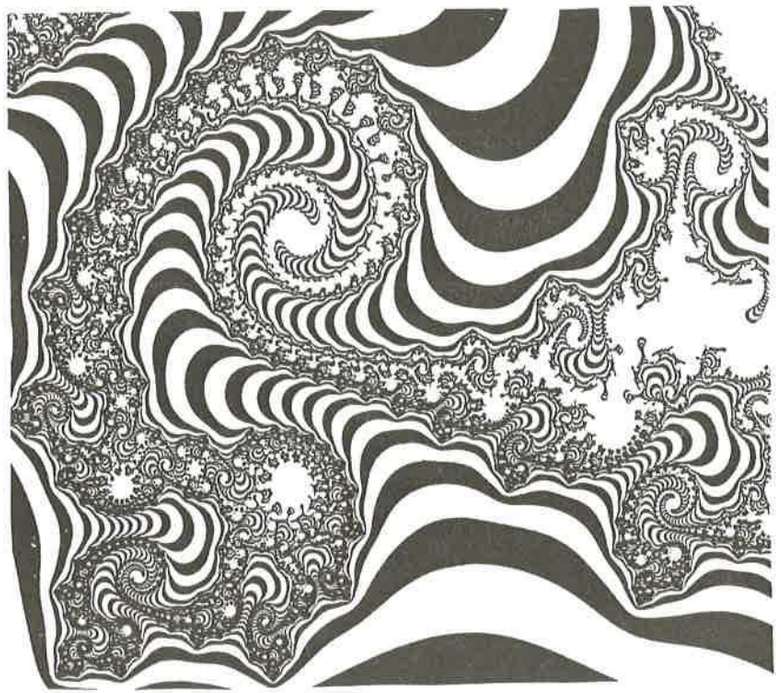
SOCIEDAD "PUIG ADAM"
DE PROFESORES DE MATEMATICAS



BOLETIN NUM. 37
ABRIL DE 1994

BOLETIN DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM"
DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Abril de 1994 nº 37 (1993-94)

- Toda la correspondencia deberá dirigirse al

Apartado nº 9479
28.080 -- MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de

J. Fernández Biarge

- - -

Lamentamos el error deslizado en la portada de nuestro número anterior, en la que aparecia la fecha de "Febrero de 1993" , en lugar de "Febrero de 1994".

- - -

Vea la nueva composición de nuestra Junta Directiva.

- - -

Recuerde y difunda la convocatoria de nuestro XII Concurso de Resolución de problemas (pág. 28)

- - -

INDICE Pág

ASAMBLEA GENERAL 3

NOTICIAS 6

U.P.M. INFORME SOBRE USO DE SOFTWARE MATEMATICO .. 9

XXX OLIMPIADA M. E. Fase Final - 1994 13

I. A LA CRIPTOGRAFIA DE LA CLAVE PUBLICA,por Patricia García Tuñón y Policarpo Abascal Fuentes 17

SIMETRIA EN MOSAICOS ROMANOS,por E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano 29

AL-ANDALUS. LA CIENCIA ISLAMICA EN ESPAÑA,por Concepcin Romo Santos 61

UNOS TEOREMAS SOBRE DOS FIGURAS HOMOTETICAS,por Juan Bosco Romero Márquez ... 67

UN FALSO TEOREMA,por José Ruiz Sánchez 79

LOS PREMIOS EXTRAORDINARIOS DE BACHILLERATO. LA PRUEBA DE MATEMATICAS,por M.Dolores de Prada Vicente ... 81

IMPLEMENTACION...ROSETONES (GRUPO DE LEONARDO) por M. Garbayo y E.Roanes Lozano 87

RESEÑAS: LIBROS Y SOFTWARE 97

PROBLEMAS PROPUESTOS 109

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.
NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Punto tercero: Nuestro tesorero, Sr. Aizpún, distribuyó entre los asistentes unas hojas con el detalle de los ingresos y gastos de la Sociedad en el ejercicio anterior, explicando que la situación económica es satisfactoria, a pesar de que en breve hay que ingresar el importe de nuestras cuotas federativas en la cuenta de la Federación. Ello nos permite mantener sin elevación el importe actual de las cuotas anuales. En este curso se han emitido 280 recibos, de los que han sido devueltos 37 (en la mayor parte de los casos por errores de los bancos, o de los datos, fácilmente subsanables).

Explicó que, de acuerdo con lo aprobado en la Asamblea anterior, se pasó a operar con otro Banco distinto, lo que ha supuesto un ahoro considerable en comisiones bancarias.

Punto cuarto: Seguidamente se procedió a la renovación de los cargos de nuestra Junta Directiva. El señor Presidente mostró sus deseos de ser relevado en su cargo, al que tanto trabajo ha dedicado gustosamente en estos años, pero sin que por ello deje de colaborar, en la medida de sus posibilidades, en las tareas de la Sociedad. También se pronunció en el mismo sentido nuestro Vocal de Actividades y Concursos, señor Ochoa. Se hizo una propuesta de nueva constitución de la Junta, que encabezaba don José Javier Etayo Gordejuela, matemático bien conocido por todos, hoy vicerrector de la Universidad Complutense y que es hijo del que fué nuestro Presidente en los años 86-88. El señor Etayo no estaba presente, por hallarse fuera de Madrid, en misión oficial, pero comunicó telefónicamente su aceptación.

Se tomó el acuerdo unánime de constituir la Junta Directiva con la composición detallada en la propuesta, que es la que aparece en la página 2 de este Boletín. Como se ve, en esta Junta permutan sus anteriores cargos los señores Martínez Sánchez y Roanes Macías. El señor García Sestafe continúa en la Junta, como Vocal de Actividades y Concursos y se incorporan a ella don Miguel Angel Gallardo Ortiz, como Vicesecretario y don Eugenio Roanes Lozano, como Bibliotecario.

Punto quinto: En Ruegos y Preguntas, se pidió fijar definitivamente la fecha de las pruebas de nuestro XII Concurso de Resolución de Problemas, acordándose que se realizarían el 25 de Junio, a las 10 h., en la Escuela U. *"Pablo Montesino"*.

Se pidió que en el próximo número de nuestro Boletín se incluya la lista de nuestros socios. Se trató una vez más de la conveniencia de convertir este Boletín en una Revista, con posibilidad de tener suscriptores, publicidad, intercambio, etc., lo cual se llevaría a cabo en cuanto se encontrasen personas dispuestas a hacerse cargo, desinteresadamente, de todas las tareas organizativas que ello lleva consigo.

El señor Fernández Biarge rogó a todos que, cuando tengan conocimiento de alguna noticia que pueda ser de interés para nuestros socios, relativa a reuniones de profesores, conferencias, cursos, concursos, publicaciones, etc., se la comuniquen urgentemente, para su inclusión en nuestro Boletín. Del mismo modo, sería conveniente que los que hayan participado en alguna de esas actividades, o leido algun libro o publicación de interés general, enviasen una crónica o reseña, para su publicación.

- - - - -

Institución Fernando el Católico | Amigos de la Cultura Científica | Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional | Ayuntamiento de Paniza

ACTIVIDADES CULTURAL-UNIVERSITARIAS "JULIO PALACIOS"
Paniza (Zaragoza), julio 1994

CURSO DE ANÁLISIS DIMENSIONAL

20 lecciones teóricas; 10 horas de ejercicios prácticos- Curso de 30 horas lectivas

Director: **F. González de Posada**

PROGRAMA

Lunes, 4 de julio

9:30-10:30	1. Teoría Dimensional: objeto y naturaleza
10:30-11:30	2. Análisis Dimensional: objeto y naturaleza
12-1	3. Primer Postulado: Leyes físicas
1-2	4. Segundo Postulado: Constantes físicas
4'30 a 6'30:	Ejercicios de aplicación

Martes, 5 de julio

9:30-10:30	5. Teorías físicas
10:30-11:30	6. Bases y fórmulas dimensionales
12-1	7. Teorema π
1-2	8. Planteamiento general de problemas
4'30 a 6'30:	Ejercicios de Aplicación

Miércoles, 6 de julio

9:30-10:30	9. Mecánica newtoniana
10:30-11:30	10. Dinámica del punto material
12-1	11. Resistencia de materiales
1-2	12. Elasticidad
4'30 a 6'30:	Ejercicios de Aplicación

Jueves, 7 de julio

9:30-10:30	13. Mecánica de Fluidos
10:30-11:30	14. Hidráulica
12-1	15. Termología
1-2	16. Fenómenos de transmisión del calor
4'30 a 6'30:	Ejercicios de Aplicación

Viernes, 8 de julio

9:30-10:30	17. Termomecánica de Fluidos (I)
10:30-11:30	18. Termomecánica de Fluidos (II)
12-1	19. Ecuaciones diferenciales ordinarias
1-2	20. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales
4'30 a 7'30:	Complemento
	XXIX Jornadas de Análisis Dimensional

Sábado, 9 de julio

9:30-11:30	**XXIX Jornadas de**
12-2	**Análisis Dimensional**

Documentación
Se entregará a los alumnos:
a) Pre-texto del Curso
b) Diploma de asistencia con aprovechamiento de la **Escuela de Análisis Dimensional**
c) Diploma de asistencia a las Jornadas de Trabajo del Grupo Interuniversitario de Análisis Dimensional

Validez académica
Curso reconocido como propio del Doctorado en el Programa "Análisis Dimensional. Aplicaciones a la Física, la Ingeniería y la Arquitectura". Departamento de Física e Instalaciones. Universidad Politécnica de Madrid. Se entregará certificado de estudio.

Derechos de matrícula
10.000 ptas
Ingresar en Banco Central Hispano
Sucursal Universidad (Farmacia)
C.C. nº 0049-2196-08-1110213620

Actividades complementarias
- Conferencias públicas: 8'30 de la tarde
- Folklore regional. Corales
- Piscina municipal

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "EMMA CASTELNUOVO"

Esta sociedad ha publicado recientemente el **número 0** de su Boletín, correspondiente al Otoño de 1993.

Con 16 páginas y una presentación muy cuidada, contiene interesante información sobre las actividades que se desarrollan o anuncian en el mundo del profesorado de Matemáticas.

La citada Sociedad, con nuestra **Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas,** es la encargada de la organización de las **VII JAEM**, que se celebrarán en Madrid en Septiembre de 1995.

En los dias 11 al 15 de **Abril** de 1994, esta Sociedad ha organizado **"Cinco Encuentros de Didáctica Matemática con Emma Castelnuovo"**, que tendrán lugar en el *I. B. "San Mateo"* (c/ Beneficiencia, 4 de Madrid), de 17:30 a 20:30.

- - - - - - -

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Sección Provincial de Burgos

Siguiendo la inicitiva de nuestra **Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas,** esta Sociedad organiza la **V Olimpiada Nacional de Matemáticas para alumnos de E. G. B.** , que se celebrará en **Burgos** del 20 al 24 del próximo mes de **Junio.**

Los participantes en estas pruebas serán alumnos o alumnas de 8º de E.G.B., seleccionados por las diferentes Sociedades federadas, en número limitado para cada Comunidad Autónoma, hasta un total de 44. De Madrid irán cuatro y de Castlla-León otros cuatro. Además de las Pruebas olímpicas propiamente dichas, están previstas interesantes actividades culturales, turísticas y recreativas. Los premios serán mas bien simbólicos, pero tanto el alojamiento y manutención de los participantes como las excursiones o visitas previstas, estarán costeadas por la organización.

- - - - - -

El correo electrónico para matemáticos

Como puede apreciarse desde hace mucho tiempo, este boletín pretende fomentar todo tipo de actividades de interés o utilidad para los matemáticos. Y a estas alturas del desarrollo y divulgación de la informática, todos sabemos que ni se puede ni se deben ignorar las posibilidades de intercomunicación que ofrecen los ordenadores, ni las ventajas de distribuir abundante material por medio de disquetes compatibles, de forma fácilmente editable y económicamente reproducible.

Así, uno de los más importantes canales de comunicación que habitualmente utilizan los investigadores de todo el mundo es el correo electrónico, y muy en especial, la red mundial Internet, a la que se puede acceder directamente desde la mayor parte de las universidades, e indirectamente desde cualquier lugar dónde trabajemos con un ordenador y un simple modem.

Para los matemáticos, es una muy importante ventaja el no tener que reteclear la información alfanumérica ya digitalizada, independientemente de dónde proceda, y en qué lengua esté escrita. Las relaciones telemáticas nos lo permiten, con la ventaja de que nos podemos organizar cómodamente en grupos de trabajo que eliminen virtualmente las distancias físicas.

Además, existen grupos de "news", es decir, tableros de noticias y mensajes, con contenidos especificamente matemáticos, y en particular, la sección de sci.math edita periodicamente un gran archivo con las FAQs (Frequently Asked Questions) que permite actualizar los conocimientos matemáticos de sus lectores remotos, y sobre todo, relacionarse con quien publica sus mensajes y elabora listas de direcciones electrónicas con colaboradores en muchas lineas de viva investigación. Así, es posible participar activamente enviando mensajes de respuesta, matización o presentación, como el que nosotros querriamos preparar en breve, ofreciendo una versión en disquete de colecciones de problemas.

La Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid ha puesto a la disposición de la Sociedad Puig Adam de profesores de matemáticas el acceso a la información digital de interés a través de la red Internet, a la que están conectados cientos de ordenadores en dicha facultad. Con el propósito de organizar una futura distribución entre nuestros lectores de disquetes con los contenidos de las news sci.math, sería muy recomendable que lo notificasen por escrito los suscriptores de este boletín que estuviesen interesados en recibirlos periodicamente.

Fdo.: Miguel Angel Gallardo Ortiz, Vicesecretario
Apartado Postal 17083 E-28080 Madrid
E-mail: gallardo@batman.fi.upm.es

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

INFORME PRELIMINAR SOBRE EL USO DE SOFTWARE EN MATEMÁTICAS

El pasado 3 de Marzo, el *Gabinete para la Aplicación de las Tecnologías a la Educación (G.A.T.E.)* de la *Universidad Politécnica de Madrid,* dedicó una sesión a la presentación de un **Informe Preliminar sobre el Uso de Software en Matemáticas**, en la que se suministró a los asistentes una valiosa información acerca de los siguientes temas:

- **Programas Tutoriales** disponibles para la Enseñanza de las Matemáticas (presentada por los profesores de la E.U.I.T. Telecomunicación **Rosario Franco Soler** y **Gerardo Belabasquer Villa**).

- **Programas Matemáticos** de aplicación a la Enseñanza de las Matemáticas, comprendiendo cálculo simbólico, cálculo numérico exacto y con precisión controlada, representaciones gráficas y cálculos estadísticos (presentada por los profesores de la Facultad de Informática **June Amillo Gil** y **Rafael Guadalupe García**).

- **Experiencias en la U.P.M.** sobre el desarrollo o uso de esos tipos de programas (presentada por los profesores **Alfonsa García**, de la E.U. de Informática y **Manuel Abellanas Oar**, de la Facultad de Informática).

El G.A.T.E. trata de difundir entre los profesores una información lo más amplia posible sobre las experiencias que se están desarrollando en centros de la U.P.M. y sobre los productos didácticos que el mercado ofrece hoy dia. Para ello se ha puesto en marcha el Proyecto GRADIENTE (GRupos para la Aplicación, Difusión de Información y Experimentación de Nuevas Tecnologías aplicadas a la Enseñanza), que trata de integrar, en grupos temáticos, a los profesores interesados en estos temas. Entre los temas seleccionados figuran: Electrónica, Gestión de Empresas, Inglés, Matemáticas e Informática Básica.

El informe a que nos referimos es el correspondiente al grupo de Matemáticas. En la parte correspondiente a Programas Tutoriales se ofrece una descripción detallada y evaluada de los programas **GRAPH, MATHWISE, An Introduction to Groups, A simple Introduction to Numerical Analysis, Discrete Mathematics, CAML, CD-Mathematics** y de los **Programas tutoriales de la U.P.M.**

En la parte correspondiente a Programas Matemáticos se da una información pormenorizada y evaluada comparativamente, de los programas de interés para la Enseñanza que ofrece actualmente el mercado. Por creerlo de sumo interés para nuestros socios, incluimos en las páginas siguientes, un sucinto resumen, en forma de cuadros, que incluía el Informe del que estamos dando cuenta.

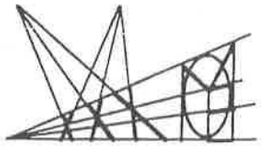
En cuanto a las Experiencias en la U.P.M., el Informe recoge en primer lugar las que fueron presentadas en las *"Jornadas sobre la Enseñanza Experimental de las Matemáticas en la U.P.M."*, celebradas en Septiembre de 1990 y en las *"Jornadas sobre la Enseñanza Experimental de las Matemáticas en la Universidad"* de Diciembre de 1991.(Ver nuestros Boletines números 29 -pág.15- y 30 - pág.12). Posteriormente, se ha continuado trabajando, entre otros centros, en la Facultad de Informática (asignaturas de Cálculo y de Algebra), en la Escuela U. de Informática (Dpto. de Matemática Aplicada), en la E. U. de Topografía (Matemáticas I y II), en la E.T.S. de I. de Caminos, Canales y Puertos (Mecánica, Análisis Matemático y Cálculo), E. U. de I. Técnica Industrial (Matemática Aplicada), y E. U. de Arquitectura Técnica (Matemática Aplicada).

PROGRAMA	HARDWARE	SOFTWARE	PRECIO	SIMBOLICO NUMERICO	GRAFICOS	COMPLEJIDAD OPERACIONES	VENTAJAS	DESVENTAJAS	PUNTUACION	NIVEL EDUCATIVO
Derive	ninguna	MsDos 3.x	20000	Ambos	2D, 3D	Operaciones no muy complejas	Fácil manejar	-	8.0	Bueno
Maple V	386 Copro. 4Mb RAM 18Mb HD	Windows	>20000	Ambos	Excelentes 2D y 3D	Operaciones de cualquier tipo	Fácil de manejar. Buenos resultados.	Idioma	9	Bastante bueno.
MathCAD	386 4Mb RAM 7Mb HD	Windows	30000	Ambos (Kernel Maple)	Buenos 2D y 3D	Operaciones no muy complicadas	Entorno amigable.	Pocas posibilidades.	6.5	Bueno
Mathematica	386 Copro. 6Mb RAM 12Mb HD	Windows	>40000	Ambos	Excelentes	Cualquier tipo de operación	Uso Notebooks	Complicado manejo	7.5	Pobre, mejor investigación
MathLab	386 Copro. 8Mb HD 8Mb RAM	Windows	>40000	Ambos	Excelentes	Cualquier operación	Precisión operaciones	-	8.5	Mejor investigación
nstat	ninguna	MSDOS	20000	estadistica	Buenos	Operaciones básicas	-	Interface	6.5	Bueno
CA-PCGSA	286	MSDOS	15000	estadistica	Buenos	Todas operaciones	Interface	-	8.0	Bueno
StatGraphics	386 4Mb RAM	MSDOS	70000	estadistica	Excelentes	Todo tipo operaciones.	Fácil de usar	ninguna	8.5	Excelente
Minitab	386 4Mb RAM	Windows	>50000	estadistica	Excelentes	Todo tipo operaciones.	Ser para Windows	ninguna	9.0	Bueno
graphic pproach to ne Calculus	ninguno	MSDOS	10000	numérico	Buenos	Operaciones básicas	Muy gráfico	Poco repertorio operaciones	7.0	Excelente nivel educativo

Detalles

PROGRAMA	DISTRIBUCIÓN	DESCUENTO	PRECIO	NIVEL DOCUMENTACIÓN	MATERIAL DE APOYO	GRUPOS DE INVESTIGACIÓN
Derive	*Nacional*	*Universidad*	*20000*	*Normal*	*Bastantes libros*	*Si*
Maple V	*Nacional*	*Universidad*	*>20000*	*Excelente*	*Bastantes publicaciones*	*Si*
MathCAD	*Nacional*	*Universidad*	*30000*	*Bueno*	-	-
Mathematica	*Nacional*	*Universidad*	*>40000*	*Excelente*	*Bastantes publicaciones*	*Si*
MathLab	*Nacional*	*Universidad*	*>40000*	*Bueno*	*Bastantes publicaciones*	*Si*
Instat	*Internacional*	*Universidad*	*20000*	*Normal*	-	*No*
SCA-PCGSA	*Internacional*	*Universidad*	*15000*	*Bueno*	-	*No*
StatGraphics	*Nacional*	*Universidad*	*70000*	*Excelente*	*Bastantes publicaciones*	*Si*
Minitab	*Internacional*	*Universidad*	*>50000*	*Normal*	-	*No*
A graphic approach to the Calculus	*Internacional*	*Universidad*	*10000*	*Pobre*	-	*No*

XXX OLIMPIADA
MATEMÁTICA
ESPAÑOLA
1994



FASE FINAL

Con arreglo al calendario previsto, las pruebas de la Segunda Fase de la ***XXX Olimpiada Matemática Española***, correspondientes al curso 1993-94, han tenido lugar los dias 25 y 26 del pasado Febrero. Como en los años precedentes, esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*.

En esta **Fase Final** han participado un total de 71 aspirantes, seleccionados por los distintos distritos donde se realizó la Primera Fase. En las Islas Canarias realizaron las pruebas tres alumnos y en Madrid, simultáneamente (en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense) los restantes 68. De éstos, tanto en Madrid como en Barcelona, habian sido seleccionados 6 alumnos y 4 en León. Tres alumnos concurrieron como ganadores de cada una de las pruebas celebradas en Asturias, Cantabria, Castellón, Córdoba, Extremadura, Galicia, Granada, Jaén, Navarra, La Rioja, Salamanca, Sevilla, Valladolid y Zaragoza. Dos, seleccionados en cada una de las celebradas en Alicante, Almería, Málaga y Pais Vasco, y uno seleccionado en Murcia.

Además, participó "fuera de concurso", don **Antonio Rojas León**, que ya quedó en tercer lugar en la anterior OME, y ganó medalla de plata en la XXXIV Olimpiada Internacional (Turquía, 1993) y de oro en la

VIII Olmpiada Iberoamericana (Méjico, 1993); su participación tiene el exclusivo objeto de poder confirmar su incorporación al equipo que España presentará en una de las olimpiadas internacionales, a la que por su edad todavía puede concurrir.

Como es tradicional en esta Segunda Fase, las pruebas consitieron en la resolución de seis problemas, tres en cada una de las dos sesiones de cuatro horas, que tuvieron lugar en dias consecutivos. En nuestra sección de **Problemas Propuestos**, en este mismo Boletín, pueden verse sus enunciados.

El Jurado, tras examinar y valorar los ejercicios presentados, se reunió el dia 4 de Marzo, e hizo públicos los nombres de los aspirantes mejor clasificados. Se asignó a cada particpante una puntuación de **cero a diez puntos** por problema, con lo que había una posibilidad teórica de obtener **60 puntos**.

A juzgar por los resultados, los ejercicios ofrecieron, en esta ocasión, menores dificultades que en años precedentes; para que nuestros lectores puedan valorar la de cada uno de los problemas propuestos, damos a continuación una tabla con los valores medios de las puntuaciones alcanzadas en ellos por todos los participantes y por los siete primeros clasificados (incluido uno "fuera de cncurso").

Problema nº	1	2	3	4	5	6
Media para todos	3,7	3,1	7,8	4,3	5,0	2,9
Media 7 primeros	9,6	6,0	10,0	9,0	9,0	8,7

Los aspirantes mejor clasificados fueron los siguientes:

Invitado, fuera de concurso:
D. Antonio ROJAS LEÓN, de Sevilla ... ... 59 puntos

1º - **D. David SEVILLA GONZÁLEZ**, de Madrid . ... 59 puntos

2º - **D. Tomás BAEZA OLIVA**, de Madrid .. .. 52 puntos

3º - **D. Miguel CATALINA GALLEGO**, de Valladolid 50 puntos

- - - -

4º - **D. Alfonso GARCÍA SAZ**, de Zaragoza ... ... 49 puntos

5º - **D. Jerónimo ARENAS GARCÍA**, de Sevilla ... 48 puntos

6º - **D. Miguel A. BERMÚDEZ CARRO**, de Galicia .. 47 puntos

7º - **D. Javier GARCÍA DE BRINGAS**, de Córdoba .. 45 puntos

8º - **D. Luis J. PASTOR VIVAS**, de Córdoba .. ... 43 puntos

- - - -

El Sr. **ROJAS LEÓN** ha revalidado su derecho a participar en la próxima Olimpiada Matemática Iberoamericana, ya que su edad se lo permite todavía. Los tres siguientes, recibirán los **premios** de la *XXX Olimpiada Matemática Española* y entre todos los citados se escogerán los equipos que España presentará a las Olimpiadas Internacionales de este año.

Han obtenido puntuaciones meritorias, próximas a las de los citados:

D. Rubén Albiol López (Barcelona)	41 puntos
D. Alfredo Fernández Díaz (Granada)	41 puntos
D. Alejandro García Gil (Madrid)	40 puntos
D. Pedro Nicolás Terán Agraz (Asturias)	38 puntos
D. Fermín Elias Mira Pérez (Alicante)	38 puntos
D. Iñaki Anasagasti Echeita (Pais Vasco)	36 puntos
D. José Ramón Domingo Malasaña (Barcelona)	36 puntos
D. Jorge Olmos Florez (Zaragoza)	36 puntos

Recordaremos que el Sr. **SEVILLA GONZÁLEZ** ya se clasificó en 4º lugar en la *XXIX O. M. E.* , siendo alumno de 3º de B.U.P. y participó en la *O. M. Internacional* celebrada en Turquía, y el la *O. Iberoamericana M.* de Méjico, en la que obtuvo Mención Honorífica. El Sr. **BAEZA OLIVA** también participó en la primera fase de la *XXIX O. M. E.* como alumno de 3º, quedando sólo a un punto del sexto clasificado para la fase final. Ambos habían recibido premios en los *Concursos de Resolución de Problemas* de nuestra Sociedad, en los años precedentes.

Damos la enhorabuena a los ganadores y a los Centros que se han esforzado en su preparación y deseamos que tengan una destacada actuación cuando participen representando a España en las próximas Olimpiadas Internacionales.

- - - - - - - -

INTRODUCCION A LA CRIPTOGRAFIA DE LA CLAVE PUBLICA

PATRICIA GARCIA TUÑON y POLICARPO ABASCAL FUENTES.
E.U.I.I. e I.Informáticos de Gijón
Universidad de Oviedo

1 Introducción

La "**Criptología**" es la ciencia que estudia sistemas de ocultación de información, de tal manera que un mensaje resulte ininteligible para cualquiera excepto para el receptor adecuado.

La **Criptografía** es la parte de la Criptología que estudia el diseño y la implementación de sistemas de cifrado orientados al enmascaramiento de mensajes, también llamados "**criptosistemas**".

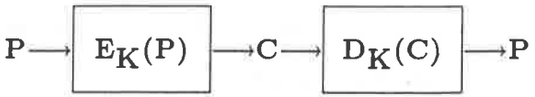
Debido al auge de las comunicaciones electrónicas el mantenimiento del secreto se ha convertido en un tema importante a todos los niveles y sobre todo en el mundo de los negocios.

Desde que alguien envió por primera vez un mensaje cifrado mediante un criptosistema, también hubo alguien que, interceptando el mensaje, trató de descifrarlo sin conocer previamente (a diferencia del receptor legítimo) las claves secretas utilizadas para el cifrado. Esta técnica se denomina "**Criptoanálisis**" y, quienes la practican, "**criptoanalistas**".

Para tener idea de la estructura general de un criptosistema, es necesario conocer sus ingredientes principales :

- Un **esquema de cifrado E** y un **esquema de descifrado D**.
- Una **clave K**.
- Un **texto original P** y un **texto cifrado C**.

El esquema de cifrado/descifrado es el siguiente:



Dados un texto original **P** y una clave **K**, la función de cifrado $\mathbf{E_K}$ produce el texto-cifrado $\mathbf{C=E_K(P)}$, que será el que se transmita. La función de descifrado $\mathbf{D_K}$ recupera **P** haciendo $\mathbf{D_K(C)=P}$.

Una condición básica es que $\mathbf{E_K}$ sea inyectiva, ya que lógicamente deberá transformar textos originales distintos en textos cifrados distintos. Así la función de descifrado $\mathbf{D_K}$ será la inversa de la función de cifrado $\mathbf{E_K}$.

Se supone que un criptoanalista posee un conocimiento completo de la forma general de los esquemas de cifrado y descifrado, tiene acceso a un determinado número de pares de texto original-texto cifrado producidos por el criptosistema que está tratando de romper, y dispone también de información adicional como por ejemplo estadísticas del lenguaje (frecuencias de letras o símbolos) y una idea sobre el contexto general de la comunicación. El criptoanalista no conoce la clave **K**, y su tarea consiste en producir la mejor estimación **P'** de **P**. Si el criptoanalista, combinando todos los conocimientos que posee, consigue determinar la clave **K**, entonces ha roto el criptosistema.

Es una desventaja de los criptosistemas convencionales que requieran establecer previamente una clave secreta (o privada) entre cada par de comunicantes. Esto convierte el propio manejo de las claves en un problema crucial para la seguridad del sistema que irá disminuyendo según aumente el número de usuarios.

La pérdida de vigencia de estos criptosistemas nos induce a no tratarlos explícitamente, si bien como referencia y primer acercamiento a la criptografía citaremos Protección de la Información de A.Rodrigez Prieto.

2 Criptosistemas de Clave Pública

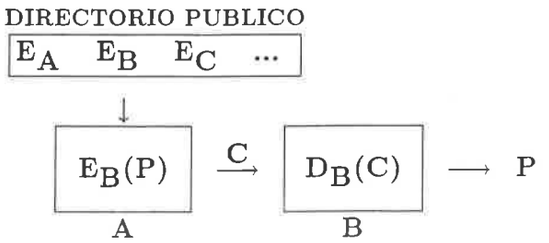
En 1976, Diffie y Hellman sugirieron el modo de subsanar algunos de estos problemas, desarrollando los denominados **criptosistemas de clave pública**, los cuales permiten que usuarios que nunca se hayan visto o comunicado previamente, puedan disponer al instante de una comunicación segura.

En términos generales, todos los usuarios utilizarán el mismo criptosistema y cada uno coloca en un directorio público una clave de cifrado **E** para que lo usen los otros usuarios, pero se guarda para sí mismo su clave de descifrado **D**. Estas claves, aplicadas al texto original **P** o al texto cifrado **C**, deben tener las siguientes propiedades:

1. Si C=E(P), entonces P=D(C); por tanto, D(E(P))=P, para cada P.
2. E y D deben ser rápidos y fáciles de aplicar.

3. E tiene que poder ser hecho público sin que ello signifique revelar D; es decir, obtener D a partir de E tiene que ser computacionalmente inviable.

El esquema de cifrado/descifrado es el siguiente:



Si **A** quiere enviar un mensaje **P** a **B**, lo que tiene que hacer es coger del directorio público el método público de cifrado $\mathbf{E_B}$ y transmitirle abiertamente y sin cuidado a **B** el texto cifrado $\mathbf{C=E_B}$. Sólo **B** puede descifrar C, porque sólo **B** conoce el método secreto de descifrado $\mathbf{D_B}$ para aplicárselo a **C**.

Los criptosistemas que vamos a tratar se basan, como la mayoría, en la teoría de **Cuerpos Finitos**, puesto que sus esquemas de cifrado y descifrado se fundamentan en la **aritmética modular**. Por tanto, la primera tarea que se hace necesaria es la definición de un **alfabeto de símbolos.**

El alfabeto se forma con los símbolos que a los usuarios les convengan, siempre que a cada símbolo se le asigne un único equivalente numérico pues es con ellos con los que va a trabajar el criptosistema, dado que la primera tarea que se llevará a cabo para el proceso de cifrado será **traducir** cada uno de los **símbolos del texto original** a su **correspondiente equivalente numérico**.

Por motivos de claridad y sencillez, manejaremos las letras mayúsculas del alfabeto inglés, resultando 26 símbolos, con sus respectivos equivalentes numéricos:

SIMBOLO	A	B	C	D	...	W	X	Y	Z
EQUIV. NUM.	00	01	02	03	...	22	23	24	25

Pasamos ya a la descripción de algunos criptosistemas orientados a su utilización en una red de transmisión en clave pública, explicando los métodos de cifrado y descifrado y detallando, a través de ejemplos, su funcionamiento:

2.1 Criptosistema Exponencial

Fue inventado en 1978 por Pohlig y Hellman y está basado en la exponenciación modular, lo cual implica una fuerte resistencia al criptoanálisis.

Vamos a describir cómo procede este criptosistema:

Sea p un primo impar y sea e un entero positivo, con mcd(e,$p-1$)=1.

Primero traduciremos sus símbolos a sus equivalentes numéricos y después, agruparemos los números resultantes en bloques de $2m$ dígitos decimales, donde $2m$ es el mayor entero positivo tal que todos los bloques de equivalentes numéricos correspondientes a m símbolos sean menores que p; por ejemplo, y puesto que el tamaño del alfabeto que estamos utilizando es 26, si $2525 < p \leq 252525$, entonces m=2.

Para cada bloque P del texto original, que es un entero con $2m$ dígitos se formará un bloque C de texto cifrado utilizando la relación:

$$C \equiv P^e \pmod{p}$$

Y el texto cifrado consistirá en la sucesión de bloques C que se vayan calculando.

Así pues, vemos que la función de cifrado consiste en una aplicación de Z_p en Z_p y la de descifrado es:

$$P \equiv C^{\bar{e}} \pmod{p}, \quad \text{donde } \bar{e} \text{ es un inverso de } e \pmod{(p-1)}.$$

Notar que usando el *Pequeño Teorema de Fermat* recuperaremos el bloque P

$$C^{\bar{e}} \equiv (P^e)^{\bar{e}} = P^{e\bar{e}} \equiv P^{k(p-1)+1} \equiv (P^{p-1})^k P \equiv P \pmod{p}$$

Esta relación inversa permitirá recuperar los equivalentes numéricos de los símbolos del texto original, y por tanto lo único que quedará para volver a disponer del texto original será la traducción de cada equivalente a su símbolo correspondiente. El hecho de que para utilizar este criptosistema se exija que mcd(e,$p-1$) = 1, es para que la aplicación de cifrado de Z_p en Z_p sea biyectiva y por tanto sea posible recuperar el texto original a partir del texto cifrado.

Vamos a ver esta técnica de cifrado con un ejemplo :
Sean p=2633 y e=29, vemos que mcd(e,$p-1$)=mcd(29,2632)=1.
Y puesto que $2525 < 2633 \leq 252525$, quiere decir que m=2.
Para poner en clave el mensaje original *SECRETO* se pasan los símbolos a sus equivalentes numéricos, y luego se forman bloques de longitud $2m$=4 a partir de estos dígitos, con lo se obtiene :

1804 0217 0419 1423

Se ha añadido el 23 al final, correspondiente a X, para completar el último bloque con 4 dígitos.
Ahora se traduce cada bloque P del texto original al bloque C del texto cifrado usando la relación :

$$C \equiv P^{29} \pmod{2633}$$

Por ejemplo, para el primer bloque:

$$C \equiv 1804^{29} \equiv 444 \pmod{2633}$$

Realizando el mismo proceso con cada bloque, se obtiene el siguiente texto cifrado:

044413801867101

Para recuperara el texto original se necesitará $\bar{e}$ (aquí $\bar{e}$ =2269):

$$P \equiv C^{2269} \pmod{2633}$$

Para el bloque 444, por ejemplo: $P \equiv 444^{2269} \equiv 1804 \pmod{2633}$.
Aplicaremos la misma relación a cada bloque C del texto cifrado, para obtener:

1804 0217 0419 1423

que traducido de nuevo a símbolos del alfabeto, es :

SECRETOX

Para ver que este criptosistema es resistente al criptoanálisis supongamos, poniéndonos en el peor caso, que el criptoanalista de alguna manera conoce del primo p utilizado, y que además conoce el bloque P de texto original correspondiente a un bloque C de texto cifrado, por lo cual, de la expresión :

$$C \equiv P^e \pmod{p}$$

sólo le falta por conocer e para poder descifrar el texto cifrado completo.
Sin embargo, aquí es donde van a empezar los verdaderos problemas para el criptoanalista. Tal como indica la relación, e es el logaritmo en base P de C módulo p; existen varios algoritmos que permiten encontrar logaritmos módulo un primo con n dígitos decimales, pero incluso el más rápido de ellos requiere tal número de operaciones que, por ejemplo, si p tiene 100 dígitos decimales, encontrar logaritmos módulo p llevaría aproximadamente 74 años.
También habría que tener en cuenta que para números primos p en que $p-1$ tiene sólo pequeños factores primos, es posible usar técnicas especiales para encontrar logaritmos módulo p de una forma muy rápida. Obviamente, este tipo de números primos no deben

ser usados en este sistema de cifrado. Tomar un primo $p = 2q + 1$, donde q es también primo, evita este inconveniente.

El criptosistema Exponencial se suele usar en clave pública como transmisor de claves comunes que pueden ser utilizadas para un sistema de cifrado en sesiones de comunicación de datos, y deberán ser construidas de tal manera que los individuos no autorizados sean incapaces de descubrirlas en un tiempo factible.

Sean p un primo grande y a un entero con $\mathrm{mcd}(a,p) = 1$. Cada individuo de la red posee una clave k que es un entero con $\mathrm{mcd}(k,p-1) = 1$. Cuando dos individuos con claves k_1 y k_2 desean intercambiar una clave, el primero envía al segundo el entero $y_1 \equiv a^{k_1} \pmod p$ y el segundo conocerá la clave común K calculando :

$$K \equiv y_1^{k_2} \equiv a^{k_1 k_2} \pmod p$$

El primer individuo hará los mismos pasos, pero esta vez con su clave y el entero y_2 recibido del segundo.

De manera similar, un grupo de n individuos pueden compartir una clave común:

$K = a^{k_1 k_2 \ldots k_n} \pmod p$ si tienen claves $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

2.2 Criptosistema de ElGamal

Es un sistema de cifrado orientado a sistemas de transmisión con cifrado en clave pública; está basado en la función unidireccional exponencial discreta, por lo cual presenta una fuerte resistencia al criptoanálisis.
Vamos a ver cómo funciona este sistema de cifrado :

Sean un cuerpo finito $GF(p)$ y α un elemento primitivo.
Cada usuario U de la red de comunicación en clave pública escoge, al azar, un entero $r_U \in [2, p-1]$, que constituirá su *clave secreta*, la *clave pública* de cada usuario U será el elemento $\alpha^{r_U} \in GF(p)$.Si un usuario A quiere transmitir un mensaje cifrado al usuario B, deberá realizar las siguientes operaciones:

- Escoger, al azar, un entero k y calcular $\alpha^k \pmod p$.
- Traducir los símbolos del mensaje a sus equivalentes numéricos y agruparlos en bloques de $2m$ dígitos.
- Para cada bloque P del texto original, formar un bloque C de texto cifrado utilizando la relación :

  $$C \equiv P \cdot ((\alpha^{r_B})^k) \pmod p$$

  El texto cifrado consistirá en la sucesión de bloques C que se vayan calculando.

- Transmitir el texto cifrado junto con $\alpha^k \pmod p$.

Entonces, el usuario B podrá recuperar el texto original realizando las siguientes operaciones:

- Calcular $\beta = (\alpha^k)^{r_B} \pmod p$.
- Calcular $\bar{\beta}$, que es un inverso de β módulo p.
- Para cada bloque C del texto cifrado, calcular el correspondiente bloque P del texto original utilizando la relación: $P \equiv C \cdot \bar{\beta} \pmod p$.

En resumen, podemos ver el resultado de la transmisión como el texto original cubierto por una máscara $\alpha^{k \cdot r_B} \pmod p$, junto con una *pista* $\alpha^k \pmod p$, para desenmascarar el texto. Pero resulta que esa pista sólo podrá usarla alguien que conozca r_B.

2.3 Criptosistema RSA

Es un sistema de cifrado orientado también a su utilización en un *sistema de comunicación con clave pública.*
La clave pública es el par (n, N), que consiste en un exponente entero positivo n y un módulo N que es el producto de dos primos grandes, $N = pq$, tales que $\mathrm{mcd}(n, \phi(N)) = \mathrm{mcd}(n, (p-1)(q-1)) = 1$. Estas son las condiciones que deben cumplir p y q para que el monomio utilizado como función de cifrado sea permutacional sobre Z_p y Z_q, y por tanto lo sea también sobre Z_N, puesto que $N = pq$. (Notar que ϕ es la función de Euler.)

Para convertir un texto original en un texto cifrado, primero se traducen sus símbolos a sus equivalentes numéricos (manteniendo los ceros iniciales) y después se agrupan los números resultantes en bloques de $2m$ dígitos decimales, del mismo modo que en apartados anteriores.
Para cada bloque P del texto original, se forma un bloque C de texto cifrado utilizando la relación :

$$C \equiv P^n \pmod N$$

Y el texto cifrado consistirá en la sucesión de bloques C que se vayan calculando.

Como vemos el cifrado es similar al del criptosistema exponencial, sin embargo, es en el descifrado donde difieren.
Para construir la función de descifrado, hay que tener en cuenta que la función de cifrado que nos llevaba de Z_N a Z_N es un endomorfismo de anillos y no de cuerpos (a diferencia de lo que sucedía en el Exponencial, en el que el módulo de la función de cifrado era primo).

Siendo esto así, *no se puede considerar* un inverso de n módulo N como exponente de un monomio permutacional en Z_N.
Así pues, la solución a este problema es la siguiente :
En primer lugar (y aquí es donde radica la eficacia de este sistema para su utilización en redes de clave pública), el procedimiento de descifrado exige el conocimiento de p y q, puesto que va a ser necesario disponer de dos inversos en vez del único que se necesitaba en el criptosistema Exponencial. En el RSA, para el descifrado, se necesita d, un inverso de n módulo $p-1$, y se necesita k, un inverso de n módulo $q-1$, los cuales existen porque $\mathrm{mcd}(n, (p-1)(q-1)) = 1$, y además, puesto que p y q son primos, Z_p y Z_q son cuerpos, y por tanto d y k sí que se pueden considerar como exponentes de monomios permutacionales en Z_p y Z_q, respectivamente.

Para cada bloque C del texto cifrado, se plantea el siguiente sistema de congruencias :

$$\left.\begin{array}{l} P_p \equiv P^* = C^d \ (mod\ p) \\ P_q \equiv P^* = C^k \ (mod\ q) \end{array}\right\}$$

Se resuelve este sistema de congruencias, y puesto que su solución es única, cosa que garantiza el *Teorema Chino de los Restos*, se tiene que $P^* = P$, el bloque del texto original correspondiente al bloque C de texto cifrado.
Y repitiendo este proceso para cada bloque C, se recupera el texto original, solventando el problema derivado de la no primalidad de N.

Para entender cómo el criptosistema RSA satisface por completo todas las necesidades de un sistema de cifrado de clave pública, obsérvese en primer lugar que cada individuo puede encontrar dos primos grandes p y q, con 100 dígitos decimales, en sólo unos minutos de tiempo de computación, y sólo tiene que hacerlo dos veces.
Una vez que se han encontrado p y q, hay que escoger un exponente n para el cifrado, con $\mathrm{mcd}(n, \phi(pq)) = \mathrm{mcd}(n, (p-1)(q-1)) = 1$. Una sugerencia para escoger n es tomar cualquier primo mayor que p y que q. No obstante, cada individuo puede escoger el n de la forma que mejor le parezca.
Después, la exponenciación modular necesaria para el cifrado de mensajes utilizando el criptosistema RSA puede ser realizada en sólo unos pocos segundos de tiempo de computación, suponiendo incluso que los módulos, el exponente y la base de la exponenciación modular tengan 200 dígitos. De igual forma, utilizando el algoritmo de Euclides, se pueden encontrar rápidamente los inversos d y k del exponente de cifrado n módulo $p-1$ y módulo $q-1$, respectivamente, una vez que se conozcan p y q.

Para ver por qué el hacer pública la clave de cifrado, es decir, el par (n, N), no implica revelar la clave de descifrado, que es la terna (n, d, k), hay que tener en cuenta que para encontrar d y k es necesario disponer previamente de $p-1$ y $q-1$, lo cual supone una tarea no menos fácil que factorizar el entero N; y como se puede deducir, si

tanto p como q tienen alrededor de 100 dígitos decimales, $N = pq$ tendrá aproximadamente 200 dígitos decimales. Y existen estudios sobre el tema de la factorización según los cuales la factorización de un entero de ese tamaño requiere 3.8×10^9 años de computación.

2.4 Criptosistema de la Mochila

Por último, vamos a ver un sistema de cifrado basado en el problema de la mochila. Dado un conjunto de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y un entero S, el *problema de la mochila* pregunta cuáles de esos enteros suman S. Otra manera de enunciar el problema de la mochila es preguntar los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, (0 ó 1 cada x_i), de tal manera que :

$$S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

Buscar soluciones a este problema por un método de tanteos (prueba y error) puede necesitar un chequeo de las 2^n posibilidades para $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Incluso el mejor de los algoritmos exixtentes para resolver el problema de la mochila es inviable para un n lo suficientemente grande.
Ciertos valores de los enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ hacen que la solución al problema de la mochila sea mucho más sencilla que en el caso general. Por ejemplo, si $a_j = 2^{j-1}$, para encontrar la solución a $S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$, donde $x_i = 1$ ó 0, para $i = 1,2,\ldots,n$, simplemente tendremos que encontrar la expansión binaria de S. También podemos producir problemas de la mochila sencillos si escogemos los enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de tal manera que la suma de los primeros $j-1$ enteros sea siempre menor que el j-ésimo entero, es decir :

$$\sum_{i=1}^{j-1} a_i < a_j, \quad j = 2, 3, \ldots, n$$

Si una secuencia de enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisface esta desigualdad, la denominaremos *secuencia superincremental*. Dicha condición de desigualdad permite que los problemas de la mochila basados en secuencias superincrementales puedan ser resueltos muy rápidamente.
El criptosistema de la Mochila se fundamenta en esta observación. Fue inventado por *Merkle* y *Hellman*, y fue considerado bueno para un sistema de cifrado de clave pública hasta hace poco (luego veremos por qué dejo de serlo).
El sistema de cifrado de la Mochila que vamos a describir está basado en la transformación de secuencias superincrementales y funciona de la siguiente manera:
Cada individuo escoge una secuencia superincremental de enteros positivos, de una determinada longitud N, es decir, $a_1, a_2, \ldots, a_N$, así como un módulo m con $m > 2a_N$ y un multiplicador w con $\mathrm{mcd}(w,m) = 1$.

La secuencia transformada, que ya no es superincremental, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, con $b_j \equiv w\,a_j \pmod m$, $0 < b_j < m$, para $j = 1, 2, \ldots, N$, se hace pública.
Cuando alguien quiera enviar un mensaje cifrado P a este individuo, lo primero que tiene que hacer es traducir el mensaje original a una cadena de 0's y 1's usando los equivalentes numéricos binarios de los símbolos del alfabeto que forman el texto original. Esta cadena de 0's y 1's se divide luego en segmentos de longitud N (para simplificar, suponemos que la longitud de la cadena es divisible por N; sino, se soluciona rellenando el último bloque con 1's). Para cada bloque, se calcula una suma utilizando la secuencia $b_1, b_2, \ldots, b_N$, por ejemplo, el bloque $x_1\,x_2\,\ldots\,x_N$ da $S = b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + \ldots + b_N x_N$.
Finalmente, las sumas generadas por cada bloque forman el texto cifrado.
Para descifrar un texto cifrado generado por el problema de la mochila, sin conocer m y w, hay que resolver un grupo de complicados problemas de la mochila de la forma :

$$S = b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + \ldots + b_N x_N$$

Por otra parte, cuando se conocen m y w, el problema de la mochila se puede transformar en un problema de la mochila mucho más fácil, ya que :

$$\bar{w}\,S = \bar{w}\,b_1\,x_1 + \bar{w}\,b_2\,x_2 + \ldots + \bar{w}\,b_N x_N \equiv a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \ldots + a_N x_N \pmod m,$$

donde $\bar{w}\,b_j = a_j \pmod m$, donde $\bar{w}$ es un inverso de w módulo m, de tal manera que :

$$S_0 = a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \ldots + a_N x_N,$$

donde S_0 es el menor resto positivo de $\bar{w}\,S$ módulo m. Esta fórmula se cumple porque ambos lados de la ecuación son enteros positivos menores que m, los cuales son congruentes módulo m.
Vamos a ilustrar estos procedimientos de cifrado y descifrado del criptosistema de la Mochila con un ejemplo :
Empezamos con la secuencia superincremental $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}) = (2, 11, 14, 29, 58, 119, 241, 480, 959, 1917)$.

Tomamos $m = 3837$ como módulo, de tal manera que $m > 2\,a_{10}$, y $w = 1001$ como multiplicador, de tal modo que mcd$(w,m) = 1$, para transformar la secuencia superincremental en la secuencia :

(2002, 3337, 2503, 2170, 503, 172, 3347, 855, 709, 417)

Para cifrar el mensaje :

SECRETO

primero se traducen los símbolos a sus equivalentes numéricos decimales en Z_{26}, después se traducen los decimales a binarios de cinco dígitos, y luego se agrupan estos dígitos en bloques de diez, para obtener :

1001000100 0001010001 0010010011 0111011111

Para cada uno de los 4 bloques de 10 dígitos binarios obtenidos, se forma una suma mediante la adición de los términos adecuados de la secuencia :

(2002, 3337, 2503, 2170, 503, 172, 3347, 855, 709, 417),

sumando aquéllos a los que les corresponda un 1. Esto da como resultado el siguiente texto cifrado, formado por las 4 sumas :

05027027590380113510

Por ejemplo, se calcula 5027 mediante la suma de 2002, 2170 y 855.
Cuando el receptor quiera descifrar el mensaje, lo que tiene que hacer es separarlo en bloques de sumas, y para cada una de ellas calcular el menor resto positivo del resultado de multiplicarla por 23, puesto que 23 es un inverso de 1001 módulo 3837.
Luego, con cada uno de los 4 restos positivos obtenidos, se resuelve, mediante el algoritmo que antes se describió, el sencillo problema de la mochila correspondiente a la secuencia superincremental original, (2, 11, 14, 29, 58, 119, 241, 480, 959, 1917).
Por ejemplo, para descifrar el primer bloque encuentra que $5027 \cdot 23 \equiv 511 \pmod{3837}$, y luego ve que $511 = 2 + 29 + 480$. Esto le dice que el primer bloque de dígitos binarios del texto original era 1001000100. De la misma manera encuentra el resto de bloques de dígitos binarios del texto original, con lo cual ya sólo le quedará volver a pasar el equivalente binario al equivalente decimal, y traducir el equivalente decimal al símbolo correspondiente en el alfbeto, para recuperar el texto original :

SECRETO

Recientemente, Shamir ha demostrado que el criptosistema de la Mochila no es satisfactorio para la Criptografía de clave pública. La razón es que él ha descubierto un algoritmo eficiente para resolver problemas de la mochila con secuencias como las explicadas.
El algoritmo encontrado por Shamir puede resolver estos problemas de la mochila empleando un tiempo de orden polinomial, en vez de requerir tiempo exponencial, como sucedía con los algoritmos conocidos hasta entonces para resolver los problemas de la mochila en general.

Se han estudiado varias maneras de alterar este sistema de cifrado de la Mochila para evitar la debilidad encontrada por Shamir, pero desgraciadamente, hoy en día los criptoanalistas trabajan a igual o incluso mayor nivel que los criptógrafos, y resulta que también se han descubierto hace poco algoritmos eficientes para resolver estas nuevas estrategias.

Recordamos el anuncio de nuestro

XII CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

Convocado por:
Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Flilosofía y Letras

BASES

PRIMERA

Podrán participar en el Concurso los alumnos de B.U.P. y F.P. Los de F.P. I lo harán concurriendo con los de 1º de B.U.P. ; los de primer curso de F.P. II , con los de 2º de B.U.P. y los de segundo y tercero de F.P.II, con los de 3º de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles) y se realizarán en Madrid, en un solo dia de la segunda quincena del mes de junio de 1994.

TERCERA

Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.

CUARTA

Los Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de **seis**) deberán realizar la preinscripción antes del dia **22 de Mayo de 1994**, dirigiéndose por carta sin certificar a esta Sociedad, Apartado de correos nº **9.479,** 28080 - MADRID. En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados.

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos Centros entregarán a los alumnos que envíen, **credenciales individuales** en las que se haga constar el **curso** en que están matriculados en el año académico 1993-94 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

Enero de 1994

Este Concurso cuenta con la colaboración de Coca-Cola España

SIMETRIA EN MOSAICOS ROMANOS

Eugenio Roanes Macías y Eugenio Roanes Lozano
Sec Dptal de Algebra. Facultad de Educación UCM
José María Alvarez Martínez
Director del Museo Nacional de Arte Romano

Resumen: *El objetivo inicial de esta investigación era tratar de averiguar si entre los mosaicos romanos de tipo geométrico existían modelos de los 17 grupos de simetría del plano. Al analizarlos hemos encontrado muchos mosaicos que parecen haber sido diseñados para servir de modelo para estudiar sobre ellos transformaciones y construcciones geométricas. Esto nos animó a aprovecharlos para tal fin. Para ello se ha escogido una colección de mosaicos romanos preferentemente bicolores del género "italiano" (siglo II), así como de frisos periódicos y de rosetones, tanto cíclicos como diedrales, con la originalidad de ser también invariantes por homotecias.*

1. MOTIVACION DE ESTE ESTUDIO

Comenzamos narrando la situación que nos motivó a interesarnos por los mosaicos romanos, desde un punto de vista geométrico.

Los movimientos o isometrías que dejan invariante una figura plana constituyen el grupo de simetría de esa figura (grupo del triángulo, grupo del cuadrado, etc).

Partiendo ahora de un dibujo o motivo, que esté contenido en un paralelogramo, y adosando paralelogramos iguales (conteniendo el mismo motivo pictórico), de modo que recubran el plano sin solapamientos, se obtiene una figura denominada mosaico periódico. Así pues, las traslaciones que dejan invariante un mosaico periódico resultan de componer dos traslaciones cuyos vectores yacen sobre dos lados consecutivos del paralelogramo inicial (vectores pues linealmente independientes).

Los movimientos (no sólo traslaciones) que dejan invariante un mosaico periódico forman el *grupo de simetría* del mosaico ("simetrías" en el sentido de isometrías que lo transforman en sí mismo).

Los *grupos de simetría* también se denominan *grupos cristalográficos planos*. El número de posibles grupos de simetría resulta ser muy reducido, si sólo se consideran mosaicos bicolores. Tan sólo existen 17 (ver [Mar], por ejemplo), lo que fue demostrado por el cristalógrafo Fedorov (1891) y redescubierto por Klein y Fricke (1897) y después por Polya y Niggli (1924).

En 1944 E. Muller [Mul] analizó los grupos de simetría existentes en la ornamentación de la Alhambra de Granada. Autores de la categoría de los geómetras Coxeter [Cox], Berger [Ber] y Grümbaum-Shephard [G-S] citan que en la Alhambra sólo se encuentran modelos de mosaicos de 13 de los 17 grupos citados, pero el profesor Rafael Pérez Gómez de la Univ. de Granada ha comprobado la existencia de modelos de los 17 grupos (véase [Per]).

La publicación de este hallazgo motivó a los dos autores de este artículo citados en primer lugar a desarrollar una simulación informática de modelos de grupos de simetría tomados de la ornamentación de la Alhambra [R-R].

Por otra parte, un célebre matemático comentó en cierta ocasión que en la ornamentación del arte egipcio clásico existían modelos de los 17 grupos. Pero, que sepamos, no hay documentación publicada de tal hallazgo.

Todo ello nos motivó a satisfacer la curiosidad de averiguar si los creadores de los mosaicos romanos de tipo geométrico habían intuido los 17 modos de generarlos, desde un punto de vista geométrico.

2. MOSAICOS ROMANOS DE MOTIVOS GEOMETRICOS

La Geometría griega tuvo su proyección artística en la construcción de mosaicos de motivos geométricos. Los griegos del periodo helenístico acostumbraban a pavimentar las mejores habitaciones de casas y patios con mosaicos construidos con *teselas* (pequeñas piedras ortoédricas coloreadas, cuyas aristas miden de 3 mm a 1.5 cm). Esta costumbre fue trasmitida a los romanos. Pero todavía en muchos mosaicos romanos puede leerse un nombre griego como autor del mismo. Además, algunos de los mosaicos romanos reproducen el motivo de sus precursores griegos.

La moda en los motivos geométricos representados y en los colores utilizados en los mosaicos romanos evolucionó en el tiempo. Los mosaicos de motivos estrictamente geométricos en colores blanco y negro, del género calificado de *italiano*, proliferaron durante el siglo II en la parte occidental del imperio romano, habiéndose hallado numerosos ejemplares en Mérida e Itálica. En el siglo III son frecuentes los mosaicos tricolores, conservándose los motivos geométricos, como son la mayoría de los de la Casa del Anfiteatro de Mérida. Finalmente, en el siglo IV dominan los mosaicos excesivamente recargados y polícromos, con preponderancia de colores rojo, amarillo, blanco y negro, como pueden verse en las villas romanas de La Olmeda y de Quintanilla de la Cueza (Palencia), descubiertas en 1968 y 1969, respectivamente [Cor]. A veces, en una misma habitación se han encontrado dos (o tres) mosaicos superpuestos, por deterioro de los primitivos o por evolución en la moda, como ocurre en la Casa de la Basílica en Mérida.

Son los mosaicos bicolores del género italiano del siglo II los más interesantes desde el punto de vista geométrico. Tales mosaicos se encuentran a lo largo y ancho de todo el imperio romano, siendo frecuentes en Mérida, Itálica, Liédena (Navarra), Pompeya, Roma, Cartago y también en algunas provincias del norte del imperio romano.

Los mosaicos periódicos, frisos y rosetones de motivo geométrico constituyen una excelente motivación para ejercitarse de modo agradable en el uso de diversos conceptos propios de la Geometría Elemental: transformaciones geométricas del grupo euclídeo y construcciones geométricas sencillas.

A fin de escoger una pequeña colección representativa de cada uno de los modos geométricos de generación de estos mosaicos, hemos consultado numerosos catálogos de mosaicos romanos de motivo geométrico (citados en la bibliografía) y hemos buscado en diversas villas romanas.

3. CONCEPTOS GEOMETRICOS RELATIVOS A MOSAICOS PERIODICOS.

La introducción de estos conceptos es más sencilla a la luz de un ejemplo. En la figura 3.1 se muestra un mosaico romano hallado en Mérida (ermita de la Piedad) en mayo de 1980 [Alv] y que también se halla en Mataró, en la Casa de los Repuxos (Coimbra) y en Ostia (Italia).

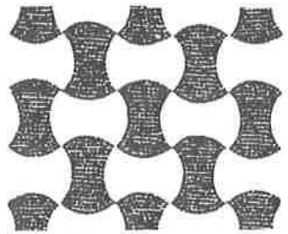


Fig 3.1

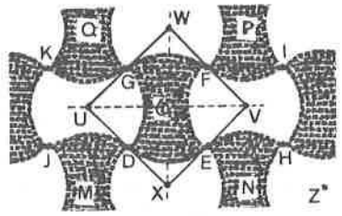


Fig 3.2

Su construcción geométrica se obtiene fácilmente. A partir del cuadrado DEFG (fig 3.2) de centro O, se trazan dos cuadrantes de circunferencia DE y FG, de centro O. Análogamente, a partir de los respectivos cuadrados EFIH y DGKJ, se trazan dos cuadrantes de circunferencia FE y DG, bastando ya colorear el cuadrilátero mixtilíneo bordeado por esos cuatro arcos.

Formalmente, un *mosaico* (bicolor) es el subconjunto del plano que está coloreado sobre fondo blanco. Los mosaicos que, en principio, nos interesa considerar son los mosaicos periódicos, es decir, los obtenidos repitiendo periódica e indefinidamente, según dos direcciones distintas, el motivo representado en un paralelogramo. Así, por ejemplo, a partir de la parte rectangular MNPQ, aplicando reiteradamente traslaciones de vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{MQ}$, se obtiene el mosaico periódico del cual aparece una parte en la figura 3.1.

Más precisamente, las traslaciones que transforman un mosaico, $\mathcal{M}$, en sí mismo forman el *grupo de traslaciones de* $\mathcal{M}$, que denotamos $T(\mathcal{M})$. El mosaico $\mathcal{M}$ es *periódico*, si $T(\mathcal{M})$ es generado por dos traslaciones de vectores linealmente independientes.

Por otra parte, observemos que el mosaico periódico de la fig 3.1, también puede ser generado por traslaciones a partir de una parte propia del rectángulo MNPQ. En efecto, a partir del rombo XUWV y aplicando las traslaciones de vectores $\overrightarrow{XU}$ y $\overrightarrow{XV}$ (y sus productos), también se genera dicho mosaico. Sin embargo, ninguna parte propia de dicho rombo (que sea cerrada respecto de la Topología Euclídea usual) permite generar el mosaico mediante traslaciones. Ello se expresa diciendo que XUWV es una célula de este mosaico. Es claro que la parte rectangular UVPQ es otra célula de este mosaico.

En general, una *célula* del mosaico periódico $\mathcal{M}$ es un polígono convexo, C, tal que las imágenes de C mediante las traslaciones de $T(\mathcal{M})$ recubran el plano y tal que ningún otro polígono convexo estrictamente contenido en C verifique esa condición. De ello resulta que la unión de las imágenes de $C \cap \mathcal{M}$ mediante las traslaciones de $T(\mathcal{M})$ es todo $\mathcal{M}$.

Observando de nuevo el mosaico periódico de la fig 3.1, notemos que, además de las traslaciones citadas, existen otras isometrías que transforman en sí mismo dicho mosaico, como son la reflexión de eje XW o la de eje UV. En general, el grupo de las isometrías (traslaciones, rotaciones, reflexiones y reflexiones con deslizamiento), que transforman un mosaico periódico, $\mathcal{M}$, en sí mismo, se denomina *grupo de la isometrías de* $\mathcal{M}$ y se denota $G(\mathcal{M})$. Es claro que $T(\mathcal{M}) \subseteq G(\mathcal{M})$.

Como ya se ha indicado, el mosaico periódico de la figura 3.1 puede obtenerse aplicando traslaciones a la célula rómbica XUWV, pero haciendo uso de otras isometrías de $G(\mathcal{M})$, no sólo traslaciones, se puede generar $\mathcal{M}$ a partir de una parte propia de esta célula. Así, a partir de la parte triangular XOV, aplicando isometrías de $G(\mathcal{M})$, se genera el mosaico $\mathcal{M}$ y esto no puede conseguirse a partir de una parte propia cerrada de la XOV. Ello se expresa diciendo que el triángulo XOV es un dominio fundamental de este mosaico. Otro dominio fundamental sería el triángulo UOW, por ejemplo.

En general, un *domino fundamental* del mosaico periódico $\mathcal{M}$ es un polígono convexo, D, tal que las imágenes de D mediante isometrías de $G(\mathcal{M})$ recubran el plano y tal que ningún otro polígono convexo contenido en D verifique esa condición. De ello resulta que la unión de las imágenes de $D \cap \mathcal{M}$ mediante las isometrías de $G(\mathcal{M})$ es todo $\mathcal{M}$.

Dado un mosaico $\mathcal{M}$ y elegido un punto, X, del plano, al conjunto de imágenes de X mediante las traslaciones de $\mathcal{M}$, es decir la órbita de X por $T(\mathcal{M})$, se denomina *red de puntos* del mosaico. Siendo U y V dos puntos tales que los vectores $\overrightarrow{xu}$ y $\overrightarrow{xv}$ definen traslaciones que generan T(M), puede considerarse el triángulo XUV. Según sea este triángulo, se dice que la red de puntos es:

- *oblicua*, si XUV no es isósceles, ni rectángulo
- *rectangular*, si XUV es rectángulo, pero no isósceles
- *rómbica*, si XUV es isósceles (no equilátero) y no rectángulo
- *cuadrada*, si XUV es rectángulo-isósceles
- *hexagonal*, si XUV es equilátero

Para una información detallada sobre los distintos tipos de red, puede consultarse, por ejemplo, [R-R] o [Sch].

Volviendo al mosaico de la figura 3.1, observemos que el rombo XUWV es una célula de dicho mosaico, y los lados (orientados) $\overrightarrow{xu}$ y $\overrightarrow{xv}$ determinan dos vectores libres, cuyas traslaciones generan $T(\mathcal{M})$, por lo que XUWV se dice que es célula reticular (vinculada a la red del mosaico). Otra célula reticular del mismo mosaico sería el paralelogramo XUVZ, siendo Z el punto tal que los vectores $\overrightarrow{xz}$ y $\overrightarrow{uv}$ son equipolentes.

En general, se dice que el paralelogramo XUWV es *célula reticular* del mosaico periódico $\mathcal{M}$, si XUWV es una célula de $\mathcal{M}$ tal que las traslaciones de los vectores $\overrightarrow{xu}$ y $\overrightarrow{xv}$ generan $T(\mathcal{M})$.

Si un solador tuviera que reconstruir el mosaico de la figura 3.1 usando baldosas de forma poligonal, lo más pequeñas posibles, podría usar losetas triangulares como la UXV (fig 3.2), ya que mediante una rotación de media vuelta con centro O se completa la célula XUWV, a partir de la cual se genera el mosaico mediante traslaciones. Notemos que a partir de losetas más pequeñas, harían falta dos tipos de losetas, OXU y OXV, ya que (supuesto que la baldosa sólo tiene grabada una de sus dos caras) el solador tiene libertad para variar su posición sobre el suelo aplicando movimientos que conservan el sentido (traslaciones y rotaciones), pero no movimientos que lo cambian (reflexiones y reflexiones con deslizamiento).

En general, una *loseta* del mosaico periódico $\mathcal{M}$ es un polígono convexo, L, tal que las imágenes de L mediante isometrías del subgrupo, $G^+(\mathcal{M})$, de las isometrías de $G(\mathcal{M})$ que conservan el sentido, recubran el plano y tal que ningún otro polígono convexo estrictamente contenido en L verifique esa condición. De ello resulta que la unión de las imágenes de $L \cap \mathcal{M}$ mediante las isometrías de $G^+(\mathcal{M})$ es todo $\mathcal{M}$.

En consecuencia, si se parte de un dominio fundamental, aplicando (si fuera preciso) movimientos que cambian el sentido se obtiene una loseta. Aplicando a esta rotaciones, se obtiene una célula. Y aplicando a esta traslaciones se completa el mosaico.

4. CONVENIOS DE NOTACION

Para expresar abreviadamente los movimientos a considerar, llamaremos: traslación AB a la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$, rotación (P,α) a la rotación o giro de centro P y amplitud α, semigiro P a la rotación (P,π), reflexión AB a la reflexión o simetría de eje la recta AB y reflexión con deslizamiento MN a la composición de la reflexión MN con la traslación MN.

Por otra parte, se demuestra (en [Mar], por ejemplo) que toda rotación que transforme un mosaico periódico en sí mismo, ha de tener amplitud $2\pi/1$, $2\pi/2$, $2\pi/3$, $2\pi/4$ ó $2\pi/6$, es decir, ha de ser de orden 1, 2, 3, 4 ó 6.

Para los 17 grupos de simetría, existen varias notaciones, que aparecen recogidas y comparadas en el artículo [Sch]. Posteriormente han aparecido otras dos notaciones, una de ellas debida al topólogo J. M. Montesinos (de la Univ. Complutense) [Mon], que aporta un nuevo e interesante enfoque al estudio de este problema, haciendo intervenir el caleidoscopio u "orbifold" obtenido al pasar al cociente del plano euclídeo respecto de grupos discretos apropiados. Aquí adoptamos la notación internacional de las tablas de cristalografía para rayos X, por ser la más usada.

De acuerdo con esta notación internacional, se usan las siguientes abreviaciones en los nombres de los grupos cristalográficos: M (mirror) para indicar la existencia de reflexiones de ejes paralelos, MM (mirror mirror) para indicar la existencia de reflexiones de ejes en dos direcciones distintas, G (glide-reflection) para indicar reflexiones con deslizamiento de ejes paralelos, GG para indicar reflexiones con deslizamiento de ejes en dos direcciones, C para indicar célula centrada (esto es, célula reticular rómbica con ejes de reflexión sobre una de sus diagonales, o ambas, pero no sobre sus lados), P para indicar célula primitiva (demás casos).

Para cada uno de los mosaicos romanos de la colección representativa elegida de los 17 grupos de simetría, se van a indicar brevemente: las isometrías por las que es invariante y que caracterizan el grupo de simetría, la construcción geométrica del mosaico con regla y compás, una célula fácil de detectar, una célula reticular, una loseta, un dominio fundamental, el tipo de red, los movimientos en que es invariante y su generación como modelo de grupo de simetría. (Algunos de los mosaicos se mostrarán algo simplificados, para resaltar su aspecto geométrico, pero sin que ello afecte al grupo de simetría a que pertenecen).

5. MOSAICOS INVARIANTES SOLO POR TRASLACIONES (P1)

La figura 5.1 muestra un mosaico romano existente en Mérida (Alcazaba) y en Liédena (Navarra) [Bla]. Otro igual se encuentra en Timgad (Argelia). Ninguna rotación (distinta de la identidad), ni reflexión, ni reflexión con deslizamiento lo transforman en sí mismo (sólo traslaciones), por lo que es modelo del *grupo de simetría* P1.

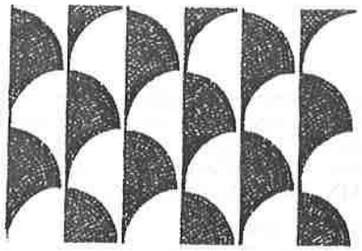


Figura 5.1

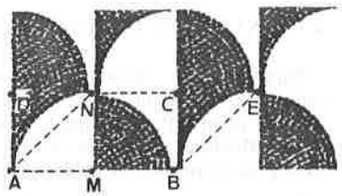


Figura 5.2

Su *construcción geométrica* puede obtenerse como sugiere la figura 5.2. A partir de un rectángulo ABCD, tal que $\overline{AB} = 2\overline{AD}$, en el que se inscribe la semicircunferencia ANB de centro el punto medio M de $\overline{AB}$, trazando el radio MN y coloreando los triángulos mixtilíneos ADN y BMN. A partir de esta *célula* rectangular es fácil generar el mosaico aplicando reiteradamente traslaciones AB y AN, por lo que la célula ABCD no es reticular. En cambio, el paralelogramo ABEN es *célula reticular*. Como $G(\mathcal{M})$ consta sólo de traslaciones, el paralelogramo ABEN es también *loseta* y *dominio fundamental*. La *red* de puntos es pues oblicua. El *grupo de simetría* del que es modelo, por constar sólo de traslaciones, se reduce a $T(\mathcal{M})$, que es generado por las traslaciones AB y AN.

Ligeras variantes del mosaico de la fig 5.1 se encuentran en Mérida (Casa del Mitreo), en la Plaza de la Corredera (Córdoba), en Cuevas de Soria y en las ruinas de Pompeya y de Cartago (Cartago romana, no púnica).

6. MOSAICOS INVARIANTES POR REFLEXIONES DE EJES TODOS PARALELOS, PERO NO POR ROTACIONES, NI POR REFLEXIONES CON DESLIZAMIENTO DE EJES DISTINTOS A LOS DE REFLEXION (PM)

En la figura 6.1 se muestra un mosaico romano periódico procedente de Itálica, que tiene en su centro un busto de Baco y se conserva en el Museo Arqueológico de Sevilla [Bla]. Los movimientos que lo transforman en sí mismo (además de traslaciones) son reflexiones de ejes todos paralelos, pero no rotaciones, ni reflexiones con deslizamiento de ejes distintos a los de reflexión, por lo que es modelo del *grupo de simetría* PM.

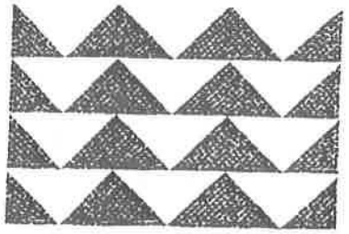


Figura 6.1

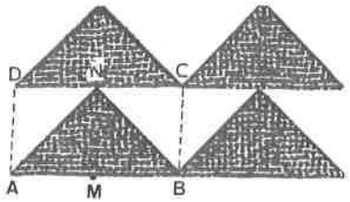


Figura 6.2

Su *construcción geométrica* puede obtenerse como indica la figura 6.2, a partir de un rectángulo ABCD, tal que $\overline{AB} = 2\overline{AD}$, en el que se determinan los puntos medios, M y N, de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se trazan los segmentos $\overline{AN}$ y $\overline{BN}$, y se colorea el triángulo ABN. A partir de esta *célula* rectangular se genera el mosaico aplicando reiteradamente traslaciones AB y AD, por lo que esta célula es *reticular*. Como $G^+(\mathcal{M})$ consta sólo de traslaciones, ABCD es también *loseta*. El rectángulo AMND es *dominio fundamental*, ya que aplicándole la reflexión MN se obtiene la célula ABCD. La *red* de puntos es pues rectangular. El *grupo de traslaciones* $T(\mathcal{M})$ es generado por las traslaciones AB y AD. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de las reflexiones MN, AD, BC ,...

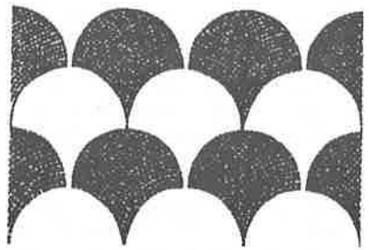


Figura 6.3

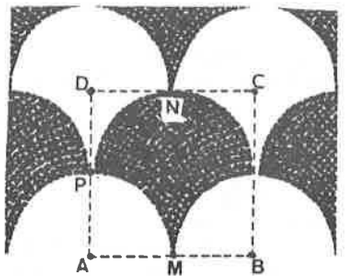


Figura 6.4

En la figura 6.3 se muestra otro mosaico romano de tipo PM, procedente de Ostia (Italia), cuyo estudio se sigue de la fig 6.4, del mismo modo indicado anteriormente, respecto de la figura 6.2. El dominio fundamental AMND puede construirse trazando los cuadrantes de circunferencia MP y PN, de centros respectivos A y el centro de ABCD, y sombreando el triángulo mixtilíneo MNP. Notemos que aunque las tramas de semicircunferencias frontera de las regiones coloreadas en los mosaicos de las figuras 5.1 y 6.3 son similares, son modelos de distintos grupos de simetría.

En la villa romana de Quintanilla de la Cueza (Palencia) se encuentran varios mosaicos de tipo PM.

7. MOSAICOS INVARIANTES POR REFLEXIONES CON DESLIZAMIENTO DE EJES TODOS PARALELOS, PERO NO POR ROTACIONES, NI REFLEXIONES (PG)

En la figura 7.1 se muestra un mosaico romano procedente de Granollers y también de Erneuville (Bélgica). Los únicos movimientos que lo transforman en sí mismo (además de traslaciones) son reflexiones con deslizamiento de ejes todos paralelos, por lo que es modelo del *grupo de simetría* PG.

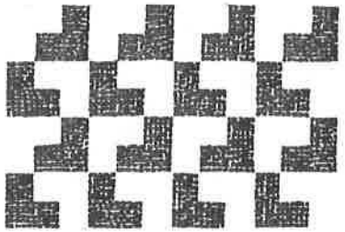


Figura 7.1

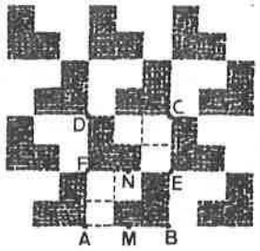


Figura 7.2

Su *construcción geométrica* puede obtenerse como indica la figura 7.2, a partir de un rectángulo ABCD, tal que $\overline{AB} = (3/4)\overline{AD}$, descomponiéndolo en 3×4 cuadraditos iguales y sombreando los seis que se indican. A partir de esta *célula* rectangular se genera el mosaico aplicando traslaciones AB y AD, por lo que esta célula es *reticular*. Como $G^+(\mathcal{M})$ consta sólo de traslaciones, ABCD es también *loseta*. Considerando los puntos medios, E, F, M y N, de los respectivos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$, se obtiene como *dominio fundamental* el rectángulo ABEF, ya que aplicándole la reflexión con deslizamiento MN se obtiene la célula ABCD. La *red* de puntos es pues rectangular. El *grupo de traslaciones* $T(\mathcal{M})$ es generado por las traslaciones AB y AD. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de las reflexiones con deslizamiento MN, NM, AF, FA, BE,...

Los mosaicos de tipo PG son raros en el arte romano.

8. MOSAICOS INVARIANTES POR REFLEXIONES Y POR REFLEXIONES CON DESLIZAMIENTO DE EJES PARALELOS Y DISTINTOS A LOS DE REFLEXION, PERO NO POR ROTACIONES (CM)

La figura 8.1 muestra un mosaico romano procedente de Sainte Colombe (Francia). Los únicos movimientos que lo transforman en sí mismo (además de traslaciones) son reflexiones de ejes todos paralelos y reflexiones con desliza- miento de ejes paralelos a los de reflexión y distintos de ellos, por lo que es modelo del *grupo de simetría* CM.

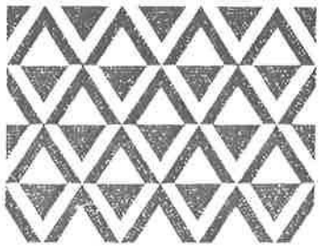


Figura 8.1

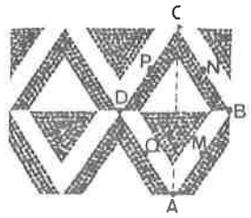


Figura 8.2

Su *construcción geométrica* puede obtenerse como indica la figura 8.2, a partir de la parte rómbica ABCD, de la cual la recta AC es eje de simetría. A partir de la *célula* ABCD se genera el mosaico aplicando reiteradamente traslaciones AB y AD, por lo que esta célula es *reticular*. Como $G^+(\mathcal{M})$ consta sólo de traslaciones, ABCD es también *loseta*. El triángulo ABC es *dominio fundamental*, ya que aplicándole la reflexión AC se obtiene la célula rómbica ABCD. La red de puntos es pues rómbica. El *grupo de traslaciones* $T(\mathcal{M})$ es generado por las traslaciones AB y AD. Además de traslaciones, el *grupo de simetría* consta de las reflexiones de ejes las rectas AC y sus paralelas por B, D,..., así como las reflexiones con deslizamiento MN, NM, PQ, QP,...

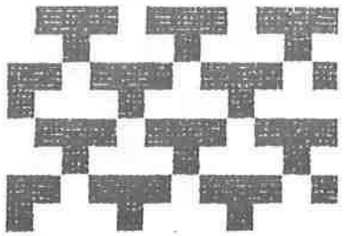


Figura 8.3

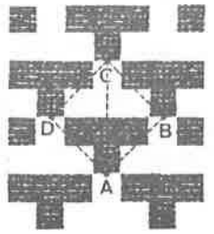


Figura 8.4

No siempre la célula reticular es tan fácil de identificar. Así, en la figura 8.3 se muestra otro mosaico romano de tipo CM procedente de Hemsworth (Gran Bretaña), cuyo análisis sigue de modo análogo de la fig 8.4.

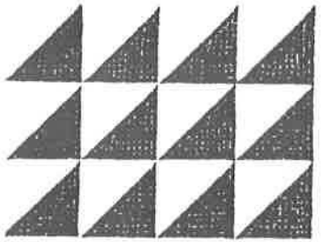


Figura 8.5

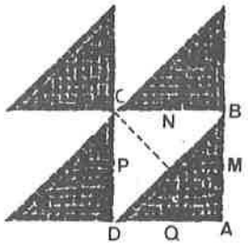


Figura 8.6

La figura 8.5 muestra otro mosaico romano de tipo CM, procedente de Mérida (Alcazaba y Casa del Anfiteatro). Su estudio se sigue de la fig 8.6, en que puede observarse que el paralelogramo equilátero ABCD ahora también es equiángulo (lo que no ocurría en el caso de la fig 8.2).

Los mosaicos romanos de tipo CM son muy frecuentes. Si en el mosaico de la figuras 6.3 se prescinde del sombreado (conservando sólo su borde), se obtiene otro mosaico romano de tipo CM, que se encuentra en la villa romana de Los Quintanares (Rioseco de Soria).

9. MOSAICOS INVARIANTES SOLO POR ROTACIONES DE ORDEN 2 (SEMIGIROS) Y POR TRASLACIONES (P2)

En la figura 9.1 se muestra un mosaico romano procedente de Badalona y Mataró. Los únicos movimientos que lo transforman en sí mismo (además de traslaciones) son rotaciones de 180 grados (semigiros), por lo que es modelo del *grupo de simetría* P2.

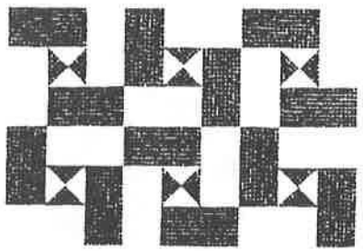


Figura 9.1

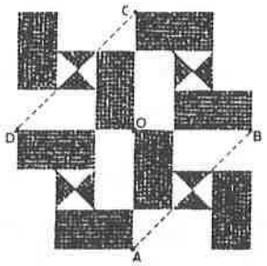


Figura 9.2

Su *construcción geométrica* directa puede obtenerse, a partir de un cuadrado, trisecando sus lados y trazando paralelas a sus diagonales por los puntos de división, así como paralelas a los lados por los puntos medios de

estos, para colorear las partes indicadas en la fig 9.2. Una *célula* de este mosaico es el cuadrado ABCD, de centro O, a partir del cual se genera el mosaico aplicando reiteradamente traslaciones AB y AD, por lo que esta célula es *reticular*. El triángulo ABC es *dominio fundamental*, ya que aplicándole la rotación O-π se obtiene la célula ABCD. En consecuencia, el triángulo ABC es también *loseta*. El *grupo de traslaciones* T(𝔐) es generado por las traslaciones AB y AD. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de los semigiros de centros los vértices de ABCD, su centro, O, y los puntos medios de sus lados, así como los semigiros resultantes de componer aquellos con las traslaciones de T(𝔐).

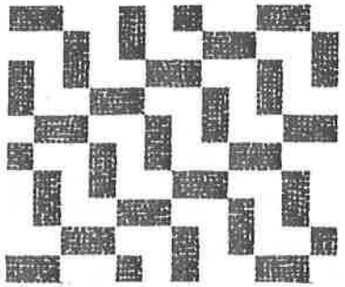


Figura 9.3

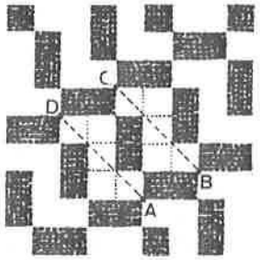


Figura 9.4

En la figura 9.3 se muestra otro mosaico romano de tipo P2, procedente de Roma. Su construcción se sigue fácilmente a partir de la cuadrícula marcada en la fig 9.4. Notemos que en este caso el paralelogramo ABCD (que no es equilátero, ni equiángulo) es célula reticular. En consecuencia, la *red* de puntos es, en general, oblicua, para mosaicos de tipo P2.

Los mosaicos romanos de tipo P2 son bastantes escasos.

10. MOSAICOS INVARIANTES POR ROTACIONES DE ORDEN MAXIMO 2 Y POR REFLEXIONES CON DESLIZAMIENTO DE EJES EN DOS DIRECCIONES (PGG)

En la figura 10.1 se muestra un mosaico romano procedente de Trèves (Alemania). Los únicos movimientos que lo transforman en sí mismo son semigiros y reflexiones con deslizamiento de ejes en dos direcciones perpendiculares entre sí, por lo que es modelo del *grupo de simetría* PGG.

Su *construcción geométrica* puede obtenerse como indica la fig 10.2, a partir de un rectángulo ABCD de centro O, tal que $\overline{AB} = (3/2)\overline{AD}$, descomponiéndolo en 6×4 cuadraditos iguales y sombreando los doce que se indican. A partir de esta *célula* rectangular se genera el mosaico aplicando traslaciones AB y AD, por lo que esta célula es *reticular*. Considerando los

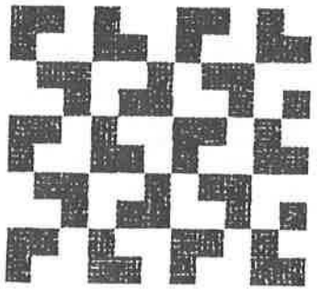


Figura 10.1

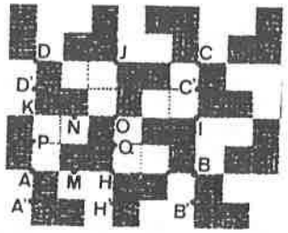


Figura 10.2

puntos medios, H, I, J, K, de los lados de ABCD, se obtiene como *dominio fundamental* el rectángulo AHOK, ya que aplicándole la reflexión con deslizamiento MN se obtiene el rectángulo AHJD, al cual basta aplicar el semigiro O para obtener la célula ABCD. En consecuencia, el rectángulo AHJD es loseta. La *red* de puntos es pues rectangular. El *grupo de traslaciones* T(𝔐) es generado por las traslaciones AB y AD. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de las reflexiones con deslizamiento MN, NM, PQ, QP,..., así como de semigiros de centros los vértices de ABCD, su centro O, los puntos medios de sus lados,... (Notemos que otra posibilidad consiste en tomar como célula A'B'C'D' y generarla a partir del dominio A'H'QP, aplicando sucesivamente las reflexiones con deslizamiento MN y PQ).

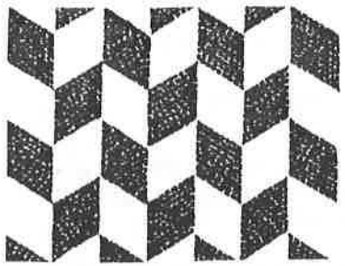


Figura 10.3

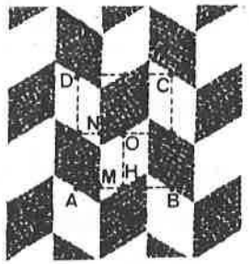


Figura 10.4

En la figura 10.3 se muestra otro mosaico romano de tipo PGG, procedente de Aquilée (Italia), cuyo estudio se sigue de la fig 10.4., del mismo modo indicado anteriormente, respecto de la figura 10.2.

Los mosaicos de tipo PGG son escasos en decoración, en general, y en particular en el arte romano.

11. MOSAICOS INVARIANTES POR ROTACIONES DE ORDEN MAXIMO 2, POR REFLEXIONES DE EJES TODOS PARALELOS Y POR REFLEXIONES CON DESLIZAMIENTO DE EJES PERPENDICULARES A LOS DE REFLEXION (PMG)

En la figura 11.1 se muestra un mosaico romano tricolor procedente de Caerwent (Gran Gretaña). Los únicos movimientos que lo transforman en sí mismo (además de traslaciones) son semigiros, reflexiones de ejes todos paralelos y reflexiones con deslizamiento de ejes perpendiculares a los de reflexión, por lo que es modelo del *grupo de simetría* PMG.

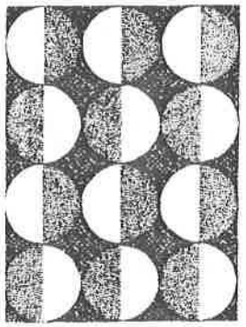


Figura 11.1

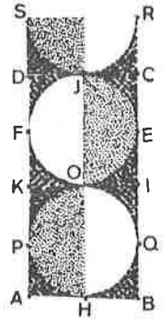


Figura 11.2

Su *construcción geométrica* puede obtenerse como indica la figura 11.2, a partir de un rectángulo ABCD de centro O, tal que $\overline{AB} = (1/2)\overline{AD}$, inscribiendo en él dos circunferencias tangentes y trazando la recta que pasa por los centros de ellas, para colorear alternativamente un semicírculo de cada una. A partir de esta *célula* rectangular se genera el mosaico aplicando traslaciones AB y AD, por lo que esta célula es *reticular*. Considerando los puntos medios, H, I, J, K, de los lados de ABCD, se obtiene como *dominio fundamental* el rectángulo ABQP (tal que P y Q son los puntos medios de $\overline{AK}$ y $\overline{BI}$), ya que, aplicándole la reflexión PQ, se obtiene el rectángulo ABIK, al cual basta aplicar el semigiro O para obtener la célula ABCD. En consecuencia, el rectángulo ABIK es loseta. La *red* de puntos es pues rectangular. El *grupo de traslaciones* T(𝔐) es generado por las traslaciones AB y AD. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de los semigiros O,H,I,J,K,A,B,C,D,..., las reflexiones PQ, FE,... y las reflexiones con deslizamiento HO, OH, AK, BI, ... , así como sus composiciones con las traslaciones de T(𝔐).

Notemos que otra posibilidad consiste en tomar como célula PQRS (fig 10.2) y generarla a partir del dominio PQIK, aplicando sucesivamente el semigiro O y la reflexión EF.

Los mosaicos de tipo PMG son rarísimos.

12. MOSAICOS INVARIANTES POR REFLEXIONES DE EJES EN DOS DIRECCIONES Y POR ROTACIONES DE ORDEN MAXIMO 2, CUYOS CENTROS ESTAN TODOS EN EJES DE REFLEXION (PMM)

La figura 12.1 muestra un mosaico romano que se encuentra en Mérida (Casa del Anfiteatro) y también en Roma. Los únicos movimientos que lo transforman en sí mismo (además de traslaciones) son reflexiones cuyos ejes son rectas de dos direcciones perpendiculares y semigiros cuyos centros están todos en ejes de reflexiones, por lo que es modelo del *grupo* PMM.

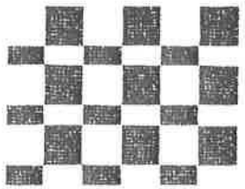


Figura 12.1

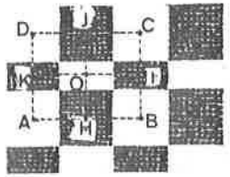


Figura 12.2

Su *construcción geométrica* puede obtenerse como indica la figura 12.2, a partir de un rectángulo ABCD de centro O. A partir de esta *célula* rectangular se genera el mosaico aplicando traslaciones AB y AD, por lo que esta célula es *reticular*. Considerando los puntos medios, H, I, J, K, de los lados de ABCD, se obtiene como *dominio fundamental* el rectángulo AHOK, ya que aplicándole la reflexión KO se obtiene el rectángulo AHJD, al cual basta aplicar la reflexión HO (o el semigiro O) para obtener la célula ABCD. En consecuencia, el rectángulo AHJD es loseta. La *red* de puntos es pues rectangular. El *grupo de traslaciones* T(𝔐) es generado por las traslaciones AB y AD. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de los semigiros O,H,I,J,K,A,B,C,D,... y las reflexiones KI,AB,CD,HO,AD,BC,...

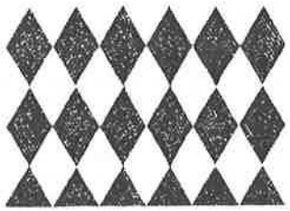


Figura 12.3

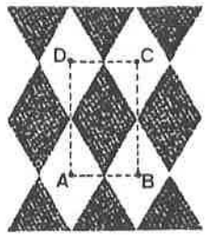


Figura 12.4

En la figura 12.3 se muestra otro mosaico romano de tipo PMM, procedente de Itálica, que también se encuentra en el Museo Municipal de Cartagena y en Biches (Francia), cuyo estudio se sigue del mismo modo de la fig 12.4.

Los mosaicos romanos de tipo PMM son muy numerosos. En la villa romana de La Olmeda (Palencia) existen varios.

13. MOSAICOS INVARIANTES POR REFLEXIONES DE EJES EN DOS DIRECCIONES Y POR ROTACIONES DE ORDEN MAXIMO 2, CUYOS CENTROS NO ESTAN TODOS EN EJES DE REFLEXION (CMM)

Volvamos sobre el mosaico romano considerado en el apartado 3. Aquel mosaico se transforma en sí mismo por reflexiones cuyos ejes son rectas de dos direcciones perpendiculares y semigiros cuyos centros no todos están en ejes de reflexiones, pero no por rotaciones de orden mayor que dos, por lo que es modelo del *grupo de simetría* CMM. Se describió ya en el apartado 3.

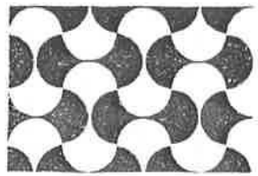


Figura 13.1

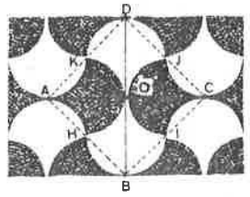


Figura 13.2

En la figura 13.1 se muestra otro mosaico romano de tipo CMM, procedente de Liédena (Navarra). Su estudio es análogo. De acuerdo con la fig 13.2, a partir del dominio fundamental ABO, mediante la reflexión AO se completa la loseta ABD, aplicando a la cual el semigiro O se obtiene la célula reticular consistente en el rombo ABCD. En cuanto a su construcción geométrica (restringida al citado dominio), basta trazar los cuadrantes de circunferencia HO y HA y colorear el triángulo mixtilíneo AOH. La *red* de puntos es rómbica. El *grupo de traslaciones* T(𝔐) es generado por las traslaciones AB y AD. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de los semigiros O,H,I,J,K,A,B,C,D,..., las reflexiones de ejes AC, BD (y sus paralelas por los vértices de ABCD) y las reflexiones con deslizamiento HI, IH, IJ, JK, ...

Figura 13.3

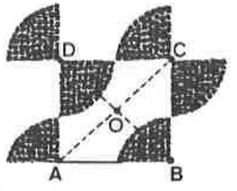


Figura 13.4

En la figura 13.3 se muestra otro bello mosaico romano de tipo CMM, procedente de Ostia, cuyo estudio se sigue de la fig 13.4. La célula reticular ABCD es aquí un rombo equiángulo, es decir un cuadrado.

Los mosaicos romanos de tipo CMM son muy numerosos.

14. MOSAICOS INVARIANTES POR ROTACIONES DE ORDEN MAXIMO 4, PERO NO POR ROTACIONES (P4)

La figura 14.1 muestra un mosaico romano existente en Mérida (Casa del Mitreo), así como en Tívoli (Italia). Los únicos movimientos que lo transforman en sí mismo (además de traslaciones) son rotaciones de 90 grados y semigiros, por lo que es modelo del *grupo de simetría* P4.

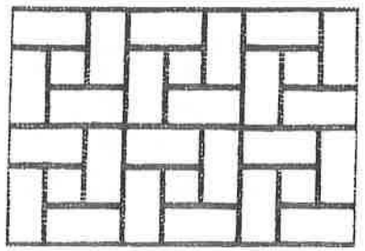


Figura 14.1

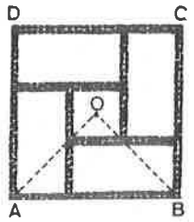


Figura 14.2

Su *construcción geométrica* directa puede obtenerse fácilmente a partir de un cuadrado descompuesto en 3×3 cuadraditos iguales, marcando las líneas indicadas en la fig 14.2. Una *célula* de este mosaico es el cuadrado ABCD, de centro O, a partir del cual se genera el mosaico aplicando reiteradamente las traslaciones AB y AD, por lo que esta célula es *reticular*. El triángulo ABO es *dominio fundamental*, ya que aplicándole rotaciones (O,π/4) se obtiene la célula ABCD. En consecuencia, el triángulo ABO es también *loseta*. La *red* de puntos es pues cuadrada. El *grupo de traslaciones* T(M) es generado por las traslaciones AB y AD. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de rotaciones de 90 grados de centros O,A,B,C,D,... y semigiros de centros los puntos medios de los lados de ABCD, así como los productos de estas rotaciones por las traslaciones de T(M).

Un mosaico similar (pero con el cuadrado central de cada célula coloreado) se encuentra en Mérida (Casa de la Basílica) y en el Museo Arqueológico de Zaragoza. En la villa romana de La Olmeda (Palencia) se pueden contemplar mosaicos de tipo P4.

15. MOSAICOS INVARIANTES POR REFLEXIONES Y POR ROTACIONES DE ORDEN 4 CUYOS CENTROS ESTAN EN EJES DE REFLEXION (P4M)

El mosaico romano de la fig 15.1 se encuentra en el Museo Nacional de Arte Romano de Mérida y también en Florencia. Este mosaico es invariante por reflexiones y por rotaciones de 90 grados cuyos centros están todos en ejes de reflexión, por lo que es modelo del *grupo de simetría* P4M.

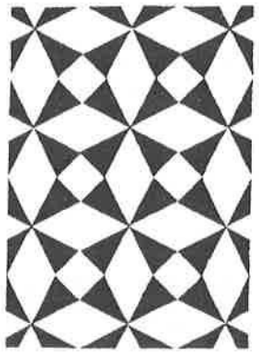


Figura 15.1

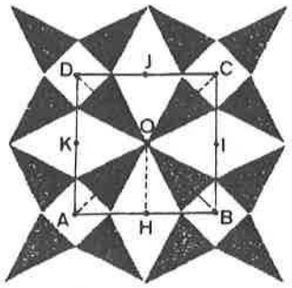


Figura 15.2

Su *construcción geométrica* puede obtenerse como indica la figura 15.2, a partir del cuadrado ABCD de centro O. A partir de esta *célula* cuadrada se genera el mosaico aplicando las traslaciones AB y AD, por lo que esta célula es *reticular*. Considerando los puntos medios, H, I, J, K, de los lados de ABCD, se obtiene como *dominio fundamental* el triángulo rectángulo-isósceles AHO, ya que aplicándole la reflexión HO se obtiene el triángulo ABO, al cual basta aplicar rotaciones (O,π/4), para obtener la célula ABCD. En consecuencia, el triángulo ABO es loseta. La *red* de puntos es pues cuadrada. El *grupo de traslaciones* T(M) es generado por las traslaciones AB y AD. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de las rotaciones de 90 grados de centros O,A,B,C,D,..., los semigiros H,I,J,K,..., las reflexiones OH,AD,BC,OI,AB,CD,OA,OB,... y las reflexiones con deslizamiento HI, IH, IJ, JK, KH, ...

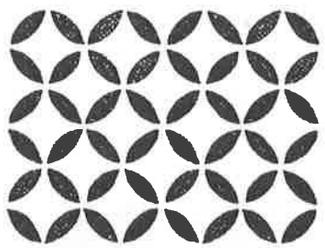


Figura 15.3

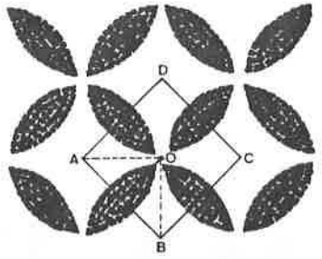


Figura 15.4

La figura 15.3 muestra otro mosaico de tipo P4M, existente en Mérida (Casa del Mitreo), en Liédena, en Mataró y en Barcelona. Su estudio es análogo, como sugiere la fig 15.4. En el Museo Arqueológico de Sevilla se encuentra un mosaico, procedente de Itálica, aparentemente similar a este, pero con los pétalos alternativamente en dos colores, con lo cual resulta ser de tipo PMM (por no ser invariante por rotaciones de 90 grados).

16. MOSAICOS INVARIANTES POR REFLEXIONES Y POR ROTACIONES DE ORDEN 4 CUYOS CENTROS NO ESTAN EN EJES DE REFLEXION (P4G)

La fig 16.1 muestra un mosaico romano, que se encuentra en Mérida, en Liria (Valencia) y en Pompeya. Este mosaico es invariante por reflexiones y por giros de 90 grados cuyos centros no están todos en ejes de reflexión, por lo que es modelo del *grupo de simetría* P4G.

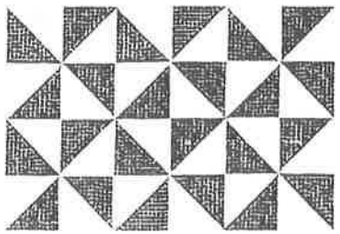


Figura 16.1

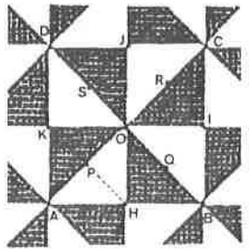


Figura 16.2

Su *construcción geométrica* puede obtenerse como indica la figura 16.2, a partir del cuadrado ABCD de centro O. A partir de esta *célula* cuadrada se genera el mosaico aplicando traslaciones AB y AD, por lo que esta célula es *reticular*. Considerando los puntos medios, H, I, J, K, de los lados de ABCD, se obtiene como *dominio fundamental* el triángulo rectángulo-isósceles HOK, ya que aplicándole la reflexión HK se obtiene el cuadrado AHOK, al cual basta aplicar rotaciones $(O,\pi/4)$, para obtener la célula ABCD. En consecuencia, el cuadrado AHOK es *loseta*. La *red* de puntos es pues cuadrada. El *grupo de traslaciones* $T(\mathbb{R}^2)$ es generado por las traslaciones AB y AD. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de las rotaciones de 90 grados de centros O,A,B,C,D,..., los semigiros H,I,J,K,..., las reflexiones HI,IJ,JK,KH,... y las reflexiones con deslizamiento AO, OA, BO, OB, PQ, QR, RS, SP,...

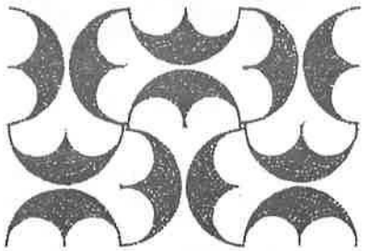


Figura 16.3

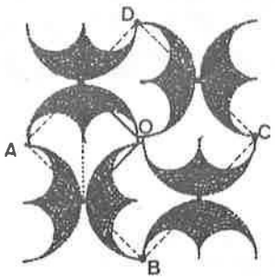


Figura 16.4

En la figura 16.3 se muestra otro mosaico de tipo P4G, procedente de Itálica y que puede verse en el Museo Arqueológico de Sevilla, en la Plaza de la Corredera (Córdoba) y en Barcelona. Su estudio es análogo, como sugiere la fig 16.4. Leves variantes de este mosaico (con los arcos de circunferencias pequeñas prolongados unos grados más, pero del mismo tipo P4G) se encuentran en Mérida, en Quintanilla de la Cueza y en Mataró.

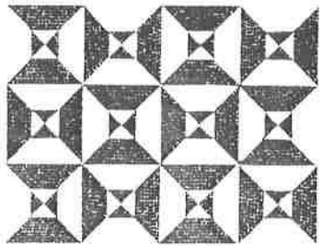


Figura 16.5

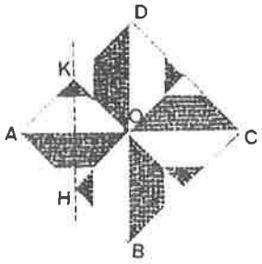


Figura 16.6

En la figura 16.5 se muestra un bello mosaico ateniense de tipo P4G, cuyo estudio se sugiere en la fig 16.6.

Los mosaicos romanos de tipo P4G son muy numerosos.

17. MOSAICOS INVARIANTES POR ROTACIONES DE ORDEN MAXIMO 3, PERO NO POR REFLEXIONES (P3)

La figura 17.1 muestra un mosaico romano procedente de Mérida (Casa del Anfiteatro). Los únicos movimientos que lo transforman en sí mismo (además de traslaciones) son rotaciones de 120 grados, por lo que es modelo del *grupo* P3. Este mosaico tricolor es el único ejemplar P3 que hemos hallado.

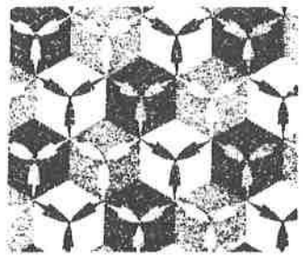


Figura 17.1

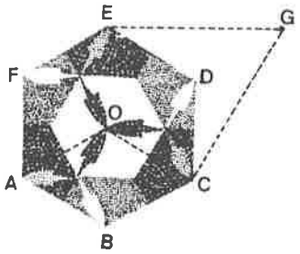


Figura 17.2

Su *construcción geométrica* directa puede obtenerse como sugiere la propia fig 17.1, a partir de una trama hexagonal, disponiendo alternativamente hexágonos coloreados en oscuro, blanco y claro. Una *célula* de este mosaico es el hexágono regular ABCDEF, de centro O (fig 17.2), a partir del cual se genera el mosaico aplicando reiteradamente traslaciones de vectores AC y AE. El rombo ABCO es *dominio fundamental*, ya que aplicándole rotaciones $(O,\pi/3)$ se obtiene la célula ABCDEF. En consecuencia, el rombo ABCO es también *loseta*. La red es hexagonal. El *grupo de traslaciones* T(M) es generado por las traslaciones AC y AE. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de rotaciones de 120 grados de centros los vértices de ABCDEF y su centro O. Sustituyendo los triángulos AFE y ABC por los triángulos CDG y EDG (respectivas imágenes de aquellos por las traslaciones AC y AE), se obtiene la célula reticular ACGE.

18. MOSAICOS INVARIANTES POR REFLEXIONES Y POR ROTACIONES DE ORDEN MAXIMO 3 CUYOS CENTROS ESTAN TODOS EN EJES DE REFLEXION (P3M1)

En la figura 18.1 se muestra un mosaico romano procedente de Ouzouër-sur-Trézée (Francia). Entre los movimientos que lo transforman en sí mismo están reflexiones y rotaciones de 120 grados cuyos centros están todos en ejes de reflexión, pero no rotaciones de 60 grados, por lo que es modelo del *grupo de simetría* P3M1.

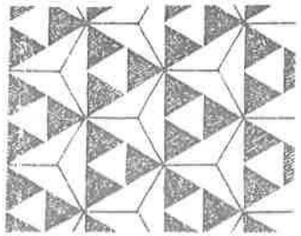


Figura 18.1

Figura 18.2

Su *construcción geométrica* directa puede obtenerse como sugiere la figura 18.2, a partir hexágonos regulares en los que está inscrito un triángulo equilátero coloreado excepto en el triangulito bordeado por las paralelas medias de este. Una *célula* de este mosaico es el hexágono regular ABCDEF, de centro O, a partir del cual se genera el mosaico aplicando reiteradamente las traslaciones AC y AE. El triángulo equilátero ABO es *dominio fundamental*, ya que mediante la reflexión OB se obtiene el rombo ABCO, al que basta aplicar rotaciones $(O,\pi/3)$ para completar la célula ABCDEF. En consecuencia, el rombo ABCO es también *loseta*. La red es hexagonal. El *grupo de traslaciones* T(M) es generado por las traslaciones AC y AE. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de las rotaciones de 120 grados de centros los vértices de ABCDEF y su centro O, las reflexiones OA,OB,OC,OD,

OE,OF,AB,BC,CD,DE,EF,FA y las reflexiones con deslizamiento HJ, JH, JL, LH, IK, KM, MI (donde H,I,J,K,L,M son los puntos medios de los lados de ABCDEF). El paralelogramo ACGE indicado en la fig 17.1 es célula reticular.

Este grupo de simetría P3M1 es raro entre mosaicos romanos. En Pompeya y en Utique (Tunez) se encuentra otro (que también aparece en la Alhambra).

19. MOSAICOS INVARIANTES POR REFLEXIONES Y POR ROTACIONES DE ORDEN MAXIMO 3 CUYOS CENTROS NO ESTAN TODOS EN EJES DE REFLEXION (P31M)

No hemos encontrado ningún mosaico romano del grupo P31M. Por no omitir algún ejemplo de este grupo, analicemos el de la fig 19.1 (procedente del pavimento de las Instalaciones Deportivas, Complejo Sur, de la UCM). Entre los movimientos que lo transforman en sí mismo están reflexiones y rotaciones de 120 grados cuyos centros no están todos en ejes de reflexión, pero no por rotaciones de 60 grados, por lo que es modelo del *grupo* P31M.

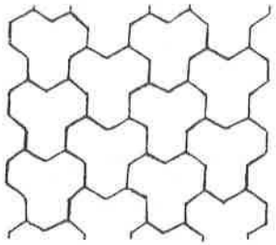


Figura 19.1

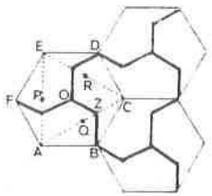


Figura 19.2

Su *construcción geométrica* directa puede obtenerse como sugiere la fig 19.2. A partir del hexágono regular ABCDEF, de centro O, descomponiéndolo en una cadena de seis triángulos equiláteros iguales (OAB, OBC, OCD,.....). En el primero de estos triángulos, OAB no se marca nada y en el segundo, OBC, se une su baricentro, Z, con O. Esto se repite, alternativamente, en los otros cuatro triángulos de la cadena.

Una *célula* de este mosaico es el hexágono ABCDEF, a partir del cual se genera el mosaico aplicando reiteradamente las traslaciones AC y AE. El triángulo isósceles AOC es *dominio fundamental*, ya que mediante la reflexión AC se obtiene el rombo ABCO, al que basta aplicar rotaciones $(O,\pi/3)$ para completar la célula ABCDEF. En consecuencia, el rombo ABCO es también *loseta*. La red es hexagonal. El *grupo de traslaciones* T(M) es generado por las traslaciones AC y AE. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de las rotaciones de 120 grados de centros los vértices de ABCDEF y su centro O, las reflexiones AC,CE,EA,... y las reflexiones con deslizamiento PQ, QP, QR, RP,... (donde P,Q,R son los puntos medios de las diagonales AC,CE,EA del hexágono ABCDEF). El paralelogramo ACGE indicado en la fig 17.1 es célula reticular.

20. MOSAICOS INVARIANTES POR ROTACIONES DE ORDEN 6 PERO NO POR REFLEXIONES (P6)

La figura 20.1 muestra un bellísimo mosaico romano procedente de Aquincum (Hungría). Este mosaico se transforma en sí mismo por rotaciones de 60 grados, pero ninguna reflexión lo deja invariante, por lo que es modelo del *grupo de simetría* P6.

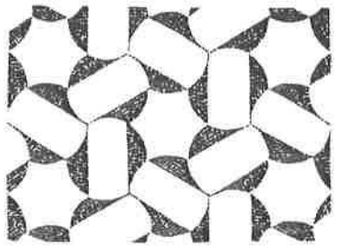


Figura 20.1

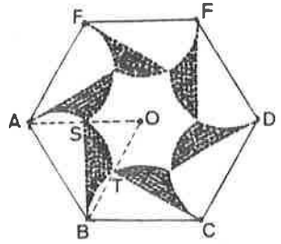


Figura 20.2

Su *construcción geométrica* directa puede obtenerse como sugiere la figura 20.2, a partir de una célula hexagonal regular ABCDEF, de centro O, descomponiéndola en seis triángulos equiláteros. En uno de ellos, AOB, se traza un arco de centro el punto medio de $\overline{AB}$ y extremos los puntos medios, S y T, de $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, y se traza el segmento $\overline{BS}$, para colorear el triángulo mixtilíneo BST. El mismo trazado se repite en los otros cinco triángulos equiláteros citados. A partir de la *célula* ABCDEF, se genera el mosaico aplicando reiteradamente las traslaciones AC y AE. El triángulo equilátero ABO es *dominio fundamental*, ya que aplicándole rotaciones $(O,\pi/6)$ se obtiene la célula ABCDEF. En consecuencia, el triángulo ABC es también *loseta*. La red es hexagonal. El *grupo de traslaciones* $T(\mathcal{M})$ es generado por las traslaciones AC y AE. Además de estas traslaciones, este *grupo de simetría* consta de las rotaciones de 60 grados de centro O, las de 120 grados de centros los vértices de ABCDEF y las de 180 grados de centros los puntos medios de los lados de ABCDEF. El paralelogramo ACGE indicado en la fig 17.1es célula reticular.

Los mosaicos romanos de tipo P6 son escasos.

21. MOSAICOS INVARIANTES POR ROTACIONES DE ORDEN 6 Y POR REFLEXIONES (P6M)

La fig 21.1 muestra un mosaico romano que se encuentra en Mérida (Casa del Mitreo y Parador Nacional), en Itálica y en Mataró. Este mosaico se transforma en sí mismo por rotaciones de 60 grados y por reflexiones, por lo que es modelo del *grupo de simetría* P6M. Por su belleza y simplicidad ha sido muy copiado posteriormente (patio del Alcazar de Sevilla, por ejemplo).

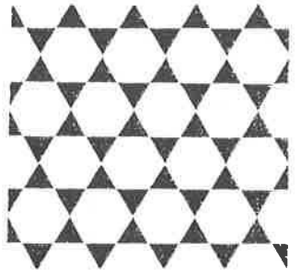


Figura 21.1

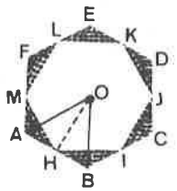


Figura 21.2

Su *construcción geométrica* directa puede obtenerse como sugiere la propia figura 21.2, a partir de la *célula* hexagonal regular ABCDEF, en la que se unen con segmentos los puntos medios de sus lados para colorear los triangulitos isósceles cuyos lados mayores son dichos segmentos. A partir de esta célula se genera el mosaico aplicando reiteradamente las traslaciones AC y AE. El triángulo rectángulo AHO es *dominio fundamental*, ya que mediante la reflexión de eje OH se obtiene el triángulo equilátero ABO, al que basta aplicar rotaciones $(O,\pi/6)$ para completar la célula ABCDEF. En consecuencia, el triángulo ABO es también *loseta*. La red es hexagonal. El *grupo de traslaciones* $T(\mathcal{M})$ es generado por las traslaciones AC y AE. Además de estas traslaciones, el *grupo de simetría* consta de las rotaciones de 60 grados de centro O, las de 120 grados de centros los vértices de ABCDEF y las de 180 grados de centros los puntos medios de los lados de ABCDEF, así como de reflexiones de ejes las rectas que contienen a radios y lados de ABCDEF y de las reflexiones con deslizamiento HI, IJ, JK, KL, LM, MH, HJ, JL, LH,..... El paralelogramo ACGE indicado en la fig 17.1 es célula reticular.

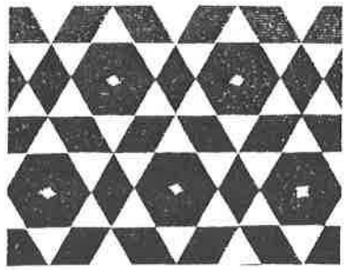


Figura 21.3

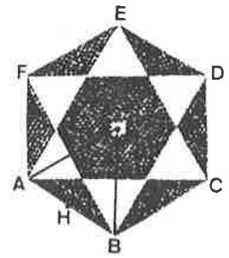


Figura 21.4

En la figura 21.3 se muestra otro mosaico de tipo P6M procedente de Itálica, cuyo estudio se sugiere en la fig 21.4.

Los mosaicos romanos de tipo P6M son muy numerosos.

22 LOS SIETE GRUPOS DE FRISOS PERIODICOS

Volviendo a los conceptos geométricos del apartado 3, si a una célula rectangular ABCD se le aplican reiteradamente sólo las traslaciones AB y BA, se obtiene una banda cuyo motivo (pictórico) se repite periódicamente, esto es, un *friso* periódico.

También los frisos pueden clasificarse, atendiendo al grupo de isometrías que lo dejan invariante, resultando siete tipos posibles (ver [Mar], por ejemplo). Mostraremos un friso romano representativo de cada tipo.

Frisos invariantes sólo por traslaciones

La fig 22.1 muestra un friso romano, muy frecuente en Mérida (donde aparece bordeando varios mosaicos). Es invariante sólo por las traslaciones del grupo generado por la traslación AB. Se genera aplicando dichas traslaciones a la célula ABCD (fig 22.2).

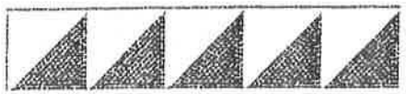


Figura 22.1

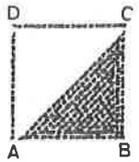


Figura 22.2

Frisos invariantes por una única reflexión

La fig 22.3 muestra un friso romano procedente de Mérida (Casa del Mitreo). También se encuentra en la Casa de los Repuxos (Coimbra) y en la Casa del Poeta Trágico (Pompeya) Es invariante sólo por la reflexión de eje IK (además de por traslaciones). A partir del dominio ABIK (fig 22.4), aplicando la reflexión IK, se obtiene la célula ABCD. Aplicando reiteradamente a esta las traslaciones AB y BA resulta el friso.

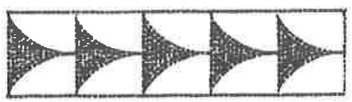


Figura 22.3

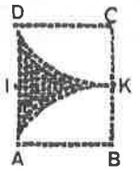


Figura 22.4

Frisos invariantes por reflexiones y no por semigiros

La fig 22.5 muestra un friso romano procedente de Mérida (Casa del Anfiteatro). Es invariante sólo por las reflexiones de ejes paralelos AD, HJ, BC,... (además de por traslaciones). A partir del dominio AHJD (fig 22.6), aplicando la reflexión HJ, se obtiene la célula ABCD. Aplicando reitera- damente a esta las traslaciones AB y BA resulta el friso.

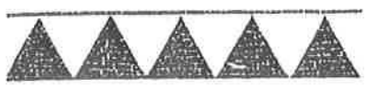


Figura 22.5

Figura 22.6

Frisos invariantes por reflexiones de ejes perpendiculares

La fig 22.7 muestra un friso romano procedente de Mérida (Casa del Anfiteatro). Es invariante por la reflexión de eje IK, por las reflexiones de ejes AD, HJ, BC,... y por los semigiros de centros I,O,K, ... (además de por traslaciones). A partir del dominio AHOK (fig 22.8), aplicando sucesivamente las reflexiones HJ e IK, se obtiene la célula ABCD. Aplicando reiteradamente a esta las traslaciones AB y BA resulta el friso.

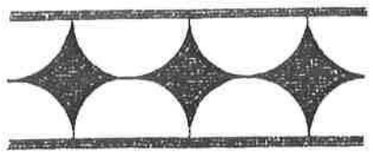


Figura 22.7

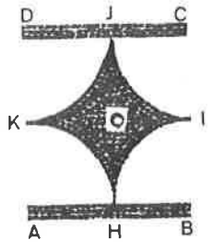


Figura 22.8

Frisos invariantes sólo por semigiros (además de traslaciones)

La fig 22.9 muestra un friso romano procedente de Roma (Termas de Diocleciano). Es invariante sólo por los semigiros O,I,K,... (fig 22.10), además de por traslaciones. A partir del dominio AHJD, aplicando el semigiro O, se obtiene la célula ABCD. Aplicando reiteradamente a esta las traslaciones AB y BA, resulta el friso. (Frisos similares se encuentran en Mérida y en otras ciudades romanas).

Figura 22.9

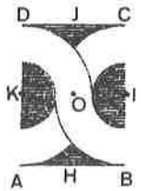


Figura 22.10

Frisos invariantes sólo por reflexiones con deslizamiento

La fig 22.11 muestra un friso romano procedente de Badalona. Es invariante sólo por las reflexiones con deslizamiento KO, IO, ... (y por traslaciones). A partir del dominio AHJD (fig 22.12), aplicando la reflexión con deslizamiento KO, se obtiene la célula ABCD. Aplicando reiteradamente a esta las traslaciones AB y BA resulta el friso.

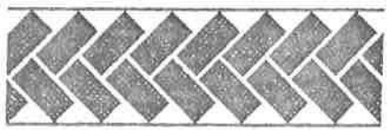


Figura 22.11

Figura 22.12

Estos frisos son poco frecuentes. En Mérida (en la calle Concordia) existe otro friso de este grupo, aunque mucho más incómodo de clasificar.

Frisos invariantes por semigiros y reflexiones de ejes todos paralelos

La fig 22.13 muestra un friso romano procedente de Mérida (Travesía de Pedro María Plano). Es invariante por los semigiros K, O, I, ... (fig 22.14) por las reflexiones MN, PQ, ... y por las reflexiones con deslizamiento KO, OK, ... (además de traslaciones). A partir del dominio AMND, aplicando sucesivamente la reflexión MN y el semigiro O (que puede ser sustituido por la reflexión con deslizamiento KO), se obtiene la célula ABCD. Aplicando a esta las traslaciones AB y BA se obtiene el friso.

Figura 22.13

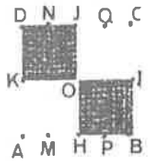


Figura 22.14

23. ROSETONES CICLICOS Y DIEDRALES INVARIANTES POR HOMOTECIAS

Desde Leonardo da Vinci, es sabido que existen dos tipos de rosetones. Uno está formado por aquellos que son invariantes sólo por n rotaciones concéntricas de amplitudes $2j\pi/n; j=0,1,....,n-1$, de modo que el grupo de isometrías que lo transforman en sí mismo es el grupo cíclico de orden n (grupo de rotaciones del n-gono regular). Y el otro tipo de rosetones está formado por aquellos que son invariantes por las rotaciones antes indicadas y también por reflexiones, de modo que el grupo de isometrías que lo transforman en sí mismo es el grupo diedral de orden 2n (grupo de isometrías del n-gono regular). La originalidad de los rosetones romanos que vamos a analizar es que también son invariantes por un grupo discreto de homotecias, concéntricas con aquellas rotaciones.

Rosetones cíclicos invariantes por homotecias

La fig 23.1 muestra una simulación informática (utilizando [G-R]) de un bello rosetón romano parcialmente conservado, procedente de Mérida (Casa del Anfiteatro). Este rosetón se transforma en sí mismo por rotaciones de amplitud múltiplo de 10 grados y también por homotecias, según vamos a ver.

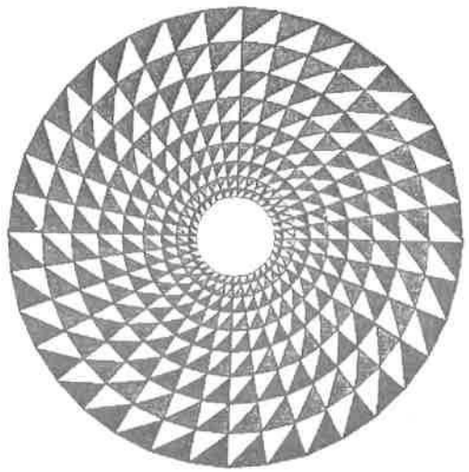


Figura 23.1

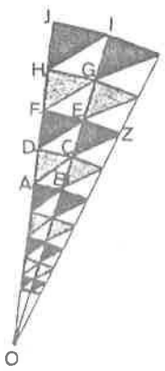


Figura 23.2

Su construcción geométrica directa se obtiene a partir de la región angular convexa AOB (fig 23.2) de amplitud $2\pi/n$ (n=36 para el rosetón de la fig 23.1). Suponiendo $\overline{OA} = \overline{OB}$, se elige en el lado OB de la región angular un punto C, tal que $C \notin \overline{OB}$, y se van determinando alternativamente sobre los lados OA y OB los puntos D, E, F, G, H, ... , de modo que CD∥AB, DE∥AC,

EF∥CD, FG∥DE, GH∥EF, ... , terminando por colorear los triángulos ACD, DEF,FGH,... , o bien del mismo color, o bien alternativamente en dos colores (rojo y verde en el caso del rosetón romano de la fig 23.1). Este proceso indefinido de determinación de los puntos D,E,F,G,H,... es claro que también se puede efectuar en sentido contrario, acercándose al vértice O de la región angular. Finalmente, aplicando rotaciones de centro O y amplitud $2\pi/n$ se replica el motivo representado sobre la región angular AOB, extendiéndolo a todo el plano (por razones obvias, en la práctica tales rosetones se limitan a dibujar sólo en una corona circular representativa de todo el plano, del mismo modo que en los mosaicos periódicos se limita a un rectángulo en que se aprecie claramente la periodicidad del motivo).

Así pues, el rosetón resulta ser invariante por la rotación g de centro O y amplitud $2\pi/n$, y en consecuencia por el grupo cíclico de rotaciones concéntricas generado por g

$$\langle g\rangle = \{g^i \mid i=0,1, \ldots .n-1\} \qquad (1)$$

Por otra parte, en la homotecia h de centro O en la que D es imagen de A, el trapecio ABCD se transforma en el DCEF, este en el FEGH, ..., En consecuencia la imagen del trapecio ABCD en h^2 es FEGH, la imagen en h^3 es HGIJ, ... De ello se sigue fácilmente que todo el rosetón es invariante por el grupo libre de homotecias generado por h

$$\langle h\rangle = \{h^j \mid j\in\mathbb{Z}\} \qquad (2)$$

supuesto bicolor el rosetón (y si fuera tricolor, como el de la fig 23.1, bastaría considerar que h es la homotecia de centro O tal que h(A)=F). De todo ello resulta que el rosetón también es invariante por el subgrupo de transformaciones del grupo equiforme generado por g y por h

$$\langle g,h\rangle = \{h^j g^i \mid i=0,1, \ldots .n-1 \ ; \ j\in\mathbb{Z}\} \qquad (3)$$

es decir, por un grupo abeliano de tipo finito con coeficiente de torsión 36 y número de Betti uno, isomorfo a $\mathbb{Z}/(36)\oplus\mathbb{Z}$.

Volviendo a nuestro rosetón, al contemplar la curva que siguen los puntos A,C,Z,..., sucesivas imágenes de A en las potencias de hg,

$$\{(hg)^j(A) \mid j\in\mathbb{N}\} \qquad (4)$$

se observa que tales puntos siguen una línea espiral, pero ¿es esta una espiral de Arquímedes, espiral logarítmica, o qué tipo de espiral? Al tratar de expresar esta sucesión de puntos en coordenadas polares, (r,φ), se observa que mientras los ángulos crecen en progresión aritmética de diferencia $2\pi/n$, los radios vectores crecen en progresión geométrica cuya razón es la razón $k=\overline{OC}/\overline{OB}$ de la homotecia h, de modo que, tomando como origen de ángulos la semirrecta OA y siendo a la medida de $\overline{OA}$, los puntos de la sucesión (4) pueden expresarse en polares en la forma

$$\varphi_j = \frac{2j\pi}{n} \quad ; \quad r_j = a\cdot k^j \qquad (5)$$

luego la ecuación en polares de la espiral que pasa por dichos puntos es

$$r = a\cdot k^{\left(\frac{n\varphi}{2\pi}\right)} \qquad (6)$$

En realidad, en el rosetón romano representado en la fig 23.1 lo que puede contemplarse es la línea poligonal cuyos vértices son los puntos (5), la cual está inscrita en la espiral (6). La aproximación de esta poligonal espiral a la espiral (6) es bastante buena, al ser n suficientemente grande, 36. Y naturalmente también pueden contemplarse en dicha figura las imágenes de esta espiral en las rotaciones (1).

Otro rosetón de tipo cíclico e invariante por homotecias puede verse en el Museo Arqueológico de Barcelona.

Rosetones diedrales invariantes por homotecias

La fig 23.3 muestra una simulación informática (utilizando también [G-R]) de otro rosetón romano procedente de Mérida (Travesía de Pedro M^a Plano). Este rosetón se transforma en sí mismo por rotaciones de centro común, O, y amplitud 18 grados, por reflexiones cuyos ejes pasan por O y por homotecias de centro O.

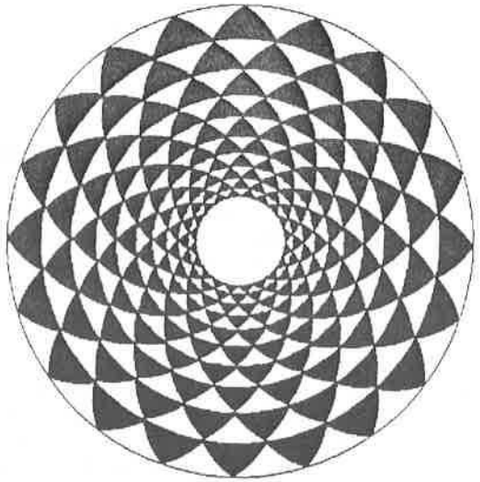


Figura 23.3

Figura 23.4

Su construcción geométrica se puede iniciar a partir de una región angular AOB de amplitud π/n (n=20 para el rosetón de la fig 23.3). Supuesto $AB\perp OB$, se elige en el lado OB de la región angular un punto C, tal que $C\in\overline{OB}$.

Proyectando ortogonalmente C sobre OA, se obtiene D. En la semirrecta OD se toma el punto E∈$\overline{OD}$, tal que el ángulo (no orientado) DCE sea igual al BAC. Proyectando ortogonalmente E sobre OB, se obtiene F. En la semirrecta OF se toma el punto G∈$\overline{OF}$, tal que el ángulo orientado) FEG sea igual al DCE. Proyectando ortogonalmente G sobre OA, se obtiene H. En la semirrecta OH se toma el punto J∈$\overline{OH}$, tal que el ángulo HGJ sea igual al FEG..... Basta ahora colorear los triángulos rectángulos ABC, CDE, EFG, GHJ,.... Aplicando la reflexión, s, de eje OB, se extiende el motivo a toda la región angular AOA' de amplitud $2\pi/n$, donde A'=s(A). Finalmente, al aplicar las rotaciones (1), se completa el rosetón.

La construcción geométrica directa (sin hacer uso de s, ni g) puede obtenerse fácilmente, construyendo polígonos regulares concéntricos de n lados, cuyos radios crecen, o decrecen, en progresión geométrica, situados de modo que la semirrecta de origen el centro común que contiene un radio de un polígono, contenga un apotema del siguiente.

En consecuencia, este rosetón resulta ser invariante por el subgrupo de transformaciones del grupo equiforme generado por g, por s y por h

$$<g,s,h> = \{h^j s^u g^i \mid i=0,1, \ldots .. ,n-1 \ ; \ u=0,1 \ ; \ j\in\mathbb{Z}\}$$

y la espiral (6) se ha de sustituir por las dos espirales

$$r = a\cdot k^{\left(\frac{n\varphi}{2\pi}\right)} \quad ; \quad r = a\cdot k^{-\left(\frac{n\varphi}{2\pi}\right)}$$

lo que puede observarse en el rosetón de la fig 23.3

Notemos finalmente que al diseñar este rosetón, así como el de la fig 23.1, el artista-geómetra ha tenido la astucia de elegir un motivo que haga resaltar tales espirales.

Otros rosetones similares de tipo diedral e invariantes por homotecias pueden verse en Mérida (Alcazaba), en el Museo Monográfico de Linares (Jaén), en el Museo Arqueológico de Zaragoza, en Ampurias, en Badalona y en Pompeya.

24. CONCLUSIONES

El arte romano proporciona modelos de teselaciones, de gran interés desde un punto de vista geométrico, por sus "simetrías" (en el sentido usual de transformaciones por las que son invariantes). Además de las simetrías habituales en decoración: lineal (frisos periódicos), bilineal (mosaicos periódicos) y radial (rosetones), hemos encontrado modelos con simetría proporcional (invariantes por homotecias), que enriquecen el grupo de transformaciones en las que la figura es invariante.

De acuerdo con lo anteriormente indicado, rosetones como el de la fig 23.1 no sólo ayudan a estudiar el grupo (3), de rotaciones y homotecias concéntricas, sino que también ayudan a dotar de significado geométrico al coeficiente de torsión de un grupo abeliano de tipo finito sencillo.

Por otra parte, a nivel elemental, los rosetones invariantes por homotecias son un excelente modelo para estudiar proporcionalidad geométrica.

Notemos finalmente que en las teselaciones del arte romano hemos hallado modelos de 16 (de los 17) grupos de simetría del plano. No hemos encontrado ningún mosaico romano del grupo P31M. Queda abierto el problema de su (poco probable) existencia. Roma y Mérida son las ciudades romanas donde hemos encontrado modelos de más tipos. En Mérida hemos hallado modelos de 10 (de los 17) grupos de simetría del plano, así como de los 7 tipos de frisos y de los dos tipos de rosetones. Concretamente, del grupo P3 sólo hemos hallado modelo en Mérida.

BIBLIOGRAFIA

[Alv] **J.M. Alvarez Martínez:** *Mosaicos Romanos de Mérida. Nuevos Hallazgos.* Ministerio de Cultura 1990

[Arm] **M.A. Armstrong:** *Groups and Symmetry.* Springer 1988

[Bai] **J.M. Bairrao Oleiro:** *Corpus de Mosaicos Romanos de Portugal.* Conimbriga 1992

[Bal] **C. Balmelle et al.:** *Le décor geométrique de la mosäique romaine.* Picard 1985

[Bar] **X. Barral i Altet:** *Les Mosaïques Romaines et Médiévales de la Regio Laietana.* Instituto de Arquelogía y Prehistoria 1978

[Ber] **M.Berger:** *Geometry I.* Springer 1987

[Bla] **A. Blanco Freijeiro et al.:** *Corpus de Mosaicos Romanos de España.* Fascículos 1 a 10. Instituto Español de Arqueología "Rodrigo Caro" del C.S.I.C. 1978

[Cor] **A. J. Cortes:** *Villas Romanas de Palencia.* Diputación de Palencia 1992

[Cox] **H.S.M. Coxeter:** *Introduction to Geometry.* Wiley 1969

[G-R] **Garbayo Moreno - Roanes Lozano:** *Implementación de un paquete de dibujo de rosetones (Grupos de Leonardo).* En este mismo boletín.

[G-S] **B. Grünbaum - G.C. Shephard:** *Tilings and Patterns.* Freeman 1987

[Lan] **J. Lancha:** *Mosaïques Geométriques.* L'Erma di Bretscheneider. 1977

[Mar] **G.E. Martin:** *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry.* Springer 1982

[Mon] **J.M. Montesinos:** *Caleidoscopios en la Alhambra.* Boletín núm. 13 de la Sociedad "Puig Adam" 1987

[Mul] **E. Muller:** *Gruppentheoretische und Strukturanalytische Untersechungen der maurischen Ornamente aus der Alhambra in Granada.* Berlin 1944

[N-S] **V.V.Nikulin - I.R.Shafarevich:** *Geometries and Groups.* Springer 1987

[Ova] **A. Ovadiah:** *Geometric and floral patterns in Ancient Mosaics.* L'Erma di Bretscheneider. Roma 1980

[Per] **R. Pérez Gómez:** *Grupos p2, pg, pgg y p3m1 en la Alhambra.* Epsilon 1987

[R-R] **Roanes Macías - Roanes Lozano:** *Simulación Didáctica de Grupos de Simetría en el Arte Hispano-Musulmán.* Public. Pablo Montesino 1993

[Sal] **G. Salies:** *Untersuchungen zu den geometrischen Gleiderungschemata römischer Mosaiken.* Bonner Jahrbücher Band (174) 1974

[Sch] **D. Schattschneider:** *The plane symmetry groups: their recognition and notation.* Am. Math. Monthly, vol. 85, núm. 6 (439-450) 1978

[Scm] **K. Schmelzeisen:** *Römischer Mosaiken der Afrika Proconsularis.* Verlag Peter Lang GmbH 1992

[Wey] **H. Weyl:** *Symmetry.* Princeton University Press 1980

Al - Andalus
La Ciencia Islámica en España

por Concepción Romo Santos
Catedrática de Algebra
Universidad Complutense de Madrid

Introducción

En el extraordinario marco de la Alhambra de Granada ha estado expuesta durante la primavera de 1.992 "Al-Andalus. Las artes islámicas en España". Esta exposición es un testimonio de la brillante cultura islámica que ejerció una influencia preeminente en la península Ibérica desde el año 711 hasta 1.492.

El objetivo de este trabajo es el estudio de la ciencia islámica en España a través de las obras expuestas en la Alhambra de Granada.

1.- La originalidad de la ciencia árabe

El primer tratado de trigonometría europeo fué escrito por Ibn Mu ad de Jaén. Hay que señalar que nuestro hombre supo plantear y resolver el problema del triángulo polar,que tanto interés tuvo después para la navegación, y estableció gran número de relaciones trigonométricas que fueron utilizadas durante siglos-Regiomontano,por ejemplo,se benefició de las mismas-,y solo fué superado,y a fines del siglo XVI,por el francés Francois Viete 1.540-1.603

Pero quienes más cuenta se dieron de las discrepancias entre la teoría y la práctica fueron los astrónomos, que pretendían poder predecir con sus tablas la posición de un astro en el cielo en un momento cualquiera del futuro. Más como podían comprobar que sus previsiones no se cumplían, realizaron más y más observaciones y construyeron nuevas tablas (toledanas, de Jaén, alfonsíes), al tiempo que procuraban aumentar la precisión del utillaje astronómico. Así, Ibrahim b. Said al- Sahli (el de Castellón de la Plana) construyó uno o dos globos celestes en los que aparecen bastante bien delineadas las constelaciones; también es autor de bastantes astrolabios.

Ante la gran demanda que de estos aparatos hacían los astrólogos -en el siglo XI soberanos como Alcádir de Toledo y Al-Mutamid de Sevilla creían en esta pseudociencia-, los astrónomos inventaron aparatos que pesaran menos y fueran utilizables en cualquier parte del mundo, es decir, que fueran universales : Azarquiel dibujó la lámina de la azafea;

Ali b. Say, la lámina universal; Ibn al- Samh, Azarquiel y Umayya b. Abi Salt construyeron unos aparatos que hoy denominamos ecuatorios y que permiten calcular, con cierta exactitud, posiciones planetarias sin necesidad de recurrir a las tablas astrónomicas.

Sus precedentes más claros son los planetarios y los astrolabios de engranaje. Su máximo logro científico consistió en que Azarquiel se dio cuenta de que podía conseguir una mayor exactitud al determinar la posición de Mercurio si, apartandose del modelo ptolemaico, representaba el deferente de este planeta por un óvalo.Esta realización gráfica de Azarquiel constituye el primer caso claro e indiscutible de superación de una astronomía de círculos (aristotélico- ptolemaica) para pasar a una astronomía basada en otro tipo de curvas. Tanto Georg von Peurbach (1.423-1.461) como Erasmus Reinhold (1.511-1.553) conocieron la obra de Azarquiel, quien pudo así inflir en el óvalo ensayado por Johannes Kepler (1.571-1.630) para Marte, antes de pensar en una elipse.

Para determinar la posición de un astro se requiere que los cálculos sean hechos para un momento dado, y para fijar éste se necesita el auxilio de un reloj: la Antigüedad clásica y los árabes del emirato independiente (Abbas b. Firnas) conocieron los gnomones, o relojes de sol, y las clepsidras. Pero el desarrollo de éstas últimas se debió a las manos de un artífice andalusí de la época taifa, Ahmad o Muhammad b. Jalaf al- Muradi, quien inventó complicados mecanismos (alguno ha sido ya reconstruido) en los que al flujo motor del agua se une el mercurio que, en el interior de los brazos de una balanza, dispara (histéresis) el sistema y pone en marcha mecanismos subsidiarios.

A través de éste resumen podemos comprobar que a finales del siglo XI, Al- Andalus estaba a la cabeza de la ciencia europea.

2. Astrolabios, Globos celestes y Láminas universales expuestos en la Alhambra de Granada.

Astrolabio de Ahmad b. Muhammad al- Naqqas

Periodo de taifas, fechado en 472 / 1.079-80
Latón
Diámetro 11,5 cm
Germanisches Nationalmuseum
Nuremberg
W.I. 353

El astrolabio, unido a un aparato de observación para medir las altitudes celestes, permite introducir la altitud recientemente medida y ajustar el instrumento para, en función de la latitud en que se halla el usuario, representar la configuración del cielo en ese instante. Los musulmanes heredaron este tipo de instrumento de cálculo, el astrolabio planisférico, de sus predecesores helénos y lo desarrollaron de casi todas las formas concebibles.

El astrolabio surge a partir de una proyección estereográfica, desarrollada primero por Hiparco de Rodas hacia el año 150 a.C. La parte norte de la esfera celeste, es decir, la parte visible en el hemisferio norte, se proyecta en el plano del ecuador celeste desde el polo sur celeste.

El astrolabio estándar está compuesto por dos partes principales: una celeste y otra terrestre. Primero, hay una red, o araña, con pínulas que representan la posición de algunas estrellas fijas importantes y un anillo que representa la eclíptica, el recorrido anual del Sol alrededor de las estrellas. Segundo hay una lámina para latitud determinada en la que están marcados el meridiano y el horizonte local. En la lámina aparecen también curvas que señalan la altitud y un aparato ortogonal que indica el acimut. Cuando la red - la parte celeste - gira sobre la lámina - la parte terrestre - se simula la rotación aparente del sol y de las estrellas en el cielo respecto al horizonte del observador.

Entre los siglos IX y XVI se redactaron docenas de tratados árabes sobre el uso del astrolabio, y conservamos cientos de astrolabios islámicos. El astrolabio se transmitió a Europa a través de Al- Andalus y se convirtió en el instrumento europeo más popular de la Edad Media y del Renacimiento.

El uso principal del astrolabio, además de ser un modelo del universo abarcable con una sola mano, era el cómputo del tiempo.

Este astrolabio fue hecho en Zaragoza por Ahmad b. Muhammad al- Naqqas.

Globo celeste atribuido a Ibrahim b. Said al- Sahli.

Periodo de taifas, ca. 1.085
Latón
Diámetro 19 cm. Bibliothèque Nationale, Département des Cartes et Plans, París.
N. Res. Ge. A. 325.

Un globo celeste es un instrumento que sirve para objetivos didácticos generales. Se puede ver de un golpe de vista las posiciones de las estrellas en relación con la eclíptica. Las estrellas y la eclíptica se representan en el exterior de una esfera de radio arbitrario colocado dentro de un anillo horizontal que representa el horizonte. El eje de la esfera se fija en el plano del meridiano, o plano vertical norte-sur ; pero su inclinación respecto al horizonte se puede ajustar de forma que el conjunto representa al cielo en relación con el horizonte de cualquier localidad. Una rotación de la esfera sobre su eje corresponde a un periodo de tiempo de 24 horas. Por último diremos que es uno de los dos globos celestes islámicos más antiguos.

Lámina universal de Muhammad b. Hudayl

Periodo almohade, fechado en 650 / 1.252-53
Latón
Diámetro 17 cm
Real Academia de Ciencias y Artes
Barcelona

En el siglo XI los astrónomos musulmanes en Toledo desarrollaron una lámina universal cuyas marcas se relacionan con las de una lámina de astrolabio para una latitud cero, siendo por lo tanto un astrolabio que funcionaría para cualquier latitud con una sola lámina.

Astrolabio con lámina universal y láminas astrológicas de Ahmad b. Husayn b. Baso

Periodo nazarí , fechado en 704 / 1.304-5.
Latón, diámetro 16,5 cm.
Linton Collection, Point Lookout, NewYork.

El astrónomo Alí b. Jalaf al-Sayyar inventó el astrolabio universal, instrumento que solo conocemos gracias a la compilación andalusí titulada Libros del Saber, realizada en el siglo XIII.

Parece ser que ni el astrolabio universal de Alí b. Jalaf ni su tratado sobre la utilización del mismo fueron conocidos en el mundo musulmán fuera de Al- Andalus y del Magreb. El instrumento consiste esencialmente en un conjunto de marcas que pueden rotar una sobre otra, el cual puede usarse para hacer la conversión de cualquier sistema de coordenadas celestes a otro; por eso es particularmente útil para resolver problemas de cálculo horario en cualquier latitud. El mismo instrumento fué ·reinventado·en Alepo por Ibn al Sarray a principios del siglo XIV y solo se conserva un ejemplar diseñado y construido por él en el Museo Benaki de Atenas. En el siglo XIV el constructor de astrolabios Ahmad b. Husayn b. Baso, miembro de una importante familia de astrónomos de la mezquita aljama de Granada, desarrolló una modificación de la lámina para usarla con una red astrólabica estandard. Se conocen tres astrolabios de este tipo firmados por Ibn Baso, siendo éste uno de ellos. Representa la culminación de los instrumentos astronómicos de al- Andalus

---

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X *los que interesen)*

3	4	10	26	31
☐	☐	☐	☐	☐

32	33	34	35	36
☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo.

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27 y 29 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matematicas
Aptdo. 9479 - 28.080 -MADRID.

UNOS TEOREMAS SOBRE DOS FIGURAS HOMOTÉTICAS

por Juan Bosco Romero Márquez
Profesor asociado de la Universidad de Salamanca
Dep. de Didáctica de las Matemáticas y de
Didáctica de las Ciencias Experimentales.
Escuela de Formación del Profesorado de Avila
I.B. "Isabel de Castilla"

En este artículo presentamos unos teoremas elementales que complementan y generalizan a los teoremas ya enunciados en nuestro trabajo [1], sobre un par de triángulos homotéticos.

Debido al caracter elemental de las demostraciones de los teoremas que presentamos aquí, pensamos que este tópico podría ser incluido en la programación de los últimos cursos de la Enseñanza Media y, con los alumnos de las escuelas de Formación del Profesorado, como una aplicación interesante de Algebra - Geometría Vectorial, es decir, de Algebra Lineal.

Completaremos este artículo proponiendo una serie de problemas sobre triángulos y polígonos convexos que, sugeridos por las configuraciones de las figuras tratadas en él, y mediante el uso del concepto de baricentro de un triángulo, nos permite estudiar nuevos triángulos semejantes al dado, así como los máximos y mínimos de la función o razón de homotecia que aparece en cada caso.

I. - Comenzaremos esta sección con el enunciado de nuestro teorema:

Teorema 1: Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos planos homotéticos. Definimos los puntos A'', B'', C'', respectivamente, como intersección de los pares de rectas: $A'' = BC' \cap CB'$, $B'' = AC' \cap CA'$, $C'' = AB' \cap BA'$.
Entonces tenemos:

a) Los puntos $A''B''C''$ forman un nuevo triángulo homotético a los triánglos ABC y $A'B'C'$.

b) Si designamos con G, G' y G'', respectivamente, a los centros de gravedad o baricentros de los triángulos ABC, $A'B'C'$ y $A'',B''C''$, con X, Y y Z, a los centros de las homotecias que transforman el triángulo ABC en el $A''B''C''$, el triángulo $A'B'C'$ en el $A''B''C''$ y el triángulo ABC en el $A'B'C'$, respectivamente:
Entonces se verifica que los puntos G, G', G'', X, Y y Z, son colineales.

Demostración: a) *(Método vectorial)* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el origen O de vectores de posición del plano es el punto Z, centro de la homotecia que transforma el triángulo ABC en el $A'B'C'$. Sea k la razón de la homotecia anterior, un número real distinto de 0, 1 y -1 .

Designemos por G, G' y G'' los centros de gravedad, respectivamente, de los triángulos ABC, $A'B'C'$ y $A''B''C''$.

En todo lo que sigue, si X es un punto cualquiera del plano, designaremos con x a su vector de posición respecto al origen O.

De las hipótesis dadas, resulta claro que podemos escribir:

$$a' = k\,a \quad ; \quad b' = k\,b \quad ; \quad c' = k\,c \quad .$$

Un cálculo simple con las ecuaciones vectoriales de las rectas que definen los puntos A'', B'', C'', respectivamente, obtenemos lo siguiente:

$$a'' = (k/(k+1))(b+c) \;,\quad b'' = (k/(k+1))(a+c) \;,\quad c'' = (k/(k+1))(a+b) \quad .$$

y como además tenemos:

$$b''-a'' = (k/(k+1))(a-b) \;,\; c''-a'' = (k/(k+1))(a-c) \;,\; c''-b'' = (k/(k+1))(b-c)$$

de aquí deducimos que los puntos A'', B'', C'' forman un triángulo homotético al triángulo ABC.

b) La definición de centro de gravedad de un triángulo nos permite escribir, para el $A''B''C''$, lo siguiente:

$$g'' = (a''+b''+c'')/3 = (k/(k+1))(2a+2b+2c)/3 = (2k/(k+1))\,g \;,$$

$$g'' = (1/(k+1))(2a'+2b'+2c')/3 = (2/(k+1))\,g' \quad ,$$

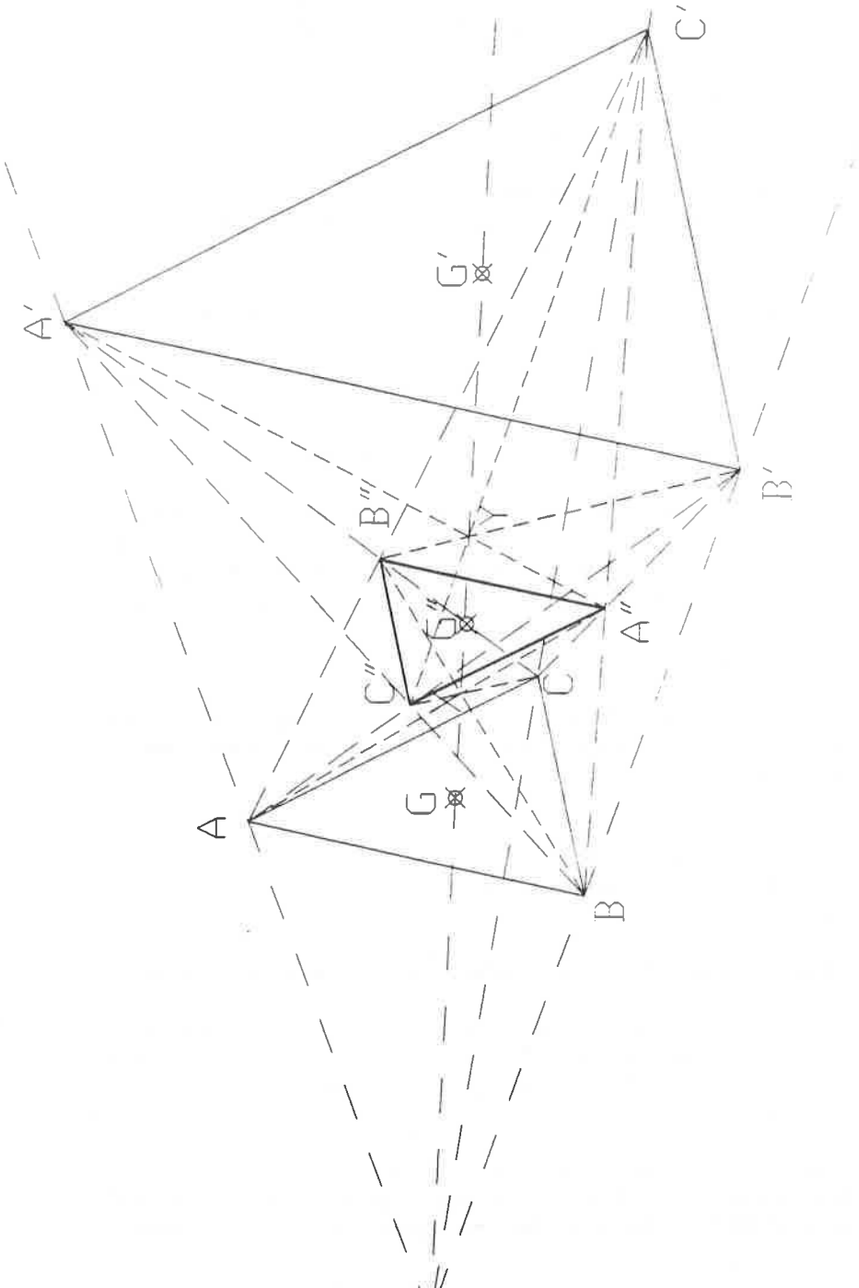
con lo que $g' = k\,g$.

De otra parte, el siguiente cálculo vectorial simple, similar al realizado en la parte **a)**, nos da que:

Siendo X el punto donde concuren AA'', BB'' y CC'', podemos escribir:

$$x = a + t\,(a''-a) = b + s\,(b''-b) \;,$$

para los parámetros t y s reales a determinar.



El vector de posicion de C será combinación lineal de de los vectores independientes a y b, por lo que existirán dos números p y q tales que $c = pa + qb$. Al igualar los coeficientes de a y de b en las dos expresiones de x, teniendo en cuenta las obtenidas antes para a'' y b'', obtenemos el siguiente sistema lineal en las incógnitas t y s (en el que se ha designado con m, para simplificar, al cociente $k/(k+1)$):

$$\begin{aligned} 1 &= t\,(1 - pm) + s\,(1+p)m \\ 1 &= t\,(1+ q)m + s\,(1 - qm) \end{aligned} \qquad [1]$$

Este sistema lineal, resuelto para t y s, nos da como solución (con la hipótesis adicional de que el determinante del sistema, $D_x = D(A_X) = (1+m)(1-m(1+p+q))$ sea distinto de cero) :

$$t = s = 1/(1 + m)\,, \qquad \text{o sea:} \qquad t = s = (k + 1) / (2k + 1)\,.$$

Finalmente, llegamos a que el vector de posicion del punto X viene dado por la expresión:

$$x = (k / (2k + 1))\,(a + b + c) = (3k / (2k + 1))\,g\,.$$

Similarmente, procediendo de forma análoga para el punto Y donde concurren las rectas $A'A''$, $B'B''$ y $C'C''$ (con la hipótesis adicional de que el determinante del sistema obtenido para t y s, $D_y = D(A_Y) = (k+m)(k-m(1+p+q))$, no sea nulo), llegamos a la conclusión:

$$y = (3k / (k+2))\,g$$

Por tanto, los vectores de posición de los puntos Z, X, Y, que son los 0, x, y, respectivamente, son linealmente dependientes, lo que significa que esos puntos son colineales, es decir, están en la misma recta.

De todo lo anterior deducimos que los puntos G, G', G'', X, Y, Z, son colineales y están todos en la recta vectorial generada por el vector g.

Observaciones: Podemos considerar los casos límites siguientes:

a) Si $k = 1$, entonces $a'' = (b + c)/2$, $b'' = (a + c)/2$, $c'' = (a + b)/2$. En este caso, los triángulos ABC y $A'B'C'$ coinciden y el centro de homotecia está en el infinito, es decir, la homotecia degenera en una traslacion.

b) Si k se hace infinito, entonces, $a'' = b+c$, $b'' = a +c$, $c'' = a+b$. Solo tenemos el centro de homotecia que transforma el triángulo ABC en el $A''B''C''$. El triángulo $A'B'C'$ se reduce a un punto en el infinito.

c) El sistema lineal $[1]$ en t y s, que nos determina el punto X y, de forma análoga, el que nos determina el punto Y:

$$\begin{aligned} k &= (k - p\,m)\,t + (1+p)\,m\,s \\ k &= (1+q)\,m\,t + (k - q\,m)\,s \end{aligned} \qquad [2]$$

pueden ser discutidos, en cuanto a la existencia de soluciones, mediante el teorema de Rouché-Frobenius, según los valores de los parámetros o datos m, p y q, siendo interesante estudiar el significado geométrico de las condiciones obtenidas.

d) Las matrices:

$$A_X = \begin{pmatrix} 1 - p\,m & (1+p)\,m \\ (1+q)\,m & 1 - q\,m \end{pmatrix}\,, \qquad A_Y = \begin{pmatrix} k - p\,m & (1+p)\,m \\ (1+q)\,m & k - q\,m \end{pmatrix}$$

pueden ser interpretadas como las que definen transformaciones lineales u homomorfismos en $\mathbf{R}^2$, con base o referencia $Z = O$, a y b. Un buen ejercicio complementario sería estudiar si son o no biyectivas, observar los rangos de esas matrices y los de las orladas con los términos independientes. También estudiar sus valores propios y ver la relación de éstos con los parámetros.

Ejercicio: Calcular la razón doble de los puntos G, G', X, Y.

Tomando como origen el punto $Z = O$ y como unidad de medida el módulo del vector g, en la recta que contiene a ese origen, a los puntos citados y al G'', resulta, para los vectores de posición de esos puntos:

$$g' = k\,g\,; \quad g'' = (2k/(k+1))\,g\,; \quad x = (3k/(2k+1))\,g\,; \quad y = (3k/(k+2))\,g$$

con lo que la razón doble $(G'\,G''\,X\,Y)$ será:

$$\frac{3k/(2k+1) - 2k/(k+1)}{3k/(2k+1) - k} : \frac{3k/(k+2) - 2k/(k+1)}{3k/(k+2) - k}$$

o sea, simplificando, $-1/2$ (siempre que k sea distinto de 0, 1, -1, -2 y $-1/2$). Estudiar los casos límites correspondientes y el de k infinito.

Problemas. 1. En las condiciones del Teorema 1º, calcular el cociente entre las razones simples de las dos ternas de puntos G, G', G'' y X, Y, Z.

2. Sean MNP, $M'N'P'$, y $M''N''P''$ los triángulos de puntos medios, o de Varignon, de los triángulos ABC, $A'B'C'$ y $A''B''C''$, respectivamente. Probar que: El triángulo $A''B''C''$ es, en cierto sentido, un triángulo de Varignon medio de los triángulos ABC y $A'B'C'$.

El teorema 1º se puede generalizar para otros polígonos planos, como cuadriláteros, pentágonos, etc. Así, tenemos el siguiente teorema para cuadriláteros:

Teorema: Sean $ABCD$ y $A'B'C'D'$ dos cuadriláteros homotéticos. Definimos el cuadrilátero $A''B''C''D''$ cuyos vértices son, respectivamente, los puntos de intersección de las diagonales de los trapecios $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$ y $ABB'A'$. Sean G, G', G'' los baricentros o centros de gravedad de los cuadriláteros $ABCD$, $A'B'C'D'$ y $A''B''C''D''$, respectivamente. Sean $MNPQ$ y $M'N'P'Q'$, los paralelogramos de puntos medios, o de Varignon, de los cuadriláteros $ABCD$ y $A'B'C'D'$, respectivamente. Entonces se verifica:

a) El cuadrilátero $A''B''C''D''$ es un paralelogramo, que llamaremos de Varignon, o medio, de los paralelogramos $MNPQ$ y $M'N'P'Q'$, respectivamente.

b) Los centros de gravedad G, G' y G'' son colineales, es decir, están en la misma recta.

La demostración del teorema es análoga a la del Teorema 1.

II. - En esta sección demostramos otros teoremas y proponemos generalizaciones del teorema anterior, además de las siguientes conjeturas:

a) ¿ Son las dos condiciones del teoreme anterior equivalentes ?

b) ¿ Se puede generalizar el teorema anterior a un poligono plano de n lados ?

Comenzaremos con el siguiente:

Teorema 2,1 : Sea el triángulo OAB y tracemos una recta paralela al lado AB. Sean A' y B' los puntos en los que esa recta corta a los lados OA y OB. Sean G, G' los respectivos centros de gravedad de los triángulos OAB y $OA'B'$ (homotéticos en una homotecia de centro O y razón k); sea $G^\wedge$ el centro de gravedad del cuadrilátero $A'ABB'$ (centro de gravedad de cuatro masas iguales situadas en sus vértices) y sea G^* el punto de intersección de las rectas que contienen a las diagonales del cuadrilátero.

Entonces, los puntos G, G', $G^\wedge$ y G^* son colineales.

La demostración es similar a la hecha en el teorema anterior. Basta elegir como origen de vectores el vértice O del triángulo dado ABC. Entonces podemos escribir (continuando con el convenio de representar con una minúscula, el vector de posición de un punto representado con la misma letra mayúscula) que:

$$a' = k\,a \quad ; \quad b' = k\,b \quad ; \quad c' = k\,c \quad .$$

De la definición de centro de gravedad, obtenemos:

$$g = (a + b + 0) / 3 = (1/3)\,(a + b) \; ; \; g' = (a' + b' + 0) / 3 = (k/3)\,(a + b) \; ;$$

$$g^\wedge = (a + b + a' + b') / 4 = ((k+1)/4)\,(a + b) \, .$$

De otra parte, utilizando las ecuaciones vectoriales de las rectas AB' y $A'B$, obtenemos, para su punto de intersección G^*, el vector de posición:

$$g^* = (k/(k+1))\,(a + b) \quad .$$

Resulta así que los vectores g, g', $g^\wedge$, g^*, tienen todos la dirección del vector $u = a + b$, o sea la de la diagonal del paralelogramo definido por los lados OA y OB, con lo que el teorema queda demostrado.

Ejercicio: Estudiar la razón doble de los puntos G, G', $G^\wedge$ y G^*.

Teorema 2.2 : Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos homotéticos, siendo O el centro de la homotecia. Sean G_a, G'_a, $G^\wedge_a$ y G^*_a los puntos definidos con esas notaciones en el teorema anterior, aplicado a los triángulos OBC, $OB'C'$ (correspondientes al lado a = BC) y sean $G_b, G'_b, G^\wedge_b, G^*_b$ y $G_c, G'_c, G^\wedge_c, G^*_c$ los puntos definidos de forma análoga para los pares de triángulos OAC, $OA'C'$ y OAB, $OA'B'$.

Entonces, los triángulos $G_aG_bG_c$, $G'_aG'_bG'_c$, $G^\wedge_aG^\wedge_bG^\wedge_c$ y $G^*_aG^*_bG^*_c$ son triángulos homotéticos al ABC.

La demostración se obtiene fácilmente como consecuencia del teorema 2.1 y la dejamos como ejercicio.

Observaciones : De todo lo anterior, deducimos que:

a) Dos triángulos homotéticos directamente generan, con las construcciones descritas en los teoremas 2.1 y 2.2, un triángulo homotético inverso u opuesto.

b) Dos triángulos homotéticos inversos generan, con dichas construcciones, un triángulo homotético directo con uno de ellos e inverso con el otro.

Conjetura: ¿ Cómo se generalizarían todos los teoremas anteriores a los casos de líneas poligonales abiertas o cerradas ?

c) Estudiar estos teoremas desde los puntos de vista afín y proyectivo.

d) Generalizarlos, cuando el cuerpo base no sea el cuerpo de los números reales.

e) La generalización de estos teoremas, el **1** especialmente, a cuadriláteros y polígonos, ha sido publicada por el autor, en forma de problemas, en la revista *CRUX Mathematicorum* . En la sección siguiente exponemos algunos de estos problemas. No damos su resolución detallada por no alargar innecesariamante este artículo, ya que no tienen excesiva dificultad.

III. Otros problemas y conjeturas.

En esta sección recogeremos un resultado interesante relativo a un triángulo ABC , un punto ceviano P del triángulo y la semejanza que existe entre determinados triángulos que se construyen a partir de P y de sus cevianas:

Teorema 3: Sean ABC un triángulo y P un punto arbitrario de su plano. Sea $A'B'C'$ el triángulo ceviano determinado por los puntos A' de BC , B' de CA y C' de AB , tales que las tres rectas cevianas AA' , BB' y CC' son concurrentes en P. Consideremos ahora los triángulos $AC'B'$, $BA'C'$, $CB'A'$ (ver figura 2ª) y los pares de puntos B_1, A_2 ; C_1 , A_3 ; C_2 , B_3 , situados respectivamente en los lados AB , CA y BC , tales que

$$B'B_1 \parallel CC' \quad , \quad C'C_1 \parallel BB' \quad , \quad A'A_2 \parallel CC' \ ,$$
$$C'C_2 \parallel AA' \quad , \quad A'A_3 \parallel BB' \quad , \quad B'B_3 \parallel AA' \ .$$

Definamos, por último, los puntos:

P_1 , de intersección de $B'B_1$ con $C'C_1$,
P_2 , de intersección de $A'A_2$ con $C'C_2$,
P_3 , de intersección de $A'A_3$ con $B'B_3$.

Entonces, las rectas $A'P_1$, $B'P_2$ y $C'P_3$, son concurrentes en un punto P^* , al que podemos llamar *conjugado del P respecto al triángulo ABC*. y se cumple:

El triángulo $P_1P_2P_3$ es simétrico, con una simetría de centro en P^*, del $A'B'C'$.

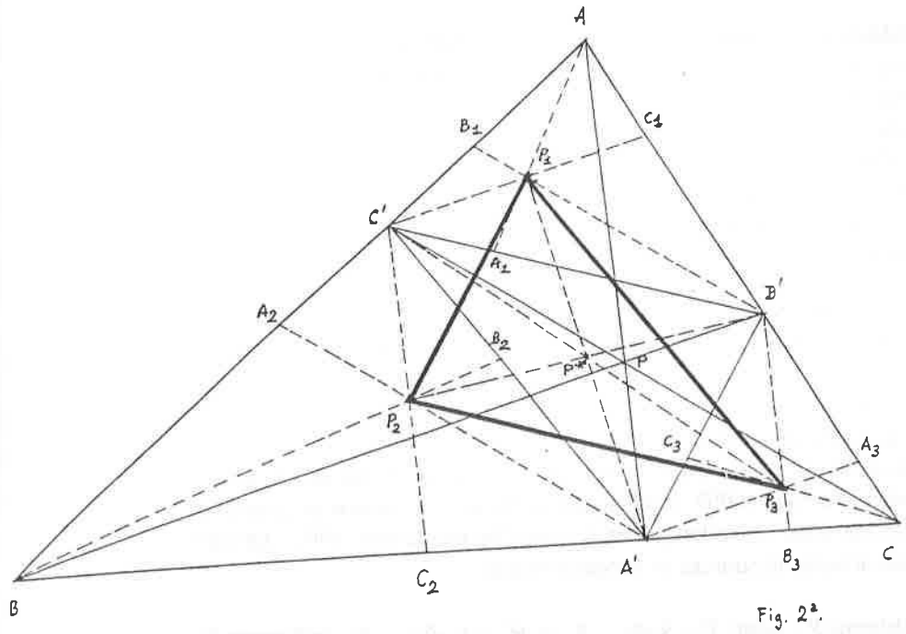


Fig. 2ª.

Tomando el sistema de coordenadas { A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ } , de modo que sea $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, resulta fácil calcular las coordenadas de P^* a partir de las de P , lo que se deja como ejercicio.

Observaciones, comentarios, problemas y conjeturas:

1) Enunciar e interpretar el último teorema para el caso particular en que el punto P sea un punto notable del triángulo: ortocentro, baricentro, incentro, etc.

2) Determinar todos los puntos notables del triángulo que sean autoconjugados, es decir para los que $P = P^*$.

3) En el sistema de referencia citado, determinar las coordenadas de los puntos A_1 , B_2 , C_3 de la figura 2ª, relativa al teorema anterior.

Problema 1º: Sean ABC un triángulo y P un punto arbitrario de su plano. Sea $A'B'C'$ el triángulo ceviano asociado con P . Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que:

a) $A'B'C'$ es semejante por una homotecia al triángulo ABC.
b) $AC'B'$, $BA'C'$ y $CB'A'$ sean triángulos semejantes al ABC.
c) Los triángulos $AC'B'$, $BA'C'$, $CB'A'$ y $A'B'C'$ sean semejantes al triángulo ABC.

Problema 2º: Sea $\mathbf{P} = A_1A_2 \ldots A_n$ un polígono de n lados. Para cada vértice $i = 1, 2, \ldots, n$, fijo, consideremos todos los segmentos determinados por los puntos A_i y A_j, con $i \neq j$. Sea G_{ij} (para cada $j = 1,2, \ldots, n$; $j \neq i$), el punto medio (centro de gravedad) del segmento A_iA_j. Para cada A_i, los puntos G_{ij} forman un polígono de $n-1$ vértices, cuyo centro de gravedad designaremos con $A^{(1)}{}_i$.

(Como antes dijimos, entendemos por centro de gravedad de un polígono de n vértices, al de n masas iguales situadas en ellos).

Probar que:
a) La recta $A^{(1)}{}_i\, A^{(1)}{}_j$ es paralela a la A_iA_j, para todos los $i \neq j$.
b) El centro de gravedad $G^{(1)}$ del polígono $\mathbf{P}^{(1)}$, cuyos vértices son los puntos $A^{(1)}{}_1, A^{(1)}{}_2, \ldots, A^{(1)}{}_n$, coincide con el centro de gravedad G del polígono dado, **P**.
c) A partir del polígono $\mathbf{P}^{(1)}$, tomado como nuevo **P**, se puede formar análogamente otro $\mathbf{P}^{(2)}$, y así sucesivamente. Los centros de gravedad de todos ellos coinciden y las sucesiones de puntos $A^{(n)}{}_i$, tienden todas al punto G cuando n tiende a infinito.

Problema 3º: Sean $\mathbf{P} = A_1A_2 \ldots A_n$ y $\mathbf{P'} = A'_1A'_2 \ldots A'_n$ polígonos de n lados, homotéticos. (ver Figura 3ª) .Asociados a ellos definimos los siguientes polígonos:
$\mathbf{P''} = A''_1A''_2 \ldots A''_n$, siendo A''_{i+1} la intersección de las rectas $A_iA'_{i+1}$ y $A_{i+1}A'_i$ (con $i = 1,2,\ldots,n$ y conviniendo en que $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$, etc.)
$\mathbf{P^*} = A^*_1A^*_2 \ldots A^*_n$, siendo A^*_{j+2} el punto medio de A_j y A_{j+1} (con $j = 1, 2, \ldots, n$ y convenio análogo al anterior).
$\mathbf{P^{**}} = A^{**}_1A^{**}_2 \ldots A^{**}_n$, siendo A^{**}_{j+2} el punto medio de A'_j y A'_{j+1} (id. id.).

Probar que:
a) Los polígonos **P** y **P''** son semejantes en una semejanza, de la que se determinará su centro y su razón.
b) **P''** es el polígono de Varignon medio de los poligonos **P*** y **P****.

Nota: Un caso interesante es el de que los polígonos **P** y **P'** sean regulares, ya que entonces podemos calcular la razón y ángulo de la semajanza..

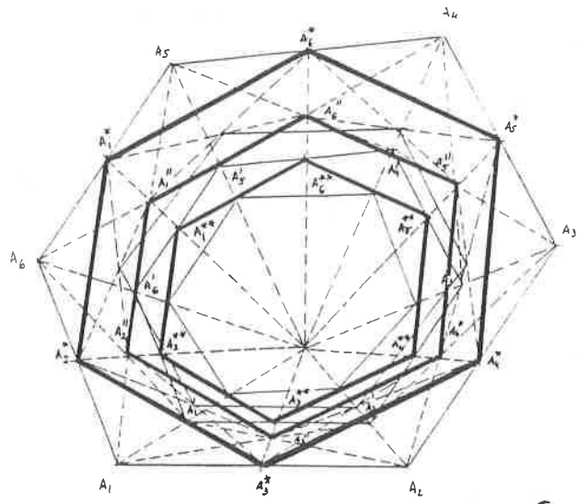


Fig. 3ª.

Problema 4º: Sea $\mathbf{C} = \{ P_1, P_2, \ldots, P_n \}$ un conjunto de puntos afínmente independientes y sea $\mathbf{C'} = \{ P'_1, P'_2, \ldots, P'_n \}$, con $P'_i = r\,P_i$ para $i = 1,2,\ldots,n$, siendo r un número real no nulo (es decir, **C'** homotético de **C**).

Construimos los siguientes conjuntos:
$\mathbf{C''} = \{ P''_1P''_2 \ldots P''_n \}$, siendo P''_{i+1} la intersección de las rectas $P_iP'_{i+1}$ y $P_{i+1}P'_i$ (con $i = 1,2,\ldots,n$ y conviniendo en que $P_{n+1} = P_1$, $P_{n+2} = P_2$, etc.).
$\mathbf{P^*} = \{ P^*_1P^*_2 \ldots P^*_n \}$, siendo P^*_{j+2} el punto medio de P_j y P_{j+1} (con $j = 1, 2, \ldots, n$ y convenio análogo al anterior).
$\mathbf{P^{**}} = \{ P^{**}_1P^{**}_2 \ldots P^{**}_n \}$, siendo P^{**}_{j+2} el punto medio de P'_j y P'_{j+1} (id. id.).

Probar que:
a) **C*** , **C''** , **C**** son conjuntos homotéticos y
$$P''_{j+2} = (r\,P^*_{j+2} + P^{**}_{j+2}) / (r + 1). \qquad (r \neq -1)$$
b) Los centros de gravedad o baricentros de los conjuntos **C** , **C'** y **C''** son colineales.
c) Si $P \in \mathbf{C''}$, entonces $P \in (2r/(1+r))\,\mathbf{C}$, esto es, que $\mathbf{C''} \subseteq (2r/(1+r))\,\mathbf{C}$.
¿ Cuándo la inclusión se convierte en igualdad ?

- - - - - -

BIBLIOGRAFÍA :

[1] **J.B. Romero Márquez:** *Semejanza baricéntrica entre un par de triángulos homotéticos: Triángulos baricéntricos.* Ver problema 1480, propuesto y resuelto por el autor en **CRUX Mathematicorum** , Vol 15. nº 8, October, 1989.

[2] **H.S.M. Coxeter:** *Fundamentos de Geometría.* Limusa Wiley. Méjico, 1967.

[3] **H.S.M. Coxeter** y **S.L. Greitzer.** *Geometry Revisted.* MAA, 1976. Reciente traducción al castellano en el nº 1 de *La tortuga de Aquiles.*

[4] **D. Hilbert:** *The Fundations of Geometry.* 10th ed. Open Court. La Salle, Il, 1971.

[5] **E.E. Moise:** *Elementary Geometry from Advanced Standpoint.* Addison Wesley. Reading, MA. 1974.

[6] **H.R. Jacobs:** *Geometry.* Freeman. San Francisco, 1974.

[7] **I.M. Yaglom:** *Geometric Trnasformations, I - III.* MAA, 1973.

[8] **C.R. Wylie:** *Fundations of Geometry.* McGraw Hill, N.Y., 1964.

[9] **P. J. Davis:** *Circulant Matrices.* Wiley, NY., 1979.

[10] **H. Eves:** *A Survey of Geometry.* Allyn and Bacon. 1963. En castellano, por Uteha, México, 1969.

[11] **P. Gusiatnikov** y **S. Reznichenko:** *Algebra Vectorial.* Mir, 1988.

[12] **R.A. Johnson:** *Advanced Euclidean Geometry.* Dover, NY., 1964.

[13] **D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric, V. Volonec:** *Recent Advances in Geometry Inequalities.* Kluwer, Dordrecht, 1989.

[14] **P.S. Modenov:** *Problems in Geometry.* Mir. Moscú, 1981.

[15] **P.S. Modenov** y **A.S. Parkhomenko:** *Geometric Transformations.* Academic Press, NY., 1965

[16] **D. Pedoe:** *A course of Geometry for colleges and universities.* Cambridge University Press, 1970.

[17] **Shang-Chung Chou:** *Mechanical Geometry Theorem Proving.* Reidel, Dordrecht, 1988.

[18] **I.F. Sharygin:** *Problems in Plane Geometry.* Mir, Moscú, 1988.

UN FALSO TEOREMA.

José Ruiz Sánchez

I.B. CÁLDERÓN DE LA BARCA
E.T.S.I.I de Madrid

En ciertos textos se enuncia el siguiente

Teorema. *Sea f es una función real de variable real. Si f es inyectiva, derivable en a y $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $b = f(a)$ y se tiene $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.*

He aquí *la demostración.*

Demostración. Como la gráfica de f^{-1} es simétrica de la gráfica de f respecto de la bisectriz Δ del primer cuadrante, la recta simétrica s. respecto de Δ. de la recta tangente t a la gráfica de f en (a, b) es la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto (b, a).

Esto significa que f^{-1} es derivable en b y que $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$, dado que al ser s y t simétricas , respecto de Δ, el producto de sus pendientes (no nulas) es igual a 1. □

Y he aquí un ejemplo que muestra la falsedad del *supuesto* teorema.

Para $n \geq 2$ sea $a_n = \log n$ y $b_n = 1/a_n$. Si $\mathbb{A} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, n \geq 2\}$ y $\mathbb{B}$ es el conjunto de los recíprocos de $\mathbb{A}$ es obvio que $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \complement_{\mathbb{R}}(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$\begin{aligned} f(x) &= x && \text{si } x \in \complement_{\mathbb{R}}(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \\ f(a_{2n}) &= a_n && \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 2 \\ f(a_2) &= b_2 && \\ f(a_{2n+1}) &= b_{2n+1} && \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 1 \\ f(b_n) &= b_{2n} && \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 2. \end{aligned}$$

Esta función es inyectiva, obvio, y derivable en $x = 0$. En efecto, para $x \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ y $x \neq 0$ se tiene $(f(x) - f(0))/(x - 0) = 1$ y para $n \geq 2$

$$\frac{f(b_n) - f(0)}{b_n - 0} = \frac{b_{2n}}{b_n} = \frac{\log n}{\log 2 + \log n}$$

cuyo límite cuando $n \to \infty$ es 1. Así pues, existe $f'(0)$ y vale 1.

Sin embargo la función f^{-1} no es derivable en $x = 0$ pues $\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0$ y

$$f^{-1}(b_{2n+1}) = \log(2n+1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

es decir f^{-1} no es siquiera continua en $x = 0$.

En el enunciado del teorema se olvida algo *esencial*:

A la hipótesis hay que añadir que f sea continua en algún un entorno de a.

Los Premios Extraordinarios de Bachillerato. La Prueba de Matemáticas

por Mª Dolores de Prada Vicente
Catedrática de Matemáticas e Inspectora

El Ministerio de Educación y Ciencia viene convocando tradicionalmente los Premios Extraordinarios de Bachillerato como reconocimiento oficial de los méritos de aquellos alumnos que demuestran una especial preparación en las materias cursadas en dicho nivel educativo.

Los premios correspondientes a este año se convocaron por Resolución de 24 de Septiembre de 1993 y se celebraron el dia 1 de Diciembre en los locales del Instituto de Bachillerato "San Isidro" de Madrid.

Para participar en ellos es requisito imprescindible haber cursado el B.U.P o los tres primeros cursos del Plan experimental de la Reforma de las Enseñanzas Medias y haber obtenido una media de 8.5 en las calificaciones de todos los cursos(dos tercios de sobresalientes como mínimo).

Se trata por tanto de una convocatoria orientada a los alumnos mas brillantes y mas completos.

La prueba consta de 2 ejercicios, que incluye composición, traducción del idioma extranjero cursado y cuestiones o problemas de las siguientes opciones:Matemáticas, Ciencias Naturales, Historia de España y Lengua y Literatura .

El primer ejercicio consta de dos partes, una de ellas destinada a la redacción de un tema de caracter general, histórico o literario; la otra es una traducción directa e inversa de la lengua extranjera cursada por el alumno. Cada una de las partes se califica de 0 a 5 puntos.

El segundo ejercicio consiste en contestar a cuestiones y ejercicios prácticos sobre : Matemáticas, Ciencias Naturales, Historia de España y Lengua y Literatura. Los alumnos deberán elegir dos de estas cuatro opciones y responder a las preguntas planteadas. La puntuación para cada una de las opciones es de 0 a 5 puntos.

La puntuación máxima conjunta es de 20 puntos y se requiere un mínimo de 16 para obtener premio.

En cada provincia se puede conceder un premio por cada 1000 alumnos de la correspondiente promoción. Este año en Madrid eran 38 los premios disponibles. Se asegura el anonimato en la corrección mediante un sistema de plicas, de manera que los

jueces corrigen el ejercicio sin saber quién es sino solamente el número que tiene.
La obtención de este premio, es requisito para optar a uno de los 10 premios Nacionales de Bachillerato ya con dotación económica .
En la convocatoria correspondiente a este año, el ejercicio consitió en :
Una redacción sobre :La generación del 98
Una traducción directa de textos correspondientes a los idiomas: ingles, frances, aleman, portugues e italiano.
El texto de la traducción inversa fué común para todos los idiomas.

El segundo ejercicio consistió en contestar cuestiones relacionadas con Matemáticas, Ciencias Naturales, Historia de España y Lengua y Literatura. Había que elegir dos de estas 4 opciones.

La Prueba de Matemáticas

De los 321 alumnos que se presentaron 117 eligieron la opción de Matemáticas.
El ejercicio de matemáticas constaba de 2 cuestiones:

1. Calcula el valor del número *a* definido por $a=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$ sabiendo que es una solución de la ecuación $x^4-4x^2-x+2=0$

2. a) Demuestra que si x es el lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio unidad, entonces $y=\sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}$ es el lado del polígono regular que, inscrito en dicha circunferencia ,tiene el doble de lados que el primero.

b) Utiliza la relación anterior para obtener una aproximación de π.

Los resultados.

Los alumnos que eligieron matemáticas, deberían contestar a las dos cuestiones para obtener un 5. Los criterios de calificación que se acordaron por los miembros del tribunal que corregían las matemáticas fueron:
Primer ejercicio, máximo 2 puntos
Segundo ejercicio: Parte a) máximo 2 puntos
Parte b) máximo 1 punto.

De los 117 alumnos que eligieron matemáticas, 110 intentaron resolver el primer ejercicio, 81 intentaron resolver la primera parte del segundo ejercicio y solamente 24 intentaron resolver la segunda parte de dicho ejercicio.

Parece, por tanto que los alumnos consideran más fácil el primer ejercicio y mas dificil el segundo, sin embargo al corregir dichos ejercicios nos hemos dado cuenta que proporcionalmente resuelven mejor el segundo ejercicio que el primero.
La estadística correspondiente a los resultados de los alumnos se presenta en el cuadro nº 1.

En la primera columna se expresan las calificaciones otorgadas al primer ejercicio, con el número de alumnos correspondientes a cada categoria. En la segunda columna son las correspondientes calificaciones y número de alumnos para la parte a) del segundo ejercicio y en la tercera columna lo correspondiente a la parte b) del segundo ejercicio.

Cuadro nº 1

Primer Ejercicio		2º Ejercicio, parte a)		2º Ejercicio, parte b)	
Calific.	nº Alumn	Calific	Nº Alumn	Calificac	Nº Alumn
0	36	0	62	0	15
0,5	42	0,5	3	0,5	4
1	14	1	1	1	5
1,5	14	1,5	4		
2	5	2	17		
No Contes	6	No Contes	30	No Contes	93

Los resultados nos indican que hay 5 alumnos que resuelven bien el primer ejercicio, 17 que resuelven bien la primera parte del segundo y 5 que resuelven bien la segunda parte, pero solamente hay 2 alumnos que lo hacen bien todo.
De los 17 alumnos que hicieron bien la primera parte del segundo ejercicio, se han obtenido 6 demostraciones diferentes

1. A partir de la definición y propiedades de las razones trigonometricas
2. Aplicando el teorema de Pitágoras
3. Obteniendo el lado del polígono regular en función del angulo π/n, siendo n el número de lados
4. Aplicando el teorema del coseno
5. En función del ángulo central
6. Por el método de Inducción.

Tipificación de los errores que cometen

En el *primer ejercicio* los errores son fundamentalmente debidos a fallos en los automatismos del cálculo y simplificación de radicales, en las reglas de las operaciones, y en los procesos de resolución de una ecuación de cuarto grado.Algunos de ellos son los siguientes:

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{8}} + 2^{\frac{1}{16}}$

No saben hallar las cuatro soluciones de la ecuación

Simplifican mal dentro de la raiz

No saben aplicar la regla de Ruffini .

En el *ejercicio segundo*, primera parte, los errores son fundamentalmente debidos a no saber demostrar, utilizar formulas mal, partir de lo que tienen que demostrar, confundir prueba con demostración. Algunos de ellos son los siguientes:

Despejan y sustituyen en la misma fórmula

Igualan las áreas de los poligonos de n lados y de 2n lados

Utilizan mal la formula del teorema del coseno

Igualan magnitudes que no son igualables (cuerda y arco)

No saben aplicar el método de inducción

Hacen suposiciones falsas .Suponen que la longitud de los lados de una figura de n lados, es la mitad que la longitud de los lados de la figura de 2n lados

Parten de lo que tienen que demostrar

Confunden prueba con demostración.

En el cuadro 2, se presenta la calificación global de la prueba de matemáticas. La primera columna indica las distintas puntuaciones de 0 a 5, en intervalos de medio en medio punto. La segunda y tercera columnas indican frecuencias y porcentajes de alumnos. Los porcentajes se han calculado sobre el total , incluidos tambien los que contestan en blanco.

Cuadro 2

Categoria	Nº Alumnos	Porcentaje
0	31	26
0,5	33	28
1	9	7
1,5	15	13
2	3	2
2,5	7	6
3	5	4
3,5	1	0,8
4	2	1,7
4,5	1	0,8
5	2	1,7
No contestan	8	7

Comentarios

De los 38 posibles premios para Madrid se han concedido 11, que son los alumnos que han conseguido como mínimo 16 puntos como suma de los dos ejercicios de la prueba.
Son los siguientes:

Rafael Gallegos Tejero (Colegio Sta María del Pilar) 17,5 puntos
Borja Ibard Gabardos (C. Ntra Sra de las Maravillas) 17,5 puntos
Esteban Greciet García(C. Sta María del Pilar) 17,3 puntos
David Contreras Ros(C.Ntra Sra de las Maravillas) 17 puntos
Antonio Botija Santos(C. Sta María del Pilar) 16,6 puntos
Diego Plaza Lopez de Sabando(C. Joyfe) 16,5 puntos
Blanca Hernandez Oliver(C. Ntra Sra del Pilar) 16,3 puntos
Ignacio Sevilla Noarbe(I. B. Mirasierra) 16,1 puntos
Montserrat Iglesias Berzal(C.Joyfe) 16,0 puntos
Estefania Gonzalez de Ubieta y Tro(I.B. S. Juan Bautista) 16,0 puntos
Sergio Morezuelas Igualador(C. Agustiniano) 16,0 puntos

De ellos 5 han elegido matemáticas

Si examinamos el contenido matemático de la prueba, nos encontramos con lo siguiente:
Los alumnos que han contestado bien han necesitado saber:

- Resolver ecuaciones
- Operar con radicales
- Aplicar el teorema de Pitágoras
- Tener conocimientos elementales de trigonometria.
- Conocer qué significa demostrar y distinguir demostración de prueba
- Ser capaces de pensar.

¿Es demasiado pedir a nuestros alumnos de C.O.U. que dominen los objetivos anteriores ?

¿Qué le ocurre a nuestros alumnos mas brillantes en su rendimiento matemático?.
¿Es posible que aún los "mejores" no se hayan enfrentado a problemas que les exijan pensar un poco ?
¿es que su formación básica matemática no es capaz de trascender el aprendo para examinarme y luego olvido?
¿es que no saben producir la transferencia o aplicación de los conceptos a otras situaciones no tan familiares a ellos ?

Por otra parte, ¿qué sucede con nuestro Sistema Educativo?

¿Es que, demasiado preocupados por intentar paliar el fracaso escolar estamos olvidando a los alumnos mejor dotados ?

¿O es que estamos demasiado mediatizados por lograr el éxito de una prueba externa de acceso a la Universidad, que no mide precisamente la capacidad de pensar y razonar de nuestros alumnos?

¿Quizá la presión del cumplimiento de una programación nos está impidiendo la consecución de los verdaderos objetivos de la matemática?

En estos momentos en que el Ministerio de Educación se plantea una serie de medidas para incrementar la calidad de la educación, urge reflexionar sobre estos y otros interrogantes y sobre la esencia de la formación matemática.

Las tendencias actuales en didáctica de la Matemática y en psicología del aprendizaje (Polya,Schoenfeld, Greeno, Resnick), por citar solo algunos de los más conocidos, conceden una especial importancia a la comprensión de los conceptos y a la resolución de los problemas, incluyendo las ultimas investigaciones sobre procesamiento de la información(Larkin, Reif) y la teoria del cambio conceptual dentro del marco constructivista del aprendizaje (Osborne, Drive, Nussbaum y Novick).

Un objetivo de la matemática, que ya es posible a nivel de C.O.U, es la creación de unas estructuras formales que junto con la consecución de los automatismos permitan a nuestros alumnos la resolución de problemas. La resolución de problemas no surge de la nada,- salvo quizá en algunos pocos golpes geniales-, sino que exige un sustrato de formación conceptual y procedimental, que en el nivel de aprendizaje en que estan estos alumnos se puede considerar básica. Esta conceptualización exige en cierta medida abstracción y rigor que no se pueden enmascarar con recetas, recursos lúdicos o ejercicios automáticos. La abstracción y la creatividad son facultades humanas que la matemática debe fomentar y desarrollar.

La enseñanza de las matemáticas ha de llegar (graduandola en sucesivos niveles) a desarrollar en el alumno la capacidad de pensamiento, la reflexión lógica y el razonamiento formal . Los alumnos más capaces, (y a estos que se presentan al premio extraordinario de Bachillerato no se les puede negar esa capacidad), tienen derecho a llegar a una formación sólida, que no elimine la necesaria formalización matemática para la que estén preparados.

Para ello hace falta por parte del profesor ilusión, dedicación y capacidad para motivar, pues el conocimiento de la materia se le

Implementación de un paquete de dibujo de rosetones (Grupos de Leonardo)

Martín Garbayo Moreno
Dep. Didáctica de la Matemática
Fac. de Educación (Univ. Complutense de Madrid)

Eugenio Roanes Lozano
Sec. Deptal. Algebra
Fac. de Educación (Univ. Complutense de Madrid).

Abstract

Los paquetes de programas de dibujo que incorporan posibilidades gráficas como señalar una región del plano y trasladarla, o girarla o reflejarla respecto de un cierto eje, suelen trabajar "pixel a pixel". Ello provoca que los procesos sean costosos (en cuanto a uso de memoria) y lentos.

El objetivo de nuestro programa es dibujar rosetones, de cualquiera de los grupos posibles, con motivos diseñados por el usuario. Entendemos que la originalidad de este trabajo radica en la forma de atacar el problema. En el sector que se replica, los movimientos que se realizan (con las flechas del teclado) se traducen a órdenes de la Geometría de la Tortuga y son almacenadas en memoria dinámica. En la replicación posterior basta girar y volver a ejecutar la serie de órdenes. Para el caso de que haya reflexiones, los ángulos se consideran orientados.

Nuestro paquete ha sido desarrollado en Turbo-Pascal, usando la implementación de la *Geometría de la Tortuga* [RR1], y funciona en ordenadores compatibles PC con tarjeta VGA o superior (en el modo 640 × 480 puntos, 16 colores).

1 El Grupo Puntual o de Leonardo

Consideremos una figura plana F (un subconjunto de puntos del plano) y denominemos S_F al conjunto de isometrías f del plano tales que $f(F) = F$ (globalmente, no punto a punto). Se dice que S_F es un Grupo Puntual o de Leonardo si es finito y existe un punto que es doble para todas las transformaciones de S_F.

Se demuestra que sólo existen dos clases de tales grupos: los grupos cíclicos C_n y los dihedrales D_n ($n \in \mathbb{N}$). Sea O el punto doble citado. Si i es la transformación identidad, $g(O, \alpha)$ la rotación de centro O y amplitud α y S_r es una reflexión respecto de un cierto eje r al que pertenece O:

$$C_n = \{i, g(O, 360^0/n), g(O, 2 * 360^0/n), ..., g(O, (n-1) * 360^0/n)\}$$

$$D_n = \{f : f = h \circ g, g \in C_n \wedge h \in \{i, S_r\}\}$$

(para $n > 2$, D_n es el grupo de simetría del n-gono regular).

El modelo típico de grupo de Leonardo lo constituyen los rosetones. Para una más detallada introducción véase por ejemplo [APR],[Am] o [Ma].

2 Originalidad del paquete. Implementación

Como comentábamos en la introducción, el objetivo de nuestro programa es dibujar rosetones, de cualquiera de los grupos posibles, con motivos diseñados por el usuario. Si bien, por un lado tal posibilidad se comenta en [A-d] y existen magníficos programas de dibujo de rosetones, frisos y mosaicos (como Reptiles), entendemos que unimos estas dos ideas de un modo original.

En el sector que se replica, los movimientos se realizan con las flechas del teclado. Una vez que se ha fijado el punto de destino, el movimiento que hay que realizar para pasar del punto inicial al final se traduce al léxico de la Tortuga (como una orientación y una distancia, lo que podemos entender como el vector de la traslación que hace pasar del primero al segundo). Así, basta con un par de números del tipo Real (la implementación ha sido realizada en Turbo-Pascal) para describir todos los movimientos realizados con el cursor

desde que se fijó el punto anterior (la implementación de la *Geometría de la Tortuga* usada se detalla en [RR1] y fué desarrollada -en colaboración- por uno de los autores de este artículo).

Así pues, desplazar la tortuga o trazar un segmento son operaciones triviales de implementar (la única diferencia entre ambos casos es que la tortuga se desplace dejando rastro o no).

Si queremos trazar una circunferencia de la cual conocemos dos de sus puntos diametralmente opuestos, podemos calcular el vector, $\vec{v}$, de la traslación que hace pasar de uno a otro. En la traslación de vector $\frac{1}{2}\vec{v}$ aplicada al punto, obtendremos el centro y el radio será $|\frac{1}{2}\vec{v}|$, con lo que tendremos los datos necesarios para usar la primitiva de dibujo de circunferencias. Los datos a almacenar son pues tres números del tipo Real.

Para trazar un arco de circunferencia el proceso es similar al anterior, sólo que el centro se puede desplazar sobre la mediatriz del segmento de extremos los dos puntos citados. Los extremos del arco son esos dos puntos fijados previamente. Después de cada desplazamiento del centro se vuelven a calcular el radio y los ángulos (en sentido antihorario) que forma el semieje $x+$ con la recta que pasa por el centro de la circunferencia y cada extremo de arco. Para ello no se usa directamente la función ArcTan, sino que se calculan las coordenadas de tortuga de estos puntos y se sitúa la tortuga en el centro de la circunferencia. Los ángulos que realmente se miden (en sentido horario) son los que forma con la vertical la semirrecta de origen el punto en que está la tortuga (centro de la circunferencia) y que pasa por el punto explicitado (cada extremo del arco), lo que se hace utilizando SetHeadingTowards(punto). A partir de estos se calculan los ángulos deseados.

En este caso se necesitan cinco números del tipo Real: centro (2), radio (1), ángulo de comienzo y fin del arco (2).

En todos los casos debemos añadir dos números del tipo Integer para describir, respectivamente, el color de trazado y el ancho de cada línea.

En caso de que se deseen realizar rellenados, basta desplazarse a un punto interior de la región y dar el color de relleno. Hacen falta pues dos Real (para

la traslación) y un Integer (para el color del relleno).

Por limitaciones de la implementación de gráficos en Turbo-Pascal, es necesario que el borde de una región a rellenar sea del mismo color. Por ello hemos optado por que, cuando se desee realizar rellenos, todas las líneas sean dibujadas necesariamente en blanco.

En cada caso, estos números (de los cuales su obtención ha sido detallada) son entradas de una primitiva (o dos) de la tortuga, que también hay que guardar.

Si el rosetón es de orden n, y va a haber reflexiones, el paquete, en lugar de presentar un sector de $(360/n)^0$ presenta para dibujar en su interior un sector de $(360/2n)^0$.

Como se hizo en [RR2] y [RR3], previendo el que puedan aplicarse reflexiones, todos los ángulos van multiplicados por un sentido que se valora en $\{+1, -1\}$. Si hay reflexiones, según la paridad del "medio-sector", se da valor al sentido.

Para la replicación posterior basta girar la tortuga y dibujar el sector el número de veces adecuado.

El detalle de las posibilidades específicas de la implementación queda detallado en el apartado de manejo que sigue.

3 Manejo del paquete

Al arrancar el programa, este muestra la pantalla de presentación. Pulsando cualquier tecla se pasa a la primera pantalla, en la que se ofrece dibujar un rosetón o leer un rosetón del disco.

Si se elige la primera opción, el programa pregunta de cuántos sectores circulares va a constar (la respuesta debe ser un natural, n). A continuación inquiere si va a haber reflexiones o no. En caso afirmativo en lugar de un

sector de $(360/n)^0$ presenta para dibujar en su interior un sector de $(360/2n)^0$ (del cual dibujará su simétrico antes de irlo girando). También pregunta si se van a colorear interiores de regiones. En tal caso todo el trazado de líneas se hará obligatoriamente en blanco.

Se pasa a continuación a la pantalla de dibujo, que presenta un menú y, ya dibujados, los bordes del sector (en posición vertical). El cursor aparece en el vértice, y viene representado por una pequeña cruz.

3.1 Manejo si no hay operaciones "rellena"

El menú que aparece a la izquierda muestra las opciones:

· Trazo fino / trazo grueso

· Colores (1,2,...,9,A,...,F)

Para dibujar un motivo, la secuencia de operaciones es la siguiente: se desliza el cursor por el sector con las flechas del teclado (su posición en coordenadas cartesianas, así como el ángulo que forma con el semieje $x+$ el segmento de extremos el último punto seleccionado anteriormente y el punto actual, se explicitan continuamente en la esquina superior derecha de la pantalla).

El desplazamiento del cursor por cada pulsación de las flechas (o su velocidad cuando se mantienen pulsadas) se puede aumentar (respectivamente disminuir) pulsando + (respectivamente -). En cualquier caso no se permite al cursor desplazarse fuera del sector circular.

Cuando el cursor llega a su destino se pulsa la tecla Insert y el programa pregunta cómo unir ambos puntos. Las posibilidades se seleccionan eligiendo el número correspondiente y son:

1) Con nada (lo que es necesario cuando el motivo no es conexo)

2) Con un segmento (del cual estos puntos serán sus extremos)

3) Con una circunferencia (de la cual estos serán puntos diametralmente opuestos).

4) Con un arco de circunferencia (de la cual estos puntos serán los extremos). En tal caso hay que dar a qué lado de la cuerda que determinan ambos puntos está el arco y podemos también hacer variar su amplitud con las flechas.

A continuación pide elegir el trazo (fino -1- o grueso -2-) y el color -N- (donde $N \in \{1, 2, ..., 9, A, B, ..., F\}$).

El cursor puede desplazarse de nuevo y repetirse el proceso varias veces.

Para terminar, pulsar F e Intro. El menú desaparece, así como el sector, y se dibuja el rosetón completo.

3.2 Manejo si hay operaciones "rellena"

La única variación es que los trazos se harán sólo en blanco. Se ofrece en este caso una quinta opción:

5) Rellenar una región.

Para ello debe estar ya dibujado el borde de la región y ser este cerrado y basta ir con el cursor a un punto interior, pulsar Insert, elegir la opción 5 y elegir el color deseado (para el rellenado).

Observemos que los bordes del sector no aparecerán después en el rosetón, lo que debe tenerse en cuenta para que el rellenado final sea el esperado.

En una primera pasada se dibujan los bordes blancos de las distintas zonas del rosetón, para después en una segunda pasada realizar los "rellenados".

3.3 Representación de los movimientos que dejan invariante el rosetón

Una vez dibujado el rosetón, ofrece la posibilidad de marcar el sector replicado, su eje de simetría (si lo hubiera) y el giro de menor amplitud que deja invariante el rosetón (mediante un pequeño arco orientado). Para proseguir basta pulsar cualquier tecla.

3.4 Grabar un rosetón en disco

Antes de salir se oferta la posibilidad de grabar en disco el rosetón dibujado (opción 1). El nombre del archivo se debe dar a continuación (sin extensión, que será .ROS). Con la opción 2 se regresa directamente al DOS sin salvarlo.

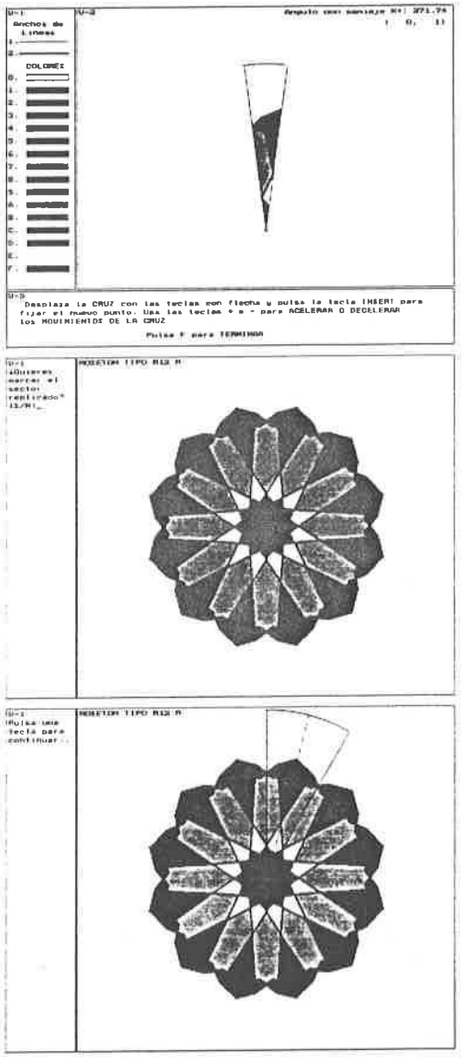
3.5 Cargar un rosetón en disco

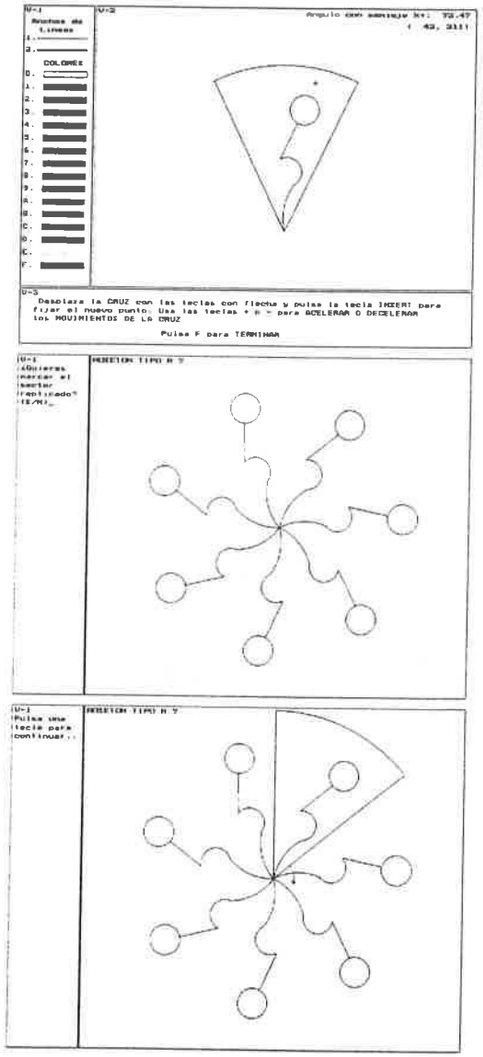
La segunda opción de la primera pantalla consiste en leer un rosetón del disco (previamente dibujado y grabado). Basta allí elegir la opción 2 y teclear el nombre del fichero (sin extensión).

4 Almacenamiento de la información

La secuencia de ordenes de tortuga se almacena en memoria dinámica y se ejecuta sucesivas veces (una por cada sector, si no hay reflexiones, y dos veces por sector, una con cada sentido, si las hay).

Para dar una idea de la bondad del tratamiento en cuanto al pequeño tamaño de los bloques de órdenes a memorizar, indicaremos que los archivos correspondientes a los ejemplos mostrados en este artículo ocupan, respectivamente, 299 y 184 Bytes (no KBytes). Si por ejemplo los capturamos con formato .hp como archivo binario ocupan 91479 Bytes.


U=1
Anchos de Lineas
COLORES
U=2
Angulo con semieje X= 271.74
(0, 1)
U=3
Desplaza la CRUZ con las teclas con flecha y pulsa la tecla INSERT para fijar el nuevo punto. Usa las teclas + e - para ACELERAR O DECELERAR los MOVIMIENTOS DE LA CRUZ
Pulse F para TERMINAR
U=1
¿Quieres marcar el sector repetido? (S/N)_
ROSETON TIPO R12 R
U=1
Pulse una tecla para continuar...
ROSETON TIPO R12 R


U=1
Anchos de Lineas
COLORES
U=2
Angulo con semieje X= 72.47
(42, 311)
U=3
Desplaza la CRUZ con las teclas con flecha y pulsa la tecla INSERT para fijar el nuevo punto. Usa las teclas + e - para ACELERAR O DECELERAR los MOVIMIENTOS DE LA CRUZ
Pulse F para TERMINAR
U=1
¿Quieres marcar el sector repetido? (S/N)_
ROSETON TIPO R 7
U=1
Pulse una tecla para continuar...
ROSETON TIPO R 7

Bibliografía

[A-d] H. Abbelson, A. diSessa: *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics.* M.I.T., 1981.

[APR] C. Alsina, R. Pérez, C. Ruiz: *Simetría Dinámica.* Ed. Síntesis. 1989.

[Am] M.A. Armstromg: *Groups and Symmetry.* Springer-Verlag. 1988.

[Bo] Y. Bossard: *Rosaces. Frises et Pavages.* Ed. Sedic. 1977.

[Ma] G.E. Martin: *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry.* Springer-Verlag, 1982.

[RR1] E. Roanes M., E. Roanes L.: *Desarrollo de una implementación mejorada y flexible de la "Turtle geometry".* III Encuentro de Geometría Computacional. Univ. de Zaragoza, 1-3 Julio, 1992.

[RR2] E. Roanes M., E. Roanes L.: *Simulación Didáctica de los Grupos de Simetría en el Arte Hispano-Musulmán.* Pub. Pablo Montesino. Univ. Complutense. 1993.

[RR3] E. Roanes M., E. Roanes L.: *MACO. Matemáticas con ordenador.* Ed. Síntesis. 1988.

[-] -: *Manuales Turbo-Pascal. v.7.0.* Borland. 1993.

RESEÑAS DE LIBROS

PRACTICAS DE MATEMATICAS CON DERIVE por J. L. Coronado, A. Corral, V. Chumillas, A. García, F. García, J. García, A. Lías, P. López, A. Martínez, R. Miñano, F. Rincón, B. Ruiz y J. Villén. Ed.: Alfonsa García (Dpto. Matemática Aplicada E.U. Informática UPM) 1994. 418 páginas y un disquete.

Este libro da respuesta a una demanda actual: la escasa bibliografía existente en nuestro idioma sobre cómo utilizar los sistemas de cálculo simbólico para enseñar y aprender Matemáticas de una manera más práctica y atractiva.

El libro recoge la experiencia que durante cuatro años han llevado a cabo los profesores del Dpto.de Matemática Aplicada de la E.U. Informática de la Universidad Politécnica de Madrid, basada en un enfoque experimental de la enseñanza de las Matemáticas, aprovechando las capacidades del sistema de cálculo simbólico DERIVE.

El libro está dividido en cinco partes. La primera, titulada al *Cálculo Elemental*, contiene resolución gráfica de desigualdades, funciones elementales y sus gráficas, límites y continuidad y derivación.

La segunda parte, titulada *Análisis Matemático y Métodos Numéricos*, trata sobre sucesiones de números reales, resolución numérica de ecuaciones, series de números reales, polinomios de Taylor y series de potencias, interpolación, integral de Riemann e integral impropia.

La tercera parte, dedicada al *Algebra Lineal*, contiene rangos y sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, aplicaciones lineales, diagonalización de matrices en $\mathbb{R}$ y espacios euclídeos.

En la cuarta parte, dedicada a la *Matemática Discreta*, se tratan relaciones, funciones recursivas y aritmética entera y modular.

Y en la quinta parte, titulada *Estadística*, se tratan variables aletorias unidimensionales y bidimensionales.

Además incluye un *Apéndice* explicativo del uso de Derive y un disquete conteniendo los ficheros del libro.

En el texto se recogen prácticas sobre la mayor parte de los conceptos matemáticos básicos susceptibles de ser tratados con ordenador.

El libro está dirigido a profesores y alumnos interesados en aprovechar estas nuevas herramientas, que están cambiando los modos de enseñar y aprender Matemáticas. Aunque, en principio, pensado para un primer curso de Ingenierías y Facultades de Ciencias, el libro puede ser también muy útil en los últimos cursos de enseñanza secundaria y COU.

Felicitamos a los autores por la iniciativa y la calidad del trabajo, que aseguran el éxito de la publicación.

E. Roanes Macías

NUEVA REVISTA

LA TORTUGA DE AQUILES. Publicación periódica editada por DLS-EULER Ed. (c/ Santísima Trinidad, 30, 4º - 7 - 28010 - MADRID. Tno.: 446 67 92). Cuatro números anuales. Número suelto, 2.450 pta. Suscripción anual, 7.800 pta).

La **Tortuga de Aquiles** es la traducción española de la *"New American Library"* , colección de exposiciones matemáticas breves, orientadas a permitir a los estudiantes un fácil acceso a algunas áreas de las Matemáticas que normalmente no están incluidas en los contenidos de su enseñanza. La acertada elección de los autores y de las materias tratadas, hicieron que esa colección tuviese un gran éxito, que esperamos que se repita con su traducción al castellano.

El primer número, correspondiente al Otoño de 1993, lleva el título de **Retorno a la Geometría**, y sus autores son **H.S.M. Coxeter** y **S.L. Greitzer**. Ofrecemos su reseña en este mismo Boletín. Los números siguientes serán: En este Invierno, el 2,

- **Olimpiadas Matemáticas Internacionales I**, (Enunciados y soluciones recopiladas por **S.L. Greitzer**).

En las siguientes estaciones aparecerán:

- **Métodos Matemáticos de la Ciencia**, de **George Polya.**
- **El Ingenio en las Matemáticas,** de **Ross Honsberger**
- **Números racionales e irracionales**, de **Ivan Niven**
- **Desigualdades Geométricas**, de **W.W. Sawyer**
- **Usos del Infinito,** de **Leo Zippin**
- **Grafos y sus usos**, de **Oystein Ore**

y otros títulos de gran interés. Esperamos que esta colección sea de gran utilidad tanto para nuestros alumnos como para sus profesores.

RETORNO A LA GEOMETRIA

H.S.M. Coxeter y S.L. Greitzer

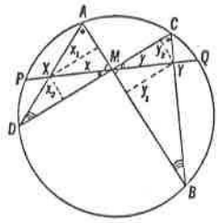
La colección LA TORTUGA DE AQUILES ha elegido, para presentarse al público, el libro de Coxeter y Greitzer, RETORNO A LA GEOMETRIA, elección que nos parece sumamente acertada, pues "desenterrar" de forma sencilla y amena los métodos geométricos es una contribución muy valiosa, en especial para el docente de la matemática.

El libro, dividido en seis apartados, no sigue la línea habitual de exposición de los tratados de esta disciplina, sino que desde un principio "mete" al lector en temas concretos, siguiendo a cada rigurosa exposición teórica una cuidada selección de ejercicios, que figuran esquemáticamente resueltos al final de la obra. Cada apartado está encabezado por una sugestiva cita, humorística en algunas ocasiones. El prologo, precedido de una bella cita de Forder, "aquel que desdeña la Geometría de Euclides es como el hombre que, al regresar de tierras extrañas, menosprecia su casa", pone de manifiesto la desatención de que es objeto dicha materia en la enseñanza actual; los autores recalcan esta afirmación con estas palabras. "Tal vez la situación de inferioridad de la geometría en el programa escolar procede de una falta de familiaridad por parte de los educadores con la esencia de la geometría y con los avances que se han producido en su desarrollo".

El primer apartado se refiere a PUNTOS Y LINEAS RELACIONADOS CON EL TRIANGULO y se inicia con la generalización del teorema del seno, incluyendo, a continuación una sencilla dedución del teorema de Ceva. Aparte de otros tópicos, es de destacar el análisis del clásico problema de Steiner o de Lehmus - Steiner. "Un triángulo que tiene dos bisectrices interiores iguales es isósceles" cuestión no tan evidente como parece a primera vista. Continúa este primer apartado con el estudio de los triángulos órtico (cuyos vértices son los pies de las alturas) y medial (que resulta de unir los puntos medios de los lados) y de los triángulos pedales, como generalización natural de ellos. También tiene cabida en este apartado un somero, pero riguroso estudio de la recta de Euler (el ortocentro, el baricentro y el circuncentro, de todo triangulo están alineados) y una introducción al círculo de Feuerbach, de Euler o de los nueve puntos.

El segundo apartado se dedica a ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS

CIRCUNFERENCIAS, que se inicia con el concepto de potencia de un punto respecto de una circunferencia, incluyendo el conocido teorema debido a Euler que relaciona las longitudes de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita y la distancia entre sus centros y algunas otras aplicaciones: eje radical, circunferencias coaxiales, circunferencias que tienen por diámetros respectivos a dos cevianas de un triangulo, etc. A continuación se estudia la recta de Simson (como caso particular del triangulo pedal) y el teorema de Ptolomeo. Se termina este apartado con dos curiosos teoremas no excesivamente divulgados; el primero de ellos, conocido como teorema de la mariposa nos dice (véase figura) que si M es el punto medio de la cuerda PQ también es el punto medio del segmento XY. Mas reciente y también más complicado es el "sorprendente" (como lo califican los autores) teorema de Morley que dice: los puntos de intersección de las rectas que dividen en tres partes iguales a los ángulos de un triángulo son los vértices de un triángulo equilatero.



El tercer apartado se inicia con una sugerente cita del matemático Charles L. Dodgson, más conocido como Lewis Carroll autor (entre otras obras de ciencia o de fantasía) de Alicia en el País de las Maravillas, obra que debería leer todo matemático. En este apartado, dedicado a COLINEALIDAD Y CONGRUENCIA se introducen algunos teoremas de la geometría proyectiva clásica. El apartado se inicia con unas aplicaciones del teorema geométrico de Varignon (no confundir con el clásico teorema sobre el momento de la resultante de fuerzas concurrentes en un punto), continuando con la fórmula de Brahmagupta, relativa a los cuadriángulos cíclicos y en el caso limite a la fórmula de Heron, que se indica debió ser ya conocida por Arquimedes. Se expone, seguidamente, un teorema, que según los autores es sencillo y "sorprendentemente abandonado:" sobre los lados de un triángulo dado se construyen exteriormente triángulos de manera que la suma de los ángulos "opuestos" a los lados del triangulo dado sea 180°; entonces las circunferencias circunscritas a los triángulos construidos son concurrentes. Este teorema, conocido con el nombre de TRIANGULOS DE NAPOLEON, le ha sido atribuido, aunque como dicen los autores: "se sabe que Napoleón Bonaparte era algo matemático, con gran interés por la geometria ... pero la posibilidad de que sus conocimientos de geometria fueran suficientes para ello, es tan cuestionable como la probabilidad de que sus conocimientos de inglés fueran suficientes para componer su famoso palindromo

ABLE WAS I ERE I SAW ELBA.

Se termina este tercer apartado con los conocidos teoremas de Menelao, Pappus y Desargues y los relativos a los exágonos de Pascal y Brianchon.

El apartado cuarto, que se inicia con una cita bíblica, abarca el tema de TRANSFORMACIONES comenzando con aplicaciones de las traslaciones y giros (punto de Fermat, algunos resultados sobre la figura de la demostración del teorema de Pitágoras debida a Euclides). Los siguientes temas desarrollados son semi-giros (simetrías centrales), reflexión (simetría axial), isometrías, semejanza, dilatación (homotecia) y semejanza en espiral (producto de una homotecia y un giro con el mismo centro) donde se cita el teorema de Petersen-Schoute.

Se concluye el apartado con una "genealogía de las transformaciones" haciendo mención de algunas más complicadas como la "transformación de Lorentz" o la "extensión procusteana" que convierte un círculo en una elipse equivalente. Como aplicación a los métodos expuestos en este apartado, se resuelven dos clásicos y curiosos problemas. El primero, conocido como problema de Fagnano, consiste en encontrar el triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triángulo acutángulo; la solución que se inserta, totalmente geométrica debida a H.A. Schwarz conduce al triángulo órtico. El segundo de los problemas indicados es el conocido como "problema de las tres jarras"; este tipo de cuestiones tratan de resolver la división de un cierto volumen de líquido en proporiones fijas, con instrumentos de medida que aparecen como inadecuados.

El apartado quinto, UNA INTRODUCCION A LA GEOMETRIA DE LA INVERSION se inicia con una humorística cita de Petard, que enseña a cazar un león en el desierto: "colocamos una jaula esférica en el desierto, entramos y cerramos con llave. Aplicamos una inversión con respecto a la jaula. Entonces el león queda en el interior de la jaula y nosostros fuera". El primer aspecto tratado es "separación" en el que se plantea y resuelve el siguiente problema: si cuatro puntos A, B, C y D, no están todos situados sobre una recta o una circunferencia, entonces existen dos circunferencias, que no se cortan, una que pasa por A y C, y la otra por B y D. (Este problema fue propuesto en el concurso William Lowell Putmann en 1965). Los aspectos desarrollados a continuación son razón doble, inversión, circunferencias ortogonales, circunferncias coaxiales y distancia inversiva entre dos circunferencias dadas (que se define como el logaritmo neperiano del cociente de los radios - mayor entre menor - de dos circunferencias concéntricas en que se pueden invertir las dos dadas). Como aplicación se resuelve el problema que se deduce del logotipo de la XXVIII Olimpiada Matemática Española,

estudiado con todo detalle por Fernández Briage en el Boletín nº 30 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas. Aplicando los conocimientos anteriormente expuestos se demuestra el teorema de Feuerbach: la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente a la circunferncia inscrita y a las tres exinscritas en dicho triángulo. Finaliza el quinto apartado con una incursión sobre las funciones hiperbólicas, recogiendo una original cita de Tutton: "tal vez no sea demasiado caprichoso comparar el papel de las funciones hiperbólicas en matemáticas con el papel del radical amonio en química .... ".

Una humorística cita de Flaubert, sirve para encabezar el sexto apartado dedicado a UNA INTRODUCCION A LA GEOMETRIA PROYECTIVA. El primer aspecto tratado es la reprocidad (polaridad). Para poner de manifiesto las posibilidades del método, destacan los autores que el dual de cualquier teorema o construcción dados puede obtenerse de forma muy sencilla haciendo ciertos cambios verbales de acuerdo con el siguiente "diccionario.

punto	recta
situado en	pasa por
recta que une dos puntos	intersección de dos rectas
concurrencia	alineado
cuadrángulo	cuadrilátero
polo	polar
lugar geométrico	envoltura de rectas tangentes
tangente	punto de contacto

Como aplicación de la circunferencia polar de un triángulo obtienen el teorema: para un triángulo obtusángulo, la circunferncia circunscrita y la de los nueve puntos se intercambian por inversión respecto de la circunferncia polar del referido triángulo. A continuación se definen las cónicas como "recíprocas de una circunferencia", introduciendo el concepto de excentricidad, que se ilustra con una tabla de excentricidades de los planetas del sistema solar y de algunos cometas. Se estudian, con detenimiento, los focos y directrices y en especial las cónicas con centro. Se concluye el apartado con unas nociones sobre la proyección gnomónica y estereográfica.

Después de las soluciones de los ejercicios, que figuran en el septimo apartado, se incluyen un cuidado glosario de términos encabezado con otra cita de Lewis Carroll,

(sólo hemos encontrado como errata no corregida la falta de definición de triángulo pedal) y un índice alfabético.

En resumen, se trata de una excelente obra que a pesar de su brevedad (sólo contiene 188 páginas) abarca con suficiente amplitud la temática anteriormente expuesta. Un libro, en fin, que no debe faltar en la biblioteca de cualquier persona que sienta la matemática.

G. Sestafe

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADOS EN ESTE BOLETIN

Concurso de Resolucion de Problemas de nuestra Sociedad

nº (año)	Convocado en Boletín	Crónica/enunciados
I (1983)	1	2 , pág. 11
II (1984)	3	4 , pág. 7
III (1985)	5	7 , pág. 3
IV (1986)	9	10 , pág. 5
V (1987)	13	15 , pág. 3
VI (1988)	17	19 , pág. 17
VII (1989)	20	22 , pág. 9
VIII (1990)	24	26 , pág. 3
IX (1991)	27	29 , pág. 3
X (1992)	30	32 , pág. 3
XI (1993)	33	34 , pág. 9
XII (1994)	36	

Olimpiada Matematica Espanola

nº (año)	1ª fase (distritos)	2ª fase (final)
XX (1984)	- -	3, pág. 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV (1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61
XXVI (1989-90)	24, págs. 11 y 67	25, págs. 9 y 73
XXVII (1990-91)	27, págs. 7 y 77	28, págs. 17 y 79
XXVIII (1991-92)	30, págs. 19 y 67	31, págs. 11 y 81
XXIX (1992-93)	33, págs. 5 y 71	34, págs. 17 y 71
XXX (1993-94)	36, págs. 9 y 75	37, págs. y

Olimpiada Iberoamericana de Matematicas

nº (año) lugar	Crónica y enunciados en boletín nº
I (1986) Colombia	8 , págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12 , págs. 3 y 75
III (1988) Perú	18 , págs. 5 y 73
IV (1989) Cuba	21 , págs. 11 y 63
V (1990) España(Valladolid)	26 , págs. 13 y 73
VI (1991) Argentina	30 , págs. 15 y 65
VII (1992) Venezuela	32 , págs. 11 y 71
VIII (1993) Méjico	35 , págs. 5 y 65

Olimpiada Matematica Internacional

nº (año) lugar	Crónica y enunciados en boletín nº
XXIV (1983) París	2, pág. 15
XXV (1984) Praga	4, pág. 67
XXVI (1985) Helsinski	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986) Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987) Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX (1988) Australia	19, págs. 23 y 77
XXX (1989) Alemania (R.F.A.)	22, págs. 15 y 73
XXXI (1990) China	26, págs. 11 y 71
XXXII (1991) Suecia	29, págs. 11 y 79
XXXIII (1992) Rusia	32, págs. 9 y 69
XXXIV (1993) Turquía	35, págs. 3 y 63

Reseña de software: The Geometer's Sketchpad

El subtítulo del paquete es: "Dynamic Geometry for the 21st Century". Y, desde luego, estamos ante uno de esos paquetes que hacen del aprendizaje, en este caso del aprendizaje de la Geometría, un delicioso juego, aportando un punto de vista claramente renovador.

Se arranca eligiendo desde Windows el icono correspondiente. Presenta un menú lateral donde se nos ofrece:

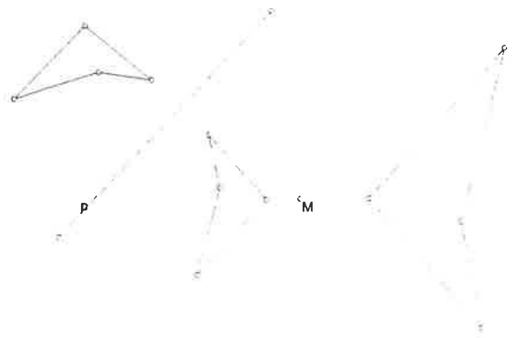
- Seleccionar un objeto (punto, segmento,...)
- Marcar un punto
- Dibujar una circunferencia
- Dibujar un segmento
- Etiquetar un objeto con una letra
- Preguntar acerca de un objeto

Según los objetos seleccionados, el menú superior permite realizar diversas procesos. Por ejemplo: dibujar la mediatriz de un segmento, aplicar una homotecia, medir, imprimir el dibujo,...

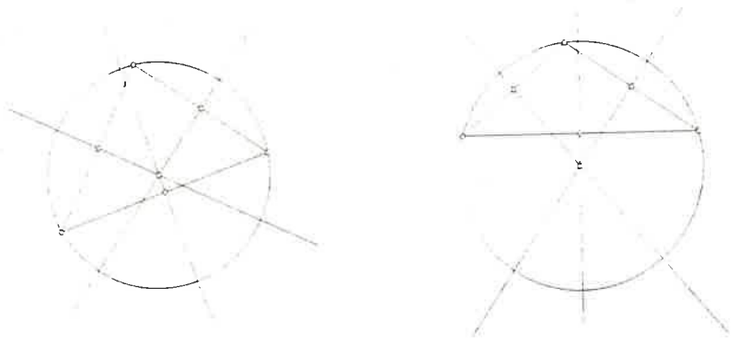
La gran potencia del paquete reside en su concepción. Se va construyendo paso a paso un proceso. En cualquier instante se pueden deshacer los últimos pasos (en orden inverso). Una vez terminado el proceso, la construcción se puede mover de dos formas. Por un lado podemos movernos por el papel (del cual estamos viendo una zona) para ver, por ejemplo, una parte de la construcción que quedaba oculta. Y, más importante: si en una construcción alteramos uno de sus elementos, todos los que dependen de él se alteran. Veamos un par de ejemplos inmediatos.

En la figura siguiente se aplica una simetría seguida de una homotecia a

un cuadrilátero previamente dibujado:



En la figura de la izquierda construimos un triángulo, sus mediatrices, el punto de corte de dos de estas y la circunferencia circunscrita. Comprobamos experimentalmente como la tercera mediatriz pasa por el punto de intersección de las otras dos y es el circuncentro.



En la figura de la derecha comprobamos la falsedad de la siguiente hipótesis: el circuncentro de un triángulo debe pertenecer necesariamente al interior del triángulo. Esta figura se ha obtenido a partir de la anterior, marcando con el ratón un vértice y "arrastrándolo", no redibujando todo.

Las licencias de uso se pueden adquirir a los siguientes precios (en dólares USA):

- Licencia monopuesto (1 ordenador): 169.95$
- Licencia de laboratorio (10 ordenadores): 399.95$
- Licencia de centro: 899.95$

Se acompañan los discos con los manuales correspondientes.

Si el lector está interesado en practicar con una versión de demostración a la que acompaña un resumen de posibilidades, puede solicitarla directamente a la empresa que lo comercializa:

KEY CURRICULUM PRESS
P.O. Box 2304
Berkeley, CA 94702-9983
U.S.A.

o enviar un disco $3\frac{1}{2}$" HD y un sobre franqueado con la dirección adecuada al autor de la reseña:

Prof. Eugenio Roanes Lozano
Sec. Dep. Algebra (Fac. de Educación)
Universidad Complutense
c/ Santísima Trinidad 37
28010 - Madrid

(el citado disco es una versión incompleta pero que permite descubrir las muchas posibilidades del paquete).

Existen bastantes publicaciones (en inglés) sobre su uso a nivel de Enseñanza Primaria y Secundaria, así como sobre experiencias concretas. Esperemos que se lleven a cabo también en nuestro país.

Eugenio Roanes Lozano

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

Propuestos en el nº	Procedentes de	Números de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números 1º 2º 3º 4º 5º 6º 7º 8º 9º 10º	obs.
1	Varios	4 4 - - - - - - - -	C
2	OMI-83-Paris	3 3 3 4 4 4 - - - -	C
3	OME-f2-84	19 19 19 19 18 19 19 19 - -	C
4	OMI-84-Praga	5 5 6 5 6 14 - - - -	C
5	Varios	8 7 12 7 7 8 - - - -	C
6	Varios	7 7 16 - - - - - - -	C
7	OMI-85-Finlandia	9 9 16 16 9 9 - - - -	C
8	OI-85-Bogotá	10 10 17 10 10 11 - - - -	C
9	OME-f2-86 / Varios	18 19 20 18 19 19/17 17 11 17	C
10	China / Australia	20 15 21 20 15 21 20 23 21 -	C
11	OME-f1-86 /	13 14 14 14 14 23 20 15/20 12	C
	OMI-86-Varsovia	26 20 12 21 - - - - - -	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16 14 14 17 15 17/15 15 15 21	C
13	OME-f2-87	20 21 21 21 21 21 - - - -	C
14	Varios	15 15 15 15 - - - - - -	C
15	OMI-87-Cuba	18 18 18 21 21 21 - - - -	C
16	OME-f1-87	22 22 21 18 22 22 22 22 - -	C
17	OME-f2-88	25 23 23 23 23 23 - - - -	C
18	OI-88-Perú	23 23 23 23 25 25 - - - -	C
19	OMI-88-Australia	23 26 24 24 23 26 - - - -	C
20	OME-f1-88 / Putnam	24 26 24 25 24 26 24 26/26 24	C
21	OME-f2-89 /	24 27 24 27 27 24/27 25 27 26	C
	OI-89-Cuba	26 27 - - - - - - - -	C
22	OMI-89-R.F.A. /	28 28 XX 28 29 30/30 30 30 31	
	Oposiciones	31 30 29 - - - - - - -	C
23	Oposiciones	27 27 28 28 29 31 31 30 - -	C
24	OME-f1-90	30 31 31 30 31 30 30 31 - -	C
25	OME-f2 / f1- 90	34 31 29 29 31 32/32 32 32 33	C
26	OMI-90-China /	32 XX XX 32 XX XX/XX 32 XX 34	
	OI-90-Valladolid	XX XX - - - - - - - -	
27	OME-f1-91	33 XX 33 33 XX 35 XX XX - -	
28	OME-f2-91	32 32 XX XX 33 33 - - - -	
29	OMI-91-Suecia	XX XX XX XX XX XX - - - -	
30	OI-91-Argentina /	XX XX XX 33 XX XX/XX 33 33 33	
	OME-f1-91	33 34 34 34 - - - - - -	
31	OME-f2-92 /	36 XX 36 36 36 XX/XX XX XX 35	
	OME-f1-91 / PNS	XX XX/XX 35 34 - - - - - -	
32	OMI-92-Moscu /	35 XX XX XX XX XX/XX 35 XX XX	
	OI-92-Venez./ PNS	XX XX/XX XX - - - - - -	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	XX XX XX XX XX 35/XX XX XX XX	
	/PNS	XX XX XX XX/XX - - - - -	
34	OME-f2-93	36 36 XX 36 36 36 - - - -	
35	OMI-93-Turq./	XX XX XX XX XX XX/XX XX XX XX	
	OI-93-Méjico/ PNS	XX XX XX XX XX XX - - - -	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX XX XX XX XX XX XX XX/XX XX	
37	OME-f2-94/ PNS	XX XX XX XX XX XX/XX XX XX -	

CLAVES: XX = Pendiente de publicación . C = Completo
OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 o 2).
OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OI = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.
PNS = Propuestos por nuestros socios.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA **FASE FINAL** DE LA **XXX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA** CELEBRADA EN MADRID (FEBRERO DE 1994)

PROBLEMA 1º:

Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de esa progresión son cuadrados perfectos.

PROBLEMA 2º:

Sea O.XYZ un triedro trirrectángulo de vértice O y aristas X,Y,Z. Sobre la arista Z se fija un punto, C, tal que sea OC = c. Sobre X e Y se toman, respectivamente, dos puntos variables, P y Q, de modo que la suma OP+OQ sea una constante dada, k. Para cada par de puntos, P y Q, los cuatro puntos O,C,P y Q determinan una esfera, cuyo centro, W, se proyecta sobre el plano OXY. Razonar cuál es el lugar geométrico de esa proyección. Razonar también cuál es el lugar geométrico de W.

PROBLEMA 3º:

Una Oficina de Turismo va a realizar una encuesta sobre número de dias soleados y número de dias lluviosos que se dan en el año. Para ello recurre a seis regiones, que le transmiten los datos de la tabla siguiente:

Región	Soleados o lluviosos	Inclasificables
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encargada de la encuesta no es imparcial y tiene esos datos más detallados. Se da cuenta de que, prescindiendo de una de esas regiones, la observación da un número de dias lluviosos que es la tercera parte del de dias soleados. Razonar cuál es la región de la que prescindirá.

PROBLEMA 4º:

El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide 2/5 de Recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida, a, del lado BC en función de la medida, b, del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas

PROBLEMA 5º:

Con 21 fichas de damas, unas blancas y el resto negras, se forma un rectángulo de 3×7. Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

PROBLEMA 6º:

Un polígono convexo de n lados se descompone en m triángulos, con interiores disjuntos, de modo que cada lado de esos m triángulos, lo es también de otro triángulo contiguo o del polígono dado. Probar que m+n es par. Conocidos n y m, hallar el número de lados distintos que quedan en el interior del polígono y el número de vértices distintos que quedan en ese interior.

PROBLEMAS PROPUESTOS POR NUESTROS SOCIOS

PROBLEMA 7º:

Demostrar que para todo n natural, $n^2(n^2 + 11)$ es múltiplo de 12.
(Propuesto por Joaquín Gómez Rey)

PROBLEMA 8º:

Hay n cajas de cerillas situadas en fila india. Si el doble del número de cerillas de la caja número k más el numero de cerillas de la(s) caja(s) contiguas es $\binom{n+1}{k}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. ¿Cuántas cerillas tiene cada caja ? *(Propuesto por Joaquín Gómez Rey)*

PROBLEMA 9º:

Una urna tiene n bolas, $n-1$ blancas y una negra. Se extraen sucesivamente, y con reposición, n bolas. Sea p_n la probabilidad de obtener al menos una vez la bola negra. Halla el límite de p_n, cuando n tiende a infinito. *(Propuesto por Joaquín Gómez Rey)*