados, entre los que se encontraban destacadas personalidades del mundo de la economía, la política, el Ejército y la Iglesia, quisieron unirse al rector de esta Universidad, Gustavo Villapalos, para festejar, con una tradicional ceremonia académica, los siete siglos de historia de la Complutense.

Los que hoy formamos parte de esta Universidad estamos orgullosos de ser complutenses y vamos a unirnos a los actos conmemorativos de su VII centenario. Estudiaremos la historia de la Enseñanza de las Matemáticas en nuestra querida Universidad.

---

§ 1.- La historia medieval de la Complutense

La historia medieval de la Complutense abarca dos centurias, desde las postrimerías del siglo XIII hasta la última década del XV. Está íntimamente unida a la ciudad de Alcalá de Henares y es obra de un rey y de tres arzobispos primados de España. Los hitos fundamentales fueron una Real Carta de Sancho IV, tres cátedras establecidas por el cardenal Alonso Carrillo y dos bulas del papa Alejandro VI.

El punto de partida de esta historia fue la Real Carta de Privilegios expedida por Sancho IV el Bravo el 20 de mayo de 1.293 en la ciudad de Valladolid. En dicho documento consta que el mencionado monarca castellano mandó crear un Estudio de Escuelas Generales como el de Valladolid en la villa de Alcalá de Henares (la antigua Complutum de los romanos y la Al-Kala-en-el-Uhar de los musulmanes), a instancia de don Gonzalo García Gudiel, por entonces arzobispo de Toledo. Es pues el estudio vallisoletano, fundado entre 1.260 y 1.264, el antecedente más inmediato y la fuente más directa de inspiración de la Universidad Complutense.

Sancho IV era hijo de Violante de Aragón y de Alfonso X de Castilla, aquel celebérrimo rey apodado el Sabio, a quien se debe una legislación académica que, junto con la obra y el magisterio de Raimundo Lullio en las islas Baleares y las once ordenanzas del Estudio General de Lérida, expedidas por Jaime II el 2 de septiembre de 1.300 en el reino de Aragón, organizaron la vida universitaria hispánica durante el Medioevo.

Dicha legislación alfonsina, la primera y más importante del Reino de Castilla, se encuentra contenida en sus famosas Siete Partidas. Famosa es también la definición de la Universidad medieval de la Segunda Partida que dice : «Estudio es ayuntamiento de maestros et de escolares que es fecho en algún logar con voluntad et con entendimiento de aprender los saberes ; et son dos maneras dél; la una es á que dicen estudio general en que ha maestros de las artes, así como de gramática, et de lógica, et de retórica, et de ARITMETICA, et de GEOMETRIA, et de música, et de ASTRONOMIA,...

Sancho IV ordenó que se estableciera el Estudio General de Alcalá de Henares de acuerdo con esta legislación, como antes debieron hacerlo los fundadores del Estudio de Valladolid, a cuyas libertades, privilegios y franquezas se remitió el rey Bravo en su Real Carta de 1.293.

No era pues ajeno el rey Sancho, ni por tradición ni por voluntad propia, al movimiento universitario que con gran fuerza se estaba dando entonces en España. Movimiento que, junto a Inglaterra, Francia e Italia, la situaba a la cabeza de Europa en los campos de la educación y la cultura de la época.

El historiador Esteban Azaña, es quien aporta más datos sobre el sistema educativo alcalaíno a lo largo del siglo XIV y durante la primera mitad del siglo XV. Asegura el cronista decimonónico que el Estudio medieval de Alcalá de Henares, aunque débil y sin duda intermitente, tuvo vida académica a lo largo del siglo XIV. Pero sin embargo es en el siglo XV donde empezó su esplendor ya que en 1.421 se contaba ya con cursos de hebreo, MATEMATICAS y música, y que en 1.423 se creó uno de Moral al cual siguió otro de física en 1.430. Dice también que en los años comprendidos entre 1.433 y 1.444 se dictaban seis cátedras de Teología, cuatro de Cánones y una de Biblia; que en 1.447 se crearon tres de Retórica, y que en 1.449 funcionaban tres de Griego y Medicina y dos de Hebreo.

De mediados del siglo XV son las tres cátedras que dotó el arzobispo Carrillo y Acuña con los frutos y rentas provenientes de los beneficios de su diócesis, una era de gramática, otra de Lógica y la tercera de CIENCIAS.

La empresa iniciada por el binomio Sancho IV- García Gudiel y continuada por Carrillo llega a su fin en las postrimerías del siglo XV con la fundación del Colegio Mayor de San Ildefonso, cuya ratificación pontifical se obtuvo a través de las bulas ya mencionadas, expedidas por Alejandro VI el 13 de abril de 1.499.

A partir de la fecha de las bulas alejandrinas muere la Complutense medieval, o mejor dicho, se subsume en una nueva para dar lugar al nacimiento de la Complutense cisneriana.

---

§2 .- La Complutense Cisneriana

La Complutense cisneriana se centra en torno al Colegio Mayor de San Ildefonso en Alcalá y abarca el periodo comprendido entre 1.499 y 1.545. En esta fecha, la Compañía de Jesús funda en Madrid los Estudios de San Isidro. Esta institución influirá decisivamente en el destino del Colegio-Universidad creado por el cardenal Cisneros en Alcalá de Henares. Durante este periodo, marcado por los estudios teológicos, se desarrollan las ideas básicas de humanismo, renacentismo, universalidad y popularidad.

Cisneros tuvo la idea de fundar un colegio-universidad en su arzobispado y no quiso que fuera en Madrid porque pensó : «Mal se avienen las ciencias con el bullicio de las grandes capitales». Al poner la primera piedra - probablemente el 13 de marzo de 1.499 - se inició la construcción del edificio que albergaría la Universidad cisneriana en un lugar que, conforme a las Siete Partidas, era «de aire saludable y abastecido de mantenimiento». Cuentan los cronistas que ese día, salió una procesión del convento de San Francisco . Tras la cruz conventual y junto al fundador desfilaron las autoridades eclesiásticas y civiles de la villa. El punto de destino estaba cerca. Se trataba de un espacioso terreno de «las afueras" de la villa, pero contiguo al convento, en una de cuyas esquinas, conforme a los planos previamente trazados por el arquitecto, se excavó y colocó una piedra hueca. En ella se introdujo un San Francisco de bronce que a su vez contenía un pergamino con la fecha y el nombre del fundador. El acto fue de gran solemnidad y terminó con un Te Deum.

El 26 de julio, día de Santa Ana, terminado ya el edificio de San Ildefonso se llevó a cabo su inauguración. Al día siguiente salió una procesión de la iglesia parroquial de Santiago presidida por el rector, detrás de la comitiva desfilaron más de quinientos estudiantes ansiosos de matricularse en la Universidad.

Tres meses más tarde, el 18 de octubre, día de San Lucas, se abrieron las aulas de la Universidad Complutense y comenzaron las clases. Los primeros catedráticos, entonces llamados regentes, ocuparon algunas de las cátedras ya fundadas desde los tiempos de Sancho IV y Carrillo y otras de nueva creación.

Quizá pensando en la frase bíblica «sobre ésta piedra edificaré mi Iglesia» eligió Cisneros a los colegiales, catedráticos y autoridades que habían de regir su Universidad. En efecto, Pedro Gumiel fué el arquitecto a quien se le encargaron los planos y la dirección de las obras no sólo del edificio que albergaría al Colegio de San Ildefonso, sino también de todo aquel complejo inmobiliario : colegios menores, pupilajes, finca de recreo y la biblioteca, situada al lado de la casa rectoral y que pronto se convertiría en una de las mas importantes de Europa.

Asimismo, Pedro del Campo, fue el primer rector y Pedro de Lerma, doctor por la Universidad de París y a la sazón abad de la Colegiata de los Santos Justo y Pastor, el primer cancelario. Fue también este Pedro el primer maestro que impartió sus enseñanzas - Etica de Aristóteles - en la Complutense cuando se abrieron las puertas de la Universidad.

Pedro se llamaba el bachiller Cardeña, encargado de organizar el Colegio Mayor. También estaba el celebérrimo Pedro Ciruelo (tan conocedor de todas las disciplinas - era filósofo, teólogo tomista, MATEMATICO y experto en lenguas orientales - que su apellido dio lugar a la frase : «Sabe más que un ciruelo» para indicar a un sabelotodo), quien fue el primer profesor que impartió la cátedra sobre Santo Tomás en el Colegio de San Ildefonsso.

Fue tal el cariño y la ilusión que puso Cisneros en la Universidad Complutense que todos sus bienes quedaron vinculados a una disposición testamentaria fechada el 14 de abril de 1.512, en la que se instituía heredero universal al Colegio de San Ildefonso.

La Universidad de Alcalá de Henares contó con cuatro facultades : Teología, Artes, Medicina y Derecho Canónico y con dos escuelas de Gramática que operaban en los colegios menores de San Eugenio y San Isidoro.

La Facultad de Artes Liberales expedía títulos de bachiller, licenciado y maestro. El Bachillerato y la Literatura se cursaban en cuatro años - dos cada uno - y se estudiaban las siguientes asignaturas : Súmulas logicales, Predicamentos, Hermenéutica, Tópicos, Elencos, MATEMATICAS, GEOMETRIA, PERSPECTIVA, Etica, Filosofía Natural y la Metafísica de Aristóteles. La didáctica de los cursos consistía en la lectura de los textos a cargo del profesor seguida de ejercicios prácticos. En ellos, los discípulos repetían la lección, la discutían entre sí y luego el profesor corregía sus faltas. El título de maestro en Artes se obtenía mediante actos solemnes realizados días después del examen de Licenciatura.

ɸ3.- La Complutense durante el período de Gobierno de los Austrias

La historia de la Complutense poscisneriana dura casi dos siglos, que coinciden con el período de Gobierno de los Austrias. Su punto de partida va unido a la capitalidad de Madrid, decretada por Felipe II en 1.561, y a la creación en esta ciudad, en 1.545, de los Estudios de San Isidro, una escuela de enseñanza secundaria destinada a la preparación de los hijos de la nobleza. A partir de esa fecha comienza a decaer, aunque lentamente, la Universidad que creó Cisneros en Alcalá y a consolidarse el Instituto de Madrid.

Loa Estudios de San Isidro fueron fundados por la Compañía de Jesús, una orden del clero regular creada por Ignacio de Loyola, que gozó del favor real, sobre todo en tiempos de los Austrias menores. Esto no es de extrañar, pues la doctrina de la Compañía encajaba plenamente con el pensamiento de la Contrarreforma y con la idea imperial de los Habsburgo. Dicha institución educativa se transformó en 1.603 en el Colegio Imperial de Madrid y obtuvo en 1.624, durante el reinado de Felipe IV y bajo el patrocinio del conde-duque de Olivares, el rango de Universidad. Un año después (1.625) se convertiría en los Estudios Reales de San Isidro, la otra rama - junto a la fundación alcalaína - del tronco común que es hoy la Universidad Complutense.

Resulta difícil dar una fecha precisa que sirva para cerrar esta nueva etapa de la Universidad Complutense. Quizá lo más adecuado sea situarla, ya con los Borbones en el poder, entre los años 1.726 y 1.729. Durante ese tiempo, el claustro del Colegio-Universidad de Alcalá de Henares se reunió solo una vez. No estaban los tiempos para asambleas. Un siglo de indisciplina, de desgobierno y de empobrecimiento había desacreditado tanto a la Universidad como a los colegios menores que en ese mismo siglo habían proliferado en torno a ella. Y los había despoblado. Mientras que en tiempos de Cisneros más de 2.000 alumnos asistían a sus aulas, a principios del siglo XVIII las matrículas se habían reducido a menos de la mitad. Esto fué debido, en parte, al florecimiento del Colegio Imperial. No solo los estudiantes y profesores, también toda la vida cultural de la nación, se habían ido trasladando paulatinamente a Madrid.

El primer intento de traslado de la Complutense a la capital del reino se produjo poco después de la muerte del Cardenal Cisneros y fue consecuencia del motín de Arenillas, llamado así por el apellido del joven que lo protagonizó. Se trataba de un muchacho de la villa que cortejaba,supuestamente sin buenas intenciones, a una linda moza pariente de un tal Carrillo, quien era además fámulo del Mayor de San Ildefonso. Una tarde, Arenillas fue reconvenido por Carrillo, quien lo llamó «petulante y descocado». Y dicen los cronistas que «irritado el galancete, desenvainó su espada y se arrojó sobre el inerte fámulo, el cual, viéndose apurado, comenzó a gritar: «¡ Favor al Colegio ¡», que era el grito escolar. Entonces brotaron estudiantes hasta de las piedras y arremetieron contra Arenillas, quien respondió con otro grito : «¡ Favor a la villa. A mí los vecinos ¡».

El pleito se armó en grande y para resolverlo tuvo que intervenir el rector. Pero los vecinos de Alcalá se indignaron tanto que amenazaron con dar fuego a la Universidad. Fue entonces cuando se iniciaron los trámites para el traslado de esta a Madrid. La solicitud la hizo el propio claustro universitario después de haber desechado las villas de Guadalajara y Sigüenza como posibles sedes de la institución cisneriana. El traslado no se llevó a cabo, a pesar de que el catedrático Pedro Ciruelo fue a negociarlo con el Consejo de Castilla. El Consejo se negó a aceptar en la futura Corte a los huéspedes bulliciosos y camorristas de la Universidad de Alcalá.

Conflictos estudiantiles de todo tipo siguieron azotando a la ciudad de Alcalá de Henares en la segunda mitad del siglo XVI y a lo largo del XVII. En efecto, escudadas en la relativa impunidad que les daba el Fuero universitario, los estudiantes alcalaínos cometían constantemente atropellos.

Desde un punto de vista educativo, el mundo hispánico en la Edad Moderna estuvo marcado por la preponderancia que alcanzaron las órdenes religiosas : los dominicos, los franciscanos, los agustinos y los jesuitas. Los primeros, más renacentistas, tuvieron gran influencia en la Corte de los Reyes Católicos y de los Austrias mayores. Los últimos, más absolutistas, la tuvieron en el siglo XVII, sobre todo después del reinado de Felipe III. Ahora bien, desde el siglo anterior los jesuitas habían entrado en conflicto no solo con las mencionadas órdenes religiosas que los acusaban de antitomismo y antiagustinismo, sino también con Salamanca, Valladolid y Alcalá, las tres grandes universidades españolas de la época.

¿ La causa ?. El control de la educación de las élites de poder, objetivo que tuvieron en mente los jesuitas desde que fundaron los Estudios de San Isidro. Como en mente tuvieron también la creación de una gran Universidad en Madrid. En efecto, en más de una ocasión trataron de convencer a los reyes para que fundaran una Universidad en la capital, como el Papa la tiene en Roma, el rey de Francia en París, y el emperador en Praga y Viena. Esto lo logran en el año 1.626.

La Universidad Complutense poscisneriana, aunque gozó de momentos de esplendor -durante este periodo se concluyó el edificio nuevo del Colegio Mayor de San Ildefonso y se construyó a sus espaldas el del Colegio Trilingüe, cuyo hermoso paraninfo y bellísimo patio son hoy orgullo de la Universidad de Alcalá-, tuvo que soportar múltiples conflictos: luchas estudiantiles, guerra de las Comunidades, litigios con el Arzobispado de Toledo y la Compañía de Jesús, etc.

Dichos conflictos, unidos al despojo de su patrimonio por parte del poder real, al desgobierno de algunos rectores que conculcaron las normas constitucionales dictadas por el cardenal Cisneros y a la sangría o fuga de cerebros que se produjo en las primeras décadas del siglo XVII, debido a que la Inquisición hizo huir de sus aulas a los partidarios de las doctrinas filosóficas de Erasmo de Rotterdam, explican los varios intentos de traslado de la Complutense a Madrid, que culminarán un siglo después.

4.- La Complutense durante el gobierno de los déspotas ilustrados. Su traslado a Madrid

Como paradoja, en el llamado Siglo de las Luces la Complutense entra en una especie de letargo, apuntado ya desde el siglo XVII, centuria en la que se manifestaron síntomas de decadencia. Sin embargo, La Universidad alcalaina tardará todavía varias décadas en morir del todo. Su acta de defunción se produce el 29 de octubre de 1.836 con la Real Orden que dispone su traslado a Madrid. Antes de llegar a ese momento, la institución académica inicia un periodo descendente hasta ser incapaz de responder a los retos de la Ilustración.

La reforma de Medrano (1.666), que le quita supremacía al Colegio Mayor de San Ildefonso sobre el resto de los centros de enseñanza que componían el Colegio-Universidad, rompió el viejo esquema que para su gobierno había diseñado el cardenal Cisneros. Los Borbones tenían preparado el camino para controlar primero y liquidar más tarde la Universidad y dieron los pasos necesarios para ello. Esto era de esperar, ya que la institución cisneriana no encajaba dentro del proyecto educativo, centralista y secularizante, que tenían previsto los nuevos monarcas para modernizar la educación del país.

Y así, por una Real Orden de 1.767, mandaron separar el Colegio Mayor de la Universidad. Y en 1.761, mediante otra disposición legislativa, le recortaron los poderes al rector y a la Iglesia. Ese mismo año se nombró cancelario - cargo que había ejercido siempre el abad de la Colegiata de los Santos Justo y Pastor - a un funcionario real, Pedro Díaz de Rojas, quien en 1.776 llegaría a ser rector.

En 1.776 se expidieron dos Reales Ordenes. Mediante la primera el rey dispuso que la Universidad no dependiera más del rector del Colegio Mayor. A través de la segunda, Carlos III ordenó trasladar la Complutense al antiguo colegio de los jesuítas en Alcalá. Una década antes, en 1.767, este mismo rey había expulsado a la orden de España.

Pero el cambio al recinto de los jesuítas no dio resultado y poco tiempo después la Complutense regresó a su antigua casa, donde, según el cronista decimonónico Vicente de la Fuente, " tuvo que arrastrar una vida mezquina y trashumante en el primer tercio de este siglo ". También intermitente. Sus clases se suspendieron en 1.810 y no volvieron a impartirse hasta un año después.

---

5 .- La creación de la Universidad Central de Madrid

El traslado de la Universidad de Alcalá a Madrid sufrió diversos avatares. Los liberales ordenaron su instalación en la capital en el otoño de 1.822, pero con la restauración absolutista de 1.823 volvieron los estudios a la ciudad del Henares, para asentarse definitivamente en la Villa y Corte a raíz de la muerte de Fernando VII en 1.833. Las deudas fueron transferidas y los edificios se vendieron por 60.000 reales, aunque finalmente los recuperaron los vecinos.

Las constituyentes de Cadiz, convocadas por la Junta Central Suprema en la isla de León (Cádiz), elaboraron la Constitución de Cádiz de 1.812, cuyo Título IX, dedicado a la Instrucción Pública, establecía la creación de una serie de universidades, entre ellas la creación de la Universidad Central de Madrid, que conllevaría la liquidación de la Universidad de Alcalá. Pero esta obra legislativa fue anulada debido a que se produjo el golpe de Estado que restauró el Antiguo Régimen y dio paso a la primera etapa absolutista de Fernando VII. La Universidad alcalaína realizó entonces una maniobra política al designar profesor al infante don Antonio, que había sido nombrado gran almirante por su sobrino el rey Fernando VII y que poseía un gabinete de Física en palacio.

El propio Fernando VII visitó personalmente la Universidad de Alcalá los días 10 a 12 de agosto de 1.816 y asistió a la ceremonia del grado de doctores. Poco tiempo después de esta visita murió el infante D. Antonio y para sucederle en el cargo de protector de la Complutense el rey nombró al infante D. Carlos.

Pero en el año 1.821 los liberales intentaron continuar con la obra legislativa iniciada en 1.812 y volvió a nombrarse la Comisión de Instrucción Pública que presentó a la Cámara un Reglamento General cuyo capítulo VI trataba de la creación de la Universidad Central. " Se establecerá en la capital del Reino una Universidad Central en la que se den los estudios con toda la extensión necesaria para el completo conocimiento de las ciencias ".

La Universidad Central sería el resultado de la fusión de los Reales Estudios de San Isidro, del Museo de Ciencias Naturales y de la Universidad de Alcalá, organismos que se consideraban suprimidos.

En otoño de 1.822 quedaba suprimida la Universidad de Alcalá y se producía el primer traslado a Madrid. Casi todos los catedráticos de la Complutense de Alcalá vinieron a Madrid, instalándose las enseñanzas en los Reales Estudios.

La restauración del absolutismo en 1.823 devolvía la Universidad a la ciudad de Alcalá, produciéndose una emigración de catedráticos, una purificación de profesores y alumnos y un nuevo plan de estudios que se realizó en 1.824.

Pero aquella Universidad de Alcalá se veía sumida en continuos conflictos y desavenencias y, sobre todo, en una total crisis económica.

A la muerte de Fernando VII la Universidad de Alcalá, deteriorada en sus rentas, despojada de sus bienes raíces por la Desamortización y por la primera enajenación de bienes eclesiásticos, vivía en la miseria cuando en otros tiempos fue la más rica de España. Y es entonces a la muerte de Fernando VII cuando la Universidad Complutense se traslada definitivamente a Madrid.

6.- Organización de la Universidad Central de Madrid

La Universidad de Madrid recibió con toda solemnidad el título de Universidad Central con la reforma propugnada en 1.850 por el entonces ministro de la Gobernación, Manuel Seijas Lozano. Contaba entonces con seis facultades y, según una memoria de 1.859-60, estaban matriculados 2.465 alumnos, que representaban el 40 por 100 de los estudiantes universitarios de toda España.

En el periodo que transcurre entre 1.836 y 1.845 se organizó la Universidad Central de Madrid según el modelo napoleónico. El marqués de Morante, rector de la Universidad Central, que había conseguido rescatar de la liquidación de bienes de San Ildefonso el Testamento de Cisneros, obtuvo en 1.842 el edificio del noviciado de los jesuitas. La Facultad de Ciencias quedaría instalada en la capilla de los Reales Estudios.

La Universidad de Madrid mantuvo sus privilegios y en el Plan Pidal (1.845) se dispuso expresamente que solo este centro pudiera conferir el grado de doctor y los estudios para obtenerlo. Por una reforma posterior, realizada por el ministro de la Gobernación, Manuel Seijas Lozano - el Plan de 1.850 -, la Universidad de Madrid recibió con toda solemnidad el título de Universidad Central. Pocos años después se promulgó la Ley de Instrucción Pública de 1.857 - Ley Moyano - en la que se estructuró definitivamente la enseñanza contemporánea hasta la reciente Ley de 1.970. En esta Ley quedó establecida como Facultad la de CIENCIAS EXACTAS.

En 1.876 se creó la Institución Libre de Enseñanza que propugnó la coeducación y la enseñanza del arte. Asimismo creó la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas.

En los cursos celebrados entre 1.875 y 1.902 la matrícula de las asignaturas ascendió de modo progresivo. Hombres brillantes por sus contribuciones científicas fueron José Echegaray, Antonio Aguilar, que instaura en Madrid el Observatorio Astronómico, Carlos Yeves, catedrático de Geometría y el matemático Gumersindo Vicuña.

ϕ7.- El sueño de Alfonso XIII : La finca " La Moncloa "

La Universidad Central se asentaba en una serie de locales y caserones diseminados por el casco antiguo de Madrid, que se encontraban desfasados y adolecían de graves defectos acústicos, lumínicos y térmicos. Alfonso XIII, a sugerencia de su odontólogo, que había estudiado en Estados Unidos, decidió construir la Ciudad Universitaria. Se organizó una junta constructora y se abrió una suscripción popular con 2.500.000 pts aportadas por la Familia Real. A primeros de 1.929 comenzaron las obras.

Alfonso XIII expuso su proyecto de construir la Ciudad Universitaria en julio de 1.924 en el palacio de la Magdalena de Santander ante los asistentes al Congreso Nacional de Arquitectos.

El Real Decreto Ley de 3 de diciembre de 1.928 estableció la ocupación de la finca La Moncloa para el emplazamiento, construcción y servicios de la Ciudad Universitaria. La empresa Agromán efectuó con gran eficacia la explanación y las primeras construcciones. La marcha de las obras fue eficaz e ininterrumpida, el rey presidió la última junta el 5 de abril de 1.931. Nueve días después se proclamaba la República y el rey Alfonso XIII marchaba al exilio. El cambio político fue, sin embargo, beneficioso para el gran proyecto del monarca. Pronto comenzaron las inauguraciones. La Facultad de Filosofía y Letras fue la primera de ellas.

Desgraciadamente, la Ciudad Universitaria se convirtió en primera línea de batalla y fue duramente castigada por los bombardeos. El resultado fue la destrucción de los fondos documentales y científicos y de los edificios.

Terminada la contienda el arquitecto Lopez Otero continuó técnicamente al frente de la junta constructora de la Ciudad Universitaria, creada de nuevo en 1.940.

Complemento de la Universidad habría de ser el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, por Decreto Ley de 1.939. Su misión era fomentar, orientar y coordinar la investigación científica en España, división Ciencias MATEMATICAS y de la Naturaleza.

ϕ8.- La actual Universidad Complutense

La actual Universidad Complutense es la tercera del mundo en alumnos y encara el siglo XXI con el empeño de su modernización.

Durante la segunda mitad de este siglo continuó el crecimiento de la Complutense. La matrícula ha pasado de los 54.000 alumnos que había en 1.950 a los 130.000 actuales. Durante este periodo, surgieron la Autónoma, la Politécnica, la Universidad a Distancia y la refundación de la de Alcalá. Trascendental importancia tuvo la aprobación en 1.983 de la Ley de Reforma Universitaria, con lo que se abordaba el problema del profesorado, la autonomía universitaria y un nuevo modelo de Universidad, con especial incidencia en la investigación.

En los años sesenta el desarrollo de las grandes ciudades, la industrialización, el turismo y el crecimiento económico produjeron grandes cambios sociales sobre los que se asentó el progreso español. Ello produjo, asimismo, un gran incremento del número de estudiantes. En el espacio universitario de Madrid durante el curso 63-64 había ya 44 colegios mayores y en esta ciudad se encontraba el 40 por 100 de los universitarios de todo el país.

Entre las Facultades de la Universidad Complutense estaba la de Ciencias. En el periodo mas reciente se ha construido una nueva Facultad de Matemáticas, inaugurada en junio de 1.992 siendo rector D. Gustavo Villapalos. Como conclusión haremos notar las especialidades que en la actualidad se pueden estudiar en la licenciatura de Ciencias Matemáticas y que son las siguientes: Fundamental, Estadística, Astronomía, Mecánica y Geodesia, Metodología y Didáctica de la Matemática, Ciencias de la Computación.

Bibliografía

. Esteban Azaña : "Historia de la ciudad de Alcalá de Henares". Alcalá de Henares, 1.882-1.885.
. Beatriz Bernal : "La España del Renacimiento". Tribuna de Actualidad nº 269.
. Rogelio Perez Bustamante : "Creación de las Reales Academias". Tribuna de Actualidad nº 269.
. Mariano y José Luis Peset : "La Universidad española". Madrid 1.974

RESEÑAS DE LIBROS

ACTAS DEL II SIMPOSIO "LEONARDO TORRES QUEVEDO: SU VIDA, SU TIEMPO, SU OBRA.

F. González de Posada, P. Alonso Juaristi, A. González Redondo (eds.)
Amigos de la Cultura Científica
Madrid, 1993, 360 pp., 2.300 ptas.
ISBN: 84-87635-07-5

[Pedidos: Departamento de Publicaciones.
E.T.S. Arquitectura.
Avda. Juan de Herrera nº 4.
28040 MADRID]

Amigos de la Cultura Científica, dentro de sus diversas actividades de difusión de la cultura científica, ha prestado especial atención al denominado "Programa Cultural-Científico Leonardo Torres Quevedo". Sirva un breve recorrido por los momentos capitales de las tareas de recuperación de la memoria de esta figura singular como contexto donde ubicar el libro que reseñamos.

En 18 de diciembre de 1986, como colofón a las celebraciones del Cincuentenario de la muerte de Leonardo Torres Quevedo, acaecida en el Madrid sitiado de la Guerra Civil, inauguró un monumento a tan insigne personalidad de la ciencia y la técnica españolas en Santa Cruz de Iguña (Cantabria), en los alrededores de su casa natal.

A modo de prólogo de las celebraciones del Cincuentenario, durante la primavera de 1985 organizó un conjunto de exposiciones con el título general de "Científicos Montañeses" exhibidas en la Torre de Don Borja (Santillana del Mar, Cantabria), sede de la Fundación Santillana. La primera exposición llevaba por título "I. Leonardo Torres Quevedo", y sirvió de presentación a "II. Augusto González de Linares y la Oceanografía española", "III. Dos prehistoriadores de rango universal: Marcelino Sanz de Sautuola y Hermilio Alcalde del Río", "IV. Tres médicos cántabros: Argumosa, Madrazo, Arce".

El 17 de septiembre de 1987 se conmemoraba el Centenario de la solicitud de la primera patente de invención en España del transbordador sistema Torres Quevedo, ensayado en las proximidades de la Casa de Doña Jimena en Portolín (Molledo, Cantabria) donde residió el inventor y donde concibió, además, sus primeras máquinas de calcular. En este contexto creó el Ayuntamiento de Molledo el Premio "Leonardo Torres Quevedo" con el objetivo de premiar aquellas tareas de especial relieve relacionadas con la evocación de Leonardo Torres Quevedo. Por su parte Amigos de la Cultura Científica organizó el I Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra".

En 1991 se celebra, por decisión de Amigos de la Cultura Científica, el "75 Aniversario de la inauguración del Transbordador sobre el Niágara (Canadá)". Para festejar esta efemérides se decidió la organización de un importante conjunto de actividades. Se exhibieron tres exposiciones: "Leonardo Torres Quevedo en y desde Cantabria", "Leonardo Torres Quevedo (máquinas e inventos)", ambas en la Asamblea Regional de Cantabria, y "Leonardo Torres Quevedo: 75 años de transbordador sobre el Niágara" en el Centro Cultural "La Vidriera" en el marco de la Universidad en el Real Valle de Camargo (Cantabria). También en este marco se organizó el II Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra".

En estas *Actas* que ahora comentamos se recogen las comunicaciones, ponencias y conferencias que presentaron los autores al II Simposio. La estructuración adoptada se corresponde, en esencia, con la de las diversas secciones.

En el Capítulo I (pp. 15-52), dedicado a la personalidad y la vida de Torres Quevedo, y a su vigencia en la región que le vio nacer, se recopilan dos trabajos iniciales relativos a la residencia del matrimonio Torres-Quevedo-Polanco Navarro durante los períodos que pasaron en la Montaña. El primero (F. González de Posada, F. A. González Redondo, A. González Redondo) se refiere a la 'Casa de Doña Jimena' en tanto que lugar convertido en histórico desde los puntos de vista cultural y científico. El segundo (F. González de Posada, F. J. Montero de la Peña, E. González Redondo) se centra, desde la perspectiva de la arquitectura, en el proyecto de reconstrucción de la 'Casa de Doña Jimena' para su posible conversión en Museo "Leonardo Torres Quevedo".

Siguiendo en la comarca de su nacimiento, el tercer trabajo (R. Peña Casanova, R. E. Fernández Terán, R. Abad Palazuelo) constata la presencia de Torres Quevedo en la 'Concentración Escolar' del Valle de Iguña, a la que, entre otras cosas, ha dado nombre recientemente. Este capítulo finaliza (F. A. González Redondo, R. E. Fernández Terán) con el estudio conjunto de la trayectoria vital de dos personalidades capitales en la ciencia española, Blas Cabrera y Torres Quevedo, a partir de la reseña biográfica que hace en 1937 desde su exilio en París el primero ante la muerte en el Madrid de la Guerra Civil en diciembre de 1936 del segundo.

El segundo capítulo (pp. 53-118) recoge cuatro trabajos en los que se tratan diferentes cuestiones dentro de los ámbitos de las máquinas de calcular, de la automática, la cibernética y la informática. En primer lugar (E. L. Ortiz) se estudian conjuntamente las aportaciones de Leonardo Torres Quevedo y Julio Rey Pastor al cálculo mecánico y al cálculo geométrico respectivamente en el marco de la escuela matemática española. A continuación (F. González de Posada) se desarrolla, previa caracterización científica del concepto de analogía un breve ensayo en torno a las máquinas algébricas de Torres Quevedo.

Dos trabajos más (A. Hernando González) completan el capítulo. En el primero se caracteriza a Torres Quevedo en tanto que precursor de la Informática moderna. En el segundo se analiza el papel de Torres Quevedo ante la que se está convirtiendo en clásica controversia sobre máquinas y pensamiento.

No puede faltar en un Simposio de estas características la presencia de algún heredero directo del homenajeado. Así, en el Capítulo III, dedicado a los aspectos documentales e institucionales (pp. 119-204), encontramos al nieto del inventor (L. Torres-Quevedo) recopilando recuerdos personales y sintetizando el archivo familiar.

Sin embargo la mayor parte del capítulo se dedica a la presencia de Torres Quevedo en las diversas instituciones. A modo de introducción aparece un extenso estudio (A. Martín Municio) en torno a las ideas científicas en la época de Torres Quevedo. A continuación, y sucesivamente, puede adentrarse uno en el papel que jugó Torres Quevedo en diferentes instituciones. Así, su participación en 1910 en el proyecto de creación de un Instituto Latinoamericano de documentación e información científicas, la Unión Internacional de Bibliografía y Tecnología Científicas (G. Olagüe de Ros, A. Menéndez Navarro, M. Astraín Gallart) está ampliamente documentada. Necesariamente más breves deben ser las presencias del sabio en la Sociedad Española de Física y Química (M. González Redondo) y en el Comité Internacional de Pesas y Medidas (L. Villena Pardo). Muy entrañable es el estudio de la obra de Torres Quevedo según se considera en las diferentes Historias de las Ciencias y de las Técnicas (A. Pérez-Vitoria), puesto que se trata del último trabajo de su autor, quien falleció días antes de la celebración del Simposio, aunque sí tuvo tiempo suficiente como para mandarlo para su presentación.

Otros tres trabajos completan el capítulo. El primero (A. Martínez Fernández) reconstruye la presencia de Torres Quevedo en el mundo de la Filatelia. En el segundo (Mª D. Redondo Alvarado) nos informan de las diferentes situaciones y manifestaciones en que Torres Quevedo ha sido tenido en cuenta en Francia durante el año 1990. Cierra el capítulo una síntesis (F. González de Posada, Mª D. Redondo Alvarado, M. A. González San José, A. Martínez Fernández, F. A. González Redondo) del programa cultural-científico "Leonardo Torres Quevedo".

Tal y como hemos apuntado en las consideraciones introductorias, en 1991 se conmemoraban especialmente los 75 años de funcionamiento ejemplar del transbordador sobre el Niágara diseñado por Leonardo Torres Quevedo y construido por su hijo Gonzalo. No podía faltar, por tanto, una sección (pp. 205-234) dedicada al tema del transbordador. Comienza el Capítulo IV con una síntesis (F. A. González Redondo) de noticias y anécdotas acerca de transbordadores (funiculares aéreos) pre-torresquevedianos. A continuación se reproduce uno de los hallazgos documentales presentados a este Simposio, el manuscrito desconocido de un trabajo del propio Torres Quevedo de título "Cable raíl-tractor". En cualquier caso, la fuente de sorpresas que constituye la obra del genio montañés aportó dos nuevas primicias (L. Torres-Quevedo, F. González de Posada): el proyecto ignorado de un transbordador sobre el río Ebro a su paso por Zaragoza, y la sugerencia hasta entonces desconocida para la construcción de un transbordador en La Habana (Cuba).

El capítulo quinto (pp. 235-318) se centra en la Ingeniería española en el período comprendido entre 1850 y 1936, fechas aproximadas del inicio y el final de la vida de Torres Quevedo. Se inicia con un denso estudio (J. M. Romeo López) en el que se recuerda a los españoles precursores y pioneros en las Telecomunicaciones. A continuación (J. A. Alonso Antoranz, S. Juaristi Zalduendo), y desde el punto de vista empresarial se reconstruye la historia (creación, vigencia, actividades, etc.) de dos instituciones capitales en el desarrollo y efectiva realización de muchas de las creaciones de Torres Quevedo, la "Sociedad de Estudios y Obras de Ingeniería" y la sociedad española "The Niagara Spanish Aerocar Company", y es que no debe olvidarse que el transbordador del Niágara, el primer transbordador para pasajeros de toda Norteamérica -y no nos queda más remedio que hacer patria-, lo diseñó un español, lo construyó una empresa española, el capital fue español, las obras las dirigió un español, la mano de obra fue española y la explotación inicial recayó en una empresa española.

Cierran el capítulo dos trabajos (J. P. Sáiz González) muy densos y documentados. En el primero se estudia la legislación sobre patentes de invención durante la vida de Leonardo Torres Quevedo. En el segundo se reflexiona en torno a la figura de Torres Quevedo al hilo de diferentes cuestiones de teoría económica y sobre derechos de propiedad.

El último capítulo (pp. 319-354) recopila cuatro trabajos sobre dirigibles. En el primero (Mª D. Redondo Alvarado) se establece una clasificación de naturaleza histórica de la obra en dirigibles de Torres Quevedo, analizándose, además, el hallazgo de documentos que demuestran cómo el ejército japonés utilizó sus diribles. El segundo (C. Lázaro Avila) estudia el dirigible sistema Torres Quevedo ante el reto de la travesía aérea del Atlántico. Cierran este capítulo sexto -y el libro- dos trabajos complementarios, por los puntos de vista radicalmente diferentes: el primero (C. Lázaro Avila) sobre la presencia de Torres Quevedo en el Museo del Aire de Madrid, y el segundo (F. González de Posada, Mª D. Redondo Alvarado) sobre esta presencia en la guía de este museo.

En suma, estas *Actas* del II Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra" han servido, por un lado, para poner de manifiesto la creciente presencia y difusión de Torres Quevedo en la Historia de la Ciencia y de la Técnica; por otro, para destacar el progresivo interés que despierta su obra entre los estudiosos de estos tema. Además se constituye en obra de referencia esencial para los nuevos trabajos que, con toda seguridad, se iniciarán en el futuro en torno a la vida y la obra de Torres Quevedo.

Francisco A. GONZALEZ REDONDO
Rosario E. FERNANDEZ TERAN

COMPLEX NUMBERS & GEOMETRY

Liang-shin Hahn

The Mathematical Association of America (serie Spectrum),1994

ISBN 0-88385-510-0; 192 páginas

Los libros editados por la M.A.A. para la popularización de las Matemáticas tienen una fama bien ganada (recientemente se han comenzado a publicar en España los títulos de su New Mathematical Library por *La Tortuga de Aquiles*; una excelente iniciativa de la que sólo se pueden derivar ventajas);éste que comentamos ahora es uno de sus más recientes volúmenes, y presenta, en sus 192 páginas, cómo utilizar los números complejos para demostrar, de forma sencilla, teoremas clásicos de geometría del triángulo como los de Napoleón, Ptolomeo, Simson, Feuerbach y Morley, así como algunos menos conocidos - pero no menos interesantes - de Clifford, Aubert y M.B.Cantor.

El libro es, a mi juicio, fascinante. Sin necesidad de pre-requisitos (el primer capítulo, de 38 páginas, da una introducción completa de los números complejos) el autor entra de lleno en las aplicaciones geométricas reseñadas, para desembocar, en su tercer y último capítulo, en las transformaciones de Möbius y sus consecuencias geométricas: el porisma de Steiner, los haces de círculos y la inversión, con nuevas demostraciones de los teoremas de Ptolomeo y Feuerbach, para finalizar con una breve introducción al modelo de Poincaré de la geometría no euclídea.

134 ejercicios propuestos y un apéndice con 10 Puzzles del Año Nuevo (originales del autor y enviados a sus amigos como felicitación) completan esta pequeña gran obra, perfectamente asequible a los buenos estudiantes de Bachillerato, pero que también puede ser utilizada con provecho por Profesores de todos los niveles, sobre todo por los afectados por la "fiebre antigeométrica" desatada en los planes de estudios y que les ha hecho desconocer (salvo que, por sí mismos, hayan tomado el correspondiente antídoto) resultados tan notables de Geometría como los antes mencionados.

El autor de la obra, natural de Taiwan y Profesor de la Universidad de Nuevo México, ha propuesto numerosos problemas en la revista *American Mathematical Monthly*, y ha sido Profesor visitante en la Universidad de Seattle, la National Taiwan University de Taipei y en la International Christian University y Sophia University, ambas de Tokyo.

Francisco Bellot Rosado

UN CLUB MATEMÁTICO PARA LA DIVERSIDAD.

Mª Luz Callejo de la Vega. Edit. Narcea.
Colección Secundaria para todos.Madrid 1994

El tratamiento de la *diversidad* es un reto para nuestro sistema educativo, que implica para los profesores, tomar conciencia de que los alumnos son diferentes, de que sus capacidades y modos de aprender son diversos.

Este libro viene a llenar un vacío en la metodología de las matemáticas: *cómo tratar a los alumnos bien dotados*, a fin de desarrollar más sus capacidades y aumentar su motivación. Al mismo tiempo es un buen tratado para el profesor preocupado en buscar caminos y modelos para enseñar a resolver problemas a sus alumnos.

La obra consta de dos partes. En la primera se abordan los procesos que rigen la resolución de problemas desde tres ángulos: el cognitivo, el afectivo y el pragmático y se presenta una propuesta metodológica para trabajar su resolución a partir de protocolos escritos, puestas en común y discusiones en grupo. Esta propuesta metodológica ha sido ensayada con éxito durante varios años con los estudiantes que han asitido al CLUB MATEMÁTICO IEPS.La segunda parte del libro, desarrolla el funcionamiento y organización de un club matemático y presenta ejemplos variados de experiencias en el mismo, tanto de trabajo personal(realización de protocolos y reflexión sobre los procesos de pensamiento), como de trabajo en grupo (comunicación del pensamiento matemático, estilos matemáticos de los alumnos, discusión de ideas, puesta en común).
Se incluye en esta segunda parte un sugestivo capítulo de gran actualidad, sobre la evaluación del aprendizaje de los estudiantes, que incluye interesantes instrumentos de evaluación cualitativa y escalas de valoración analíticas y globales. En las últimos páginas de esta segunda parte se presentan y comentan 50 problemas con notables aportaciones sobre las distintas formas de aproximarse a ellos por parte de los estudiantes.
Incluye además el libro, varios anexos sobre temas matemáticos de actualidad, cuestionarios para alumnos, pautas para la resolución de problemas y para el trabajo en grupo y una extensa y seleccionada bibliografía comentada.

A lo largo de todo el volumen se pone de relieve con gran maestría que el camino que hay que seguir en la resolución de problemas es arduo y difícil, pero que merece la pena adentrarse en él. En resumen un ejemplar muy útil para los profesores que crean que el núcleo fundamental de la actividad matemática es la resolución de problemas y para los que estén convencidos que *enseñar a pensar* es una de las tareas más dignas y gratificantes.

Mª Dolores de Prada Vicente

Catedrática de Matemáticas
Inspectora de Educación

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

Propuestos en el nº	Procedentes de	Números de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	obs.
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2-86 / Varios	18	19	20	18	19	19/17		17	11	17	C
10	China / Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	-	C
11	OME-f1-86 /	13	14	14	14	14	23	20	15/20		12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17/15		15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	C
20	OME-f1-88 / Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26/26		24	C
21	OME-f2-89 /	24	27	24	27	27	24/27		25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	C
22	OMI-89-R.F.A. /	28	28	XX	28	29	30/30		30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	-	-	-	-	-	-	-	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	-	-	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	-	-	C
25	OME-f2 / f1- 90	34	31	29	29	31	32/32		32	32	33	C
26	OMI-90-China /	32	XX	XX	32	XX	XX/XX		32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	-	-	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	-	-	-	-	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
30	OI-91-Argentina /	XX	XX	XX	33	38	XX/XX		33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	-	-	-	-	-	-	
31	OME-f2-92 /	36	XX	36	36	36	XX/XX		XX	XX	35	
	OME-f1-91 / PNS	XX	XX/XX		35	34	-	-	-	-	-	
32	OMI-92-Moscu /	35	XX	XX	XX	XX	XX/38		35	XX	38	
	OI-92-Venez./ PNS	38	38/38		38	-	-	-	-	-	-	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	XX	XX	XX	XX	XX	35/XX		XX	XX	XX	
	/PNS	XX	XX	XX	XX/XX		-	-	-	-	-	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	-	-	-	-	
35	OMI-93-Turq./	XX	XX	XX	XX	XX	XX/XX		XX	XX	XX	
	OI-93-Méjico/ PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX/XX		XX	
37	OME-f2-94/ PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX/XX		XX	XX	-	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	

CLAVES: XX = Pendiente de publicación . C = Completo
OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 o 2).
OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OI = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.
PNS = Propuestos por nuestros socios.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problemas propuestos en la
XXXV OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL
celebrada en Hong Kong

Problema 1º:

Sean m y n enteros positivos y $a_1 , a_2 , \ldots , a_m$ elementos distintos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, tales que siempre que $a_i + a_j \leq n$ para algunos i, j, con $1 \leq i \leq j \leq m$, entonces existe k, con $1 \leq k \leq m$, tal que $a_i + a_j = a_k$.

Demostrar que
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

Problema 2º:

ABC es un triángulo isósceles, con $AB = AC$. Se cumple que
(i) M es el punto medio de BC y O es el punto de la recta AM tal que OB es perpendicular a AB.
(ii) Q es un punto cualquiera del segmento BC, distinto de B y de C.
(iii) E está en la recta AB y F en la recta AC, de tal manera que E, Q y F son distintos y están alineados.
Demostrar que OQ es perpendicular a EF si y sólo si $QE = QF$.

Problema 3º:

Para cualquier entero positivo k, $f(k)$ es el número de elementos de $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ cuya representación en base 2 contiene exactamente tres unos.
(a) Demostrar que para cada entero positivo m existe al menos un entero positivo k tal que $f(k) = m$.
(b) Determinar todos los enteros positivos m para los que existe un único k tal que $f(k) = m$.

Problema 4º:

Determinar todos los pares ordenados (m, n) de enteros positivos tales que $\dfrac{n^3 + 1}{mn + 1}$ es un entero.

Problema 5°:

Sea S el conjunto de los números reales estrictamente mayores que -1. Determinar todas las funciones $f: S \to S$ que verifican las dos condiciones:

(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$, para todos los x, $y \in S$.

(ii) $f(x)/x$ es estrictamente creciente en $-1 < x < 0$ y también en $0 < x$.

Problema 6°:

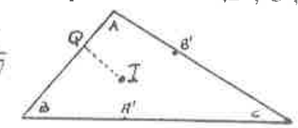
Demostrar que existe un conjunto A de enteros positivos con la siguiente propiedad:
Para cualquier conjunto infinito S de números primos, existe $k \geq 2$ y dos enteros positivos m y n tales que $m \in A$ y $n \notin A$, cada uno de los cuales es el producto de k elementos distintos de S.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1° (Boletín n° 29)

Sea I el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC. Las bisectrices interiores de los ángulos CAB,ABC,BCA, intersecan los lados opouestos en A´,B´, C´, respectivamente. Demuestre que es

$$\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \leq \frac{8}{27}$$



Solución:

Empleamos la notación habitual: S será el área del triángulo. 2p el perímetro:a.b.c.los lados opuestos.respectivamente. a los ángulos de vértices A.B.C. y también las longitudes de los mismos. Se dan por sabidas las relaciones $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$; $bc=AA'^2-A'B.A'C$ (i) ; $(A'C)/(A'B) = b/c$ (ii).

Por comodidad, llamamos R a la relación del enunciado. que se trata de acotar. y la expresaremos en función de los lados del triángulo. De (ii) se obtienen $A'C=ab/(b+c)$. $A'B= =ac/(b+c)$ que sustituidas en (i) dan $AA'^2 = \frac{4p(p-a)bc}{(b+c)^2}$. Análogamente. se obtienen las expresiones correspondientes a BB'^2 y CC'^2. Por multiplicación miembro a miembro de las tres, se llega a $AA'.BB'.CC' = \frac{8pabcS}{(b+c)(c+a)(a+b)}$. (DEN)

Por otra parte, si IQ es perpendicular al lado b, en el triángulo rectángulo AQI es $AQ=p-a$ y por tanto $p-a=AI.\cos(A/2)$. Del teorema del coseno aplicado al lado a y de la relación $1+\cos A = 2\cos^2(A/2)$, se obtiene $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$ que sustituida en la segunda de las igualdades anteriores, da $AI^2 = \frac{(p-a)bc}{p}$. Reiterando el razonamiento para los ángulos B y C se llega a las correspondientes expresiones para BI^2 y CI^2. Multiplicando las tres se obtiene $AI^2.BI^2.CI^2 = \frac{a^2.b^2.c^2.(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}$. Tomando la raiz cuadrada de ésta y dividiendo su expresión por (DEN) se llega, finalmente, a la expresión de R, que es

$$R = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(2p)^3}.$$

Para hallar las cotas, razonamos así: los factores $(b+c)/2p$, $(c+a)/2p$, $(a+b)/2p$. tienen su suma constante , luego el máximo del producto se alcanza en el caso de ser los tres iguales. Entonces, el producto es 2/3 . 2/3 . 2/3 . Este máximo se da en los triángulos equiláteros, como es inmediato comprobar. Para la cota inferior, bastará ver que es $H = \frac{4(b+c)(c+a)(a+b)}{2p.2p.2p} > 1$. Pero se puede escribir $H = \frac{2b+2c}{2p}.\frac{2c+2a}{2p}.\frac{a+b}{2p}$ y tomando $2b+2c=2p - 2(p-a)$; $2c+2a= 2p+ 2(p-b)$; $a+b = 2p-c$, de la expresión anterior se pasa a la $H = \left[1+\frac{2(p-a)}{2p}\right].\left[1+\frac{2(p-b)}{2p}\right].\left[1-\frac{c}{2p}\right] = \left(1+\frac{c}{p}+\frac{(p-a)(p-b)}{p^2}\right).(1-\frac{c}{2p})$ .Por tanto,es

$$H > (1+\frac{c}{p})(1-\frac{c}{2p}) = 1+\frac{c}{2p}-\frac{c^2}{2p^2} = 1+\frac{c(p-c)}{2p^2} > 1$$

Alberto Aizpún López (Madrid)

Problema 5° (Boletín n° 30)

Sea $P(X,Y) = 2X^2 - 6XY + 5Y^2$ Diremos que un número entero, A, es un valor de P si existen enteros B,C, tales que $A=P(B,C)$.

i) Determinar cuántos elementos de 1,2,3,..........,100 son valores de P.

ii) Probar que el producto de valores de P es un valor de P.

Solución:

La forma dada se puede escribir así: $P(X,Y) = (X-Y)^2 + (X-2Y)^2$.
Con ello resulta inmediato que todo valor de P es la suma de dos cuadrados. Es sabido que si dos números son ambos suma de dos cuadrados,su producto también en la suma de dos cuadrados, propiedad extensible a cualquier número finito de factores, con lo que queda probado ii). (Recuérdese: si son $M=a^2 + b^2$, $N= c^2 + d^2$, es $MN= (ac + bd)^2 + (ad-bc)^2$ y también $MN= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$.

Además, si M^2 y N^2 son dos enteros, las soluciones del sistema $(X-Y)^2 = M^2$; $(X-2Y)^2 = N^2$, son números enteros, lo que significa que todo entero que sea suma de dos cuadrados es un valor de P. Por tanto, para hallar todos los valores de P que pertenecen al conjunto dado basta escribir todos los enteros de P que son suma de dos cuadrados,teniendo en cuenta que $a^2 = a^2+0^2$. A partir de 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100, se añaden todas las sumas de dos de ellos que no pasen de 100. Son 2,5 ,10,17, 26, 37, 50, 65, 82, 8,13.....En total son 43 los valores de P que pertecen al conjunto dado.

OTRA SOLUCION.- Si A es un valor de P, la ecuación $P(X,Y)-A=0$ tiene solución con pares de enteros (X,Y). Para que eso ocurra con un valor Y=y, el discrimninante de la ecuación ha de ser el cuadrado de un entero, es decir,que se cumplirá $2A - y^2 = k^2$ (A,y,k, enteros) lo que exige que y,k, sean de la misma paridad. Se deduce $A = \frac{y^2+n^2}{2} = \left(\frac{n-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{n+y}{2}\right)^2$. Luego A es la suma de dos cuadrados y se continúa como antes.

Alberto Aizpún López (Madrid)

Problema 7° (Boletín n° 32)

Para cada entero positivo, n, sea a_n el último dígito del número 1+2+3+.....n. Calcular $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1992}$.

Solución:

Sea $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$; sea $u_n = 1+2+3+....+n$; y sea a_n el resto módulo 10 de u_n. La sucesión de término general a_n es periódica, de periodo 1,3,6,0,5,1,8,6,5,5,6,8,1,5,0,6,3,1,0,0, comenzando por a_1 y por tanto será $a_h = a_{20+h} = a_{20p+h}$. Luego $a_1 + a_2 + ... + a_{1992} = 99.S_{20} + S_{12}$, por ser 1992=99x20+12. Pero son $S_{20} = 70$ y $S_{12} = 54$, lo que lleva a $S_{1992} = 6984$

Alberto Aizpún López (Madrid)

Problema 10° (Boletín n° 32)

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números enteros que verifican las siguientes condiciones:

i) $a_0= 0$; $b_0= 8$.

ii) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$; $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$;

iii) $a_n^2 + b_n^2$ es un cuadrado perfecto para todo n.

Determinar al menos dos valores del par $(a_{1992} ; b_{1992})$

Solución:

La sucesión (a_n) es una progreesión aritmética de segundo orden.Por tanto, su término general ,a_n, es de la forma $a_n = an^2 + bn + c$ y por la condición i) resulta $c = 0$. La ley de recurrencia ii) obliga a que se cumpla $a(n+2)^2 + b(n+2) + an^2 + bn = 2[a(n+1)^2 + b(n+1)] + 2$ para todo n.Ordenada esa igualdad, se deduce $a = 1$. Por tanto, queda $a_n = n^2 + bn$ (I).

Por su parte, (b_n) es una progresión aritmética de primer orden, por lo que su término general es de la forma $b_n = ln + m$ y por i) resulta m =8, así que será $b_n = ln + 8$ (II).

Teniendo en cuenta (I) y (II), la condición iii) se traduce por la de que la expresión $(n^2 + bn)^2 + (ln + 8)^2$ es un cuadrado perfecto para todo n, lo que equivale a decir que $n^4 + 2bn^3 + (b^2 + l^2)n^2 + 16ln + 64$ sea de la forma $(n^2 + An + 8)^2$. Igualando ambas expresiones e identificando , resulta b=l=A así como $b^2 + l^2 = 16 A^2$, de donde $A^2 = 16$. Luego una solución es b=l=A=4 y otra b = l =A= -4.

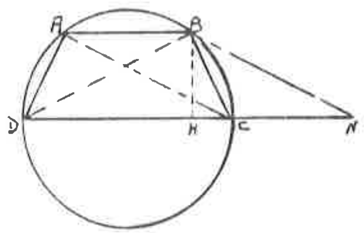
Un resultado es $a_n = n^2 + 4n$; $b_n = 4n+8$ y $(a_{1992} ; b_{1992}) = (3976032;7976)$
Otro resultado es $a_n = n^2 - 4n$; $b_n = -4n+8$, y $(a_{1992} ; b_{1992}) = (3960096;-7960)$.

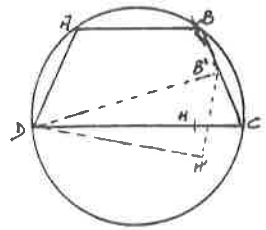
Alberto Aizpún López (Madrid)

Problema 11º (Boletín nº 32)

Se da la circunferencia Γ y los números positivos h y m de modo que existe un trapecio ABCD inscrito en Γ, de altura h y en el que la suma de las bases AB y CD es m. Construir el trapecio ABCD.

Solución:



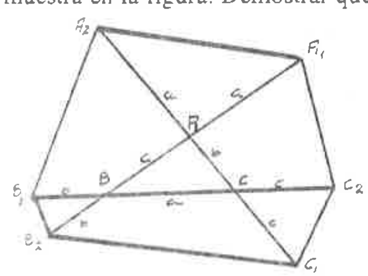


Supongamos resuelto el problema (fig.1). Si por B se traza la paralela a AC, resulta DC + CN = m. El triángulo DBN es isósceles y en su altura, BH, el punto H es medio de DN. Luego DH = $m/2$, con lo que se puede dibujar un triángulo igual al DHB por conocerse los dos catetos. De todo ello se deduce la siguiente CONSTRUCCION: (fig.2) Se elige un punto D, de la circunferencia y se construye el triángulo DH'B', rectángulo en H'. Con centro en D se hace una rotación hasta que el transformado de B' sea B, en la circunferencia. Sobre la circunferencia, en la prolongación de DH se encuentra C y la paralela a DC por B determina A sobre la circunferencia.

Alberto Aizpún López (Madrid)

Problema 12º (Boletín nº 32)

A partir del triángulo T, de vértices A,B y C se construye el hexágono H de vértices $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ como se muestra en la figura. Demostrar que área de H >=13(área de T).



Solución:

Sea S(XYZ) el área de un triángulo de vértices X,Y,Z ; S(H) el área de H y S(T) el área del triángulo T. Son

$S(AA_1A_2) = \frac{1}{2}a^2 senA$; $S(BB_1B_2) = \frac{1}{2}b^2 senB$; $S(CC_1C_2) = \frac{1}{2}c^2 senC$;

$S(AC_1B_2) = \frac{1}{2}(b+c)^2 senA$; $S(BA_1C_2) = \frac{1}{2}(a+c)^2 senB$; $S(CB_1A_2) = \frac{1}{2}(a+b)^2 senC$;

Sumando miembro a miembro, se obtiene

$2S(H) - 4S(T) = (a^2+b^2+c^2)(senA + senB + senC) + 2bc\,senA + 2ca\,senB + 2ab\,senC =$
$= (a^2+b^2+c^2)(senA + senB + senC) + 12T$, de donde sale

$2S(H) = (a^2+b^2+c^2)(senA + senB + senC) + 8S(T)$. Pero de $2S(T) = ab\,senC = ac\,senB = cb\,senA$ se llega por sustitución en la anterior a $s(H) = \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{abc} S(T) + 4S(T)$, por lo que bastará demostrar que es $P = (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) >= 9abc$. (I).

Tomando $a>b>c$, se puede poner $a=c+p$; $b=c+q$, que sustituidas en (I) dan $P = 9c^3+9c^2(p+q)+c[2(p+q)^2+3(p^2+q^2)]$. Pero son $p^2+q^2>2pq$, $(p+q)^2>4pq$, y por tanto el corchete anterior es [ ]>14pq y en consecuencia, $P>9c^3+9c^2(p+q)+14pqc$. Además es $abc=c^3+c^2(p+q)+cpq$ y por tanto, $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)>9abc$. Si fueran $p=q=0$, y por tanto el triángulo equilátero, resulta S(H)=13S(T) como se ve inmediatamente de modo directo.

Alberto Aizpún López (Madrid)

Problema 13º (Boletín nº 32)

Tres ciclistas con los dorsales 1,2 y 3, participan en una carrera en la que hay cuatro metas volantes y la meta final.

Los puntos que se dan a cada ciclista al paso por la meta i-ésima en la j-ésima posición son $(3-j).3^{i-1}$, para todo i=1,2,3,4,5 y todo j=1,2,3. Los premios en metálico son directamente proporcionales a los puntos que se consigan y la cantidad ganada por cada ciclista segun sus dorsales ha sido de: 584000 pesetas, 772000 pesetas y 96000 pesetas, respectivamente.

Hallar la posición de los tres ciclistas en todas las metas.

Solución:

Segun el enunciado, el número de puntos que se conceden en las metas viene dado por la tabla que sigue:

		Metas				
		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
	1º	2	6	18	54	162
PUESTOS	2º	1	3	9	27	81
	3º	0	0	0	0	0

Las cantidades ganadas son proporcionales a 584000, 772000 y 96000, es decir, a 146, 193 y 24. Pero son 146= 2+54+9+81 ; 193= 162+1+3+27 ; 24= 6+18.

Así que los puestos conseguidos por los corredores han sido:

METAS	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Primero	1	3	3	1	2
Segundo	2	2	1	2	1
Tercero	3	1	2	3	3

Alberto Aizpún López (Madrid)

Problema 14° (Boletín n° 32)

Hay n comités (n>1); cada par de comités tiene un único miembro en común y cada persona está exactamente en dos comités. Halla:

a) Cuántas personas hay?

b) Cuántas personas hay en cada comité?.

Solución:

Sustituyendo adecuadamente la palabra "comité" por la palabra "recta" y las palabras "miembro" y "persona" por la palabra "punto", el apartado a) pregunta cuántos puntos son determinados como intersecciones de n rectas coplanarias que se cortan dos a dos sin que haya tres concurrentes. La respuesta, bien conocida, es $n(n-1)/2$. El apartado b) equivale a preguntar cuántos de esos puntos de intersección pertenecen a cada recta y la respuesta inmediata es n-1, puesto que cada recta corta a todas las restanrtes.

Alberto Aizpún López (Madrid)

Instrucciones para el envío de originales a la revista:

Se ruega que los originales enviados para su posible publicación en el Boletín de la Sociedad se atengan a las instrucciones que aparecen debajo. Se pueden enviar impresos sobre papel o bien grabados en disco.

A. Copia en papel

1 Los originales deben ir mecanografiados por una cara, a doble espacio, sobre hojas de tamaño DIN A-4.

2 No deben ir numeradas las páginas. El número de página se rotulará suavemente con lápiz al dorso. La última página (*n*) se rotulará: *y n*

3 La letra a usar será, preferiblemente tipo Roman, de 12 puntos. El margen superior será de 4.5 cm y el inferior y los laterales de 3 cm.

4 El artículo comenzará con el título, centrado, y, a ser posible en un tipo de letra mayor, (por ejemplo 14 puntos). Debajo deben aparecer los nombres de los autores y su lugar de trabajo.

5 Las figuras deben hacerse a tinta china o equivalente o haber sido impresas por plotter o impresora.

6 La bibliografía se incluirá al final del artículo, con las referencias ordenadas por orden alfabético en uno de los modos habituales, por ejemplo:

[Ce] **Cervantes, M. de**: *El Quijote*. Ed. Espacalp. Madrid, 1957.

[Pé] **Pérez, J.**: *D. Miguel de Cervantes y su tiempo*. Revista de Literatura Hispánica, núm 23, Junio 1978, págs. 45-54.

7 La calidad de impresión debe permitir la reproducción directa.

B. Copia en disco

1 Se enviará un disco formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior) y estará escrito en un procesador de textos usual (LaTex, Chi, WordPerfect, MS-Word).

2 Si el procesador de textos formatea el documento según según la impresora a utilizar, se deberá hacer para una HP-Laserjet.

3 El documento debe respetar las indicaciones dadas en A.

Selección de originales

Los originales son revisados por personas del mundo académico para juzgar si el artículo se ajusta a la línea general del boletín.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(senalar con una X los que interesen)

3	*4*	*10*	*31*	*32*
☐	☐	☐	☐	☐
33	*34*	*35*	*36*	*37*
☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo.

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 y 29 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Aptdo. 9479 - 28.080 -MADRID.