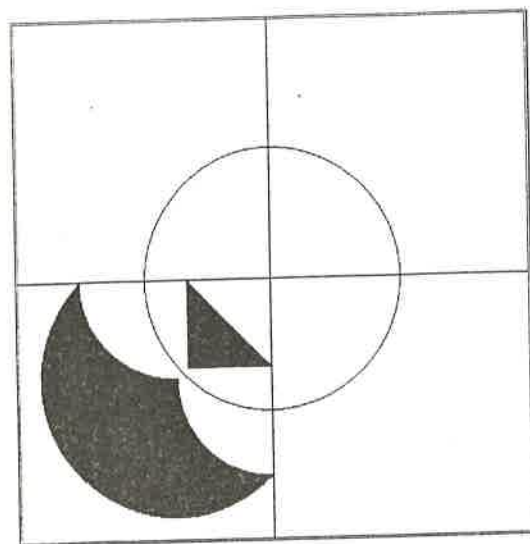


Sociedad Puig Adam

de profesores
de matemáticas



boletín num. 36
febrero de 1993

contiene índice de artículos
de los 35 primeros números

BOLETIN DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM"
DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Febrero de 1994

nº 36 (1993-94)

	INDICE	Pág
- Toda la correspondencia deberá dirigirse al	ASAMBLEA GENERAL	3
	XII CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS	5
	NOTICIAS	6
Apartado nº 9479 28.080 -- MADRID	XXX OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA - 1ª FASE	9
- La confección de este número ha estado a cargo de	APLICACIONES DEL MODELO LOGISTICO, por J. V. García Sestafe	13
J. Fernández Biarge	SOBRE ...PROCEDIMIENTOS DE OBTENCION DE LOS NUMEROS AUREO Y $\sqrt{2}$, por J. Peralta	35
VEAN EN ESTE NUMERO	LA INVERSION Y SU SIMULACION, por E. Roanes Lozano y E. Roanes Macías	47
LAS CONVOCATORIAS DE	PROBLEMAS PROPUESTOS	75
NUESTRA	PROBLEMAS RESUELTOS	79
<u>ASAMBLEA GENERAL</u>	INDICE DE LOS ARTICULOS PUBLICADOS EN LOS 35 PRIMEROS NUMEROS DE ESTE BOLETIN	91
Y DE NUESTRO		
<u>XII CONCURSO DE</u>		
<u>RESOLUCION DE PRO-</u>		
<u>BLEMAS</u>		
ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS. NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.		

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

Jose Vicente García Sestafe

Vicepresidente por Madrid:

Jose Manuel Martínez Sánchez

Vicepresidente por Castilla - La Mancha:

Salvador Herrero Pallardo

Vicepresidente por Castilla - León:

Juan Bosco Romero Márquez

Vocal de actividades y concursos:

Juan Ochoa Mérida

Vocal de relaciones institucionales:

Eugenio Roanes Macías

Vocal de gestión de publicaciones:

Carmen Garcia-Miguel Fernández

Vocal de redacción de publicaciones:

Julio Fernández Biarge

Secretario:

Francisco González Redondo

Vicesecretario:

Enrique Rubiales Camino

Tesorero:

Alberto Aizpún Lopez

Bibliotecario:

Jesus Begona Aina

CONVOCATORIA DE LA ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE 1994

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* correspondiente a 1994 para el día **16 de Abril**, en los locales de la Escuela de Formación del Profesorado de E.G.B. "*Pablo Montesino*" de la Universidad Complutense de Madrid (calle Santísima Trinidad, 37), a las 11 h 30 m , en primera convocatoria y a las 12 h en segunda, con el siguiente

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad y sobre nuestras relaciones con la Federación Nacional de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
3. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Ruegos y preguntas.

¡¡ Esperamos tu asistencia !!

XII CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

Convocado por:
*Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y Colegio
de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras*

BASES

PRIMERA

Podrán participar en el Concurso los alumnos de B.U.P. y F.P. Los de F.P. I lo harán concurriendo con los de 1º de B.U.P. ; los de primer curso de F.P. II, con los de 2º de B.U.P. y los de segundo y tercero de F.P.II, con los de 3º de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles) y se realizarán en Madrid, en un solo día de la segunda quincena del mes de junio de 1994.

TERCERA

Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.

CUARTA

Los Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de **seis**) deberán realizar la preinscripción antes del día **22 de Mayo de 1994**, dirigiéndose por carta sin certificar a esta Sociedad, Apartado de correos nº **9.479**, 28080 - MADRID. En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados.

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos Centros entregarán a los alumnos que envíen, **credenciales individuales** en las que se haga constar el **curso** en que están matriculados en el año académico 1993-94 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

Enero de 1994

Este Concurso cuenta con la colaboración de *Coca-Cola España*

WORLD MATHEMATICAL YEAR 2000

Como ya anunciamos en el número 32 de este Boletín, durante la celebración del 40º aniversario del *Institute of Pure and Applied Mathematics (IMPA)*, en Mayo de 1992, el presidente de la *Unión Matemática Internacional (IMU)*, profesor **J. L. Lions**, en nombre de esa Unión, declaró el año **2.000** como **Año Matemático Mundial**.

El pasado verano, el profesor **Lions** difundió una carta dando cuenta de los progresos realizados en la organización de los actos relacionados con ese acontecimiento, para los que se cuenta con el patrocinio de la UNESCO y de importantes entidades de diversos países, tales como la *Third World Academy of Sciences*, el Ministerio francés de Investigación y del Espacio y la Academia de Ciencias del Brasil. A la iniciativa de la *IMU*, repaldada por sus dos principales comisiones, la *International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)*, presidida por **Miguel de Guzmán**, y la *CDE*, se han adherido la *African Mathematical Union (AMU)*, la *Société mathématique de France* y la *Société de mathématiques appliquées et industrielles*, la *Israel Academy of Sciences and Humanities* y la *European Mathematical Society (EMS)*.

La *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas*, en la que estamos integrados, está coordinando la posible participación de esas Sociedades en los acontecimientos que se programen para el anunciado **Año Matemático Mundial**.

NOTICIAS

Como es sabido, los miembros de Sociedades de Profesores de Matemáticas que están federadas, tienen derecho a recibir los sucesivos números de la revista *Suma*.

Habiendo transcurrido un tiempo prudencial desde la formalización del ingreso de nuestra Sociedad en la referida Federación sin que se haya recibido ningún ejemplar de la citada publicación, la directiva de la Sociedad Puig Adam ha mantenido contactos telefónicos con Luis Balbuena y con Sixto Romero encargado, éste último, de la difusión de publicaciones, que nos han indicado las dificultades por las que ha pasado el correspondiente departamento, pero, que a pesar de éstas, se comprometen a que nuestros asociados reciban el primer envío dentro del mes de enero.

.....

Recientemente ha visto la luz el primer tomo de la Enciclopedia de las Matemáticas, traducción de la edición rusa, realizada conjuntamente por las editoriales Mir y Rubiños. Es inminente la aparición del segundo tomo.

TEMU - 95

El Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya ha difundido el Primer Anuncio de las **Jornadas sobre Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad - TEMU - 95**, que se celebrarán en Barcelona los días 16, 17 y 18 de Febrero de 1995.

Estas Jornadas continúan la línea iniciada por las de Madrid (Noviembre de 1991), y Valencia (Abril de 1993). El objetivo fundamental es poner en común las experiencias innovadoras que se vienen realizando en la universidad sobre la utilización de nuevos recursos, especialmente informáticos, en la enseñanza de las Matemáticas.

La segunda circular, con un programa detallado de las actividades que se desarrollarán en las Jornadas, se difundirá en Marzo de 1994. Las comunicaciones deberán presentarse, en su versión definitiva, antes del 30 de Septiembre de 1994. El plazo de inscripción con tarifa reducida terminará el 10 de Enero de 1995.

La Secretaría del TEMU - 95 tiene su sede en:
Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtica Aplicada II - EDIFICIO U
c/ Pau Gargallo, 5 08.028 - BARCELONA
Tel: (93) - 401 69 22 Fax: (93) - 401 70 40
E-mail: temu95@ma2.upc.es

El coordinador del Comité Organizador es **Antonio Montes** y el del Comité Científico, **Josep Grané** (de la U. P. Catalunya). A este último pertenecen **Alfonsa García** y **Eugenio Roanes**, de Madrid.

XXX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

PRIMERA FASE - MADRID

Las pruebas de la PRIMERA FASE de la "XXX Olimpiada Matemática Española", correspondientes al curso 1993-94, se han celebrado en Madrid, como en la mayor parte de los restantes distritos, los días 26 y 27 de Noviembre de 1993.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española*, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al estudio*. De acuerdo con las bases, que publicábamos en nuestro número anterior, a ella podían concurrir los alumnos matriculados en el C. O. U., en el último curso de Formación Profesional de 2º grado, 2º curso del 2º ciclo del Bachillerato Experimental (Reforma), 3º curso de B. U. P. y 1º y 2º curso del Bachillerato de la L.O.G.S.E..

Como de costumbre, esta Olimpiada comprende dos fases. La primera se realiza en distintos distritos repartidos por toda España, y los tres ganadores de cada uno de ellos, participan en la fase final, de la que salen elegidos los campeones, que después representarán a España en la *Olimpiada Matemática Internacional* y en la *Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*. También pueden concurrir a esa fase final los alumnos que, habiendo participado en alguna edición anterior de la Olimpiada, sean formalmente invitados por la *R. S. M. E.*, por reunir todavía los requisitos precisos para intervenir en las citadas competiciones internacionales.

En Madrid han tenido lugar, conjuntamente, las pruebas de dos distritos, correspondientes a todas las Universidades de esa Comunidad. Como de costumbre, se desarrollaron en dos sesiones, de cuatro horas de duración cada una, en las que se propusieron los ocho problemas cuyos enunciados pueden verse en nuestra sección de **Problemas Propuestos**, en este mismo número del Boletín. Seis de esos problemas son los mismos que se propusieron en otros distritos que realizaron simultáneamente las pruebas.

El número de participantes en esta Primera Fase, en Madrid, ha sido este año de 135, superando ampliamente al de años anteriores. En cambio, el nivel medio de preparación ha sido muy bajo. Ciertamente que algunos de los problemas han sido algo más difíciles que los de otros años, pero de los **80 puntos** que podían obtenerse - 10 en cada uno de los 8 problemas propuestos - la mitad de los participantes no han pasado de un total de 4 puntos. Representando a todas las Universidades de Madrid, debían escogerse hasta **seis** alumnos (dos distritos, A y B), para pasar a la SEGUNDA FASE. El jurado seleccionó a los siguientes:

- D. **Tomás BAEZA OLIVA**, del C.O.U. del *I.B. Avda. de los Toreros*, de Madrid **64 puntos 1er premio**
- D. **David SEVILLA GONZÁLEZ**, del C.O.U. del *I.B. "Luis Buñuel"*, de Alcorcón (Madrid) **60 puntos 1er premio**
- D. **Oscar AYO MARTÍN**, del C.O.U. del *I.B. Avda. de los Toreros*, de Madrid **39 puntos 2º premio**
- D. **Alejandro GARCÍA GIL**, de 3º de B.U.P del *I.B. "Miguel Delibes"*, de Madrid **34 puntos 2º premio**
- D. **Alberto PORTAL RUIZ**, de 3º de B.U.P. del *I.B. "Manuela Malasaña"*, de Madrid **27 puntos 3er premio**
- D. **David AGUDO JIMÉNEZ**, del C.O.U. del *I.B. "Rey Pastor"*, de Madrid **26 puntos 3er premio**

Ninguno de los restantes llegó a alcanzar los 25 puntos. Debemos señalar que los dos primeros clasificados, participaban en esta Olimpiada por segunda vez. **SEVILLA GONZÁLEZ** obtuvo también un primer premio en Madrid, en la Primera Fase de la Olimpiada del año pasado, siendo alumno de 3º de B.U.P., y se clasificó en 4º lugar en la Fase Final, participando después en la Olimpiada Internacional de Matemáticas celebrada en Turquía, y en la Iberoamericana de Méjico, en la que obtuvo una mención honorífica. **BAEZA OLIVA** estuvo a punto de clasificarse para la Fase Final de la Olimpiada del año pasado (quedó a un punto del sexto clasificado), siendo también alumno de 3º de B.U.P.

En los **Concursos de Resolución de Problemas** de nuestra Sociedad, también han cosechado importantes éxitos los anteriores. **Baeza Oliva** fué el 2º clasificado, como alumno de 2º de B.U.P., en 1992 y el 4º, como alumno de 3º, en 1993. **Sevilla González** fué el primero de 1º de B.U.P. en 1991, el tercero de 2º en 1992 y el campeón de 3º en 1993.

También debemos destacar la presencia, entre los seleccionados de varios alumnos del tercer curso de B.U.P.

Los seis seleccionados citados, junto con los que lo hayan sido en los restantes distritos españoles, serán convocados para participar en la SEGUNDA FASE de esta Olimpiada, que está prevista para los días 25 y 26 de Febrero de 1994.

Para que nuestros lectores puedan hacerse idea de la dificultad que los participantes han tenido al enfrentarse con los ocho problemas propuestos, damos a continuación las puntuaciones medias obtenidas por todos ellos y por los seis premiados. Todas ellas son sorprendentemente bajas. Debe advertirse que no se presentó ninguna solución correcta de los problemas 4º y 6º.

Problema nº:	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Puntuación media:	---	---	---	---	---	---	---	---
de todos:	1,1	0,5	1,7	0,2	1,6	0,4	0,5	2,1
de los 6 premiados:	7,5	3,5	7,7	0,9	5,8	5,2	4,5	7,5

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS
Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADOS EN ESTE BOLETIN

Concurso de Resolucion de Problemas de nuestra Sociedad		
n° (año)	Convocado en Boletín	Crónica/enunciados
I (1983)	1	2 , pág. 11
II (1984)	3	4 , pág. 7
III (1985)	5	7 , pág. 3
IV (1986)	9	10 , pág. 5
V (1987)	13	15 , pág. 3
VI (1988)	17	19 , pág. 17
VII (1989)	20	22 , pág. 9
VIII (1990)	24	26 , pág. 3
IX (1991)	27	29 , pág. 3
X (1992)	30	32 , pág. 3
XI (1993)	33	34 , pág. 9
XII (1994)	36	

Olimpiada Matemática Española		
n° (año)	1ª fase (distritos)	2ª fase (final)
XX (1984)	- -	3, pág. 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV (1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61
XXVI (1989-90)	24, págs. 11 y 67	25, págs. 9 y 73
XXVII (1990-91)	27, págs. 7 y 77	28, págs. 17 y 79
XXVIII (1991-92)	30, págs. 19 y 67	31, págs. 11 y 81
XXIX (1992-93)	33, págs. 5 y 71	34, págs. 17 y 71
XXX (1993-94)	36, págs. 9 y 75	

Olimpiada Iberoamericana de Matematicas		
n° (año) lugar	Crónica y enunciados en boletín n°	
I (1986) Colombia	8 , págs.	11 y 83
II (1987) Paraguay	12 , págs.	3 y 75
III (1988) Perú	18 , págs.	5 y 73
IV (1989) Cuba	21 , págs.	11 y 63
V (1990) España(Valladolid)	26 , págs.	13 y 73
VI (1991) Argentina	30 , págs.	15 y 65
VII (1992) Venezuela	32 , págs.	11 y 71
VIII (1993) Méjico	35 , págs.	5 y 65

Olimpiada Matematica Internacional		
n° (año) lugar	Crónica y enunciados en boletín n°	
XXIV (1983) París	2, pág.	15
XXV (1984) Praga	4, pág.	67
XXVI (1985) Helsinski	7, págs.	9 y 89
XXVII (1986) Varsovia	10, pág. 11 y	11, pág. 89
XXVIII (1987) Cuba	15, págs.	9 y 73
XXIX (1988) Australia	19, págs.	23 y 77
XXX (1989) Alemania (R.F.A.)	22, págs.	15 y 73
XXXI (1990) China	26, págs.	11 y 71
XXXII (1991) Suecia	29, págs.	11 y 79
XXXIII (1992) Rusia	32, págs.	9 y 69
XXXIV (1993) Turquía	35, págs.	3 y 63

APLICACIONES DEL MODELO LOGISTICO

JOSE VICENTE GARCIA SESTAFE

1. INTERACCION ENTRE DOS ESPECIES.

Los fundamentos de la Ecología matemática se deben a los trabajos de Alfred J. Lotka y de Vito Volterra; éste último, en una comunicación presentada en la Reunión Internacional de Matemáticas (París, 1937) defendió la teoría darwiniana sobre el crecimiento de las poblaciones, consistente en la interacción que cada dos especies ejercen sobre su crecimiento o decrecimiento numérico y los posibles ciclos que se originan.

Es interesante recordar la introducción del posible modelo matemático que realiza Lotka en [7]: Designando por X el número de individuos de una determinada especie en el tiempo t, dentro de un recinto que se supone cerrado, se puede asumir que el crecimiento de la especie será función de X

$$dX/dt = f(X)$$

y desarrollando f(X) por el teorema de Taylor

$$dX/dt = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$$

Inmediatamente se observa que si

$$X = 0 \quad dX/dt = 0, \text{ luego } a_0 = 0$$

Si se limita el desarrollo a un solo término

$$dX/dt = a_1 X$$

resultaría que el crecimiento sólo se anulará para $X = 0$; pero empíricamente se sabe que el crecimiento se anula cuando se llega a una posición de equilibrio, como consecuencia de la limitación del espacio, de los alimentos o de cualquier otra causa exógena. Por tanto dX/dt se debe anular, al menos, para otro valor distinto de cero, luego hay que admitir que el polinomio segundo miembro debe ser, al menos de segundo grado. Como consecuencia el modelo más simple que explica la existencia de punto de equilibrio es

$$dX/dt = a_1 X + a_2 X^2$$

esto es, el modelo logístico.

Al estudiar la ecología de una determinada especie, hay que analizar si la presencia en su entorno de individuos de otra u otras especies afectan al desarrollo natural de la especie considerada. En el hipotético caso en que dadas dos especies, en un área determinada, ninguna influye sobre la evolución de la otra, esto es, no existe ninguna acción recíproca, se dice que se está en la situación denominada neutralismo. Pero este caso no es el más frecuente; en general, en la coexistencia de dos o más especies en un territorio determinado, la presencia de una influiría sobre el desarrollo de algunas de las restantes, dándose el caso frecuente de que ciertas especies sirvan de alimento a otras. Sin llegar a este extremo, pueden dos especies llegar a presentar interacciones favorables a una de las especies e inclusive a las dos.

Con frecuencia se presentan, además del neutralismo, ya descrito, situaciones como las siguientes:

Simbiosis es una asociación tal que ambas especies se favorecen mutuamente.

Depredación es el caso en que una especie (depredadora) se alimenta de otra especie (presa).

Parasitismo es aquella situación en la cual una especie (parásita) vive a expensas de otra (huesped) a la cual produce perjuicios. Obsérvese que el aumento de la especie huesped favorece a la especie parásita, pero el aumento de ésta perjudica a la especie huesped.

Comensalismo. Una especie (comensal) se alimenta a costa de otra especie (huesped) a la cual no produce ningún perjuicio, pero tampoco ninguna ventaja. Obsérvese que el crecimiento de la especie huésped favorece a la especie comensal, pero

el incremento de ésta ni favorece ni perjudica a la primera.

Amensalismo es aquella situación en que una especie inhibidora produce trastornos en otra (amensal) sin obtener ningún beneficio. Obsérvese que el crecimiento de la especie inhibidora perjudica a la especie amensal, mientras que el aumento de ésta es indiferente en el número de inhibidores

Competición es la situación en que cada especie tiende a eliminar a la otra.

El estudio de las interacciones simultáneas entre más de dos especies es sumamente complicado. En lo que sigue, y como aplicación del modelo logístico, se van a analizar interacciones entre dos únicas especies, en un área delimitada que se supone cerrada.

2. FORMULACION MATEMATICA

Supuesta una especie E_1 -con un efectivo N_1 en el tiempo t - en un recinto cerrado y con alimentación suficiente, su crecimiento vendrá regulado por el modelo logístico, pudiéndose escribir

$$1/N_1 \cdot dN_1/dt = a_1 - b_{11} N_1, \quad a_1, b_{11} \in R_{++}$$

Admitida la existencia, en el mismo entorno, de otra especie E_2 -con N_2 individuos en el referido momento t - habrá que modificar la ecuación anterior -salvo en el caso de neutralismo- para poner de manifiesto la interacción entre ambas especies; esto se logra agregando un nuevo sumando, proporcional al efectivo de la especie E_2 , positivo si el efecto de E_2 sobre E_1 es favorable, negativo en caso contrario e inclusive, nulo si no existe tal efecto. Así pues, se escribe

$$1/N_1 \cdot dN_1/dt = a_1 - b_{11} N_1 + b_{12} N_2, \quad b_{12} \in R$$

y de manera análoga, para la segunda especie, se escribirá

$$1/N_2 \cdot dN_2/dt = a_2 + b_{21} N_1 - b_{22} N_2, \quad b_{21} \in R$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir

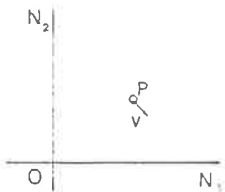
$$\begin{cases} dN_1/dt = a_1 N_1 - b_{11} N_1^2 + b_{12} N_1 N_2 \\ dN_2/dt = a_2 N_2 + b_{21} N_1 N_2 - b_{22} N_2^2 \end{cases} \quad [1]$$

formando el sistema que resume todas las principales interacciones. En efecto, según los valores de b_{12} y de b_{21} , se presentan los casos que se detallan a continuación.

- $b_{12} = b_{21} = 0$: **neutralismo**, no existe acción recíproca.
- $b_{12} > 0, b_{21} > 0$: **simbiosis**, cada especie actúa favorablemente al desarrollo de la otra
- $b_{12} < 0, b_{21} > 0$: **parasitismo** o **depredación** (matemáticamente son equivalentes) ya que el aumento de la especie E_2 produce disminución en la E_1 y el aumento de ésta, incrementa a E_2 . La especie E_2 es parásita o depredadora y la E_1 huésped o presa.
- $b_{12} = 0, b_{21} > 0$: **comensalismo**, ya que la especie E_1 (huésped) no es afectada por la E_2 , pero ésta es favorecida por un aumento de E_1 .
- $b_{12} < 0, b_{21} = 0$: **amensalismo**, puesto que el aumento de la especie E_2 (inhibidora) perjudica a la E_1 , mientras que el número de individuos de E_2 no depende de la fluctuación de la especie E_1 .
- $b_{12} < 0, b_{21} < 0$: **competición**, ya que el aumento de cada especie perjudica a la otra.

2.1. CONCEPTO DE ESTABILIDAD

Si sobre un sistema de ejes coordenados representamos en abscisas el efectivo de la especie E_1 y sobre el eje de ordenadas el de la especie E_2 , toda situación, esto es, la existencia en un momento t de N_1 individuos de la primera especie y N_2 individuos de la segunda vendrá representada por un punto P de coordenadas (N_1, N_2) . Lo expuesto es perfectamente generalizable a cualquier número de especies, pero, en lo que sigue, sólo se tratará el caso bidimensional.



A cada punto P se le puede asociar un vector \vec{v} que indica como se desplaza P en el tiempo, debido a los nacimientos y defunciones de cada especie considerada.

Se dice que un punto es **estacionario** o de **equilibrio** si su vector asociado es el vector cero, o dicho de otra forma, un punto de equilibrio es el representativo de una situación que se conserva en el próximo instante.

Si por alguna causa se produce un pequeño desplazamiento del punto de equilibrio P_0 , puede suceder que el sistema tienda a retomar dicha posición en los instantes

siguientes, o que por el contrario el sistema tienda a alejarse de P_0 ; en el primer caso se dice que el equilibrio es **estable** y en el segundo, **inestable**.

Considerando sólo pequeños desplazamientos del punto de equilibrio se pueden presentar cuatro situaciones. Se describen con un simple ejemplo tomado de Maynard Smith [12]. Sea una única especie tal que tiene X_t individuos en el momento t ; siendo X_0 el punto de equilibrio, se plantea la ecuación recurrente

$$X_{t+1} = X_0 + r(X_t - X_0)$$

Para su análisis, como posteriormente se hará en varias ocasiones, se traslada el origen al punto de estabilidad, mediante el cambio

$$X_t = X_0 + x_t$$

donde x_t es la nueva abscisa; sustituyendo se obtiene

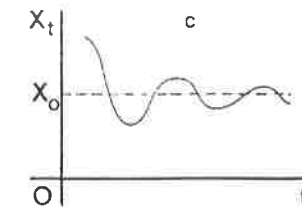
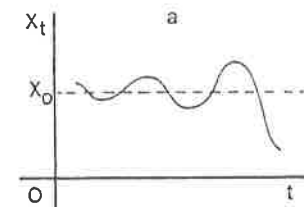
$$X_0 + x_{t+1} = X_0 + r(X_0 + x_t - X_0) \rightarrow x_{t+1} = rx_t$$

Según el valor de r se presentan los siguientes casos:

$|r| > 1$ **Divergencia**

si r negativa, $r < -1$, aparece la **oscilación divergente** (a)

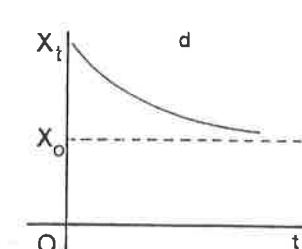
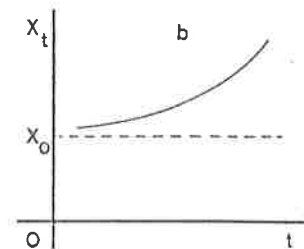
si r positiva, $r > 1$ se presenta la **exponencial divergente** (b)



$|r| < 1$ **Convergencia**

si r es negativa, $-1 < r < 0$, resulta la **oscilación convergente** (c)

si r es positiva $0 < r < 1$ se tiene la **exponencial convergente** (d)



3. RESOLUCION DEL SISTEMA FUNDAMENTAL

Para la resolución del sistema [I], basta eliminar una variable y su derivada entre las dos ecuaciones del sistema y la que se obtiene por derivación de una de ellas. Despejando N_2 en la primera ecuación

$$N_2 = [1/N_1 \cdot dN_1/dt - a_1 + b_{11} N_1] / b_{12}$$

y derivando

$$N'_2 = [(N_1 N''_1 - N'^2_1) N_1^2 - b_{11} N'_1] / b_{12}$$

donde $N'_1 = dN_1/dt$ por comodidad de escritura

Sustituyendo los valores de N_1 y de N'_1 en la segunda ecuación de [I], resulta, después de operar

$$\begin{aligned} & b_{12} N_1 N''_1 - N'^2_1 (b_{12} - b_{22}) + N'_1 N_1^2 (2b_{11} b_{22} + b_{11} b_{12} - b_{12} b_{21}) - \\ & - N_1 N'_1 (2a_1 b_{22} + a_2 b_{12}) + N_1^2 (a_1 a_2 b_{12} + a_1^2 b_{22}) - \\ & - N_1^3 (a_2 b_{11} b_{12} - a_1 b_{12} b_{21} + 2a_1 b_{11} b_{22}) + N_1^4 (b_{11}^2 b_{22} - b_{11} b_{12} b_{21}) = 0 \end{aligned} \quad [2]$$

Aparte del caso trivial $b_{12} = b_{21} = 0$ -neutralismo- en el que el sistema se reduce a las dos logísticas

$$\begin{cases} 1/N_1 dN_1/dt = a_1 - b_{11} N_1 & N_1 = A_1 / [1 + B_1 \exp(-a_1 t)] \\ 1/N_2 dN_2/dt = a_2 - b_{22} N_2 & N_2 = A_2 / [1 + B_2 \exp(-a_2 t)] \end{cases}$$

donde $A_i = a_i/b_i$, $B_i = C_i/b_i$, $C_i = c^{i\epsilon}$ de integración, $i = 1, 2$, se presenta el caso, en principio sencillo $b_{12} = 0$ que según $b_{21} > 0$ ó $b_{21} < 0$ proporciona respectivamente subcasos de comensalismo (E_1 huesped, E_2 comensal) o de amensalismo (E_1 inhibidor, E_2 amensal)

La ecuación [2], para $b_{12} = 0$, $b_{21} \neq 0$ se reduce a

$$b_{22} N'^2_1 + 2b_{11} b_{22} N'_1 N_1^2 - 2a_1 b_{22} N_1 N'_1 + a_1^2 b_{22} N_1^2 - 2a_1 b_{11} b_{22} N_1^3 + b_{11}^2 b_{22} N_1^4 = 0$$

que después de simplificar por $b_{22} \neq 0$ se puede escribir

$$(N'_1 - a_1 N_1 + b_{11} N_1^2)^2 = 0$$

que proporciona, como era lógico suponer, al no influir E_2 sobre E_1 ,

$$N_1 = A_1 / [1 + B_1 \exp(-a_1 t)] \quad , \quad A_1 = a_1/b_{11} \quad , \quad B_1 = C_1/b_{11}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema [I], se obtiene

$$N'_2 = a_2 N_2 - b_{22} N_2^2 + (b_{21} A_1 N_2) / [1 + B_1 \exp(-a_1 t)]$$

o bien

$$N'_2 = f(t) N_2 - b_{22} N_2^2$$

que es una ecuación de Bernouilli, donde

$$f(t) = a_2 + A_1 b_{21} / [1 + B_1 \exp(-a_1 t)]$$

Haciendo el cambio de variable

$$1/N_2 = u \rightarrow -N'_2/N_2^2 = u'$$

resulta

$$u' + u f(t) - b_{22} = 0$$

que es lineal, y cuya integral general es

$$u = \exp[-\int f(t) dt] \cdot [k + b_{22} \int \exp(\int f(t) dt) dt]$$

de donde

$$N_2 = \exp[\int f(t) dt] / [k + b_{22} \int \exp(\int f(t) dt) dt]$$

El cálculo de $\int f(t) dt$ conduce a

$$J = \int \{ a_2 + (b_{21} A_1) / [1 + B_1 \exp(-a_1 t)] \} dt$$

que se integra mediante el cambio

$$B_1 \exp(-a_1 t) = u \rightarrow -a_1 B_1 \exp(-a_1 t) dt = du; \quad -a_1 u dt = du$$

$$J = a_2 t - b_{22} A_1 \int du / [a_1 u (1 + u)] = a_2 t - (b_{22} A_1) / a_1 [\ln B_1 \exp(-a_1 t) - \ln(1 + B_1 \exp(-a_1 t))]$$

Por otra parte, la integral

$$K = \int \exp[\int f(t) dt] dt$$

no es, en general, expresable mediante un número finito de funciones explícitas, puesto que efectuando el cambio

$$B_1 \exp(-a_1 t) = u$$

se obtiene

$$K = \int \exp[\int f(t) dt] dt = - (B_1/a_1) \int u^{-a_2/a_1} \cdot [1 + (a_2 + b_{22} A_1)/a_1] \cdot u^{b_{22} A_1/a_1} / (1 + u) du$$

resultando a una integral binomia, que según el teorema de Tchebichef sólo es integrable si es entero alguno de los números

$$(a_2 + b_{22} A_1 + a_1)/a_1, \quad b_{22} A_1/a_1 \quad \text{ó} \quad a_2/a_1.$$

Se ha demostrado así que el sistema [I] -ni en un caso aparentemente sencillo- no admite solución mediante un número finito de funciones explícitas.

Volviendo a la ecuación [2] y haciendo

$$h_1 = -b_{12} + b_{22}, \quad h_2 = 2b_{11} b_{22} + b_{11} b_{12}, \quad h_3 = -(2a_1 b_{22} + a_2 b_{12})$$

$$l_1 = a_1 a_2 b_{12} + a_1^2 b_{22}, \quad l_2 = -(a_2 b_{11} b_{12} - a_1 b_{12} b_{21} + 2a_1 b_{11} b_{22})$$

$$l_3 = b_{11}^2 b_{22} - b_{11} b_{12} b_{21}$$

se puede escribir

$$b_{12} N_1 N_1' + h_1 N_1'^2 + h_2 N_1' N_1^2 + h_3 N_1 N_1' + l_1 N_1^2 + l_2 N_1^3 + l_3 N_1^4 = 0$$

Realizando el cambio

$$dN_1/dt = M_1$$

donde, derivando con respecto a N_1 , se obtiene

$$dM_1/dN_1 = (d/dN_1) (dN_1/dt) = (d/dt) (dN_1/dt) \cdot (1/M_1) = (d^2 N_1/dt^2) (1/M_1)$$

y de aquí

$$d^2 N_1/dt^2 = M_1 (dM_1/dN_1)$$

sustituyendo

$$b_{12} N_1 M_1 dM_1/dN_1 + h_1 M_1^2 + h_2 M_1 N_1^2 + h_3 M_1 N_1 + l_1 N_1^2 + l_2 N_1^3 + l_3 N_1^4 = 0$$

que es una ecuación de primer orden que se puede integrar por cualquiera de los métodos aproximados conocidos.

4. COMPETICION ENTRE DOS ESPECIES.

Se ha visto que, de forma general, no se puede obtener solución del sistema [I], pero, bajo algunos supuestos limitativos, se pueden conseguir resultados aproximados de gran valor ilustrativo.

Si se introduce la hipótesis de que para todo individuo de cada una de dos especies en competición existe el efecto inhibitorio debido a los restantes individuos (de

ambas especies) se tiene, para cada individuo, que se encuentra compitiendo con una población

$$N = \lambda N_1 + \mu N_2$$

donde los factores λ y μ se introducen porque los efectos inhibitorios de cada especie pueden ser distintos.

Por otra parte el sistema [I] en el caso de competición se puede escribir

$$\begin{cases} (1/N_1) dN_1/dt = a_1 - b_{11} N_1 - b_{12} N_2 \\ (1/N_2) dN_2/dt = a_2 - b_{21} N_1 - b_{22} N_2 \end{cases} \quad [1']$$

donde $a_i, b_{ij} \in R_{++}$, $i, j = 1, 2$. Haciendo

$$\begin{cases} b_{11} N_1 + b_{12} N_2 = b_1 N \rightarrow b_{11} = \lambda b_1, \quad b_{12} = \mu b_1 \\ b_{21} N_1 + b_{22} N_2 = b_2 N \rightarrow b_{21} = \lambda b_2, \quad b_{22} = \mu b_2 \end{cases}$$

de donde

$$b_{11}/b_{12} = b_{21}/b_{22} \quad [3]$$

y por tanto, el sistema [1'] se convierte en

$$\begin{cases} (1/N_1) dN_1/dt = a_1 - b_1 N \\ (1/N_2) dN_2/dt = a_2 - b_2 N \end{cases} \quad [4]$$

o en

$$\begin{cases} (d/dt) (\ln N_1) = a_1 - b_1 N \\ (d/dt) (\ln N_2) = a_2 - b_2 N \end{cases}$$

Eliminando N

$$(d/dt) (b_2 \ln N_1 - b_1 \ln N_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

e integrando

$$N_1^{b_2} / N_2^{b_1} = K \exp [(a_1 b_2 - a_2 b_1) t]$$

Entonces, según que $a_1 b_2 - a_2 b_1$ sea positivo o negativo, si $t \rightarrow \infty$ respectivamente, se cumple $N_2^{b_1} \rightarrow 0$ ó $N_1^{b_2} \rightarrow 0$ esto es

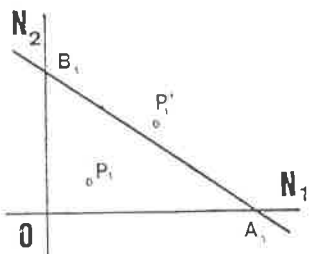
$a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$, entonces N_2 se extingue

$a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$, entonces N_1 se extingue, que es la consecuencia del sistema [4].

Si se abandona la hipótesis simplificadora [3], esto es, si se supone

$$b_{12} b_{21} \neq b_{11} b_{22} \quad [3']$$

se puede llegar a muy interesantes conclusiones, ayudándose de una adecuada representación gráfica.



Tomando, sobre un sistema cartesiano, en abscisas los efectivos de la especie \$E_1\$ y en ordenadas los correspondientes a la especie \$E_2\$, el lugar geométrico de los puntos en que la especie \$E_1\$ está en equilibrio se obtiene para $dN_1/dt = 0 \rightarrow a_1 - b_{11} N_1 - b_{12} N_2 = 0$ esto es, el lugar buscado es una recta incidente con los ejes

$$A_1 (a_1/b_{11}, 0), B_1 (0, a_1/b_{12})$$

Para un punto \$P_1\$ interior al triángulo \$OA_1B_1\$, se tiene

$$N_2 < (a_1 - b_{11} N_1)/b_{11}$$

y como

$$dN_1/dt = N_1 (a_1 - b_{11} N_1 - b_{12} N_2) = N_1 [b_{11} (a_1 - b_{12} N_2)/b_{11} - b_{11} N_1] > > b_{11} N_1 (N_1 - N_1) = 0$$

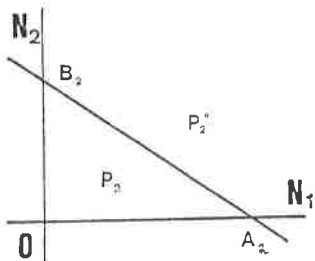
resulta que para toda situación representable por un punto interior al referido triángulo se cumple

$$dN_1/dt > 0$$

esto es, la especie \$E_1\$ está creciendo en número; similarmente se comprueba que para todo punto situado por encima de la recta \$A_1 B_1\$, como el \$P'\$, de la figura, se verifica

$$dN_1/dt < 0$$

esto es, en la situación reflejada por \$P'\$, el efectivo de \$N_1\$ está decreciendo.



De manera análoga, para la especie \$E_2\$ se verifica que el lugar geométrico de los puntos de equilibrio viene dado por

$$dN_2/dt = 0 \rightarrow a_2 - b_{21} N_1 - b_{22} N_2 = 0$$

recta que corta a los ejes coordenados en

$$A_2 (a_2/b_{21}, 0) \text{ y } B_2 (0, a_2/b_{22})$$

cumpléndose, similarmente, que para un punto \$P_2\$ interior a \$OA_2B_2\$

$$dN_2/dt > 0 \rightarrow N_2 \text{ crece}$$

y para un punto exterior \$P'_2\$

$$dN_2/dt < 0 \quad N_2 \text{ decrece}$$

Las rectas

$$a_1 - b_{11} N_1 - b_{12} N_2 = 0 \quad \text{y} \quad a_2 - b_{21} N_1 - b_{22} N_2 = 0$$

no son paralelas, puesto que por [3']

$$b_{11}/b_{21} \neq b_{12}/b_{22}$$

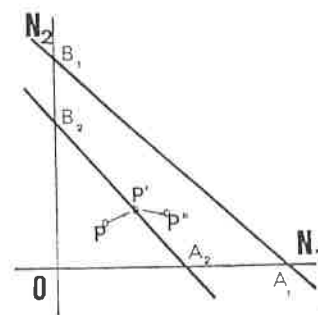
luego son dos rectas que se cortan, precisamente, en el punto \$P_0\$, de coordenadas $P_0 [(a_1 b_{22} - a_2 b_{12}) / (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}), (a_2 b_{11} - a_1 b_{21}) / (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21})]$ [5]

A continuación se presentan las cuatro posiciones posibles de las dos rectas.

a) Si se verifican las desigualdades

$$a_1/b_{11} \geq a_2/b_{21} \quad \text{y} \quad a_1/b_{12} \geq a_2/b_{22}$$

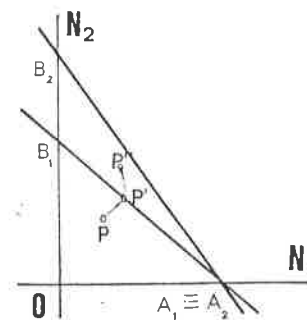
no cumpliéndose simultáneamente los dos signos de igualdad, vence la especie \$E_1\$; en efecto, partiendo de una situación como la reflejada por el punto \$P\$ -en donde aumentan ambas especies- se llega al punto \$P'\$, donde se estabiliza \$E_2\$; como \$E_1\$ sigue creciendo se pasa a la situación \$P''\$, en la que \$E_2\$ decrece y \$E_1\$ sigue aumentando, por lo cual resulta vencedora.



b) si se cumple.

$$a_1/b_{11} \leq a_2/b_{21} \quad \text{y} \quad a_1/b_{12} \leq a_2/b_{22}$$

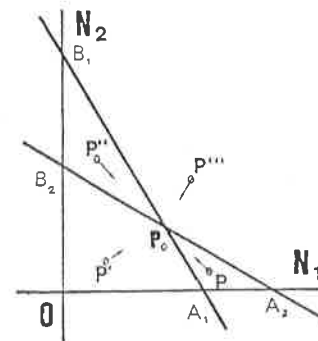
no verificándose simultáneamente las dos igualdades, vence, siguiendo análogo razonamiento, la especie \$E_2\$; en efecto, de la situación de partida \$P\$, se pasa sucesivamente a la \$P'\$ y a la \$P''\$, en la que \$E_1\$ disminuye y \$E_2\$ aumenta.

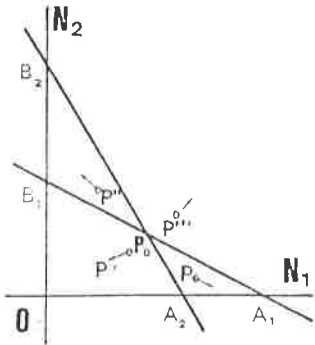


c) cumpliéndose

$$a_1/b_{11} < a_2/b_{21} \quad \text{y} \quad a_1/b_{12} > a_2/b_{22}$$

el punto \$P_0\$ -intersección de ambas rectas- y cuyas coordenadas son las obtenidas en [5] es punto de equilibrio y, además este equilibrio es estable. En efecto, que el punto es de equilibrio es obvio, y que el equilibrio es estable se observa, pues para cualquier punto \$P, P', P''\$ o \$P'''\$ el sentido de la evolución es de acercarse a \$P_0\$, como ponen de manifiesto las resultantes en cada punto.





d) si se verifica

$$a_1/b_{11} > a_2/b_{21} \quad \text{y} \quad a_1/b_{12} < a_2/b_{22}$$

el punto P_0 también es de equilibrio, pero este equilibrio es inestable, pues en todas las regiones las resultantes tienden a separarse de P_0 .

5. DINAMICA EN EL CASO DE PARASITISMO O DEPREDACION

Los modelos simplificados anteriores no explican la dinámica del parasitismo o de la depredación, que como ya se ha indicado anteriormente son interacciones matemáticas equivalentes.

parásito → huésped
depredador → presa.

Sea N_1 el efectivo de la especie huésped (o presa) y sea N_2 el correspondiente a la especie parásita (o depredadora). Designando por a_1 la tasa de crecimiento de la primera especie, en ausencia de la segunda, por $-a_2$ la tasa de decrecimiento de la segunda, en ausencia de la primera y admitiendo que la especie huésped decrece proporcionalmente al efectivo N_2 y que el número de parásitos, por el contrario, aumenta proporcionalmente a N_1 , se pueden plantear las dos ecuaciones

$$\begin{cases} (1/N_1) \cdot dN_1/dt = a_1 - b_{12} N_2 \\ (1/N_2) \cdot dN_2/dt = -a_2 + b_{21} N_1 \end{cases} \quad [6]$$

donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i = 1, 2$)

El sistema [6] es la simplificación del modelo general Lotka - Volterra

$$\begin{cases} (1/N_1) \cdot dN_1/dt = a_1 - b_{11} N_1 - b_{12} N_2 \\ (1/N_2) \cdot dN_2/dt = -a_2 + b_{12} N_1 - b_{22} N_2 \end{cases} \quad [7]$$

La hipótesis simplificadora que permite pasar de [7] a [6] es

$$b_{11} = b_{22} = 0$$

esto es, equivalente a admitir que tanto el número de individuos de la especie parásita, como el de la especie huésped sólo están limitados por el número de individuos de la especie contraria y no por el número de individuos de su misma especie

Volviendo al sistema simplificado [6], se puede obtener, de forma sencilla, una relación funcional entre las variables N_1 y N_2 . Dividiendo, miembro a miembro, ambas ecuaciones, se obtiene

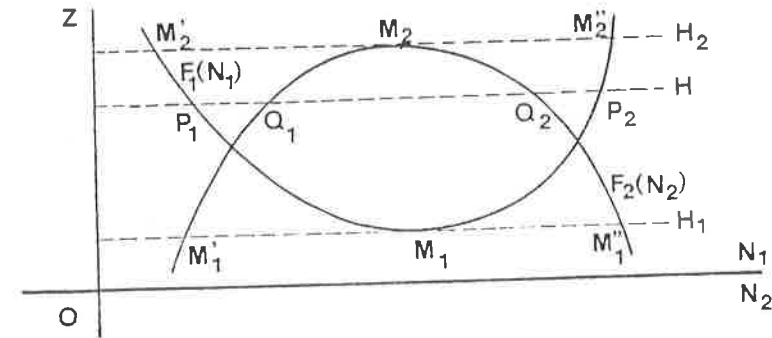
$$[-a_2/N_1 + b_2] dN_1 - [(a_1/N_2) - b_1] dN_2 = 0$$

e integrando

$$-a_2 \ln N_1 + b_2 N_1 - a_1 \ln N_2 + b_1 N_2 = K \quad [8]$$

siendo K la constante de integración. Para cada valor de la constante se obtiene una curva de la familia.

Para obtener una representación de la curva [8] se puede proceder como se indica a continuación



Sobre un mismo diagrama se representan las funciones

$$z = -a_2 \ln N_1 + b_2 N_1 - K_0, \quad z = a_1 \ln N_2 - b_1 N_2$$

la primera, función de la variable N_1 y la segunda, de la N_2 . Para obtener puntos de la curva [8] basta trazar paralelas al eje de abscisas, como por ejemplo la recta $z = h$ que corta a ambas curvas en los puntos P_1, Q_1, P_2, Q_2 de abscisas respectivas p_1, q_1, p_2 y q_2 ; como es evidente, los puntos de coordenadas

$$(p_1, q_1), (p_1, q_2), (p_2, q_1), \text{ y } (p_2, q_2)$$

son incidentes con la curva [8].

Para la recta $z = h_1$, tangente a $z = f_1(N_1)$ en su mínimo M_1 , se obtienen los puntos de corte con $z = f_2(N_2)$, M'_1 y M''_1 , que proporcionan, respectivamente el mínimo y el máximo (de la variable N_2) de la curva [8], esto es

$$(m_1, m'_1) \quad \text{y} \quad (m_1, m''_1)$$

son las coordenadas de los extremos relativos de N_2 en la referida curva. Obsérvese que

$$m_1 = a_2/b_2$$

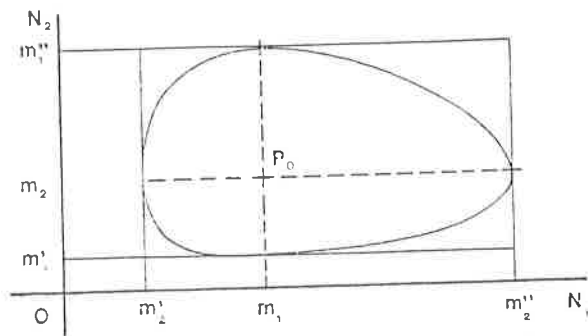
De la misma manera, para la recta $z = h_2$ se obtienen los puntos

$$(m'_2, m_2) \text{ y } (m''_2, m_2)$$

que corresponden con el mínimo y el máximo de N_1 en la curva [8]. Nótese que

$$m_2 = a_1/b_1$$

Pasando al diagrama N_1, N_2 se observa que $m'_2 \leq N_1 \leq m''_2$ y $m'_1 \leq N_2 \leq m''_1$, luego la curva está acotada en el rectángulo de la figura y para cada valor de N_1 (interior al recángulo) existen dos valores de N_2 ; por otra parte la continuidad de la función (que se desprende de su construcción) permite asegurar que la curva es cerrada.



Por otra parte, el punto de equilibrio P_0 tendrá por coordenadas las correspondientes a la solución del sistema

$$dN_1/dt = 0 \quad dN_2/dt = 0$$

que resulta ser $N_1 = m_1, N_2 = m_2$. Por tanto, el punto de equilibrio es el mismo para todas las curvas de la familia [8] e interior a todas ellas; además, dicho punto se encuentra en la misma abscisa que los extremos de N_2 y en la misma ordenada que los extremos de N_1 .

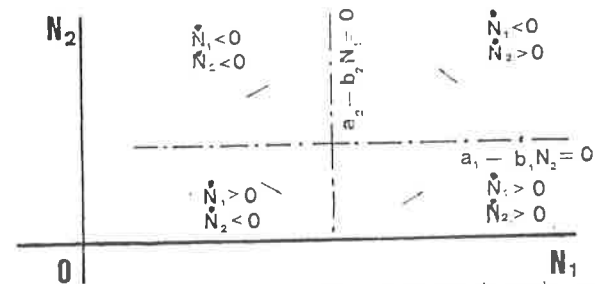
Supuesta una situación inicial, esto es, si se parte de un punto

$$(N_1^0, N_2^0)$$

se puede obtener el valor de K por simple sustitución en [8]. A partir de ese momento, ambas especies evolucionan indefinidamente sobre la curva obtenida y, precisamente, en sentido contrario al del giro de las manillas del reloj; para comprobarlo basta observar el signo de

$$dN_1/dt = \dot{N}_1 \quad \text{y} \quad dN_2/dt = \dot{N}_2$$

en cada una de las cuatro regiones que definen las rectas $a_1 - b_1 N_2 = 0, -a_2 + b_2 N_1 = 0$ en el primer cuadrante.



Por tanto, la evolución del número de individuos de cada una de las especies se produce por ciclos a lo largo del tiempo.

Un modelo, estudiado por Leslie, que se ajusta perfectamente a algunas interacciones depredador-presa, es el siguiente

$$\begin{cases} (1/N_1) \cdot dN_1/dt = a_1 - b_{11} N_1 - b_{12} N_2 \\ (N_1/N_2) \cdot dN_2/dt = a_2 N_1 - b_{22} N_2 \end{cases}$$

5.1 CASO DE PEQUEÑAS OSCILACIONES

Cuando los ciclos son pequeños, lo que equivale a decir que la distancia de un punto genérico de la curva al punto P_0 (de equilibrio) es pequeña, se pueden aproximar por elipses. En efecto, efectuando la traslación

$$N_1 = n_1 + a_2/b_2 \quad N_2 = n_2 + a_1/b_1$$

esto es, tomando como nuevo origen el punto de equilibrio

$$P_0 (a_2/b_2, a_1/b_1)$$

y tomando como nuevas variables n_1 y n_2 , sustituyendo [8] se obtiene

$$-a_2 \ln [n_1 + (a_2/b_2)] + b_2 [n_1 + (a_2/b_2)] - a_1 \ln [n_2 + (a_1/b_1)] + b_1 n_2 + a_1 = K$$

o bien

$$-a_2 \ln [a_2/b_2 (1 + b_2 n_1/a_2)] + b_2 n_1 + a_2 - a_1 \ln [a_1/b_1 (1 + b_1 n_2/a_1)] + b_1 n_2 + a_1 - K = 0$$

Como n_1 y n_2 son pequeños se puede hacer

$$\ln [1 + (b_2 n_1/a_2)] = b_2 n_1/a_2 - b_2^2 n_1^2/a_2^2, \quad \ln [1 + (b_1 n_2/a_1)] = b_1 n_2/a_1 - b_1^2 n_2^2/a_1^2$$

Simplificando

$$b_2^2 n_1^2/a_2 + b_1^2 n_2^2/a_1 - K_1 = 0 \tag{9}$$

donde

$$K_1 = a_2 \ln a_2 - a_2 \ln b_2 + a_1 \ln a_1 - a_1 \ln b_1 - a_1 - a_2 + K$$

que es la ecuación canónica de una elipse de semiejes

$$\sqrt{a_2 K_1}/b_2 \quad \text{y} \quad \sqrt{a_1 K_1}/b_1$$

La ecuación, escrita en coordenadas paramétricas, en función de la anomalía excentrica es

$$n_1 = (\sqrt{K_1} a_2 / b_2) \cos \varphi, \quad n_2 = (\sqrt{K_1} a_1 / b_1) \sin \varphi$$

que pone de manifiesto los ciclos.

6. FORMA ESTOCASTICA DEL MODELO LOGISTICO

Sean respectivamente, $n(N)$ y $m(N)$ las tasas de natalidad y mortalidad de una determinada población, cuando su tamaño es N . Si se admite que la población se ajusta al modelo logístico se deberá cumplir

$$dn(N)/dN < 0 \quad \text{y} \quad dm(N)/dN > 0$$

y suponiendo la más simple expresión para ambas, esto es, la variación lineal, se tendrá

$$n(N) = a_1 - b_1 N, \quad m(N) = a_2 + b_2 N$$

donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}_{++}$, ($i = 1, 2$).

A partir de

$$(1/N) dN/dt = a - bN$$

haciendo

$$a = a_1 - a_2, \quad b = b_1 - b_2$$

se puede escribir

$$(1/N) dN/dt = (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)N$$

El equilibrio se alcanza si

$$a_1 - a_2 - (b_1 - b_2)N = 0 \quad N = (a_1 - a_2) / (b_1 - b_2)$$

Supóngase que en un instante, la población pasa del estado N al $N + 1$, lo que implica que se ha producido un nacimiento; la probabilidad de este suceso es proporcional a $N \cdot n(N)$; en símbolos

$$P(N \rightarrow N + 1) \propto N n(N) = N(a_1 - b_1 N)$$

De manera análoga el paso del estado N al estado $N - 1$, es producido por una defunción, luego

$$P(N \rightarrow N - 1) \propto N m(N) = N(a_2 + b_2 N)$$

Pero, como los sucesos $N \rightarrow N + 1$ y $N \rightarrow N - 1$, forman un sistema completo, se

tiene

$$P(N \rightarrow N + 1) = (a_1 N - b_1 N^2) / [(a_1 + a_2) N - (b_1 - b_2) N^2]$$

$$P(N \rightarrow N - 1) = (a_2 N + b_2 N^2) / [(a_1 + a_2) N + (b_1 - b_2) N^2]$$

EJEMPLO

Sea una población en la que se ha determinado

$$n(N) = 0,7 - 0,004N, \quad m(N) = 0,2 + 0,0005N$$

Suponiendo que se parte de una población de $N = 20$ individuos, se puede simular el proceso de la forma siguiente; se empieza por calcular

$$P(20 \rightarrow 21) = (0,7 \cdot 20 - 0,004 \cdot 20^2) / (0,9 \cdot 20 - 0,0035 \cdot 20^2) = 0,747$$

y por tanto

$$P(20 \rightarrow 19) = 0,253$$

Generado un número aleatorio n , si $0,001 < n < 0,747$, se produce un nacimiento (B); si $n > 0,747$ ó $n = 0,000$, ha sucedido una defunción (D).

Al generar un número aleatorio, se ha obtenido 0,734, luego hay que contar un nacimiento; luego la población será $20 + 1 = 21$

Entonces hay que obtener

$$P(21 \rightarrow 22) = (0,7 \cdot 21 - 0,004 \cdot 21^2) / (0,9 \cdot 21 - 0,0035 \cdot 21^2) = 0,745$$

$$P(21 \rightarrow 20) = 0,255$$

Generado un número aleatorio, se ha obtenido $0,326 < 0,745$, luego se ha producido otro nacimiento.

Los resultados anteriores se pueden presentar en forma de tabla

N	P(N → N+1)	P(N → N-1)	n	suceso producido
20	0,747	0,253	0,734	B
21	0,745	0,255	0,326	B
22	0,744	0,256	0,676	B
23	0,742	0,258	0,777	D
22	0,744	0,256	0,567	B

23	0,742	0,258	0,876	D
22	0,744	0,256	0,926	D
21			

6.1. SIMULACION EN CASO DE COMPETICION

Las ecuaciones del sistema [1'] representan el resultado neto de la diferencia de los nacimientos y las defunciones. Designando por

$$n_1 (N_1/N_2) \text{ y } n_2 (N_2/N_1)$$

respectivamente, a los nacimientos de la primera especie, condicionada a la existencia de la segunda especie y a los nacimientos de N_2 condiciones a N_1 , y con análogo significado para las defunciones

$$m_1 (N_1/N_2) \text{ y } m_2 (N_2/N_1)$$

se puede escribir

$$\begin{cases} (1/N_1) dN_1/dt = n_1 (N_1/N_2) - m_1 (N_1/N_2) \\ (1/N_2) dN_2/dt = n_2 (N_2/N_1) - m_2 (N_2/N_1) \end{cases}$$

Con los mismos supuestos que en el caso de una única población, se puede escribir

$$n_1 (N_1/N_2) = a_1 - b_{11} N_1 - b_{12} N_2$$

$$n_2 (N_2/N_1) = a_2 - b_{21} N_1 - b_{22} N_2$$

$$m_1 (N_1/N_2) = a'_1 + b'_{11} N_1 + b'_{12} N_2$$

$$m_2 (N_2/N_1) = a'_2 + b'_{21} N_1 + b'_{22} N_2$$

y por tanto

$$p_1 = P(N_1 \rightarrow N_1 + 1, N_2 \rightarrow N_2) \propto N_1 n_1 (N_1/N_2)$$

$$p_2 = P(N_1 \rightarrow N_1 - 1, N_2 \rightarrow N_2) \propto N_1 m_1 (N_1/N_2)$$

$$p_3 = P(N_1 \rightarrow N_1, N_2 \rightarrow N_2 + 1) \propto N_2 n_2 (N_2/N_1)$$

$$p_4 = P(N_1 \rightarrow N_1, N_2 \rightarrow N_2 - 1) \propto N_2 m_2 (N_2/N_1)$$

Designando, por comodidad de escritura

$$H = N_1 (a_1 + a'_1) + N_2 (a_2 + a'_2) - N_1^2 (b_{11} - b'_{11}) - N_2^2 (b_{22} - b'_{22}) - N_1 N_2 (b_{12} - b'_{12} + b_{21} - b'_{21})$$

se tiene

$$P_1 = (a_1 N_1 - b_{11} N_1^2 - b_{12} N_1 N_2)/H; \quad p_2 = (a'_1 N_1 + b'_{11} N_1^2 + b'_{12} N_1 N_2)/H$$

$$p_3 = (a_2 N_2 - b_{21} N_1 N_2 - b_{22} N_2^2)/H; \quad p_4 = (a'_2 N_2 + b'_{21} N_1 N_2 + b'_{22} N_2^2)/H$$

EJEMPLO

Sean dos poblaciones en las que se sabe

$$n_1 (N_1/N_2) = 0,7 - 0,004N_1 - 0,00003N_2$$

$$n_2 (N_2/N_1) = 0,6 - 0,006N_1 - 0,00004N_2$$

$$m_1 (N_1/N_2) = 0,2 + 0,0005N_1 + 0,00001N_2$$

$$m_2 (N_2/N_1) = 0,3 + 0,0004N_1 + 0,00001N_2$$

y además se parte de una situación en la que

$$N_1 = 70, \quad N_2 = 50$$

Se obtienen los siguientes valores

$$P_1 = 29,295/71,105 = 0,412 \quad P_2 = 16,485/71,105 = 0,232$$

$$P_3 = 8,9/71,105 = 0,125 \quad P_4 = 16,425/71,105 = 0,231$$

Si se genera un número aleatorio h

$0,001 < h < 0,412$ se ha simulado el suceso $N_1 \rightarrow N_1 + 1, N_2 \rightarrow N_2$

$0,413 < h < 0,644$ se ha simulado el suceso $N_1 \rightarrow N_1 - 1, N_2 \rightarrow N_2$

$0,645 < h < 0,769$ se ha generado el suceso $N_1 \rightarrow N_1, N_2 \rightarrow N_2 + 1$

$0,770 < h < 0,999$ ó $h = 0$ se ha simulado el proceso $N_1 \rightarrow N_1, N_2 \rightarrow N_2 + 1$

Generado, por ejemplo 0,476 se pasaría del estado (70,50) al estado (69,50)

De manera análoga se puede simular el modelo de parasitismo.

7. ECUACIONES CON RETARDOS EN EL MODELO DEPREDADOR-PRESA

El único problema que se va a contemplar es el que corresponde a generaciones discretas, tanto del depredador como de la presa. En este caso, designando respectivamente por U_n y V_n las poblaciones de la especie perseguida y de la perseguidora, en general se podrá plantear el sistema

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n \cdot f_1 (U_n, V_n) \\ V_{n+1} = V_n \cdot f_2 (U_n, V_n) \end{cases}$$

Admitiendo, como se ha hecho en el modelo de Volterra, que el tamaño de cada población sólo está limitado por el de la otra, se tiene

$$\begin{cases} f_1 (U_n, V_n) = a_1 - b_1 V_n \\ f_2 (U_n, V_n) = -a_2 + b_2 U_n \end{cases}$$

El punto de equilibrio, que se designa por (V_0, U_0) será tal que

$$U_n = U_{n+1} = U_0, \quad V_n = V_{n+1} = V_0$$

Sustituyendo en

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n (a_1 - b_1 V_n) \\ V_{n+1} &= V_n (-a_2 + b_2 U_n) \end{aligned} \quad [11]$$

se obtiene

$$\begin{aligned} U_0 &= U_0 (a_1 - b_1 V_0) \rightarrow V_0 = a_1/b_1 \\ V_0 &= V_0 (-a_2 + b_2 U_0) \rightarrow U_0 = a_2/b_2 \end{aligned}$$

Para oscilaciones pequeñas, alrededor del punto de equilibrio, se puede simplificar el problema trasladando el origen de coordenadas al punto (u_0, v_0) , mediante el cambio

$$U_n = a_2/b_2 + u_n, \quad V_n = a_1/b_1 + v_n$$

Sustituyendo en [10] y simplificando resulta

$$\begin{cases} a_2/b_2 + u_{n+1} = - (a_2 b_1/b_2) v_n - b_1 u_n v_n \\ a_1/b_1 + v_{n+1} = (a_1 b_2/b_1) u_n + b_2 u_n v_n \end{cases}$$

donde despreciando los términos en $u_n v_n$ se tiene

$$\begin{cases} b_2 u_{n+1} + a_2 b_1 v_n + a_2 = 0 \\ a_1 b_2 u_n - b_1 v_{n+1} - a_1 = 0 \end{cases} \quad [12]$$

o bien utilizando el operador traslación

$$\begin{cases} b_2 E u_n + a_2 b_1 v_n + a_2 = 0 \\ a_1 b_2 u_n - b_1 E v_n - a_1 = 0 \end{cases} \quad [13]$$

Aplicando el operador E a la primera de [13] y multiplicando por a_2 a la segunda, se obtiene

$$\begin{cases} b_2 E^2 u_n + a_2 b_1 E v_n + a_2 = 0 \\ a_1 a_2 b_2 u_n - a_2 b_1 E v_n - a_1 a_2 = 0 \end{cases}$$

de donde

$$(E^2 + a_1 a_2) b_2 u_n = a_2 (a_1 - 1) \quad [14]$$

cuya ecuación característica es

$$r^2 + a_1 a_2 = 0 \rightarrow r = \pm i \sqrt{a_1 a_2} = \pm \sqrt{a_1 a_2} (\cos \pi/2 + i \sen \pi/2)$$

resultando la solución de la homogénea

$$U_n^* = (a_1 a_2)^{n/2} (K_1 \cos n\pi/2 + K_2 \sen n\pi/2)$$

donde K_1 y K_2 son dos constantes determinables a partir de las condiciones iniciales.

Una solución particular de la completa se obtiene para $u_n = H$, en [14]

$$b_2 H + a_1 a_2 b_2 H = a_2 (a_2 - 1) \rightarrow H = [a_2 (a_1 - 1)] / [b_2 (1 + a_1 a_2)]$$

luego la solución general para u_n es

$$u_n = u_n^* + H = (a_1 a_2)^{n/2} (K_1 \cos n\pi/2 + K_2 \sen n\pi/2) + [a_2 (a_1 - 1)] / [b_2 (1 + a_1 a_2)] \quad [15]$$

De la primera ecuación [12] se obtiene

$$v_n = -1/b_1 - b_2 u_{n+1} / (a_2 b_1)$$

y sustituyendo u_{n+1} deducida de [14]

$$v_n = -[b_2 (a_1 a_2)^{n/2} (K_2 \cos n\pi/2 - K_1 \sen n\pi/2)] / (a_2 b_1) - [a_1 (1 + a_2)] / [b_1 (1 + a_1 a_2)]$$

Deshaciendo el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} U_n &= (a_1 a_2)^{n/2} (K_1 \cos n\pi/2 + K_2 \sen n\pi/2) + [a_1 a_2 (1 + a_2)] / [b_2 (1 + a_1 a_2)] \\ V_n &= [b_2 (a_1 a_2)^{n/2} (K_1 \sen n\pi/2 - K_2 \cos n\pi/2)] / (a_2 b_1) + [a_1 a_2 (a_2 - 1)] / [b_1 (1 + a_1 a_2)] \end{aligned}$$

ecuaciones que ponen de manifiesto el carácter cíclico de las oscilaciones.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARTLETT, M.S. Stochastic Population Models in Ecology and Epidemiology. Methuen. 1960.
- [2] ----- An Introduction to Stochastic Process. Cambridge University Press. 1966
- [3] BROWNING, T.O. Animal Populations. Harper and Row. 1963.
- [4] DREUX, P. Introducción a la Ecología. Alianza Editorial. 1984.
- [5] HYRENIUS, H. and DIAMAND, H. Demometric Techniques applied to Animal Populations. Demographic Research Institute. Gotenburg. 1974.
- [6] LESLIE, P.H. Some further notes in Population Mathematics. Biométrica. 33. 1948.
- [7] LOTKA, A. Elements of Physical Biology. Willian and Wilkink. Baltimore. 1925.
- [8] ----- Teoría analítica de las asociaciones biológicas. CELADE. 1976.
- [9] ----- The structure of a growing population. Human Biology. Diciembre. 1931.
- [10] MAY, R.M. Simple Mathematical Models with very complicated Dynamics. Nature. 1976.
- [11] MAYNARD SMITH, J. Mathematical Ideas in Biology. Cambridge University Press. 1968.
- [12] ----- Models in Ecology. Cambridge University Press. 1974.
- [13] PATIL, G.P., PIELOU, E.C. and WATERS, W.E. Statistical Ecology. Pennsylvania University Press. 1971.
- [14] PEARL, R. The Biology of Population Growth. Alfred Knopf. 1925.
- [15] ----- Medical Biometry and Statistics. Saunders Company. 1941.
- [16] PIELOU, E.C. An Introduction to Mathematical Ecology. Wiley-Intercience. 1969.
- [17] SOLOMON, M.E. Population Dynamics. St. Martin's Press. New York. 1969.
- [18] VOLTERRA, V. Variazioni e fluttuazioni del numero de d'individui in specie animali conviventi. Accad. Nazionale Lincei. 1926.
- [19] ----- Flutuations dans lutte pour la vie. Reunión internacional de Matemáticas. París. 1937.

SOBRE LA ANALOGIA OBSERVADA ENTRE CIERTOS PROCEDIMIENTOS

DE OBTENCIÓN DE LOS NUMEROS ÁUREO Y $\sqrt{2}$

Javier Peralta
Catedrático de la E.U. Santa María
Universidad Autónoma de Madrid

C. INTRODUCCIÓN

En este artículo se analizan, en primer lugar, dos procedimientos de aproximación por fracciones de $\sqrt{2}$: uno de origen geométrico, debido a los pitagóricos, y otro de origen algebraico: el desarrollo en fracción continua de Cataldi. Posteriormente se demuestra su coincidencia.

Partiendo de la conocida y sorprendente relación que liga a dos elementos matemáticos notorios: la sucesión de Fibonacci y el número áureo, se establece a continuación un paralelismo entre el proceso que los vincula y aquel que permite identificar los resultados de los pitagóricos y Cataldi, ya mencionado.

Por último, la analogía observada sugiere extender este procedimiento a otras sucesiones más generales, lo que permite conseguir sucesiones que tiendan a distintos irracionales cuadráticos, con las consiguientes aproximaciones por fracciones de los mismos. Como casos particulares, se obtienen de nuevo, como era de esperar, las sucesiones convergentes al número áureo y a $\sqrt{2}$.

1. FRACCIONES CONTINUAS

1.1. Las fracciones continuas están implícitas en el método de las divisiones sucesivas de Euclides para la obtención del máximo común divisor de dos números, aunque su origen se remonta a los hindúes (siglo V a. C.). Sin embargo, los primeros que extendieron su uso al desarrollo de los irracionales cuadráticos fueron Bombelli y Cataldi, en el siglo XVI. Más concretamente, el estudio sistemático de las fracciones continuas - uno de los primeros algoritmos infinitos en la historia de la matemática - se inicia en un trabajo de Cataldi que dedica a "una manera muy breve de encontrar la raíz cuadrada de los números"; si bien, su formulación en los términos actuales es debida a Euler.

1.2. Utilizando la notación más usual:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}} = [a_1; a_2, \dots, a_n, \dots]$$

se tienen, por ejemplo: $\frac{172}{51} = [3; 2, 1, 2, 6]$, $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; \overline{1, 2}]$, $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$, etc.

1.3. Merecen citarse los desarrollos en fracción continua del número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398\dots$ y de $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$, que serán utilizados más adelante.

Como $2\phi = 1+\sqrt{5}$, $2\phi-1 = \sqrt{5}$, y elevando al cuadrado: $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, $\phi(\phi-1) = 1$; luego $\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\phi}} = \dots = [1; \overline{1}]$.

Y análogamente se llega a que $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$, desarrollo ya obtenido por Cataldi.

Este algoritmo - lo haremos con $\sqrt{2}$, pero podría razonarse análogamente con los ejemplos anteriores - permite tomar diversas aproximaciones de $\sqrt{2}$ mediante las llamadas fracciones reducidas sucesivas:

$$r_1 = 1, r_2 = [1; 2] = 3/2, r_3 = [1; 2, 2] = 7/5, r_4 = [1; 2, 2, 2] = 17/12, \dots (1)$$

Precisamente la reducida r_4 es el valor que tomaron los babilonios para $\sqrt{2}$.

1.4. Destacaremos los tres siguientes resultados sobre fracciones continuas:

- (i) El desarrollo en fracción continua finita corresponde a los números racionales y sólo a ellos.
- (ii) El desarrollo en fracción continua periódica caracteriza a los irracionales cuadráticos.
- (iii) La sucesión de fracciones reducidas sucesivas de un número, converge rápidamente hacia el mismo.

Para un mayor conocimiento sobre las fracciones continuas, puede consultarse por ejemplo [1].

2. LA SUCESION DE FIBONACCI Y EL NUMERO AUREO

Expondremos brevemente a continuación la sorprendente relación existente entre la sucesión de Fibonacci y el número áureo.

2.1. Como es conocido, la sucesión de Fibonacci surge a raíz de un problema relacionado con la cría de los conejos - que se plantea en la obra "Liber abaci" de Leonardo de Pisa o Fibonacci (siglos XII-XIII) -, y posteriormente será estudiada por numerosos matemáticos, debido a su aparición en distintos lugares de la matemática y las ciencias naturales.

Dicha sucesión es: $f_0=0, f_1=1, f_2=1, f_3=2, f_4=3, f_5=5, f_6=8, \dots$, que queda definida por la siguiente sucesión recurrente de diferencias lineales de segundo orden:

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, f_0 = 0, f_1 = 1 \quad (2)$$

De dicha sucesión puede hallarse su término general, resolviendo la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, cuyas soluciones son $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por lo tanto,

será $f_n = A.\varphi^n + B.\varphi'^n$, e imponiendo que $f_0=0, f_1=1$, se obtienen: $A = \frac{1}{\varphi-\varphi'}$,

$B = -\frac{1}{\varphi-\varphi'}$, por lo que:

$$f_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'} \quad (3); \text{ o si se prefiere:}$$

$$f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n} \quad (3')$$

2.2. Formemos ahora la sucesión (f'_n) de los cocientes de cada dos

términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci:

$$(f'_n) = \left(\frac{f_{n-1}}{f_n}\right) = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots\right) \quad (4).$$

Se puede probar entonces que existe el $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$.

En efecto, basta con utilizar la Identidad de Simson ([2]):

$$f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+2} = (-1)^n \quad (5),$$

de donde se sigue que $|f'_{n+1} - f'_n| = \frac{1}{f_n \cdot f_{n+1}}$.

A partir de ello se llega sin dificultad a que $|f'_{n+1} - f'_n| < \frac{1}{n^2}$ si $n > 4$, de donde se deduce que (f'_n) es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y, por tanto, convergente.

2.3. Vamos ahora a demostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1/\varphi = \varphi-1 \quad (6),$$

resultado ya obtenido por Kepler.

La segunda igualdad es obvia, y a la primera llegaremos por tres procedimientos distintos.

(i) Teniendo en cuenta la expresión de f_n obtenida en (3).

$f'_n = \frac{\varphi^{n-1} - \varphi'^{n-1}}{\varphi^n - \varphi'^n} = \frac{1 - (\varphi'/\varphi)^{n-1}}{\varphi - \varphi' \cdot (\varphi'/\varphi)^{n-1}}$, y como $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi'/\varphi)^{n-1} = 0$, se deduce que $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = 1/\varphi$.

(ii) Sin utilizar la expresión de f_n , sino teniendo en cuenta solamente la ley de recurrencia (2).

Si $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_{n-1}$, se tiene: $f' = \frac{1}{f'+1}$, de donde se llega a $f' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Como $f' > 0$, se tiene (6).

(iii) Razonando con fracciones continuas.

Como $\varphi = [1; \bar{1}]$, se deduce que $\varphi-1 = [0; \bar{1}]$, y si hallamos las fracciones reducidas sucesivas de $[0; \bar{1}]$, se obtienen precisamente los términos de la sucesión (f'_n) que aparecen en (4).

3. OBTENCIÓN DE $\sqrt{2}$ POR LOS PITAGÓRICOS

3.1. Es sabido que los pitagóricos consideraban el número como el principio de todas las cosas. Así, la filosofía pitagórica se basaba en una "teoría atómica", según la cual todo ente quedaba identificado por el número de "átomos" que contenía. Esta aritmetización tan radical de la realidad se extendió también, obviamente, a la geometría, lo que dio lugar a la teoría de la proporcionalidad de segmentos, reduciendo las razones geométricas a razones numéricas.

A mediados del siglo V a.C. se produjo en la escuela pitagórica, sin embargo, un descubrimiento inquietante que produjo el hundimiento de la teoría atómica de la extensión geométrica: el hallazgo de la existencia de pares de segmentos inconmensurables, lo que originó la primera crisis de fundamentos de la matemática. Hasta el punto que cuando probaron que $\sqrt{2}$ y el número áureo no eran expresables como cocientes de dos enteros - situaciones a las que llegaron al calcular las razones entre la diagonal y el lado del cuadrado y del pentágono, respectivamente -, se sintieron horrorizados y juraron guardar el secreto y castigar con la muerte a quien lo revelara.

3.2. Nos referiremos al primero de los casos indicados.

Cuando los pitagóricos comprobaron la irracionalidad del número $\sqrt{2}$, se dedicaron a obtener aproximaciones del mismo, empleando con toda seguridad el método que aparece en los Elementos de Euclides consistente en la construcción del par de números "lado y diagonal", mediante el método recursivo - probablemente el primero en la historia de la matemática - que indicamos a continuación.

Se toman dos unidades: la unidad-lado l_1 , y la unidad-diagonal d_1 , y el proceso se continúa iterativamente mediante las fórmulas:

$$l_n = l_{n-1} + d_{n-1}, \quad d_n = d_{n-1} + 2l_{n-1} \quad (7).$$

Se tienen por tanto:

$l_1=1, d_1=1; l_2=2, d_2=3; l_3=5, d_3=7; l_4=12, d_4=17; l_5=29, d_5=41; \dots;$
y si formamos la sucesión de término general $s_n = d_n/l_n$; esto es:

$$s_1 = 1/1, s_2 = 3/2, s_3 = 7/5, s_4 = 17/12, \dots \quad (8),$$

se deducen las subsucesiones (s_{2n+1}) y (s_{2n}) , que se aproximan a $\sqrt{2}$ por defecto y por exceso, respectivamente.

3.3. La idea de este proceso recurrente consiste en que si l y d son el lado y la diagonal de un cuadrado, respectivamente, también $l' = d+1$ y $d' = d+2l$ son el lado y la diagonal, respectivamente, de otro cuadrado. En efecto, si $d^2 = 2l^2$, entonces, $d'^2 = (d+2l)^2 = d^2 + 4dl + 4l^2 = 2l^2 + 4dl + 4l^2 = 2l^2 + 4dl + 2d^2 = 2(d+1)^2 = 2l'^2$.

Todo ello puede verse con más detalle en [3], e incluso una interpretación geométrica de este último resultado.

4. COINCIDENCIA ENTRE LOS RESULTADOS DE LOS PITAGORICOS Y DE CATALDI

4.1. Veamos que las sucesiones (r_n) y (s_n) definidas en (1) y (8), respectivamente, son iguales.

Su demostración puede hacerse por inducción.

Es evidente que coinciden sus primeros términos. Admitamos entonces que

$r_n = s_n$ y probemos que $r_{n+1} = s_{n+1}$.

Como $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{2+(r_n-1)} = 1 + \frac{1}{1+r_n}$, se tiene:

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n} = \frac{2+s_n}{1+s_n} = \frac{2+d_n/l_n}{1+d_n/l_n} = \frac{2l_n+d_n}{l_n+d_n} = \frac{d_{n+1}}{l_{n+1}} = s_{n+1}, \quad \text{c.q.d.}$$

4.2. Hemos llegado, por tanto, al siguiente resultado: Las aproximaciones de $\sqrt{2}$ de los pitagóricos y de Cataldi, son coincidentes. Las prime-

ras se obtienen mediante el par de números lado y diagonal y, las segundas, a partir del desarrollo en fracción continua.

Sin tratar de quitar importancia, ni mucho menos, al descubrimiento por Cataldi de esas aproximaciones racionales mediante un procedimiento algebraico - o analítico, por contarse estos algoritmos infinitos entre las ideas precursoras del cálculo infinitesimal -, resulta aún más sorprendente que muchos siglos antes, los pitagóricos llegaran, por un camino geométrico, justamente a las mismas aproximaciones de $\sqrt{2}$.

5. ANALOGIA ENTRE LOS PROCESOS DE OBTENCION DE \emptyset Y $\sqrt{2}$

5.1. Veamos que se puede llegar a la coincidencia de resultados entre las aproximaciones de $\sqrt{2}$ por los pitagóricos y por Cataldi, siguiendo un proceso similar al que vinculaba la sucesión de Fibonacci con el número áureo, ya descrito.

Para ello restemos miembro a miembro las dos fórmulas que relacionan las sucesiones (l_n) y (d_n) , y que vienen dadas en (7): $d_{n-1} = d_{n-1} + 2l_{n-1}$

$$-d_{n-1} = l_{n-1}, \quad \text{luego } d_n = l_n + l_{n-1}. \quad \text{Por tanto,}$$

$$s_n = 1 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \quad (9).$$

Ahora bien, como (l_n) comienza en $n=1$, no permite hallar el primer término s_1 de la sucesión (s_n) . Por este motivo, completaremos la sucesión (l_n) con el término $l_0=0$ lo que, en virtud de (7), supone que será preciso añadir también a la sucesión (d_n) el término $d_0=1$.

5.2. Consideremos ahora la sucesión de término general $l'_n = s_n - 1$ que, evidentemente, tendrá por límite $\sqrt{2}-1$. En vista de que el desarrollo de $\sqrt{2}$ en fracción continua es $[1; \bar{2}]$, es obvio que $\sqrt{2}-1 = [0; \bar{2}]$.

Además, de (7) se tiene: $2l_{n-1} = d_n - d_{n-1}$ y, como $d_{n-1} = l_{n-1} + l_{n-2}$, $d_n = l_{n+1} + l_n$, se deduce que: $2l_{n-1} = l_{n+1} - l_{n-1} + l_n$, luego $l_{n+1} = l_{n-1} + 2l_n$ o,

lo que es lo mismo: $l_{n+2} = l_n + 2l_{n+1}$, lo que permite definir la sucesión (l_n) sin necesidad de la (c_n) .

Hemos llegado, pues, a que dada la sucesión (l_n) empleada por los pitagóricos para obtener aproximaciones de $\sqrt{2}$, y que puede definirse (con la adición del término $l_0=0$) como

$$l_{n+2} = l_n + 2l_{n+1}, l_0 = 0, l_1 = 1 \quad (10);$$

entonces la sucesión de término general $l'_n = l_{n-1}/l_n$, verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} l'_n = \sqrt{2} - 1 = [0; \bar{2}]$.

Y este proceso es análogo, como anunciábamos, al que relaciona la sucesión de Fibonacci con el número áureo, y que ha sido descrito en 2: A partir de la sucesión de Fibonacci (f_n) definida en (2), se forma la sucesión de término general $f'_n = f_{n-1}/f_n$, que cumple: $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \phi - 1 = [0; \bar{1}]$.

5.3. Asimismo, la determinación de la ley de recurrencia (10) para la definición de la sucesión (l_n) , independientemente de las relaciones (7) que la ligaban con (c_n) , permite obtener, si se desea, la expresión del término general l_n .

Para ello basta con resolver la ecuación en diferencias (10). Como la ecuación $x^2=1+2x$ tiene por raíces $x=1 \pm \sqrt{2}$, será $l_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$, e imponiendo que cumpla las condiciones iniciales, se tiene: $l_n = \frac{\sqrt{2}}{4} ((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)$.

De ahí se llega a que $l'_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}}{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}$, de donde se deduce de nuevo que $\lim_{n \rightarrow \infty} l'_n = \sqrt{2} - 1$.

6. GENERALIZACION

6.1. La analogía observada entre los procesos de obtención de ϕ y $\sqrt{2}$ (ó $\phi-1$ y $\sqrt{2}-1$, para ser más exactos), nos sugiere estudiar una posible generalización.

Consideremos la sucesión recurrente de diferencias lineales de segundo orden

$$a_{n+2} = a_n + ka_{n+1}, a_0=0, a_1=1 \quad (11),$$

donde suponemos que k es un entero no nulo (ya que para $k=0$, resulta la sucesión $0,1,0,1,0,1,\dots$).

6.2. Dicha sucesión cumple las dos siguientes propiedades:

$$1) a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = (-1)^n, \quad 2) k(a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2) = a_n a_{n+1}.$$

Las sucesiones de Fibonacci verifican la primera de ellas o Identidad de Simson, que ya fue enunciada en (5); y es conocido ([2]) que asimismo satisfacen la segunda, para $k=1$.

Pasemos a probar 1) y 2).

Una vez comprobado que 1) se verifica para $n=0$, y admitiendo que $a_n^2 - a_{n-1} a_{n+1} = (-1)^{n-1}$, se llega a que: $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_n(a_n + ka_{n-1}) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$.

Análogamente con 2), $k(a_0^2 + a_1^2) = k = a_1 a_2$, y tomando por hipótesis que se cumple $k(a_0^2 + \dots + a_n^2) = a_n a_{n+1}$, se tiene: $k(a_0^2 + \dots + a_{n+1}^2) = k(a_0^2 + \dots + a_n^2) + ka_{n+1}^2 = a_n a_{n+1} + ka_{n+1}^2 = a_{n+1}(a_n + ka_{n-1}) = a_{n+1} a_{n+2}$, c.q.d.

6.3. Calculemos la expresión del término general a_n .

Las raíces de $x^2=1+kx$ son $x=(k \pm \sqrt{k^2+4})/2$, luego $a_n = A(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2})^n + B(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2})^n$, y como $a_0=0, a_1=1$, se llega a:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} \left[\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n \right] \quad (12).$$

6.4. Formemos la sucesión de término general $a'_n = a_{n-1}/a_n$.

De (12) se tiene entonces que $a'_n = (p^{n-1} - q^{n-1})/(p^n - q^n)$, con $p = (k+\sqrt{k^2+4})/2, q = (k-\sqrt{k^2+4})/2$.

Se deduce que (a'_n) es una sucesión convergente, ya que en virtud de la Identidad de Simson, se tiene:

$$|a'_{n+1} - a'_n| = \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \left| \frac{a_n^2 - a_{n-1} a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{a_n a_{n+1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{|a_n| |a_{n+1}|}$$

Ahora bien, es evidente que $|a_n| > f_n$, por lo que, siguiendo el razonamiento hecho en 2.2, $|a'_{n+1} - a'_n| < \frac{1}{n^2}$ si $n > 4$, de donde se obtiene fácilmente que (a'_n) es de Cauchy y, en consecuencia, convergente.

6.5. Calculemos ahora $a' = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$. Se puede hacer por dos procedimientos.

(i) A partir de la expresión (12) de a_n .

Si $k > 0$, entonces $-1 < q/p < 0$. Luego teniendo en cuenta lo visto en 6.4,

$$a' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (q/p)^{n-1}}{p - q(q/p)^{n-1}} = \frac{1}{p} = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

Y si $k < 0$, $-1 < p/q < 0$, luego $a' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p/q)^{n-1} - 1}{p(p/q)^{n-1} - q} = \frac{1}{q} = \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$

(ii) Sin necesidad de hallar la expresión de a_n .

Como $a'_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2} + ka_{n-1}} = \frac{1}{a'_{n-1} + k}$, se tiene: $a' = \frac{1}{a' + k}$; de donde se llega a que $a' = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}$.

Ahora bien, si $k > 0$, los términos de la sucesión (a_n) son positivos (si $n > 0$); y si $k < 0$, sus términos son alternativamente positivos (los impares) y negativos (los pares, si $n > 0$). Por tanto, a'_n tiene sus términos positivos si $k > 0$ y negativos si $k < 0$, y su límite es $(-k + \sqrt{k^2 + 4})/2$ en el primer caso, y $(-k - \sqrt{k^2 + 4})/2$ en el segundo.

6.6. Dé la relación $a' = \frac{1}{a' + k}$ se deduce su desarrollo en fracción continua: $a' = \frac{1}{k + \frac{1}{k + a'}}$ = ... = $[0; \bar{k}]$.

7. CONCLUSION

7.1. Se ha probado, por tanto, que la sucesión (a_n) definida en (11) engloba como casos particulares las sucesiones de Fibonacci (f_n) , si $k=1$, y la sucesión (l_n) de los pitagóricos, si $k=2$.

Si a partir de (a_n) se construye la (a'_n) con $a'_n = a_{n-1}/a_n$, esta sucesión

es convergente, y tiene por límite $(-k + \sqrt{k^2 + 4})/2$ si $k > 0$, y $(-k - \sqrt{k^2 + 4})/2$ si $k < 0$, cuyos desarrollos en fracción continua resultan ser $[0; \bar{k}]$. Como casos particulares se tienen la sucesión (f'_n) , que converge a $\phi - 1 = [0; \bar{1}]$, si $k=1$, y la sucesión (l'_n) que tiene por límite $\sqrt{2} - 1 = [0; \bar{2}]$, si $k=2$.

7.2. Dando a k otros valores enteros no nulos, se conseguirán diferentes sucesiones recurrentes de diferencias lineales de segundo orden del tipo (11), a partir de las cuales se podrán formar las sucesiones de los cocientes de cada dos términos consecutivos de la misma, que convergerán a diferentes números irracionales cuadráticos.

Así por ejemplo, si $k=3$, se forman las sucesiones (a_n) definida por $a_{n+2} = a_n + 3a_{n+1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, y la (a'_n) con $a'_n = a_{n-1}/a_n$, y se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = [0; \bar{3}] = (-3 + \sqrt{13})/2$; si $k=4$, entonces $a_{n+2} = a_n + 4a_{n+1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = [0; \bar{4}] = -2 + \sqrt{5}$; si $k=8$, es $a_{n+2} = a_n + 8a_{n+1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = [0; \bar{8}] = -4 + \sqrt{17}$; etc.

Si se toma $k < 0$, resultan como límites los opuestos de los anteriores. Por ejemplo, si $k=-1$, entonces $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = [0; \bar{-1}] = \phi'$; etc.

7.3. Hemos visto, por tanto, que todo número que pueda escribirse como $(-k \pm \sqrt{k^2 + 4})/2$, con $k \in \mathbb{Z}^*$, tiene una sucesión de racionales del tipo anterior (a'_n) que converge hacia él; aunque posiblemente sea más interesante el determinar para qué números irracionales algebraicos de la forma \sqrt{H} - siendo H un elemento de \mathbb{N}^* que no sea cuadrado perfecto - existen sucesiones de ese estilo que converjan hacia ellos. Se indican a continuación dos resultados relativos a ello.

7.4. En primer lugar, es evidente que si (a'_n) tiene por límite $(-k \pm \sqrt{k^2 + 4})/2$, entonces (\bar{a}_n) , con $\bar{a}_n = k + 2a'_n$, tiende a $\pm \sqrt{k^2 + 4}$. Hemos obtenido, por tanto, que si $H = k^2 + 4$, la sucesión de término general $\bar{a}_n = k + 2a'_n$ (siendo (a'_n) la sucesión definida como $a'_n = a_{n-1}/a_n$, donde (a_n) viene dada por (11)),

tiene por límite $\pm\sqrt{k^2+4}$ (el signo + corresponde a $k>0$, y el - a $k<0$).

7.5. El segundo resultado afirma que si H es de la forma $H=h^2+1$, $h \in \mathbb{C}^*$, entonces la sucesión de término general $a_n^* = h+a_n'$ converge a \sqrt{H} , siendo $a_n' = a_{n-1}'/a_n'$ y $a_{n+2}' = a_n' + 2ha_{n+1}'$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

En efecto, (a_n^*) tiene por límite $(-2h \pm \sqrt{4h^2+4})/2 = -h \pm \sqrt{h^2+1}$, luego (a_n^*) tenderá a $\pm\sqrt{h^2+1}$. Además, como $[h; 2\bar{h}] = h+[0; 2\bar{h}]$, se deduce que $\sqrt{H} = [h; 2\bar{h}]$, por lo que los términos de la sucesión (a_n^*) son, precisamente, los términos de las reducidas sucesivas de la fracción continua $[h; 2\bar{h}]$.

Aunque pudiera parecer que el desarrollo en fracción continua del límite de la sucesión (\bar{a}_n) construida en 7.4 es también de la forma $[k; 2\bar{k}]$, no es cierto en cambio, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = k+2[0; \bar{k}]$, que no coincide con $[k; 2\bar{k}]$, pues $2[0; \bar{k}] \neq [0; 2\bar{k}]$ (baste comprobar que, por ejemplo, los desarrollos en fracción continua de $(-3+\sqrt{13})/2$ y $-3+\sqrt{10}$ son, respectivamente, $[0; \bar{3}]$ y $[0; \bar{5}]$).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. CILLERUELO Y A. CORDOBA. "La teoría de los números". Biblioteca Mondadori, Ed. Grijalbo, 143-173 (1992).

[2] H. S. M. COXETER. "The golden section, phyllotaxis and Wythoff's game". Scripta Mathematica, nº 19, 139 (1953).

[3] M. DE GUZMAN. "Los pitagóricos". Historia de la Matemática hasta el siglo XVII, 11-35. Real Academia de Ciencias (1986).

LA INVERSION Y SU SIMULACION

E. Roanes Lozano y E. Roanes Macías
 Sección Departamental de Álgebra
 Facultad de Educación
 Univ. Complutense de Madrid
 c/. Santísima Trinidad, 37 MADRID-28010

INTRODUCCION

La transformación geométrica denominada "inversión" tiene aplicaciones diversas: en construcciones geométricas, en teoría de funciones de variable compleja, en Física, etc. Nuestro interés por facilitar a los alumnos una introducción rápida y agradable a las propiedades más relevantes de esta transformación, nos llevó a elaborar una adaptación geométrica que pueda ser implementada siguiendo la línea de su construcción geométrica.

En este artículo se realiza un estudio vectorial de la inversión, que tiene dos objetivos. El primero es facilitar la determinación de las inversas de algunas figuras muy útiles en las aplicaciones, como son los círculos, semiplanos y triángulos, para lo que se estudian las inversas de figuras simplemente conexas, considerando una topología apropiada a la inversión. Y el segundo objetivo es facilitar la elaboración de algoritmos que permitan implementar una simulación gráfica de la inversión.

Con ello se pretende ofrecer una recreación visual que facilite la captación intuitiva de las propiedades esenciales de esta transformación geométrica.

Finalmente, indicaremos que en el sistema de cómputo algebraico Maple V existe un paquete de Geometría, que incluye una primitiva "inversión", que resuelve algebraicamente el problema de determinar las ecuaciones de las inversas de rectas y circunferencias, cuyos objetivos son bien distintos de los que nos hemos propuesto aquí.

1. INVERSION DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

Por la naturaleza del problema, trabajaremos en el plano euclídeo, con un sistema de referencia métrico.

1.1 **Definición.**- La inversión de polo el punto O y potencia el número real $p \neq 0$ es la transformación que asocia a cada punto X del plano (distinto del polo) el punto X' de la recta OX, tal que sea p el producto escalar

$$\vec{OX} \cdot \vec{OX}' = p \quad (1)$$

Para que la transformación sea biyectiva, se considera un punto impropio único, imagen del polo.

1.2 **Proposición.**- Siendo $X \neq O$, el punto X', inverso del X, viene dado por

$$\vec{OX}' = \frac{p}{|\vec{OX}|^2} \vec{OX} \quad (2)$$

Demostración.- Siendo \vec{u}_x un vector unitario de la misma dirección y sentido que \vec{OX} y denotando por $|\vec{OX}|$ al módulo del vector \vec{OX} , se tiene

$$\vec{OX}' = |\vec{OX}| \vec{u}_x \quad \wedge \quad \vec{OX}' = \begin{cases} |\vec{OX}| \cdot |\vec{u}_x|, & \text{si } p > 0 \\ -|\vec{OX}| \cdot |\vec{u}_x|, & \text{si } p < 0 \end{cases} \quad (3)$$

y por tanto

$$\vec{OX} \cdot \vec{OX}' = \begin{cases} |\vec{OX}| |\vec{OX}| (|\vec{u}_x|)^2 = |\vec{OX}| |\vec{OX}'|, & \text{si } p > 0 \\ -|\vec{OX}| |\vec{OX}| (|\vec{u}_x|)^2 = -|\vec{OX}| |\vec{OX}'|, & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

lo que, junto con (3), implica

$$(\vec{OX} \cdot \vec{OX}') \vec{OX} = \begin{cases} |\vec{OX}|^2 |\vec{OX}'| \vec{u}_x & (\text{para } p > 0) \\ -|\vec{OX}|^2 |\vec{OX}'| \vec{u}_x & (\text{para } p < 0) \end{cases} = |\vec{OX}|^2 \vec{OX}' = (\vec{OX}')^2 \vec{OX}'$$

luego de (1) resulta: $p \cdot \vec{OX}' = (\vec{OX}')^2 \vec{OX}'$. ■

En particular, el punto X es doble si $\vec{OX}' = \vec{OX}$, lo cual, de acuerdo con (2), sucede si $(\vec{OX})^2 = p$, es decir, si $|\vec{OX}| = \sqrt{p}$. Por tanto, se tiene:

1.3 **Corolario.**- Si $p > 0$, los puntos dobles son los de la circunferencia de centro el polo O y radio \sqrt{p} (y si $p < 0$, no existen puntos dobles).

Es sabido que la inversión transforma rectas y circunferencias en rectas o circunferencias (así pues, considerando a las rectas como circunferencias de radio infinito, la inversión transforma circunferencias en circunferencias). En particular, para un recta, si el polo, O, pertenece a la recta, es claro que su inversa es la misma recta, pero si la recta no pasa por O, entonces su inversa es una circunferencia a la cual pertenece O. Estos resultados admiten demostraciones clásicas, basadas en varias técnicas:

- a) propiedades de transformaciones geométricas: homotecia, antiparalelismo
- b) ecuaciones de rectas y circunferencias, haciendo uso de (2)
- c) propiedades de transformaciones de Möbius, en variable compleja

Además, la inversión conserva la amplitud de los ángulos, invirtiendo su sentido. Por tanto, conserva la ortogonalidad de rectas y circunferencias.

Siendo A y B dos puntos distintos entre sí, se trata de determinar la figura inversa de la recta AB. Denotando por \vec{n} a un vector unitario ortogonal a la recta AB y considerando el producto escalar $e = \vec{OA} \cdot \vec{n}$, se tiene la siguiente determinación vectorial para la inversa de la recta AB.

1.4 **Proposición.**- Si el polo O pertenece a la recta AB, entonces esta recta es doble. Si O no pertenece a la recta AB, entonces su inversa es una circunferencia cuyo centro Z y radio r vienen dados por

$$\vec{OZ} = \frac{p}{2e} \vec{n} \quad ; \quad r = \frac{1}{2} \left| \frac{p}{e} \right| \quad (4)$$

Demostración.- El valor absoluto del producto escalar $e = \vec{OA} \cdot \vec{n}$ es la distancia del punto O a la recta AB, luego

$$\text{dist}(O, AB) = |e| = |\vec{OA} \cdot \vec{n}| = \begin{cases} \vec{OA} \cdot \vec{n}, & \text{si } e > 0 \\ -\vec{OA} \cdot \vec{n}, & \text{si } e < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Si $e = 0$, entonces o bien es $A=O$, o bien \vec{OA} es ortogonal a \vec{n} (en cuyo caso \vec{OA} es paralelo a la recta AB). En ambos casos O, A y B son puntos alineados, luego la recta AB es doble.

Supongamos pues, en adelante, $e \neq 0$ y denotemos por H a la proyección ortogonal del punto O sobre la recta AB. Si \vec{n} es del mismo sentido que \vec{OH} , el ángulo de \vec{OA} con \vec{n} es agudo, luego $e > 0$ y por tanto

$$\vec{OH} = |\vec{OH}| \vec{n} = \text{dist}(O, AB) \vec{n} = |e| \vec{n} = e \vec{n}$$

Si, por el contrario, \vec{n} es de sentido contrario que \vec{OH} , el ángulo de \vec{OA} con \vec{n} es obtuso, luego $e < 0$ y por tanto

$$\vec{OH} = |\vec{OH}| (-\vec{n}) = \text{dist}(O, AB) (-\vec{n}) = |e| (-\vec{n}) = (-e) (-\vec{n}) = e \vec{n}$$

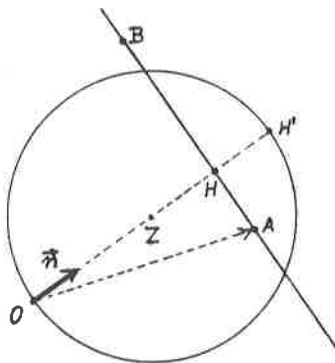


Figura 1

En consecuencia, en ambos casos, para el punto H', inverso del H (figura 1), recordando (2), se tiene

$$\vec{OH'} = \frac{p}{(\vec{OH})^2} \vec{OH} = \frac{p}{(e\vec{n})^2} e\vec{n} = \frac{p}{e^2} e\vec{n} = \frac{p}{e} \vec{n}$$

Ahora bien, la recta AB es ortogonal a la OH, lo que, por ser la inversión una transformación isogonal, implica que la circunferencia inversa de AB haya de ser ortogonal a la recta doble OH. Pero además dicha circunferencia ha de pasar por O y por H', luego el segmento $\vec{OH'}$ es un diámetro de dicha circunferencia. Por tanto, su centro Z, es el punto medio de $\vec{OH'}$ y su radio, r, la longitud del segmento \vec{OZ} , es decir

$$\vec{OZ} = \frac{1}{2} \vec{OH'} = \frac{p}{2e} \vec{n} \quad ; \quad r = |\vec{OZ}| = \frac{1}{2} \left| \frac{p}{e} \right| \quad \blacksquare$$

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN (CENTROS)

D.
como ... del Centro ...
...
domiciliado en ...
ciudad ... Codº Post. ... Telfº ...

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR.

Con esta fecha autorizo al Banco ...
Sucursal o Agencia ... en ...
Dirección de la misma ...
para que cargue en nuestra cuenta :.../.../.../.../.../
abierta al nombre: ...
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1993-94
y siguientes. Fecha ... de ... de 1993

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas
(incluida la cuota federativa de 1.500 pta).

Remítanse ambas partes a Sociedad "Puig Adam" de Profesores
de Matemáticas. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... BANCO: ...
Sucursal o Agencia... en ...
Dirección de ésta ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta :.../.../.../.../.../
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam" de
Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ...
Nombre de la cuenta... ..

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

D. Teléf.(...)
Dirección particular ...
Ciudad ... Codº Postal ...
Centro de trabajo ...

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ...
Sucursal o Agencia ... en ...
Dirección de la misma ...
para que cargue en mi cuenta :.../.../.../.../.../
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1993-94
y siguientes. Fecha ... de ... de 1993

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas
(incluida la cuota federativa de 1.500 pta).

Remítanse ambas partes a Sociedad "Puig Adam" de Profesores
de Matemáticas. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... BANCO: ...
Sucursal o Agencia... en ...
Dirección de ésta ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta :.../.../.../.../.../
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam" de
Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ...
Dirección

De acuerdo con lo que ya se ha indicado anteriormente, la inversa de una circunferencia es recta o circunferencia, según que la circunferencia dada pase, o no, por el polo.

Dada una circunferencia γ de centro C y radio r , se trata de determinar su imagen en la inversión de polo O y potencia p . Denotando $d = \text{dist}(O,C)$ a la distancia del polo al centro, se tiene:

1.5 Proposición.- Si el polo O es un punto de la circunferencia, entonces su inversa es la recta perpendicular a OC y que pasa por el punto B' tal que

$$\vec{OB'} = \frac{p}{2d^2} \vec{OC} \quad (6)$$

Demostración.- En este caso la circunferencia γ pasa por O , luego su figura inversa, γ' , es una recta. Por ser γ ortogonal a la recta diametral OC , γ' también ha de ser ortogonal a OC (que es doble en la inversión). Por tanto, para determinar γ' , basta ya conocer uno de sus puntos, que habrá de ser imagen de otro punto de γ , distinto del O . Si, en particular, B es el punto de γ diametralmente opuesto de O , se tiene $\vec{OB} = 2 \cdot \vec{OC}$, luego para el punto B' , imagen del B , de acuerdo con 1.2, será

$$\vec{OB'} = \frac{p}{(OB)^2} \vec{OB}$$

y teniendo en cuenta que $(OB)^2 = (2 \cdot OC)^2 = 4|OC|^2 = 4d^2$, resulta (6), siendo pues γ' la recta ortogonal a la OC por B' (figura 2). ■

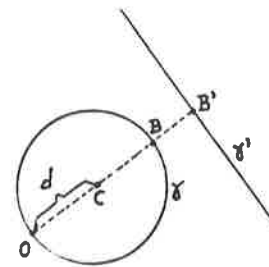


Figura 2

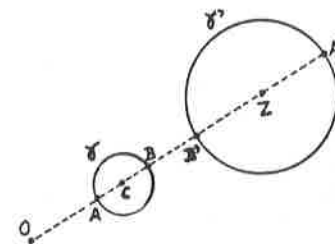


Figura 3

1.6 Proposición.- Si el polo no está en la circunferencia, entonces su inversa es otra circunferencia, cuyo centro Z y radio r' vienen dados por

$$\vec{OZ} = \frac{p}{d^2-r^2} \vec{OC} \quad ; \quad r' = \left| \frac{pr}{d^2-r^2} \right| \quad (7)$$

Demostración.- En este caso la circunferencia γ no pasa por O, luego su inversa, γ' , no pasará por el punto impropio y en consecuencia no es recta, luego es otra circunferencia. Por ser γ ortogonal a la recta diametral OC, γ' también ha de ser ortogonal a OC (que es doble en la inversión), luego su centro ha de estar en dicha recta. Por tanto, para determinar γ' , basta conocer dos de sus puntos, que habrán de ser imágenes de dos puntos de γ . Si, en particular, A y B son los puntos de intersección de γ con la recta OC (siendo A el que está entre O y C), se tiene (figura 3):

$$\vec{OA} = \frac{d-r}{d} \vec{OC} \quad ; \quad \vec{OB} = \frac{d+r}{d} \vec{OC} \quad (8)$$

y para los inversos, A' y B', de A y B, de acuerdo con (2), será

$$\vec{OA'} = \frac{p}{(OA)^2} \vec{OA} \quad ; \quad \vec{OB'} = \frac{p}{(OB)^2} \vec{OB} \quad (9)$$

Puesto que γ' es la circunferencia que pasa por A' y B' y tiene su centro en la recta A'B' (que es la misma recta OC), el segmento $\overline{A'B'}$ es un diámetro de γ' . Por tanto, el centro Z de γ' es el punto medio del segmento $\overline{A'B'}$, siendo su radio, r', la mitad de dicho segmento, y en consecuencia

$$\vec{OZ} = \frac{1}{2} (\vec{OA'} + \vec{OB'}) \quad ; \quad r' = \frac{1}{2} |\vec{OA'} - \vec{OB'}| \quad (10)$$

Ahora de (8) resulta

$$(\vec{OA})^2 = \left[\frac{d-r}{d} \right]^2 |\vec{OC}|^2 = \left[\frac{d-r}{d} \right]^2 d^2 = (d-r)^2$$

y análogamente $(\vec{OB})^2 = (d+r)^2$, lo que llevado a (9) implica

$$\vec{OA'} = \frac{p}{(d-r)^2} \vec{OA} = \frac{p}{(d-r)^2} \frac{d-r}{d} \vec{OC} = \frac{p}{d(d-r)} \vec{OC}$$

y del mismo modo se tiene

$$\vec{OB'} = \frac{p}{d(d+r)} \vec{OC}$$

con lo que las relaciones (10) pueden expresarse en la forma

$$\vec{OZ} = \frac{1}{2} (\vec{OA'} + \vec{OB'}) = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{d(d-r)} + \frac{p}{d(d+r)} \right] \vec{OC}$$

$$r' = \frac{1}{2} |\vec{OA'} - \vec{OB'}| = \frac{1}{2} \left| \frac{p}{d(d-r)} - \frac{p}{d(d+r)} \right| |\vec{OC}| = \frac{1}{2} \left| \frac{p}{d(d-r)} - \frac{p}{d(d+r)} \right| d$$

de donde operando resulta (7). ■

Lo indicado hasta aquí permite determinar la figura inversa de un haz de rectas paralelas y de su haz ortogonal. En efecto, para una recta vertical de ecuación $x=a$ y tomando el vector unitario \vec{n} en el sentido de las abscisas positivas, es decir, $\vec{n}=(1,0)$, resulta $e = \vec{OA} \cdot \vec{n} = a$, luego de acuerdo con (4), la inversa de dicha recta es (si $a \neq 0$) la circunferencia de centro y radio

$$z_1 = \frac{p}{2a} \quad ; \quad z_2 = 0 \quad ; \quad r = \frac{1}{2} \left| \frac{p}{a} \right| \quad (11)$$

y para $a=0$ resulta el eje y, que es doble en la inversión. Ahora al variar $a \in \mathbb{R}$, esto es, al considerar el haz de rectas paralelas al eje de ordenadas, se obtiene como figura inversa el haz de circunferencias tangentes al eje de ordenadas en el origen (incluido el propio eje y). Análogamente, partiendo del haz de paralelas al eje x, se obtiene el haz circunferencias tangentes en el origen al eje de abscisas (incluido el propio eje x).

Puesto que cada paralela al eje de abscisas es perpendicular a cualquier paralela al eje de ordenadas, sus respectivas inversas serán circunferencias ortogonales (por ser la inversión una transformación isogonal). En consecuencia, por ser ortogonales los dos haces de rectas considerados, sus imágenes son dos haces de circunferencias ortogonales (figura 4).

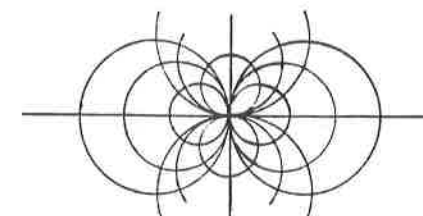


Figura 4

2. INVERSION DE FIGURAS SIMPLEMENTE CONEXAS

Se trata ahora de determinar la inversa de una figura conexa y cerrada, cuyo borde sea una línea cerrada y simple, γ , y de la cual Q sea un punto interior. Cabe esperar que tal figura inversa también sea conexa y cerrada, tenga por borde la línea imagen de γ y contenga al punto Q' (inverso del p) como punto interior. Pero, ¿conserva la inversión las propiedades de ser conexa y cerrada, y el carácter de interior, exterior o frontera de un punto respecto de una figura? Más concretamente, ¿es la inversión una transformación topológica?

Para contestar a estas preguntas, comencemos por definir una topología sobre el plano euclídeo "completado" con el punto impropio único, que consideramos para que la inversión sea biyectiva. Denotemos por Π al plano euclídeo usual, $O' = T(O)$ el punto impropio y Π^* el plano completado, es decir, sea $\Pi^* = \Pi \cup \{O'\}$. Ahora para $X \in \Pi$, definimos el concepto de bola abierta de centro X y radio ϵ en la forma usual:

$$\mathcal{B}(X, \epsilon) = \{Y \in \Pi : |\overrightarrow{XY}| < \epsilon\} \quad (12)$$

y para el punto impropio, definimos la bola abierta de centro O' y radio ϵ como el complemento de la bola cerrada de centro O y radio ϵ , es decir

$$\mathcal{B}(O', \epsilon) = \overline{C}(\overline{B}(O, \epsilon)) = \{Y \in \Pi : |\overrightarrow{OY}| > \epsilon\} \cup \{O'\} \quad (13)$$

Es fácil comprobar que para el conjunto de las bolas abiertas de uno u otro tipo, que denotamos $\mathcal{B}(\Pi^*)$, se verifican las dos condiciones:

- 1) $\cup \mathcal{B}(\Pi^*) = \Pi^*$
- 2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\Pi^*)$, entonces $B_1 \cap B_2$ es unión de bolas de $\mathcal{B}(\Pi^*)$

y, en consecuencia, $\mathcal{B}(\Pi^*)$ es base de una topología de Π^* , que denotaremos $\mathcal{T}(\Pi^*)$, la cual subordina sobre Π la topología usual del plano euclídeo.

Se trata ahora de probar que la inversión T es un homeomorfismo respecto de la topología $\mathcal{T}(\Pi^*)$. Para ello comenzaremos probando que la inversión conserva la relación de "estar entre", definida en la forma usual:

2.1 Definición.- Siendo Q, R y S puntos alineados, se dice que R está entre Q y S, si R es punto interior del segmento \overline{QS} .

2.2 Lema.- Supongamos O perteneciente a la recta QS, pero $O \notin \overline{QS}$. Si R está entre Q y S, entonces R' está entre S' y Q' (inversos respectivos de R, S, Q).

Demostración.- Si $O \notin \overline{QS}$ (figura 5), entonces

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OS} > 0 \quad (14)$$

si R está entre Q y S, entonces R es un punto interior de \overline{QS} , lo que teniendo en cuenta 1.1 implica

$$|\overrightarrow{OQ}| < |\overrightarrow{OR}| < |\overrightarrow{OS}| \quad \vee \quad |\overrightarrow{OQ}| > |\overrightarrow{OR}| > |\overrightarrow{OS}| \quad (15)$$

pero de (1) se deduce que $|\overrightarrow{OQ}| \cdot |\overrightarrow{OS}| = |\overrightarrow{OR}| \cdot |\overrightarrow{OR}| = |\overrightarrow{OS}| \cdot |\overrightarrow{OS}| = |p|$, lo que, junto con (15), implica

$$|\overrightarrow{OQ}| > |\overrightarrow{OR}| > |\overrightarrow{OS}| \quad \vee \quad |\overrightarrow{OQ}| < |\overrightarrow{OR}| < |\overrightarrow{OS}| \quad (16)$$

Ahora bien, de (2) resulta

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OS} = \frac{p^2}{(|\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OS}|^2)} \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OS}$$

lo que teniendo en cuenta (14) implica $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OS} > 0$, luego $O \in \overline{Q'S'}$. Y ahora de (16) sigue que R' está entre Q' y S'. ■

Nota: Si en el lema anterior se omitiera la hipótesis $O \notin \overline{QS}$, entonces la condición «R está entre Q y S» no implicaría «R' está entre Q' y S'», según es inmediato verificar.

2.3 Proposición.- La inversión es una transformación topológica u homeomorfismo, respecto de la topología $\mathcal{T}(\Pi^*)$.

Demostración.- Comencemos probando que la inversión T es una aplicación continua. Para ello, siendo X un punto arbitrario de Π^* y $X' = T(X)$, basta probar que para toda bola abierta $\mathcal{B}(X', \epsilon)$, existe otra bola abierta $\mathcal{B}(X, \delta)$, tal que

$$T(\mathcal{B}(X, \delta)) \subseteq \mathcal{B}(X', \epsilon) \quad (17)$$

(Observemos que la demostración no es inmediata, ya que los centros de dos circunferencias inversas no son puntos inversos). Supondremos, en principio, que $O \neq X \neq O'$. En tal caso, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$O \in \mathcal{B}(X, \delta) \quad (18)$$

ya que, en otro caso, bastaría tomar el radio δ menor. Consideremos los puntos A y B en que la circunferencia γ frontera de la bola abierta $\mathcal{B}(X, \delta)$ es cortada por la recta OX, siendo A el que está entre O y X (figura 6), y sean A' y B' sus respectivos inversos. Denotando por x, x', a, a', b, b' las respectivas distancias del polo O a los puntos X, X', A, A', B, B', de acuerdo con la definición de inversión, se tiene

$$a' = \frac{p}{a} = \frac{p}{x-\delta} \quad ; \quad b' = \frac{p}{b} = \frac{p}{x+\delta}$$

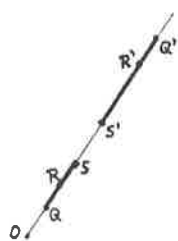


Figura 5

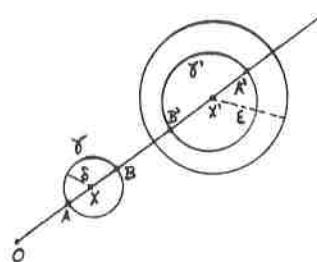


Figura 6

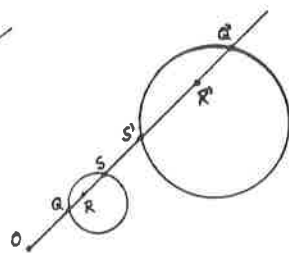


Figura 7

Ahora bien, para que los puntos A' y B' pertenezcan a la bola abierta $\mathcal{B}(X', \epsilon)$, han de verificarse las condiciones: $x' - \epsilon < b' \wedge a' < x' + \epsilon$, es decir,

$$\frac{p}{x} - \epsilon < \frac{p}{x+\delta} \quad \wedge \quad \frac{p}{x-\delta} < \frac{p}{x} + \epsilon$$

para lo cual basta elegir δ verificando

$$\delta < \min\left\{ \frac{\epsilon x^2}{\epsilon x - p}, \frac{\epsilon x^2}{\epsilon x + p} \right\} = \frac{\epsilon x^2}{\epsilon x + p} \quad (19)$$

Pero, de acuerdo con lo indicado en el apartado 1, la inversa de γ es la circunferencia γ' , de la cual el segmento $\overline{A'B'}$ es un diámetro. Ahora para el círculo $c_{\gamma'}$, cuya circunferencia borde es γ' , se verifica

$$c_{\gamma'} \subseteq \mathcal{B}(X', \epsilon) \quad (20)$$

por ser A'B' una recta diametral de $\mathcal{B}(X', \epsilon)$. Finalmente, para probar que

$$T(\mathcal{B}(X, \delta)) \subseteq c_{\gamma'} \quad (21)$$

consideremos un punto $R \in \mathcal{B}(X, \delta)$ y sean Q y S (figura 7) los puntos en que la circunferencia γ , frontera de $\mathcal{B}(X, \delta)$, es cortada por la recta OR (siendo Q el que está entre O y R). Ahora bien, por ser $O \notin \overline{RS}$ (lo cual sigue de (18))

y ser R un punto de la cuerda \overline{QS} , el punto R está entre Q y S, lo cual por el lema anterior implica que R' esté entre Q' y S', luego el punto R' pertenece a la cuerda $\overline{Q'S'}$ de $c_{\gamma'}$, y en consecuencia $R' \in c_{\gamma'}$, quedando así probada la inclusión (21). Ahora la inclusión (17) sigue de (20) y (21).

Para probar (17) en caso de ser $X = O$, basta tomar $\delta \leq p/\epsilon$, ya que, si $Q \in \mathcal{B}(O, \delta)$, entonces $|\overline{OQ}| < \delta$, y como ha de ser $|\overline{OQ}| |\overline{OQ'}| = p$, ello implica

$$|\overline{OQ'}| = \frac{p}{|\overline{OQ}|} > p/\delta \geq \epsilon$$

y por tanto $Q' \in \mathcal{B}(O', \epsilon)$. El caso $X=O'$ es similar al anterior.

Queda así probada la continuidad de T. Ahora, por ser T una transformación involutiva y continua, será bicontinua y por tanto homeomorfismo. ■

2.4 Proposición.- Si \mathcal{F} es una figura (subconjunto de Π^*) conexa, cerrada, de borde γ y de la cual Q es punto interior, entonces su inversa, $T(\mathcal{F})$ es también conexa, cerrada, de borde $T(\gamma)$ y de la cual $T(Q)$ es punto interior.

Demostración.- Sigue de ser homeomorfismo la inversión T. ■

3. INVERSION DE CIRCULOS, SEMIPLANOS Y TRIANGULOS

De acuerdo con la proposición 2.4, la figura inversa del círculo c_{γ} , cuyo borde es la circunferencia γ , es una figura conexa y cerrada, que denotamos $T(c_{\gamma})$, cuyo borde es la circunferencia o recta γ' , inversa de γ , y de la cual es punto interior el inverso del centro, C, de γ . La figura que sea $T(c_{\gamma})$ depende de la situación del polo O respecto del círculo c_{γ} :

3.1 Proposición.- La figura inversa del círculo c_{γ} , cuyo borde es la circunferencia γ , es alguna de las tres siguientes:

- i) el círculo de borde la circunferencia γ' inversa de γ , si $O \notin c_{\gamma}$
- ii) un semiplano de borde la recta γ' inversa de γ , si $O \in \gamma$
- iii) la figura complementaria del círculo abierto cuya frontera es la circunferencia inversa de γ , si el polo O es punto interior de c_{γ} (en particular, tal círculo abierto es de centro O, si O es centro de c)

Demostración.- Sigue de las proposiciones 1.6, 2.1 y 2.4. ■

La recta AB determina dos semiplanos opuestos, cuyo borde común es dicha recta. Eligiendo un punto C, no perteneciente a la recta AB, queda determinado uno de aquellos dos semiplanos, el que contiene al punto C. Denotaremos por AB_C a tal semiplano. Supondremos que el punto impropio pertenece al semiplano, es decir, consideraremos "semiplanos completados".

La figura inversa del semiplano AB_C ha de ser (proposición 2.4) conexa y cerrada, siendo su borde la imagen de la recta AB, y ha de contener al punto imagen de un punto interior al semiplano. Más precisamente:

3.2 Proposición.- La figura inversa del semiplano AB_C , cuyo borde es la recta AB y del cual C es punto interior, es alguna de las cuatro siguientes:

- i) el propio semiplano AB_C , si el polo O pertenece a la recta AB y es $p > 0$
- ii) el semiplano opuesto del AB_C , si O está en AB y es $p < 0$
- iii) el círculo de borde la circunferencia inversa de la recta AB, si el polo O no pertenece al semiplano AB_C
- iv) la figura complementaria del círculo abierto cuya frontera es la circunferencia inversa de AB, si el polo O es punto interior de AB_C

Demostración.-

- i) Si O está en la recta AB, esta recta es doble (proposición 1.4). Por ser $p > 0$, el punto C' , inverso de C, está en la semirrecta de origen O que pasa por C y, en consecuencia, en el semiplano AB_C . Luego AB_C es doble.
- ii) Al ser $p < 0$, C' estará en la semirrecta opuesta de la de origen O que pasa por C, luego la figura inversa del semiplano AB_C es el semiplano opuesto del AB_C .
- iii) La inversa de AB es una circunferencia γ (proposición 1.4). Siendo C' y C'' (figura 8) los respectivos puntos de intersección de la recta OC con la recta AB y con la circunferencia γ ($C'' \neq O$), será $|\vec{OC}''| < |\vec{OC}'|$ luego $|\vec{OC}''| > |\vec{OC}'|$ y por tanto C' es interior a γ .
- iv) Siendo ahora M (figura 9) el punto medio del segmento \vec{OC}' , es $M \in AB_C$, luego $|\vec{OM}| < |\vec{OC}'|$, y por tanto $|\vec{OM}| > |\vec{OC}''|$, luego M' es exterior a γ . ■

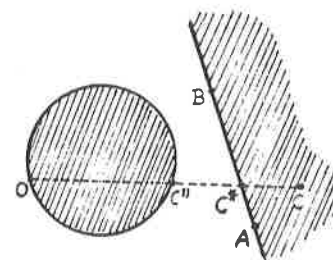


Figura 8

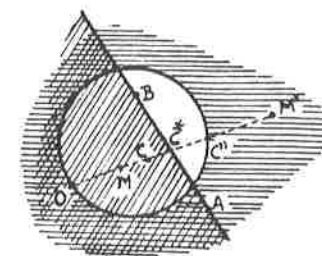


Figura 9

Puesto que el triángulo ABC es intersección de tres semiplanos

$$ABC = AB_C \cap BC_A \cap CA_B$$

su imagen en la inversión T (que es una aplicación biyectiva) será intersección de las imágenes de aquellos tres semiplanos

$$T(ABC) = T(AB_C) \cap T(BC_A) \cap T(CA_B)$$

Ahora bien, según la proposición 2.4, $T(ABC)$ ha de ser una figura conexa y cerrada de borde la línea unión conjuntista de los inversos de los lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CA} , del triángulo ABC. Interesa pues comenzar determinando la figura inversa de un segmento.

En ciertas condiciones, la imagen de un segmento será una semirrecta y para mayor generalidad y simplicidad en la expresión de resultados, supondremos que el punto impropio pertenece a cualquier semirrecta, es decir, consideraremos "semirrectas completadas".

3.3 Proposición.- Sean F y G dos puntos del plano completado Π^* y sean F' y G' sus respectivas imágenes en una inversión de polo el punto O. La figura inversa del segmento \overline{FG} , es alguna de las siguientes:

- i) el segmento $\overline{F'G'}$, si O está en la recta FG, pero $O \notin \overline{FG}$ (fig. 10)
- ii) la semirrecta (contenida en la recta FG) de origen G' y a la cual no pertenece O, si O es el extremo, F, del segmento \overline{FG} (fig. 11)
- iii) la unión de las dos semirrectas (contenidas en la recta FG) de orígenes respectivos F' y G' y a las cuales no pertenece el polo, O, si O es un punto interior del segmento \overline{FG} (fig. 12)

iv) el arco de la circunferencia $OF'G'$ de extremos F' y G' , y al cual no pertenece el polo O , si O no pertenece a la recta FG (fig. 13)

En el caso iv, siendo Z el centro de la circunferencia $OF'G'$, el ángulo central $F'ZG'$ es doble del ángulo convexo FOG .

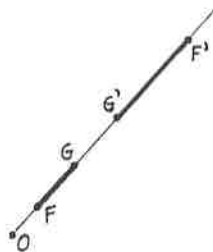


Figura 10

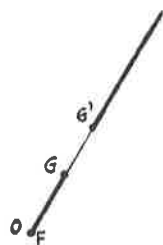


Figura 11

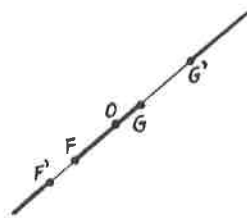


Figura 12

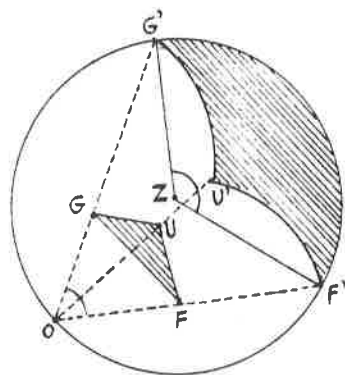


Figura 13

Demostración.-

i) Si Q es punto interior del segmento \overline{FG} , entonces Q está entre F y G , lo cual, de acuerdo con el lema 2.2, implica que Q' esté entre F' y G' , y por tanto Q' pertenezca al segmento $\overline{F'G'}$. Ahora por ser T una transformación involutiva, todo punto de $\overline{F'G'}$ es imagen de un punto de \overline{FG} . Por tanto $T(\overline{FG})$ es $\overline{F'G'}$.

ii) Puesto que $O \in \overline{FG}$, el punto impropio $O' \in T(\overline{FG})$. Si Q es punto interior del segmento \overline{FG} , entonces $\overline{OQ} \subseteq \overline{FG}$, luego $T(\overline{OQ}) \subseteq T(\overline{FG})$ y, en consecuencia, $Q' \in T(\overline{FG})$, según sigue de i). Además, para todo punto Q' de la semirrecta (contenida en la recta FG) de origen G' y que no contiene al polo O , existe $Q \in \overline{FG}$ tal que $T(Q) = Q'$, ya que, según se deduce de la definición de inversión, la desigualdad $|\overline{OG'}| < |\overline{OQ'}|$ implica $|\overline{OG}| > |\overline{OM}|$ y por tanto $M \in \overline{FG}$.

iii) En este caso es $\overline{FG} = \overline{FO} \cup \overline{OG}$, luego $T(\overline{FG}) = T(\overline{FO}) \cup T(\overline{OG})$, bastando ya tener en cuenta ii).

iv) Si la recta FG no pasa por el polo O , la imagen de esta recta es una circunferencia γ , cuyo centro Z y radio r vienen dados por (3). Por ser T un homeomorfismo, la imagen del segmento \overline{FG} será un arco de la circunferencia γ de extremos los puntos F' y G' , inversos respectivos de F y G . De los dos arcos de γ de extremos estos dos puntos, el que no contiene al polo O será el imagen de \overline{FG} , ya que el punto impropio no pertenece al segmento \overline{FG} . Por otra parte, el ángulo $F'ZG'$ es doble del ángulo FOG , por ser este un inscrito en γ , que abarca el mismo arco que aquel ángulo central (respecto de γ).

Respecto del arco de extremos F' y G' , considerado en el apartado iv de la proposición anterior, si se supone orientado en un sentido determinado (por ejemplo, antihorario), entonces dicho arco queda determinado por los parámetros siguientes:

- el centro, Z , de la circunferencia γ que lo contiene
- el radio de dicha circunferencia
- el ángulo orientado de lados el semieje y^+ y el radio \overline{ZF} .
- el ángulo orientado de lados el semieje y^+ y el radio \overline{ZG} .

La elección de estos parámetros tiene por objeto facilitar la implementación en la Geometría de la Tortuga.

Para decidir cuál de los puntos, F' o G' , ha de tomarse como origen del arco $F'G'$, tengamos en cuenta que dicho arco queda determinado por el ángulo $F'OG'$, el cual ha de ser convexo, por ser igual al FOG , que es un ángulo del triángulo OFG . El sentido del ángulo $F'OG'$ puede pues determinarse por el sentido del producto vectorial $\overline{OF'} \times \overline{OG'}$, o lo que es equivalente mediante el signo del determinante

$$\begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ g_1' & g_2' \end{vmatrix} = f_1'g_2' - f_2'g_1'$$

Finalmente, para calcular la orientación de los radios inicial y final, ZF' y ZG', respecto del semieje positivo de abscisas, en sentido antihorario (figura 14), consideramos la función auxiliar

$$\psi(ZF') = \begin{cases} \arctan(y/x) , & \text{si } x \neq 0 \\ \pi/2 , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(donde arctan está valorada en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2]$), siendo $x=f_1'-z_1$, $y=f_2'-z_2$ para ZF' (y, análogamente $x=g_1'-z_1$, $y=g_2'-z_2$ para ZG'). A partir de ella definimos la función $\varphi(ZF')$, así

$$\varphi(ZF') = \begin{cases} \psi(ZF')+\pi , & \text{si } x<0 \text{ e } y>0 \\ \psi(ZF')-\pi , & \text{si } x\leq 0 \text{ y } y<0 \\ \psi(ZF') , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que resulta valorada en $(-\pi, \pi]$. Naturalmente, para obtener la orientación en

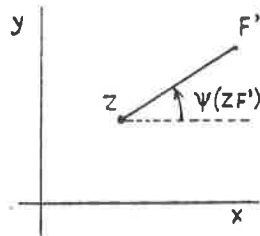


Figura 14

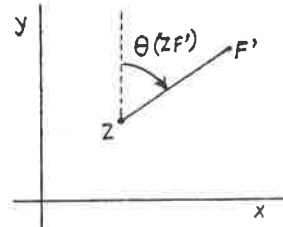


Figura 15

grados, basta considerar la función

$$\Phi(ZF') = 180 \cdot \varphi(ZF') / \pi,$$

que resulta valorada en $(-180, 180]$. Tal valoración facilita el cálculo del rumbo, $\theta(ZF')$, del radio ZF', definido como ángulo del semieje positivo de ordenadas con ZF', en sentido horario (figura 15), mediante la función

$$\theta(ZF') = \begin{cases} 90 - \Phi(ZF') , & \text{si } \Phi(ZF') \leq 90 \\ 450 - \Phi(ZF') , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que resulta valorada (en grados) en el intervalo semiabierto $[0, 360)$. El rumbo así obtenido es una primitiva de la Geometría de la Tortuga.

Una vez determinada la imagen del borde del triángulo ABC, para determinar la figura inversa de dicho triángulo, basta particularizar para este caso la proposición 2.4 y se tiene:

3.4 Proposición.- La figura inversa del triángulo ABC es una figura conexa y cerrada, de borde la línea unión conjuntista de los inversos de sus lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CA} . El punto impropio O' pertenecerá a dicha figura inversa si y sólo si el polo O pertenece al triángulo ABC original.

4. ALGORITMOS PARA SIMULAR LA INVERSION. IMPLEMENTACION.

En los apartados 1 y 3 se han llevado a cabo adaptaciones geométricas para posibilitar la elaboración de algoritmos, que permitan construir las figuras inversas de puntos, rectas, circunferencias, círculos y semiplanos.

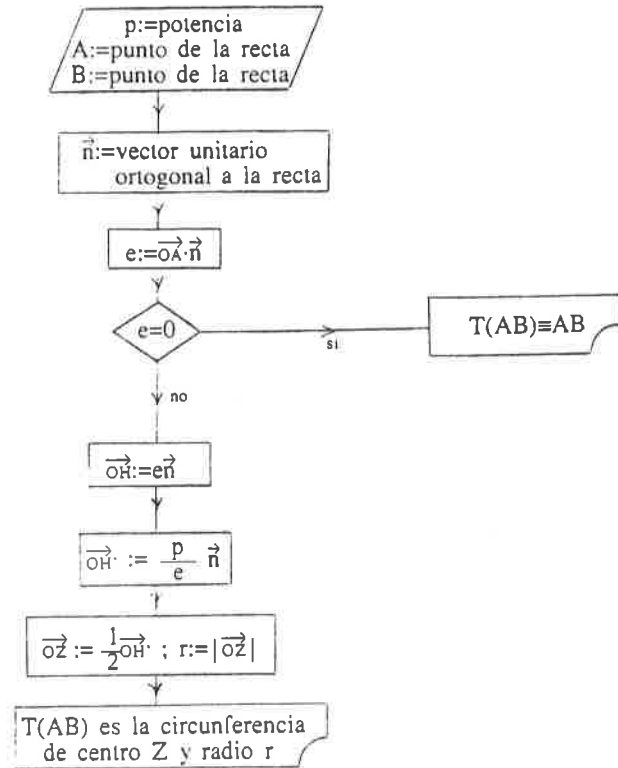
A continuación se explicitan los correspondientes algoritmos, así como el desarrollo de los cálculos que permiten efectuar las implantaciones referidas.

4.0 Cálculos para la implantación del inverso de un punto

Elegido un sistema de referencia métrico de origen el polo, O, y siendo (x, y) las coordenadas del punto X respecto de dicho sistema, las coordenadas (x', y') de su imagen X', de acuerdo con la proposición 1.2, vendrán dadas en la forma

$$x' = \frac{p}{x^2 + y^2} x \quad ; \quad y' = \frac{p}{x^2 + y^2} y$$

4.1 Algoritmo para la construcción de la imagen de la recta AB en la inversión T



4.2 Implementación del cálculo de la inversa de la recta AB

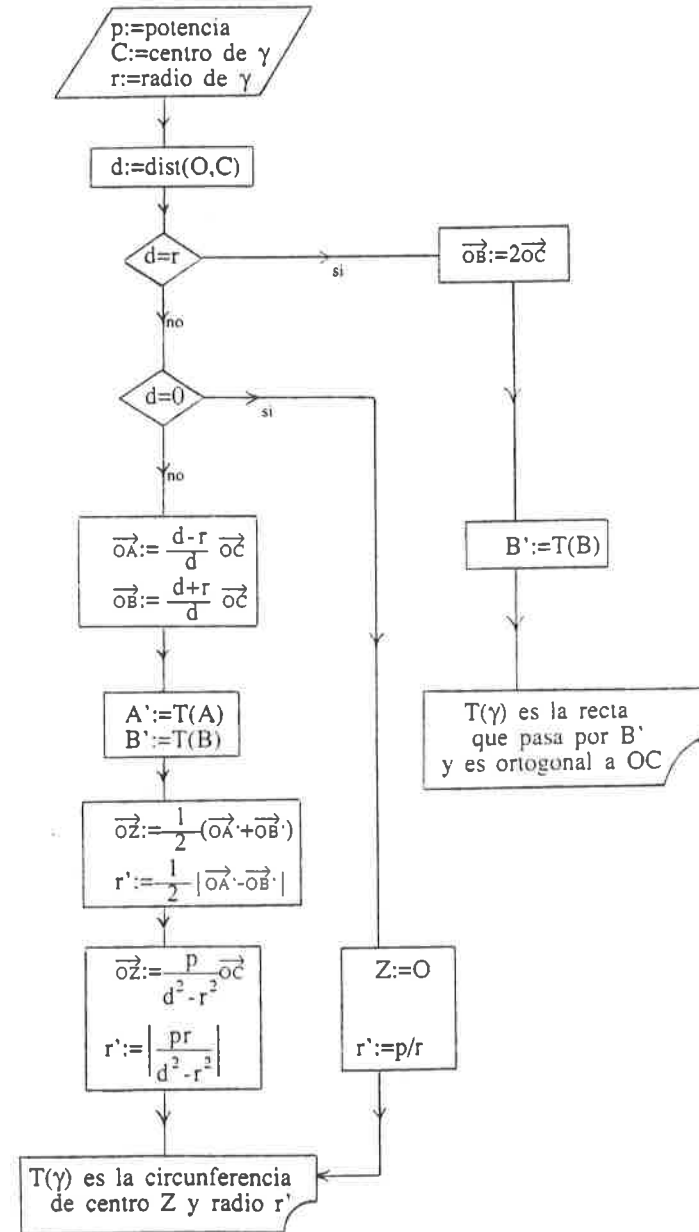
Siendo pues (a_1, a_2) y (b_1, b_2) las respectivas coordenadas de los puntos A y B, respecto de un sistema de referencia métrico de origen O, las coordenadas del vector \vec{AB} respecto de la base métrica de dicho sistema serán $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, luego un vector unitario, \vec{n} , ortogonal al \vec{AB} , es

$$(n_1, n_2) = \left[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \right]^{-1/2} (b_2 - a_2, a_1 - b_1)$$

El producto escalar $e = \vec{OA} \cdot \vec{n} = a_1 n_1 + a_2 n_2$ permite determinar las coordenadas (z_1, z_2) del centro Z, así como el radio r de la circunferencia inversa:

$$z_1 = \frac{p}{2e} n_1 \quad ; \quad z_2 = \frac{p}{2e} n_2 \quad ; \quad r = \frac{1}{2} \left| \frac{p}{e} \right|$$

4.3 Algoritmo para la construcción de la imagen de la circunferencia γ en la inversión T



4.4 Implementación del cálculo de la recta inversa de la circunferencia γ

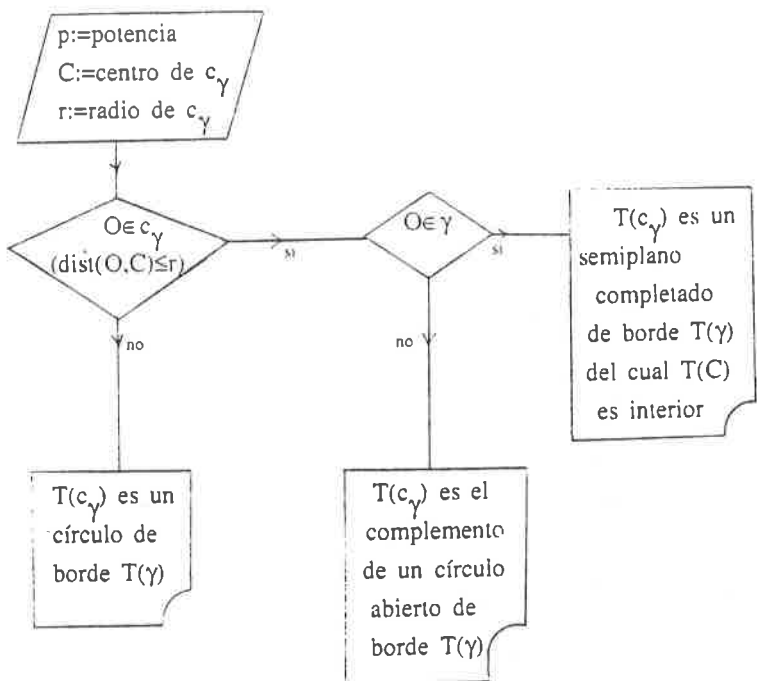
Si $O \in \gamma$, de acuerdo con la figura 2 y siendo (c_1, c_2) las coordenadas del centro C de γ , y $d = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2}$, las coordenadas del punto B' serán $(b'_1, b'_2) = (p/(2d^2))(c_1, c_2)$ y la recta γ' (perpendicular a OC por B') tendrá por ecuación $c_1(x-b'_1) + c_2(y-b'_2) = 0$.

4.5 Implementación del cálculo de la circunferencia inversa de la circunferencia γ

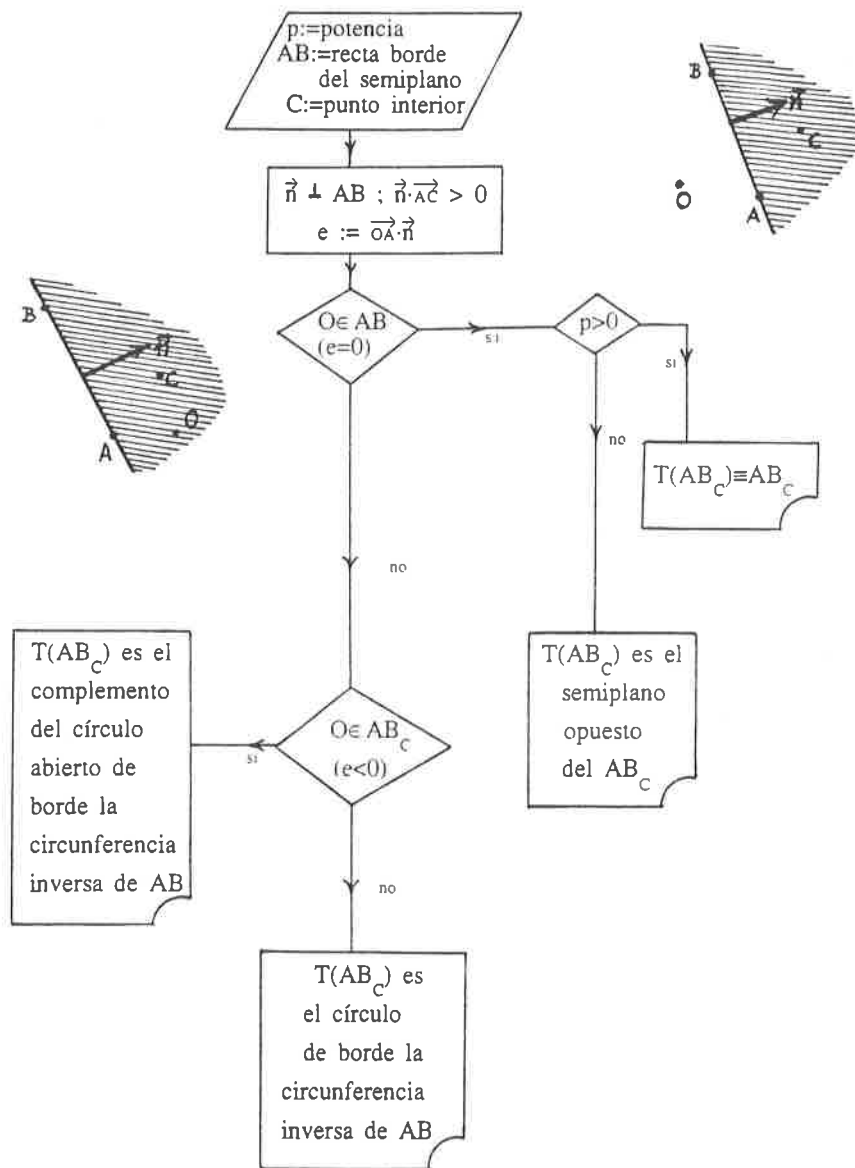
Si $O \notin \gamma$, de acuerdo con la figura 3 y siendo (c_1, c_2) las coordenadas del centro C de γ , $d = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2}$ y r el radio de γ , las coordenadas (z_1, z_2) del centro de γ' y su radio r' serán

$$z_1 = \frac{p}{d^2 - r^2} c_1 \quad ; \quad z_2 = \frac{p}{d^2 - r^2} c_2 \quad ; \quad r' = \left| \frac{pr}{d^2 - r^2} \right|$$

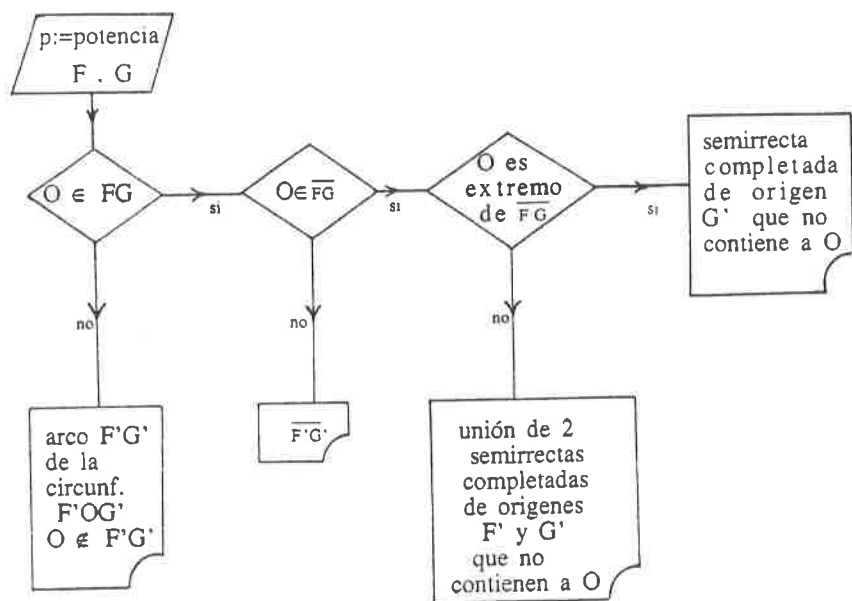
4.6 Algoritmo para la determinación de la imagen del círculo c_γ (de borde la circunferencia γ) en la inversión T



4.7 Algoritmo para la determinación de la imagen del semiplano completado AB_C (de borde la recta AB y al cual pertenece el punto C) en la inversión T



4.8 Algoritmo para la determinación de la imagen del segmento completado \overline{FG} en la inversión T



La implementación de la Geometría de la Tortuga tiene posibilidad de rellenar en el color elegido una figura \mathcal{F} , conexa, cerrada y de interior no vacío, cuyo borde se haya marcado previamente, debiendo para ello elegir un punto, R, interior a \mathcal{F} y perteneciente a la ventana \mathcal{H} representada en la pantalla del monitor, es decir, tal que $R \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$. Si el punto R pertenece a \mathcal{F} pero no a \mathcal{H} , no se realiza el relleno, por lo que conviene elegir apropiadamente el punto R.

Por otra parte, se ha de rellenar, no sólo la figura \mathcal{F} , sino también su imagen $\mathcal{F}' = T(\mathcal{F})$ en la inversión T. De acuerdo con lo indicado anteriormente, si R es punto interior de \mathcal{F} , entonces T(R) es punto interior de T(\mathcal{F}), por lo que, en principio, bastaría elegir R perteneciente a \mathcal{F} . Pero puede ocurrir que $R \in \mathcal{H}$ y $T(R) \notin \mathcal{H}$, con lo cual se rellenaría la figura original \mathcal{F} , pero no la imagen T(\mathcal{F}).

Tratándose de una simulación gráfica, cabe esperar que el usuario del programa situe la figura \mathcal{F} de modo que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$, o al menos $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ (recordemos que \mathcal{F} puede ser un semiplano, por ejemplo) y es deseable que si $T(\mathcal{F}) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$, sea T(R) un punto de $T(\mathcal{F}) \cap \mathcal{H}$, para que se rellene T(\mathcal{F}). Naturalmente ello depende de la forma y situación de la figura \mathcal{F} , no pudiendo darse una regla general para la elección de R.

La solución que hemos adoptado para aumentar la probabilidad de que tenga lugar el relleno, consiste en elegir varios posibles puntos interiores, R, situados en lugares estratégicos de \mathcal{F} , según sea esta figura. Consideremos pues los casos correspondientes a las figuras tratadas anteriormente.

Caso de triángulo: Si la figura \mathcal{F} es el triángulo FGU, cabe esperar que sus tres vértices sean puntos de \mathcal{H} (con lo cual $T(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{H}$), pero aún en tal caso puede ocurrir que la figura $T^{-1}(T(\mathcal{F}) \cap \mathcal{H})$ consista en una parte del triángulo \mathcal{F} próxima a uno de sus vértices.

Por ello elegiremos varios posibles puntos R, dados por

$$\vec{OR} = h\vec{OF} + k\vec{OG} + (1-h-k)\vec{OU} \quad ; \quad h, k > 0 \quad ; \quad h+k < 1 \quad (22)$$

Así, por ejemplo, eligiendo $h=k=\epsilon$ (donde $0 < \epsilon < 1/2$), se obtiene un punto R_1 , interior a \mathcal{F} y próximo al vértice U. Eligiendo $h=\epsilon$ y $k=1-2\epsilon$, se obtiene R_2 , próximo al vértice G. Eligiendo $k=\epsilon$ y $h=1-2\epsilon$, se obtiene R_3 , próximo al vértice F. Y eligiendo $h=k=1/3$ se obtiene el baricentro R_4 del triángulo. (figura 16). Notemos que si para k, h o (1-h-k) se toman valores próximos a cero, entonces las coordenadas de R pueden corresponder a un pixel que ya se ha marcado como borde de \mathcal{F} , en cuyo caso no se efectuaría el relleno a partir de tal punto R.

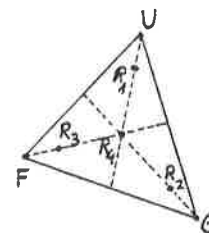


Figura 16

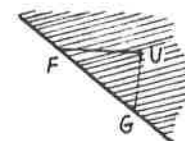


Figura 17

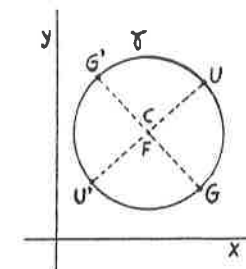


Figura 3A.18

Caso de semiplano: Siendo la figura \mathcal{F} el semiplano FG_U , cabe esperar que los puntos F, G y U se hayan elegido en \mathcal{H} . Ello induce a actuar como si se tratara del triángulo FGU (figura 17), eligiendo los puntos interiores mediante la ecuación vectorial (22), dando a los parámetros h y k los valores allí indicados.

Caso de círculo: Siendo la figura \mathcal{F} el círculo de centro C, radio r y circunferencia borde γ , y tratando de conseguir el relleno de $T(\mathcal{F})$, podemos operar como en los casos precedentes, eligiendo el triángulo FGU, tal que F sea el centro C del círculo, G un punto de intersección de γ con la recta que pasa por F y es paralela a la recta de ecuación $y=x$, elegido de modo que su abscisa, $abs(G)$, verifique

$$abs(G) \begin{cases} > abs(C) , \text{ si } abs(C) > 0 \\ < abs(C) , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

y, análogamente, U el punto de intersección de γ con la recta que pasa por F y es paralela a la recta de ecuación $y=-x$ (figura 18), elegido de modo que su ordenada, $ord(U)$, verifique

$$ord(U) \begin{cases} > ord(C)+r , \text{ si } ord(C) > 0 \\ < abs(C)-r , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Tal elección tiene por objeto que R se aleje del polo O, para que $T(R)$ se acerque a O, aumentando así la probabilidad de que pertenezca a \mathcal{H} .

En la adaptación informática del problema geométrico se han utilizado métodos de Geometría Vectorial. La implementación se ha realizado en Turbo Pascal. Para mejorar la resolución, se ha utilizado la adaptación de la Geometría de la Tortuga indicada en la bibliografía.

El programa (interactivo) comienza preguntando si se desean representar ejes de coordenadas y las escalas sobre estos. Para facilitar el uso de distintas escalas, sobre la parte de los ejes de coordenadas incluida en la ventana de gráficos, se representan varias marcas equidistantes y el programa pregunta la distancia, d, entre dos consecutivas.

En consecuencia, una vez realizados los cálculos que permiten determinar un cierto punto (x,y), para representarlo se pasa automáticamente a

coordenadas aparentes (x_a, y_a) , mediante el cambio

$$x_a = x \cdot N/d \quad ; \quad y_a = y \cdot N/d$$

siendo N la distancia entre dos marcas consecutivas de ejes, medida con el lado de un pixel, como unidad.

Una vez elegida la escala, se ofrece la opción de representar el lugar de los puntos dobles (en caso de respuesta afirmativa y $p < 0$, el programa informa de la inexistencia de tales puntos).

A continuación, el programa desarrollado presenta opciones que permiten calcular y representar la figura inversa de cada una de las figuras consideradas anteriormente. Comienza pidiendo los datos que la determinan:

- las coordenadas del punto a invertir
- las coordenadas de dos puntos de la recta original
- las coordenadas del centro y radio de la circunferencia original
- las coordenadas del centro y radio del círculo original
- las coordenadas de dos puntos de la recta borde del semiplano original y las de uno de sus puntos interiores
- las coordenadas de los tres vértices del triángulo original

a partir de los cuales se efectúan los cálculos apropiados, que permitan realizar automáticamente las siguientes operaciones:

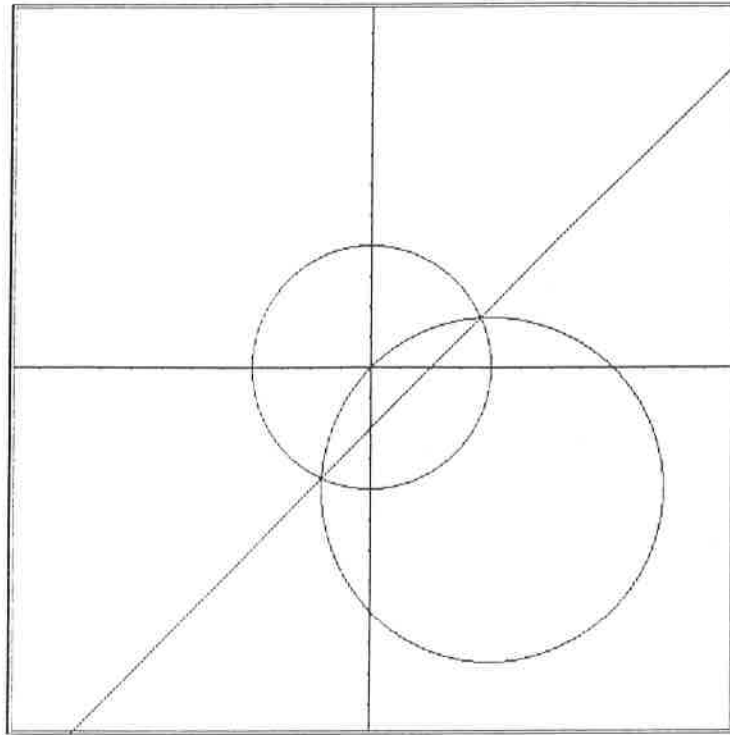
- representar la figura original y la figura imagen, o la parte de ellas contenida en la ventana gráfica, rellenándola si procede
- devolver los parámetros que determinan la figura final (ecuación de la recta imagen, centro y radio de la circunferencia imagen, etc)

y al concluir cada ejecución, se oferta la posibilidad de realizar otra, sin salir del programa.

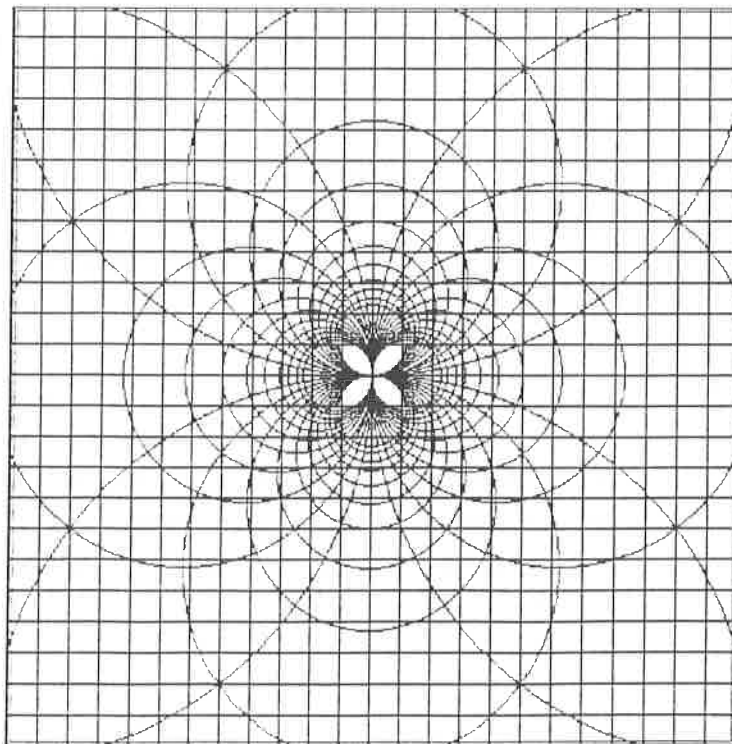
Finalmente, vale la pena hacer notar que la ejecución de estos programas permite observar experimentalmente el ahorro de razonamiento que supone la consideración de puntos invariantes, así como la propiedad de isogonalidad (no conforme) que posee esta transformación.

A continuación se ofrece un ejemplo de ejecución para algunas de las posibilidades citadas.

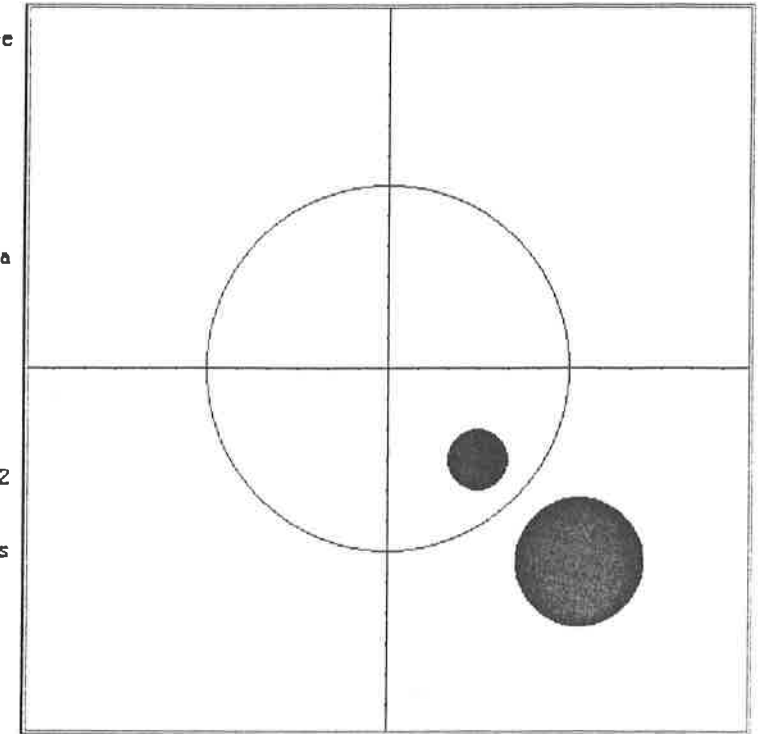
INVERSION
 Dar distancia entre
 marcas de ejes: 1
 Potencia: 16
 ¿Marcar los puntos
 dobles(s/n)?: s
 1-Imagen de punto
 2-Imagen de recta
 3-haz de paralelas
 4-de semiplano
 5-de circunferencia
 6-de círculo
 7-de triángulo
 ¿Opción núm.?: 2
 IMAGEN DE UNA RECTA
 Dar 2 de sus puntos
 Un punto: 2 0
 Otro punto: 0 -2
 Su imagen es
 una circunferencia.
 ¿Núm.decim.aprox: 2
 Centro: 4.0 -4.0
 y radio 5.66
 ¿Continuar(s/n)?: s



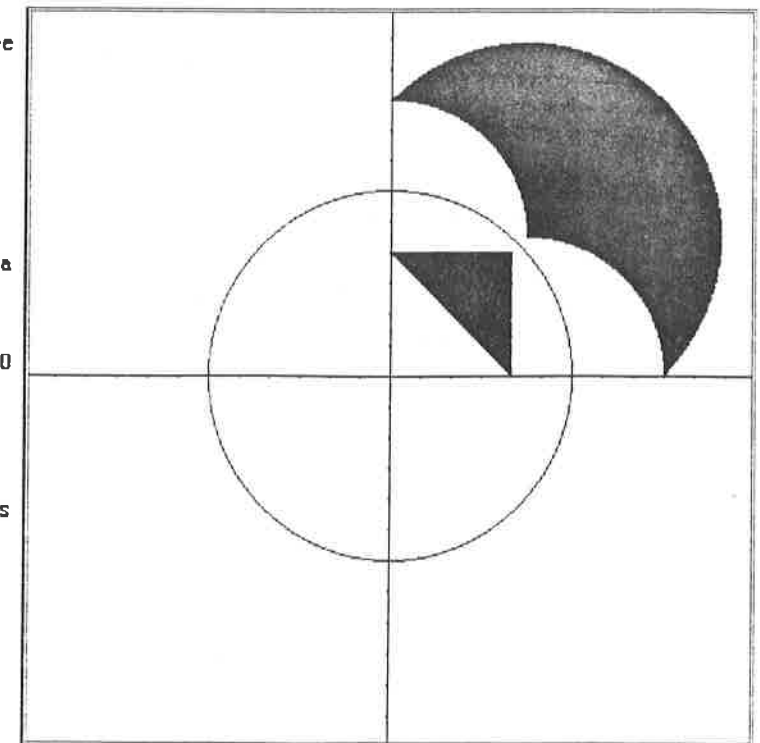
INVERSION
 Dar distancia entre
 marcas de ejes: 1
 Potencia: 25
 ¿Marcar los puntos
 dobles(s/n)?: n
 1-Imagen de punto
 2-Imagen de recta
 3-haz de paralelas
 4-de semiplano
 5-de circunferencia
 6-de círculo
 7-de triángulo
 ¿Opción núm.?: 3
 IMAGEN DE HAZ DE
 RECTAS PARALELAS
 Su imagen es
 un haz de circun-
 ferencias tangentes
 HAZ ORTOGONAL
 Su imagen es
 un haz ortogonal
 de circunferencias
 ¿Continuar(s/n)?: n



INVERSION
 Dar distancia entre
 marcas de ejes: 1
 Potencia: 36
 ¿Marcar los puntos
 dobles(s/n)?: s
 1-Imagen de punto
 2-Imagen de recta
 3-haz de paralelas
 4-de semiplano
 5-de circunferencia
 6-de círculo
 7-de triángulo
 ¿Opción núm.?: 6
 IMAGEN DE CIRCULO
 Coord. centro: 3 -3
 y radio: 1
 Su imagen es
 un círculo.
 ¿Núm.decim.aprox: 2
 Centro: 6.35 -6.35
 y radio 2.12
 ¿Continuar(s/n)?: s



INVERSION
 Dar distancia entre
 marcas de ejes: 1
 Potencia: 36
 ¿Marcar los puntos
 dobles(s/n)?: s
 1-Imagen de punto
 2-Imagen de recta
 3-haz de paralelas
 4-de semiplano
 5-de circunferencia
 6-de círculo
 7-de triángulo
 ¿Opción núm.?: 7
 IMAGEN DE TRIANGULO
 vértice A: 4 0
 vértice B: 4 4
 vértice C: 0 4
 Su imagen es ...
 esta otra figura.
 ¿Continuar(s/n)?: s



BIBLIOGRAFIA

- [1] Abelson y DiSessa: *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for exploring Mathematics*, M.I.T. 1981
- [2] Berger: *Geometry I*, Springer 1987
- [3] Coxeter: *Introduction to Geometry*, Wiley 1969
- [4] Ogilvy: *Excursions in Geometry*, Dover 1969
- [5] Ortiz Vallejo: *La Geometría de la Inversión*, Bol. de la Soc. Puig Adam, núm. 35, págs. 51-60, 1993
- [6] Preparata-Samos: *Computational Geometry*, Springer 1985
- [7] Roanes Lozano: *Automatización e implementación de algunos problemas algebraicos y geométricos*, Tesis doctoral, Fac. de Informática de la Univ. Politécnica de Madrid, 1993
- [8] Roanes Lozano - Roanes Macías: *Simulación Informática de la transformación geométrica "inversión"*, Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad, Univ. Politécnica de Madrid, págs. 195-200, 1991
- [9] Roanes Lozano - Roanes Macías: *Desarrollo de una implementación mejorada y flexible de la "Turtle Geometry"*; Actas del III Encuentro de Geometría Computacional. Univ. de Zaragoza, págs. 117-129, 1992
- [10] Roanes Lozano - Roanes Macías: *Geometric Problems Simulation; Proceedings of the International Conference on Tecnology in Mathematics Teaching*, Univ. de Birmingham, págs. 415-418, 1993
- [11] Roanes Macías: *Introducción a la Geometría*, Anaya 1980
- [12] - : *Manual de Turbo Pascal 6.0*, Borland 1991

PROBLEMAS PROPUESTOS

*Problemas propuestos en la PRIMERA FASE de la
XXX Olimpiada Matemática Española
en los distritos de Madrid*

PROBLEMA 1º:

Demostrar que, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, las fracciones

$$\frac{n-1}{n}, \quad \frac{n}{2n+1}, \quad \frac{2n+1}{2n^2+2n}$$

son irreducibles.

PROBLEMA 2º:

Dada una esfera de radio R, se construye un cono de revolución cuya base es un círculo máximo de la esfera, con vértice exterior a la misma. Hallar el radio de la circunferencia menor según la cual se cortan la esfera y el cono, sabiendo que el volumen de éste es la mitad del volumen de la esfera dada.

PROBLEMA 3º:

El valor absoluto de un número real a se define así:

$$|a| = a, \text{ si } a \geq 0; \quad |a| = -a, \text{ si } a < 0$$

Por su parte, la parte entera de a, $[a]$, es el mayor entero menor o igual que a.

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x \cdot |x| + y \cdot |y| &= 1 \\ [x] + [y] &= 1 \end{aligned} \right\}$$

PROBLEMA 4º:

Sea AD la bisectriz interior del triángulo ABC. Sean E, el punto simétrico de D respecto del punto medio de BC, y F el punto de BC tal que $\widehat{BAF} = \widehat{EAC}$.

Demostrar que

$$\frac{BF}{FC} = \frac{c^3}{b^3}$$

PROBLEMA 5º:

Dados tres puntos distintos, no alineados, A, B, C, razonar cuál es la recta para la que es mínima la suma de las distancias de esos puntos a dicha recta.

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

Pro- pues- tos en el n°	Proceden- tes de	Números de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										o b s .	
		1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°		
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	-	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	-	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	-	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	-	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	-	C
9	OME-f2-86 / Varios	18	19	20	18	19	19/17	17	11	17	-	-	C
10	China / Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	-	-	C
11	OME-f1-86 / OMI-86-Varsovia	13	14	14	14	14	23	20	15/20	12	-	-	C
12	OI-87-Urug. / OME-f1	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	-	C
13	OME-f2-87	16	14	14	17	15	17/15	15	15	21	-	-	C
14	Varios	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87-Cuba	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	-	C
16	OME-f1-87	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	-	C
17	OME-f2-88	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	-	C
18	OI-88-Perú	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	-	C
19	OMI-88-Australia	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	-	C
20	OME-f1-88 / Putnam	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	-	C
21	OME-f2-89 / OI-89-Cuba	24	26	24	25	24	26	24	26/26	24	-	-	C
22	OMI-89-R.F.A. / Oposiciones	24	27	24	27	27	24/27	25	27	26	-	-	C
23	Oposiciones	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
24	OME-f1-90	28	28	XX	28	29	30/30	30	30	31	-	-	C
25	OME-f2 / f1-90	31	30	29	-	-	-	-	-	-	-	-	C
26	OMI-90-China / OI-90-Valladolid	27	27	28	28	29	31	31	30	-	-	-	C
27	OME-f1-91	30	31	31	30	31	30	30	31	-	-	-	C
28	OME-f2-91	34	31	29	29	31	32/32	32	32	33	-	-	C
29	OMI-91-Suecia	32	XX	XX	32	XX	XX/XX	32	XX	34	-	-	C
30	OI-91-Argentina / OME-f1-91	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
31	OME-f2-92 / OME-f1-91 / PNS	XX	XX	33	33	XX	35	XX	XX	-	-	-	C
32	OMI-92-Moscu / OI-92-Venez. / PNS	32	32	XX	XX	33	33	-	-	-	-	-	C
33	OME-f1-92/f1-92(v) /PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	C
34	OME-f2-93	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	C
35	OMI-93-Turq. / OI-93-Méjico / PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	C
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	C

CLAVES: XX = Pendiente de publicación . C = Completo
 OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 o 2).
 OMI = Olimpiada Matemática Internadaional.
 OI = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.
 PNS = Propuestos por nuestros socios.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1º DEL BOLETIN 31

Un número N, múltiplo de 83, es tal que su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar N, sabiendo que es el menor número que cumple las condiciones anteriores.

Sabemos que el número de divisores de un número cuya descomposición factorial es $a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ es $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots$

Las descomposiciones posibles de 63 en producto de números naturales son 63, $21 \cdot 3$, $9 \cdot 7$, $3 \cdot 3 \cdot 7$. Por lo tanto, las descomposiciones factoriales posibles de N^2 son:

$$N^2 = a^{62} \Rightarrow N = a^{31}$$

$$N^2 = a^{20} b^2 \Rightarrow N = a^{10} b$$

$$N^2 = a^6 b^6 \Rightarrow N = a^3 b^3$$

$$N^2 = a^2 b^2 c^6 \Rightarrow N = abc^3$$

El menor de estos números, múltiplo de 83, será lógicamente el $83 \cdot 2^3 \cdot 3 =$

1992

EQUIPO "I.B. AVDA DE LOS TOREROS"

PROBLEMA N°3 (Boletín n° 31)

Probar que si a, b, c, d, son números enteros no negativos, y es $(a+b)^2 + 2a+b = (c+d)^2 + 2c+d$, (*) necesariamente es $a=c$ y $b=d$.

Probar la misma conclusión, si en vez de (*) es $(a+b)^2 + 3a+b = (c+d)^2 + 3c+d$.

Ver que, en cambio, existen enteros no negativos $a \neq c$, $b \neq d$, tales que $(a+b)^2 + 4a+b = (c+d)^2 + 4c+d$.

Solución:

Debido a la "simetría" de la fórmula $(a+b)^2 + 2a+b = (c+d)^2 + 2c+d$, basta considerar

el caso $a \geq c$ y $b \leq d$, pues el caso $a \leq c$ y $b \geq d$, sería lo mismo. Por tanto $a=c+p$ y $d=b+q$, siendo p y q números naturales.

a) Sustituyendo en la primera igualdad queda:

$$(c+p+b)^2 - (c+b+q)^2 = 2c+b+q-2c-2p-b$$

$$(2b+2c+p+q)(p-q) + 2p-q = 0$$

$$(2b+2c+p+q+1)(p-q) + p = 0$$

Pero como el primer paréntesis es mayor que p , la única posibilidad de que se verifique esta igualdad es que $p-q=0$, lo que implica que $p=q$, $p=0$, $q=0$, $a=c$ y $b=d$.

b) Sustituyendo en la segunda igualdad y operando resulta:

$$(2b+2c+p+q+1)(p-q) + 2p = 0$$

Para que se verifique esta igualdad tiene que ocurrir, al ser el primer paréntesis positivo, que $p-q \leq 0$, $q \geq p$. De aquí se deduce que el primer paréntesis es mayor que $2p$, lo que implica que $p=q$, $p=0$, $q=0$, $a=c$ y $b=d$.

c) Sustituyendo en la tercera igualdad resulta:

$$(2b+2c+p+q+1)(p-q) + 3p = 0$$

Esta igualdad sí que se verifica. Por ejemplo, para $p=2$, $q=3$, $b=0$ y $c=0$ Con lo cual resulta: $a=2$, $b=0$, $c=0$ y $d=3$, que verifican la igualdad.

Equipo "I. B. Avenida de los Toreros"

PROBLEMA N° 4 (Boletín n° 31)

Sea la sucesión (progresión aritmética) 3, 7, 11, 15,
 Demostrar que en dicha sucesión existen infinitos números primos.

Solución:

Sean K , un término cualquiera de la sucesión mayor que 3, y $T=K!-1$.

Como para $K > 3$, T es de la forma $4n-1$, este número también pertenece a la progresión.

Todos los factores primos de $T=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (K-1) \cdot K-1$ son, evidentemente, mayores que K .

Por otra parte, alguno de estos factores tiene que pertenecer a la progresión dada, porque si no, todos tendrían que ser de la forma $4w_i+1$, y es imposible que $(4w_1+1)(4w_2+1)\dots(4w_r+1)=4a+1$ sea igual a T , que es de la forma $4b-1$.

CONCLUSIÓN: Dado cualquier número primo K de la progresión, existe al menos otro término primo M mayor que K y menor que $K!$; y, por la misma razón, otro entre M y $M!$; y así sucesivamente. Por tanto, en la progresión dada hay infinitos números primos.

Víctor M. Sánchez
 I.B. Avenida de los Toreros

PROBLEMA N° 5 (Boletín n° 31)

Dibujado el triángulo de vértices A, B, C , se pide determinar gráficamente el punto P tal que:

$$\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}$$

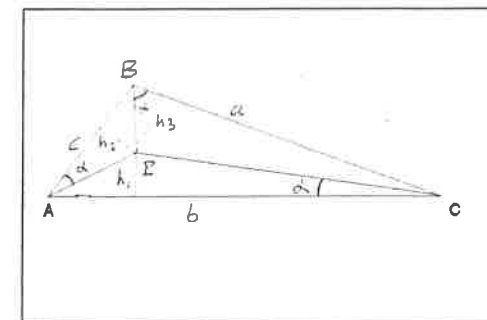
Expresar una función trigonométrica de este ángulo \widehat{PAB} , mediante funciones trigonométricas de A, B y C .

Solución:

$$a) \widehat{PAC} + \widehat{PCA} + \widehat{APC} = 180^\circ$$

$$A - \alpha + \alpha + \widehat{APC} = 180^\circ, \widehat{APC} = 180^\circ - A$$

De análoga forma se llega a:
 $\widehat{APB} = 180^\circ - B$ y $\widehat{BPC} = 180^\circ - C$



Por lo tanto, para hallar gráficamente el punto P , basta obtener la intersección de dos de los tres arcos capaces de ángulos \widehat{APC} , \widehat{APB} y \widehat{BPC} relativos a los segmentos b, c y a , respectivamente.

b)

$$S = \frac{1}{2} bcsenA = \frac{1}{2} bh_1 + \frac{1}{2} ch_2 + \frac{1}{2} ah_3 = \frac{1}{2} b\overline{PC}sen\alpha + \frac{1}{2} c\overline{PA}sen\alpha + \frac{1}{2} a\overline{PB}sen\alpha \quad (1)$$

Aplicando el teorema de los senos resulta:

$$\frac{\overline{PC}}{sen\alpha} = \frac{a}{sen(180^\circ - C)}, \overline{PC} = \frac{a sen\alpha}{senC}, \text{ y como } a = \frac{c senA}{senC}, \overline{PC} = \frac{c senA sen\alpha}{sen^2 C}$$

Volviendo a aplicar el teorema de los senos:

$$\frac{\overline{PA}}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}(180-A)}, \quad \overline{PA} = \frac{b \text{ sen}\alpha}{\text{sen}A} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{PB}}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{\text{sen}(180-B)}, \quad \overline{PB} = \frac{c \text{ sen}\alpha}{\text{sen}B}$$

Sustituyendo en (1) resulta:

$$b c \text{ sen}A = b \frac{c \text{ sen}A \text{ sen}\alpha}{\text{sen}^2 C} \text{ sen}\alpha + c \frac{b \text{ sen}\alpha}{\text{sen}A} \text{ sen}\alpha + a \frac{c \text{ sen}\alpha}{\text{sen}B} \text{ sen}\alpha,$$

$$b c \text{ sen}A = \frac{bc \text{ sen}A}{\text{sen}^2 C} \text{ sen}^2 \alpha + \frac{bc}{\text{sen}A} \text{ sen}^2 \alpha + \frac{b \text{ sen}A}{\text{sen}B} \frac{c \text{ sen}\alpha}{\text{sen}B} \text{ sen}\alpha,$$

$$1 = \left(\frac{1}{\text{sen}^2 C} + \frac{1}{\text{sen}^2 A} + \frac{1}{\text{sen}^2 B} \right) \text{ sen}^2 \alpha,$$

$$\frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2 A} + \frac{1}{\text{sen}^2 B} + \frac{1}{\text{sen}^2 C}$$

Equipo "I.B. Avenida de los Toreros"

PROBLEMA 2º (Boletín nº 34)

Escrito el triángulo aritmético

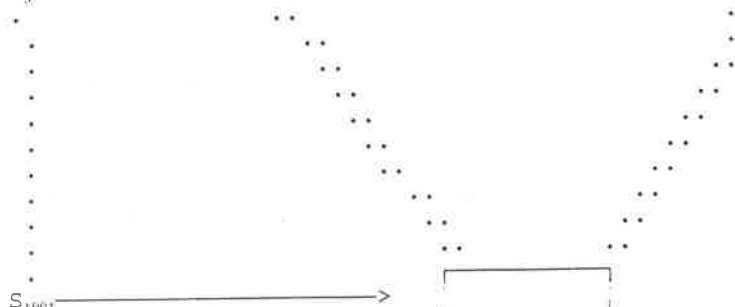
0	1	2	3	4	1991	1992	1993
	1	3	5	7	3983	3985	
		4	8	12	7968		
							

donde cada número es igual a la suma de los dos que tiene encima (como es evidente, cada fila consta de un número menos que la anterior y por tanto la última fila estará formada por un único número), razonar que el último número es múltiplo de 1993.

Solución:

Sea S_i la suma de todos los números de la fila i ésima.

S_1 →	0	1	2	3	4	1991	1992	1993
S_2 →		1	3	5	7	3983	3985	
S_3 →			4	8	12	7968		



$$S_2 = 2S_1 - (0+1993), \text{ pero como } S_1 = \frac{0+1993}{2} \cdot 1994, \quad 0+1993 = \frac{2S_1}{1994},$$

$$\text{luego } S_2 = 2S_1 - \frac{2S_1}{1994} = 2S_1 \left(1 - \frac{1}{1994}\right) = 2S_1 \frac{1993}{1994}$$

De análoga forma:

$$S_3 = 2S_2 \frac{1992}{1993}; S_3 = 2 \left(2S_1 \frac{1993}{1994}\right) \frac{1992}{1993} = 2^2 S_1 \frac{1992}{1994}$$

En definitiva:

$$S_{1994} = 2^{1993} S_1 \frac{1}{1994} = 2^{1993} \left(\frac{0+1993}{2} \cdot 1994\right) \frac{1}{1994} = 2^{1992} \cdot 1993 = \frac{2^{1992}}{1993} \text{ c.q.d.}$$

Daniel Almagro Molina
I. B. Avda. de los Toreros

Otra solución:

A_1	A_2	A_3	A_4	$A_5 \dots$
$A_1 + A_2$	$A_2 + A_3$	$A_3 + A_4$	$A_4 + A_5 \dots$	
$A_1 + 2A_2 + A_3$	$A_2 + 2A_3 + A_4$	$A_3 + 2A_4 + A_5 \dots$		
	$A_1 + 3A_2 + 3A_3 + A_4$	$A_2 + 3A_3 + 3A_4 + A_5 \dots$		
		$A_1 + 4A_2 + 6A_3 + 4A_4 + A_5 \dots$		

El último número es, por tanto,

$$\binom{1993}{0} A_1 + \binom{1993}{1} A_2 + \binom{1993}{2} A_3 + \dots + \binom{1993}{1992} A_{1993} + \binom{1993}{1993} A_{1994} =$$

$$= \binom{1993}{0} 0 + \binom{1993}{1} 1 + \binom{1993}{2} 2 + \binom{1993}{3} 3 + \dots + \binom{1993}{1992} 1992 + \binom{1993}{1993} 1993 =$$

$$= 0 + 1993 + 1993 \binom{1992}{1} + 1993 \binom{1992}{2} + \dots + \binom{1992}{1991} 1992 + \binom{1992}{1992} 1993 =$$

$$= 1993 \left[1 + \binom{1992}{1} + \binom{1992}{2} + \dots + \binom{1992}{1992} \right] = 1993 \cdot 2^{1992} = \frac{2^{1993}}{1993}$$

Cristina Martínez de Bartolomé Izquierdo
I. B. Avda. de los Toreros

PROBLEMA N° 1 (Boletín n° 34)

En una reunión hay 201 personas de cinco nacionalidades distintas. Se sabe que en cada grupo de seis, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos cinco personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

Solución.

El tercer dato del enunciado implica que en la reunión no puede haber más de cinco edades diferentes, porque si no, se podría formar un grupo de seis personas sin que se repita la edad de las mismas.

Supongamos que hay cinco edades entre los asistentes, y supongamos que las nacionalidades, edades y sexos están repartidos homogéneamente como se indica en el cuadro.

		N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	N ₅
E ₁	M	4	4	4	4	4
	H	4	4	4	4	4
E ₂		4	4	4	4	4
		4	4	4	4	4
E ₃		4	4	4	4	4
		4	4	4	4	4
E ₄		4	4	4	4	4
		4	4	4	4	4
E ₅		4	4	4	4	5
		4	4	4	4	4

Vemos que en este caso -el peor de todos-, al distribuir a las personas en las 50 celdas, tiene que haber necesariamente una en la que haya 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

A partir del estudio de este caso, la solución para los demás es inmediata.

Oscar Ayo Martín
I. B. Avenida de los Toreros

PROBLEMA N°4 (Boletín n° 34)

Demostrar que todo número primo p distinto de 2 y de 5 tiene infinitos múltiplos escritos a base de unos (es decir, del tipo 11111.....1).

Solución:

Como sólo hay p clases de restos módulo p, entre las potencias 10⁰, 10¹, 10²,....., y 10^{p-1}, tiene que haber al menos dos que pertenezcan a la misma clase (sólo consideramos p potencias porque la clase 0 no puede aparecer ya que una potencia de 10 no puede ser divisible por un número primo distinto de 2 y de 5). Llamémos a estas potencias 10^a y 10^b. Entonces:

$$10^a = p \cdot q + r$$

$$10^b = p \cdot q' + r$$

Luego $10^b = p \cdot q' + 10^a - p \cdot q$; $10^b - 10^a = p(q' - q)$; $10^a(10^k - 1) = p(q' - q)$; ($k = b - a$; $1 \leq k < p$).
Como p es distinto de 2 y de 5, p es primo con 10^a, por tanto $p | (10^k - 1)$: $p | 9 \cdot 111...1$

Si $p \neq 3$, entonces $p | 111...1$, y si $p = 3$, existe el número 111, que es múltiplo de 3.

Con lo anterior queda demostrado que existe al menos un múltiplo que cumple las condiciones exigidas.

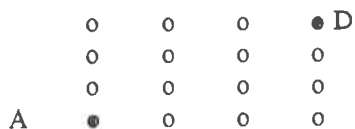
Pero si el número M formado por k unos es múltiplo de p, también lo será el número $M' = M \cdot 10^k + M = M(10^k + 1)$, y el número $M'' = M'(10^{2k} + 1)$, y así sucesivamente.

Se obtiene así la sucesión de números M, M', M'',....., que son todos múltiplos de p escritos a base de unos.

Equipo "I. B. Avenida de los Toreros"

PROBLEMA 5° (Boletín nº 34)

Se dan dieciséis puntos formando una cuadrícula como en la figura:



De ellos se han destacado A y D. Se pide fijar de todos los modos posibles otros dos puntos, B y C, con la condición de que las seis distancias determinadas por los cuatro puntos sean distintas. En el conjunto de cuaternas, estudiar:

- 1°. Cuántas figuras de cuatro puntos existen con la condición del enunciado.
- 2°. Cuántas de ellas son geoméricamente distintas, es decir, no deducibles una de otra por una transformación de igualdad.
- 3°. Si cada punto se designa por un par de enteros (x_i, y_i) , razonar que la suma $|x_i - x_j| + |y_i - y_j|$, extendida a los seis pares AB, AC, AD, BC, BD, CD, es constante.

Solución:

Posibles distancias: $1, 2, 3, \sqrt{1^2+1^2}, \sqrt{1^2+2^2}, \sqrt{1^2+3^2}, \sqrt{2^2+2^2}, \sqrt{2^2+3^2}$
 $1, 2, 3, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{8}, \sqrt{13}$

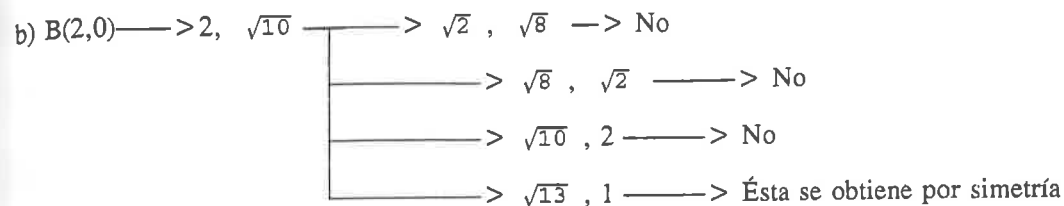
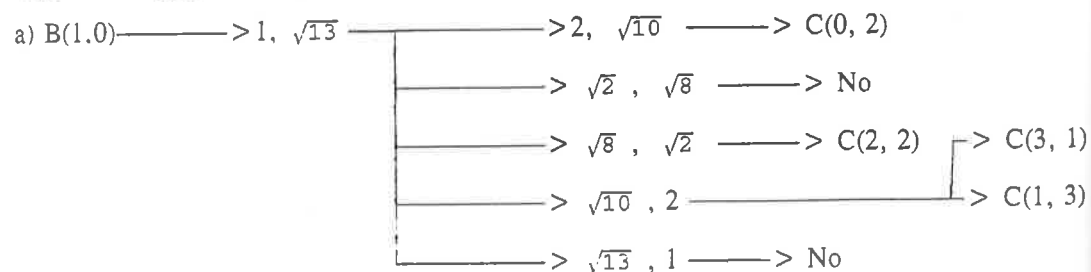
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
Posibles distancias de B a A	1	2	3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$
Correspondientes de B a D	$\sqrt{13}$	$\sqrt{10}$	3	$\sqrt{8}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	2	1
Coordenadas correspondientes de b	$\begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,0 \\ 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3,0 \\ 0,3 \end{pmatrix}$	(1,1)	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 1,2 \end{pmatrix}$	(2,2)	$\begin{pmatrix} 3,1 \\ 1,3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3,2 \\ 2,3 \end{pmatrix}$

Las posibilidades 3ª y 5ª no sirven porque habría dos distancias iguales.

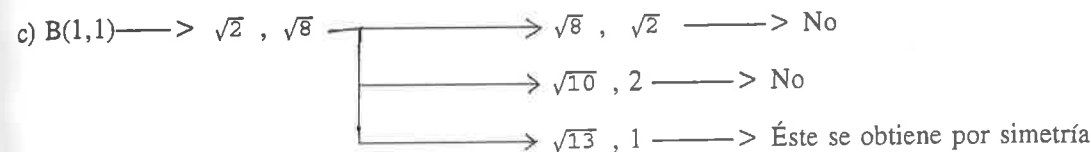
Apartado 2°:

Las dos simetrías axiales correspondientes a las dos diagonales permiten reducir el estudio a tres posiciones de B: (1,0), (2,0) y (1,1).

Veamos ahora donde se puede colocar C una vez que fijamos B:



del cuarto caso del ap. a).



del tercer caso del ap. a).

Conclusión: sólo hay 4 figuras diferentes:

- 1.- A (0, 0), B(1, 0), C(0, 2), D(3, 3)
- 2.- A (0, 0), B(1, 0), C(2, 2), D(3, 3)
- 3.- A (0, 0), B(1, 0), C(3, 1), D(3, 3)
- 4.- A (0, 0), B(1, 0), C(1, 3), D(3, 3)

Apartado 1°:

Aplicando las dos simetrías mencionadas, por cada una de estas cuatro figuras, obtenemos tres más. En total hay 16 maneras distintas de fijar los puntos con la condición exigida.

Apartado 3°:

Consideremos los vectores \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} , \vec{BC} , \vec{BD} , \vec{CD} y el vector suma:

$$\vec{S} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{BC} + \vec{BD} + \vec{CD} = (\vec{AB} + \vec{BD}) + (\vec{AC} + \vec{CD}) + \vec{AD} + \vec{BC} = (3\vec{i} + 3\vec{j}) + (3\vec{i} + 3\vec{j}) + (3\vec{i} + 3\vec{j}) + (m\vec{i} + n\vec{j}) = (9\vec{i} + 9\vec{j}) + m\vec{i} + n\vec{j}$$

La suma pedida es $9+9 + |m| + |n|$.

Observando las cuatro figuras base del apartado 2 vemos que $|m| + |n| = 3$; además esta suma se mantiene al realizar las simetrías del apartado 1, por tanto la suma pedida es constante e igual a 21.

PROBLEMA Nº 6 DEL BOLETIN 34

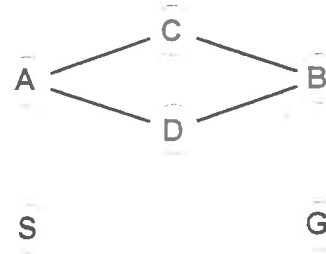
Una maquina de juego de un casino tiene una pantalla en la que se ofrece un esquema como el de la figura. Para comenzar el juego aparece una bola en el punto S

A cada impulso que recibe del jugador, esa bola se mueve hasta uno de los circulos inmediatos, con la misma probabilidad para cada uno de ellos. La partida termina cuando ocurre el primero de los dos sucesos siguientes:

- 1.- La bola vuelve a S, y entonces el jugador pierde.
- 2.- La bola llega a G, y entonces el jugador gana.

Se pide:

- a) Cuál es la probabilidad de que gane el jugador
- b) Cuál es la duración media de las partidas.



a) Observamos que cuando la bola se encuentra en una de las casillas C o D, por la simetria de la figura, la probabilidad de ganar es igual a la de perder, siendo entonces ambas 1/2. Por lo tanto, si

$$S_A = \text{llegar la bola a C o D} \Rightarrow P(S_A) = 2/3$$

$$S_B = \text{ganar la partida cuando la bola está en C o D} \Rightarrow P(S_B) = 1/2$$

$$P_{\text{ganar}} = P(S_A \cap S_B) = 2/3 * 1/2 = 1/3$$

b) Del análisis del juego se deduce que acabara en un número par de movimientos. La duración media entonces será

$$D = 2 \times P_2 + 4 \times P_4 + 6 \times P_6 + \dots \quad (1)$$

siendo P_i la probabilidad de que acabe el juego en i impulsos.

Calculemos ahora las anteriores probabilidades:

Al iniciar el juego, la bola irá necesariamente a A. De ahí puede volver a S, acabándose juego en 2 movimientos ($P=1/3$), o desplazarse a C o D.

Cada vez que esté en C o D, irá necesariamente a A o B. Entonces pueden ocurrir 2 cosas: en el siguiente impulso acaba el juego ($P=1/3$) o vuelve a C o D ($P=2/3$), volviéndose a repetir el proceso.

Por lo tanto si:

$$S_I = \text{llegar a CD en la segunda tirada} \Rightarrow P(S_I) = 2/3$$

$$S_A = \text{estando en CD, volver a CD tras 2 desplazamientos} \Rightarrow P(S_A) = 2/3$$

$$S_B = \text{estando en CD, terminar el juego tras 2 desplazamientos} \Rightarrow P(S_B) = 1/3$$

$$P_2 = 1/3$$

$$P_4 = P(S_I \cap S_B) = 2/3 * 1/3$$

$$P_5 = P(S_I \cap S_A \cap S_B) = 2/3 * 2/3 * 1/3$$

$$P_6 = P(S_I \cap S_A \cap S_A \cap S_B) = 2/3 * 2/3 * 2/3 * 1/3$$

Sustituyendo en (1) queda:

$$D = 2 \times P_2 + 4 \times P_4 + 6 \times P_6 + \dots = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 4 + \dots =$$

$$\left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right] + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots \right] + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots \right] + \dots =$$

$$\frac{2}{\frac{1}{3}} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\frac{1}{3}} + \dots = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6 \text{ desplazamientos.}$$

JOSÉ TOMÁS BAEZA OLIVA
I.B. AVDA. DE LOS TOREROS - COU

Se adjunta un programa escrito en QBASIC donde se puede comprobar experimentalmente el problema mediante el cálculo de frecuencias relativas para el número deseado de sucesos.

```
CLS :RANDOMIZE TIMER
INPUT "Número de partidas:".n
FOR i = 1 TO n
a = 1
WHILE a <> 0 AND a <> 4
conta2 = conta2 + 1
tir = INT(RND * 3)
tir2 = INT(RND * 2)
IF a = 1 THEN
IF tir = 0 THEN a = 0 ELSE a = 2
GOTO 10
END IF
IF a = 2 THEN
IF tir2 = 0 THEN a = 3 ELSE a = 1
GOTO 10
END IF
IF a = 3 THEN
IF tir = 0 THEN a = 4 ELSE a = 2
GOTO 10
END IF
10 WEND
IF a = 4 THEN conta = conta + 1
LOCATE 9,3: PRINT "Número de partidas:". i
LOCATE 10,3: PRINT "Frecuencia relativa:". conta / i
LOCATE 11,3: PRINT "Numero medio de tiradas por partida: ".conta2 / i + 1
NEXT
```

El programa se probó con 300.000 experimentos resultando los números calculados teóricamente con un error menor que una centésima.

¹ Se le suma la tirada obligatoria de S a A, que no está contabilizada al suponer inicialmente a=1 en vez de 0.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(senalar con una X los que interesen)

3	4	10	26	31
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
32	33	34	35	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

Envío adjuntos sellos para el franqueo (52 pta por número para Madrid - capital y 78 pta por número para el resto de España).

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27 y 29 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matematicas
Aptdo. 9479 - 28.080 -MADRID.

INDICE DE LOS ARTÍCULOS PUBLICADOS
EN LOS 35 PRIMEROS NÚMEROS
DE ESTE BOLETÍN (1983-93)

AUTORES y Titulos	Boletín, pág. y año.
AGUADO MUÑOZ, Ricardo. <i>La Informática integrada en el Bachillerato como E.A.T.P. ...</i>	1 83
<i>Generación aleatoria de ejercicios ...</i>	14 49 87
AGUADO MUÑOZ, Ricardo y BLANCO, Agustín. <i>Las urnas... ¿ Están predestinadas ? ...</i>	6 43 85
AIZPÚN LÓPEZ, Alberto. <i>La didáctica de la Matemática que yo he vivido</i>	13 47 87
ARREGUI, Joaquín. <i>Don Francisco Botella Raduán, sacerdote y catedrático ...</i>	17 27 88
ALDEGUER CARRILLO, José. <i>Propiedades de los cuaternios de Hamilton ...</i>	31 75 92
ALVAREZ HERRERO, Fernando y RUIZ MERINO, Andrés. <i>El producto escalar en el Bachillerato ...</i>	16 41 88
ALVARO, Isabel. <i>Puntos racionales en curvas algebraicas ..</i>	7 33 85
ARROYO, Millán. <i>Ordenadores y Educación ..</i>	6 9 85
AVILÉS SÁNCHEZ, Manuel (ver también siguientes). <i>Programa sobre lógica trivalente ...</i>	8 55 86
AVILÉS SÁNCHEZ, M. y MARTÍNEZ SANZ, A. <i>Resolución de sistemas de ecuaciones lineales</i>	20 67 89
<i>Estudio del volumen de la hiperesfera ...</i>	23 59 90
AVILÉS SÁNCHEZ, M. y LUCAS PADÍN, Paz <i>Graficación de superficies por ordenador .</i>	29 25 91
BARRIO GUTIÉRREZ, José. <i>Las Matemáticas y los filósofos ..</i>	9 21 86
BLANCO, Agustín (ver AGUADO MUÑOZ)	

AUTORES y Titulos	Boletín, pág. y año		
BONNIN de GÓNGORA, Josué, GARCÍA SESTAFE, J. Vicente y RODRIGUEZ CALDERÓN, Carlos M. Espacios fractales y una estructura cosmológica topológica-fractal 32	21	92	
BUJANDA JÁUREGUI, Maria Paz. Los juegos en la Matemática de la E.G.B. 18	49	88	
CALVIÑO CASTELO, Santiago. (ver siguiente). Nota sobre el concepto de limite y el axioma de elección en el Bachillerato ... 10	65	86	
El axioma de elección y otras formulaciones equivalentes ... 13	77	87	
CALVIÑO CASTELO, Santiago y REVILLA JIMÉNEZ, F. Nota sobre la integración por partes 19	63	88	
CARBALLIDO QUESADA, José Francisco. Sobre la resolución de triángulos 2	59	83	
El laboratorio de Matemáticas 4	53	84	
Gráfica de una función 6	41	85	
El infinito: breve recorrido histórico 7	25	85	
COLERA JIMÉNEZ, José. Matemáticas electorales 2	41	83	
DÁVILA OCAMPOS, Pablo. Sobre progresiones aritméticas 11	79	86	
DIAZ CALZÓN, Pilar. Por una didáctica de participación en EGB y BUP 1		83	
ETAYO MIQUEO, José Javier. Mascheroni y la Geometría del compas 2	35	83	
La evoluta y el par de banderillas 4	37	84	
El cubo y la cosa igual al número 11	7	86	
¡ Ojo a la prestidigitación matemática ! 13	71	87	
Don Enrique Linés Escardó 19	11	88	
ETAYO GORDEJUELA, Fernando, GARCÍA LOPEZ, M ^a Presentación y ROMO SANTOS, Concepción. Interpretación geométrica de la teoría de ideales: La localización. 26	51	90	
ESCRIBANO RÓDENAS, María del Carmen. Desarrollos asintóticos 20	53	89	
ESTEVE AROLAS, Rodolfo. Competiciones matemáticas en China 10	61	86	

AUTORES y Titulos	Boletín, pág. y año		
FERNÁNDEZ BIARGE, Julio. Educación e Informática 4	27	84	
Ejercicios críticos sobre algoritmos 6	23	85	
Evaluación 7	13	85	
Evaluaciones en Matemáticas 8	25	86	
Tender a infinito 11	17	86	
¿ Fracaso escolar ? ¿ Fracaso docente ? 12	49	87	
Inteligencia Artificial 15	27	87	
¿ Geometría del espacio ? 21	17	89	
En torno al logotipo de la XXVIII O.M.E. 30	23	92	
Algunas propiedades de las cúbicas 33	21	93	
Algunas propiedades de las cúbicas circulares. 34	21	93	
FERNÁNDEZ Y FERNÁNDEZ ARROYO, Fidel. Conjeturas de Goldbach 9	33	86	
FERNÁNDEZ VIÑA, José Antonio. Un concepto de diferenciabilidad débil 18	11	88	
Sobre los sistemas de ecuaciones no lineales . 20	41	89	
FRAILE OVEJERO, Vicente. Generalización de un problema de Apolonio ... 15	55	87	
Un problema de Crespo Landaluce 18	25	88	
GARCÍA, Benjamín. El juego de la lógica 16	47	88	
GARCÍA LÓPEZ, María Presentación (ver ETAYO GORDEJUELA)			
GARCÍA PÉREZ, Pedro L. Sobre los fundamentos geométricos de las teorías físicas ... 13	11	87	
GARCÍA SESTAFE, José V. (ver también BONNIN DE GÓNGORA) Un método de recurrencia para el ajuste de la curva logística ... 20	45	89	
El método de la pendiente para el ajuste de la curva logística ... 21	47	89	
Una aplicación del teorema de Cayley-Hamilton 22	31	89	
Una aplicación de los números índices 23	19	90	
El teorema maestro de Mac-Mahon 26	33	90	
El permanente de una matriz 27	25	91	
Algunas generalizaciones del modelo logístico 35	25	93	
GATEÑO, Caleb. Una visión práctica para España, en relación con el problema de la enseñanza de las Matemáticas ... 22	19	89	

AUTORES y Titulos	Boletín, pág. y año		
GÓMEZ REY, Joaquín.			
Geometría del tablero de Ajedrez	2	47	83
Programas de combinatoria en lenguaje BASIC ..	6	37	85
Una visión de la Fotografía con óptica matemática ...	7	34	85
Computación paralela	12	59	87
GONZÁLEZ DEL MAZO, Anastasio.			
Las Matemáticas en el Bachillerato suizo	6	67	85
GONZÁLEZ PINTADO, J.A. (ver LINARES CÁCERES)			
GUZMÁN OZÁMIZ, Miguel de.			
Juegos matemáticos	2	23	83
El papel de la Matemática en el proceso educativo inicial ...	6	53	85
Juegos matemáticos en la enseñanza	10	25	86
El sentir cambiante de los matemáticos modernos sobre el quehacer matemático ...	12	11	87
El infinito matemático ¿ una apertura del hombre hacia lo trascendente ? ...	25	15	90
HERRERO PALLARDO, Salvador.			
Actividades matemáticas en el Instituto "Maestro Juan de Avila" de Ciudad Real" ...	8	15	86
Sobre la regla de tres	30	59	92
HIGUERA GARRIDO, Fidel.			
Una axiomática para el plano	24	51	90
Introducción de coordenadas en el plano ..	29	55	91
"HIXEM".			
Meditación sobre el parámetro	11	45	86
A vueltas con Casanova	12	23	87
Comentario de textos	17	31	88
KAYE, Alan G.			
La educación secundaria y la enseñanza de las Matemáticas en Inglaterra ...	5	51	85
LINARES CÁCERES, Juan y GONZÁLEZ PINTADO, J. A.			
Un problema "globalizador"	4	49	84
LINÉS ESCARDÓ, Enrique.			
En el aniversario de Euler	3	7	84
Matemáticos franceses a principios del XVII ..	10	13	86
Valores estéticos en la Matemática	16	11	88
LISÓN, Fernando.			
Los grupos del triángulo y del rectángulo con LOGO ...	23	41	90

AUTORES y Titulos	Boletín, pág. y año		
"LOBO, J."			
Anecdótico. Sobre Fermat	16	63	88
Anecdótico. La apuesta Polya-Weyl	17	61	88
Anecdótico. El problema $3x+1$	18	57	88
El último teorema de Fermat	18	59	88
LÓPEZ DE ELORRIAGA, Francisco Javier.			
José Francisco Carballido Quesada	19	3	88
LORENZO MIRANDA, Francisco.			
Costrucciones con la regla de un solo borde: Problema de Steiner ...	9	37	86
LUCAS PADÍN, Paz. (ver también AVILÉS SÁNCHEZ)			
Estudio de los programas de Matemáticas de Bachillerato de distintos países ...	4	59	84
Las Matemáticas en el bachillerato italiano ..	5	76	85
MANDLY MANSO, Arturo.			
Diálogo entre Petra y Blanca, dos ecuaciones..	17	63	88
MARTÍNEZ PÉREZ, Mariano.			
La curiosa historia de ...:			
I. Un pequeño error de importancia	18	61	88
II. Los cerebros de los profesores de Matemáticas ...	18	68	88
III. Un excelente consejo pedagógico	18	70	88
IV. Los calzoncillos (con perdón) de Möbius ...	19	59	88
V. La dignidad de los diplomáticos, puesta en entredicho ...	19	61	88
MARTÍNEZ SÁNCHEZ, José Manuel.			
Cuadrados mágicos con números primos	3	31	84
Sobre una conjetura referente a la auto-ortogonalidad de C. L. C.	8	73	86
Mezclas aparentemente aleatorias	12	31	87
MARTÍNEZ SANZ, A. y AVILÉS SÁNCHEZ, M. (Ver AVILÉS SÁNCHEZ)			
MONTESINOS AMILIBIA, José María.			
Caleidoscopios en la Alhambra	13	29	87
OCHOA MÉLIDA, Juan.			
Sobre la Olimpiada Matemática Internacional ..	1		83
Sugerencia	3	63	84
Problema en el billar circular	19	55	88
La quinta del 45 en la "Puig Adam"	23	5	90
OLIVEROS ALONSO, Fidel.			
El problema semanal	10	45	86
Cálculo de logaritmos	16	35	88

AUTORES y Titulos	Boletín, pág. y año		
ORTIZ BERROCAL, Luis. Palabras sobre don Pedro Puig Adam	20	29	89
ORTIZ VALLEJO, María. Evolución de los contenidos de Matemáticas ...	28	71	91
La Geometría de la Inversión	35	51	93
OUTERELO, Enrique. Modelos matemáticos de fenómenos discontinuos	20	37	89
PACIOS JIMÉNEZ, María Luisa. Un programa de Matemáticas preuniversitarias: El Bachillerato Internacional ...	7	75	85
PACHECO CASTELAO, José Miguel. Ecología del profesorado o la Adminis- tración no aplica las Matemáticas ...	1		83
Algunas cuestiones didácticas acerca de ecuaciones diferenciales con desfase ...	14	43	87
PALANCAR ALMAZÁN, Fernando. Algoritmo de obtención del término general de una sucesión ...	1		83
Matemáticas electorales	8	63	86
PAREJA FLORES, Cristóbal. Ordenación mediante árboles binarios	22	53	89
PAREJA FLORES, Cristóbal y ROANES LOZANO, E. Editor de archivos y de líneas para REDUCE ...	22	39	89
PASCUAL IBARRA, José R. Alocución en la primera reunión de la Sociedad	1		83
Reflexión en torno a un problema de concurso .	2	51	83
Un problema abierto	3	55	84
Apunte biográfico de don Pedro Puig Adam	5	21	85
El cometa Halley	8	21	86
Didáctica de la Matemática	31	16	92
PERALTA, Javier. Resolución gráfica de ecuaciones algebraicas .	18	31	88
Multiplicación de números hipercomplejos . . .	25	29	90
Construcción vectorial de los números hiper- complejos	32	53	92
PIÑERO NAVARRO, Fernando. Programa para el cálculo del rango	10	69	86

AUTORES y Titulos	Boletín, pág. y año		
PUIG ADAM, Pedro. El papel de lo concreto en la Matemática	5	13	85
REVILLA JIMÉNEZ, F. (ver CALVIÑO CASTELO)			
RICO, Mercedes. Suma de cuartas potencias	4	69	84
RIOS GARCÍA, Sixto. Rasgos humanos de don Esteban Terradas	3	19	84
ROANES LOZANO, Eugenio. (ver también PAREJA FLORES y siguientes) Teoremas de Pappus-Guldin (via Geometría sintética)...	7	41	85
El problema de Apolonio	14	13	87
"Precisión indefinida" y Matemática Elemental	31	33	92
ROANES MACÍAS, Eugenio (ver siguiente). Reticulos en la Matemática Elemental	4	41	84
Estructura de magnitud escalar	11	51	86
Ajuste de proporcionalidades experimentales ..	16	57	88
Software para matemática computacional	22	35	89
ROANES MACÍAS, E y ROANES LOZANO, E. Grupo del cuadrado con LOGO	8	43	86
Simulación LOGO del grupo equiforme	9	45	86
Generación de los 17 grupos de simetría del plano: Simulación informática de sus teselaciones	27	53	91
Simulación informática para el aprendizaje de la estructura operatoria de la raíz cuadrada .	30	31	92
Evaluación de simplicidad y exactitud de dos construcciones de cadenas de Steiner	33	37	93
Desarrollo de algunas funciones para polino- mios en DERIVE	34	39	93
Demostración automática de un teorema sobre tres circunferencias concurrentes	34	55	93
RODRIGUEZ CALDERÓN, Carlos M. (ver BONNIN de GÓNGORA)			
RODRIGUEZ SALINAS, Baltasar. Así nace la Matemática	15	19	87
Julio Rey Pastor, el maestro	20	19	89
RODRIGUEZ VIDAL, Rafael. Poema problemático (o problema poemático) ...	11	15	86
Don Zoel García de Galdeano, maestro y apostol del progreso matemático español ...	14	9	87
Matemáticas y filosofías del espacio	24	23	90
La divisibilidad como relación de orden	28	21	91

AUTORES y Titulos	Boletín, pág. y año		
ROMERO MÁRQUEZ, Juan Bosco.			
Diversas formas de estudiar la semejanza entre triángulos en la Geometría elemental ...	23	51	90
Unas identidades algebraicas elementales y su significado geométrico ...	25	45	90
Acotaciones intermedias entre la media geométrica y la aritmética ...	28	59	91
Las funciones simétricas generalizadas y la función permanente ...	29	17	91
Semejanza baricéntrica entre dos triángulos homotéticos ...	30	51	92
Simetría plana en la clase: Grupos y Geometría	31	65	92
Unas notas al teorema de Desargues y Pappus ..	32	43	92
Mosaicos y otros entretenimientos en clase de Matemáticas ...	33	55	93
ROMO SANTOS, Concepción. (ver también ETAYO GORDEJUELA)			
Interpretación geométrica de la extensión y contracción de ideales ...	23	31	90
El Algebra Conmutativa en la Geometría Algebraica actual ...	28	37	91
Libros de Matemáticas en la exposición "Las Edades del Hombre" ...	30	41	92
Historia de la Cartografía Española ..	34	47	93
RUIZ, J.			
El rango de una matriz. Demostración elemental	25	71	90
RUIZ MERINO, Andrés (ver también ALVAREZ HERRERO).			
La probabilidad en experimentos compuestos: Una formulación ...	17	49	88
SÁNCHEZ SÁNCHEZ, Juan Miguel.			
Un día diferente ...	28	55	91
SANZ GARCÍA, María Agripina.			
Una aplicación práctica: Medida del radio de la Tierra ...	14	57	87
Calendarios matemáticos ..	19	68	88
SUAREZ FERNÁNDEZ, Manuel.			
Sobre Análisis No Estandar.			
I. Un poco de historia ...	24	43	90
II. Axiomas y primeros teoremas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel...	25	55	90
III. Primeras ideas no estandar ...	26	17	90
IV. Unos principios no estandar ...	29	37	91
V. Definiciones no estandar de conceptos básicos de análisis infinitesimal (I)..	31	53	92
VI. Id.id. (II) ...	35	35	93

AUTORES y Titulos	Boletín, pág. y año		
TORROJA, José María.			
Alfonso el Sabio en el Renacimiento de la Astronomía en la Edad Media ...	4	11	84
VELAZQUEZ, Enrique.			
Cinco notas sobre metodología de la enseñanza de la Matemática en Bachillerato...	1		83
Léxico matemático y léxico político: Una intersección ...	3	67	84
Soneto ...	18	30	88
VILLACORTA MAS, Luis.			
Un ejemplo de actividad para ayudar a los alumnos a hacer Matemáticas ...	7	61	85
Sobre ordenamientos de rectas en el plano	11	33	86
Partición de un triángulo en triángulos semejantes ...	15	43	87
El teorema de Pick ...	22	45	89
Lema de Burnside .	32	33	92
YELA GRANIZO, Mariano.			
Pedro Puig Adam, maestro .	5	37	85