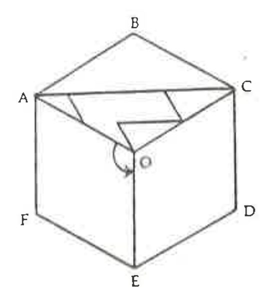
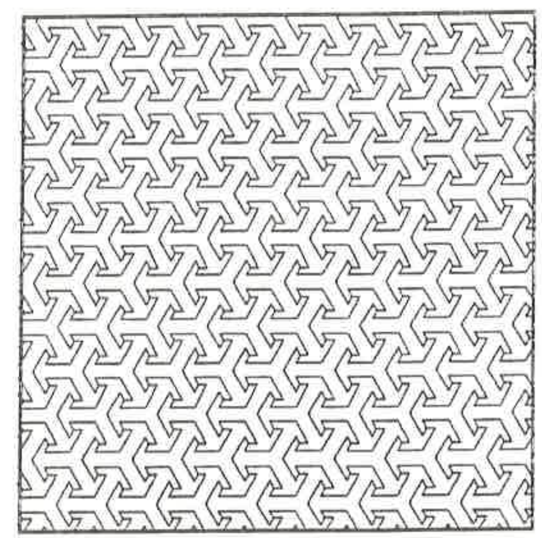
SOCIEDAD "PUIG ADAM" de profesores de Matemáticas





Boletín núm. 35
Octubre de 1993

BOLETIN DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM"
DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Octubre de 1993 n^o 35 (1993-94)

- Toda la correspondencia deberá dirigirse al

Apartado n^o 9479
28.080 -- MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de J. Fernández Biarge

- La portada recoge una figura del libro de los profesores Roanes, cuya reseña puede verse en este número.

INDICE Pág

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

Jose Vicente García Sestafe

Vicepresidente por Madrid:

Jose Manuel Martínez Sánchez

Vicepresidente por Castilla - La Mancha:

Salvador Herrero Pallardo

Vicepresidente por Castilla - León:

Juan Bosco Romero Márquez

Vocal de actividades y concursos:

Juan Ochoa Mélida

Vocal de relaciones institucionales:

Eugenio Roanes Macías

Vocal de gestión de publicaciones:

Carmen Garcia-Miguel Fernández

Vocal de redacción de publicaciones:

Julio Fernández Biarge

Secretario:

Francisco González Redondo

Vicesecretario:

Enrique Rubiales Camino

Tesorero:

Alberto Aizpún Lopez

Bibliotecario:

Jesus Begona Aina

- - - - - - -

XXXIV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS
Estambul (Turquía) - 1993

La *XXXIV Olimpiada Internacional de Matemáticas* se celebró en Estambul (Turquía) del 13 al 24 de Julio de 1993.

Las pruebas se realizaron los dias 18 y 19 y a ellas concurrieron 450 participantes de 74 paises. Se propusieron, como de costumbre, **seis** problemas, cuyos enunciados pueden verse en la sección de **Problemas Propuestos** de este Boletín.

Cada problema fué calificado con una puntuación de 0 a 7, por lo que cada alumno podía obtener **un máximo de 42 puntos**. Como nuestros lectores podrán apreciar, los ejercicios propuestos fueron realmente dificiles. Por ejemplo, en el tercer problema, 293 participantes obtuvieron 0 puntos. Sólo dos estudiantes (uno de China y otro de Taiwan) alcanzaron los 42 puntos posibles.

Se concedieron **35** medallas de oro (de 30 a 42 puntos), **66** de plata (de 20 a 29) y **97** de bronce (de 11 a 19).

La Delegación española estuvo formada por don Francisco Bellot Rosado, don Juan Manuel Conde Calero y seis estudiantes. Los resultados obtenidos por éstos, son los siguientes:

Antonio ROJAS LEÓN, de Sevilla.
(tercer clasificado en la XXIX OME) **20 puntos (PLATA)**

Alvaro BEGUÉ AGUADO, de Valladolid,
(campeón en la XXIX OME) **11 puntos (BRONCE)**

Miguel CARRIÓN ÁLVAREZ, de Madrid,
(subcampeón en la XXIX OME) **4 puntos**

David SEVILLA GONZÁLEZ, de Madrid.
(cuarto clasificado en la XXIX OME) **3 puntos**

David CASTELL BURGALETA, de Castellón,
(sexto seleccionado en la XXIX OME) **3 puntos**

Antonio SÁNCHEZ ESGUEVILLAS, de Valladolid,
(quinto seleccionado en la XXIX OME) **2 puntos**

Debe destacarse que, desde 1986, ningún estudiante español habia conseguido una medalla de plata en la Olimpiada Internacional. También recordaremos que **David Sevilla** comienza este curso sus estudios de C.O.U. y fué premiado en el Concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad, como alumno de B.U.P. en los años 1991, 1992 y en éste de 1993.

Como es bien sabido, **Alvaro Begué** participó ya el año pasado, recién terminado el B.U.P. en la XXXIII Olimpiada Internacional, celebrada en Moscú, quedando en tercer lugar entre los españoles, y también en la VII Olimpiada Iberoamericana, en Caracas, en la que obtuvo medalla de plata.

Fué destacable la excelente organización de la Olimpiada y la gran calidad de los alojamientos. Los estudiantes fueron alojados en el Complejo de Vacaciones de Atakoy, a orillas del mar de Mármara.

La próxima Olimpiada Internacional de Matemáticas (XXXV) se celebrará en **Hong-Kong, del 8 al 20 de Julio de 1994.**

- - - - - - -

VIII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS
Méjico - 1993

La *8ª Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas* se celebró en México del 12 al 19 de Septiembre de 1993.

Las pruebas se realizaron los dias 14 y 15 de Septiembre y consistieron en la resolución de **seis problemas**, en **dos sesiones de cuatro horas y media** cada una. Como cada problema era puntuado de 0 a 10, podía obtenerse un **máximo de 60 puntos.** Los enunciados pueden verse en la sección de **Problemas Propuestos** de este mismo Boletín.

Se concedieron 7 medallas de oro (de 49 a 55 puntos), **11** de plata (de 37 a 46) y **14** de bronce (de 26 a 36).

La delegación española estuvo formada por doña Maria Gaspar Alonso-Vega y don Francisco Bellot y por los cuatro estudiantes mejor clasificados en la Olimpiada Internacional . Los resultados obtenidos por éstos han sido muy brillantes, como puede verse a continuación:

Antonio ROJAS LEÓN, de Sevilla,
(3º en la XXIX OME. PLATA en la XXXIV OIM) **53 puntos (ORO)**
(segundo en la clasificación general individual;
fué el único que obtuvo 30 puntos en la 2ª sesión)

Alvaro BEGUÉ AGUADO, de Valladolid,
(1º en la XXIX OME, participó en la XXXIII OIM
y obtuvo PLATA en la VII O Iberoamericana.
BRONCE en la XXXIV OIM de este año) **42 puntos (PLATA)**

Miguel CARRIÓN ÁLVAREZ, de Madrid,
(2ª en la XXIX OME) **35 puntos (BRONCE)**

David SEVILLA GONZÁLEZ, de Madrid,
(4º en la XXIX OME; comienza ahora C.O.U.) **23 puntos (mención honorífica)**

La *Copa Puerto Rico*, que premia al pais que más progresa en las dos últimas olimpiadas, fué ganada por Argentina.

La próxima *Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*, que será la 9ª, tendrá lugar en **Fortaleza** (estado de Ceará), **Brasil,** del **17 al 25 de Septiembre de 1994.**

- - - - - - -

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADOS EN ESTE BOLETIN

Concurso de Resolucion de Problemas de nuestra Sociedad

nº (año)	Convocado en Boletín	Crónica/enunciados
I (1983)	1	2 , pág. 11
II (1984)	3	4 , pág. 7
III (1985)	5	7 , pág. 3
IV (1986)	9	10 , pág. 5
V (1987)	13	15 , pág. 3
VI (1988)	17	19 , pág. 17
VII (1989)	20	22 , pág. 9
VIII (1990)	24	26 , pág. 3
IX (1991)	27	29 , pág. 3
X (1992)	30	32 , pág. 3
XI (1993)	33	34 , pág. 9

Olimpiada Matemática Española

nº (año)	1ª fase (distritos)	2ª fase (final)
XX (1984)	- -	3, pág. 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV (1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61
XXVI (1989-90)	24, págs. 11 y 67	25, págs. 9 y 73
XXVII (1990-91)	27, págs. 7 y 77	28, págs. 17 y 79
XXVIII (1991-92)	30, págs. 19 y 67	31, págs. 11 y 81
XXIX (1992-93)	33, págs 5 y 71	34, págs. 17 y 71

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

nº (año) lugar	Crónica y enunciados en boletín nº
I (1986) Colombia	8 , págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12 , págs. 3 y 75
III (1988) Perú	18 , págs. 5 y 73
IV (1989) Cuba	21 , págs. 11 y 63
V (1990) España(Valladolid)	26 , págs. 13 y 73
VI (1991) Argentina	30 , págs. 15 y 65
VII (1992) Venezuela	32 , págs. 11 y 71
VIII (1993) Méjico	35 , págs. 5 y 65

Olimpiada Matemática Internacional

nº (año) lugar	Crónica y enunciados en boletín nº
XXIV (1983) París	2, pág. 15
XXV (1984) Praga	4, pág. 67
XXVI (1985) Helsinski	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986) Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987) Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX (1988) Australia	19, págs. 23 y 77
XXX (1989) Alemania (R.F.A.)	22, págs. 15 y 73
XXXI (1990) China	26, págs. 11 y 71
XXXII (1991) Suecia	29, págs. 11 y 79
XXXIII (1992) Rusia	32, págs. 9 y 69
XXXIV (1993) Turquía	35, págs. 3 y 63

CONVOCATORIA

XXX OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

Organizada por la Real Sociedad Matemática Española bajo el patrocinio de la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio.

NORMAS

1.- PARTICIPANTES. Podrán participar en la 1ª Fase de la XXX Olimpiada Matemática Española los alumnos matriculados en COU, en el último curso de Formación Profesional de segundo grado, 2º curso del 2º Ciclo del Bachillerato Experimental (Reforma),3º curso de B.U.P. y 1º y 2º curso del bachillerato L.O.G.S.E.

2.- INSCRIPCION. Los interesados en participar en esta Olimpiada, solicitarán por escrito su inscripción, bien directamente bien a través del Centro donde realizan sus estudios, indicando en ella el nombre,D.N.I. , dos apellidos, domicilio, teléfono y Centro donde se hallan estudiando especificando la direccion y telefono de dicho centro. Las solicitudes se dirigirán a:

(*)

3.- PRIMERA FASE DEL CONCURSO. En cada Distrito Universitario se celebrarán las primeras eliminatorias, que constarán de dos sesiones (la primera de ellas podrá ser eliminatoria si así lo estima oportuno el Tribunal), en las que se propondrán a los participantes varios problema sobre cuestiones de Matemáticas.

(*)

Por cada Distrito actuará un Tribunal delegado por la Real Sociedad Matemática Española, que calificará los ejercicios y propondrá a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio a los ganadores de Distrito, en número de tres como máximo para la concesión de un premio en metalico cuya cuantía determinara la citada Subdirección General.

4.- SEGUNDA FASE. La segunda fase del concurso se realizará en Madrid (Los concursantes del Distrito de La Laguna realizarán dicha prueba en su distrito) los días 25 y 26 de febrero de 1994, y podrán concurrir a esta fase:

a) Los ganadores de la fase primera.

b) Alumnos que, habiendo participado en alguna edición anterior de la Olimpiada, sean invitados formalmente por la R.S.M.E.

Las pruebas consistirán en la resolución de problemas o cuestiones de Matemáticas, en dos sesiones.

Un tribunal designado por la Real Sociedad Matemática Española, calificará los ejercicios y determinará los ganadores de esta fase nacional. Los primeros clasificados recibirán un premio en metálico cuya cuantía determinará la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio.

5.- Las decisiones de los Tribunales son inapelables.

6.- La participación en la Olimpiada Matemática Española supone la aceptación de estas normas.

(*) Ver NOTA en la página siguiente

XXX OLIMPIADA MATEMATICA ESPANOLA

NOTA:

En cada distrito se harán públicos oportunamente los siguientes datos:

- Fecha límite de recepción de inscripciones.
- Dirección a la que deben remitirse esas inscripciones
- Fechas, horas y locales en los que se realizarán las pruebas de la primera fase.
- Normas especiales, si las hay, para dichas pruebas.

\- - - - - -

EN EL DISTRITO DE MADRID:

- Las solicitudes de inscripción se deberán recibir antes del 23 de Noviembre de 1993.
- Se dirigirán a la atención del

Prof. Jose Javier Etayo Gordejuela
Vicerrectorado de Desarrollo Estatutuario y Claustro
de la Universidad Complutense de Madrid
(Edificio de Alumnos - Ciudad Universitaria)
28.040 - MADRID

- Las pruebas de la **primera fase** tendrán lugar el **viernes 26 de Noviembre a las 16 h 30 m** y el **sabado 27 a las 9 h 30 m** , en el nuevo edificio de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense (Ciudad Universitaria, zona de Paraninfo, junto a la Facultad de Ciencias Químicas)
- La primera prueba no será eliminatoria.

MODELO DE SOLICITUD DE INSCRIPCION

- La inscripción se solicitará enviando un boletín como el del modelo de la página siguiente, sin dejar de consignar en él ninguno de los datos que allí se piden.

XXX OLIMPIADA MATEMATICA 1994

BOLETIN DE INSCRIPCION

Muy Sr. mío,

D. ______________________________

con domicilio en ______________, provincia de ________

calle ______________________, nº ___ , Tfno.________

de _____ años de edad , con D.N.I. __________y alumno de _____
del Colegio/Instituto/ Centro de F.P.______________________
______________de la localidad de ________________
________, Provincia de______________________Calle
__________________________num________

Tfno____________.Pone en su conocimiento que desea tomar parte en la XXIX Olimpiada Matematica,y le solicita ser inscrito en la misma

Fdo______________________

(El solicitante)

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(senalar con una X los que interesen)

3	4	10	26
☐	☐	☐	☐
31	32	33	34
☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo (52 pta por número para Madrid - capital y 78 pta por número para el resto de España).

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29 y 30 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matematicas
Aptdo. 9479 - 28.080 -MADRID.

OLIMPIADAS MATEMATICAS
para alumnos de EGB

Desde hace cuatro años, se celebran competiciones de resolución de problemas de matemáticas, de ámbito nacional, para alumnos de EGB, en las que participan los clasificados para ello en torneos regionales que se vienen llevando a cabo desde hace varios años (hasta nueve en ocasiones). Estas competiciones reciben el nombre general de Olimpiadas.

Las Olimpiadas regionales o provinciales están organizadas por Sociedades de Profesores de Matemáticas o por los Centros de Profesores locales, empleando muy diferentes sistemas para la selección de ganadores y con muy distintos números de participantes. La *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* coordina ahora estas labores y encarga cada año a una Sociedad la organización de la fase nacional, reservada normalmente a los alumnos de 8º de EGB. Hasta ahora se han celebrado cuatro Olimpiadas Nacionales. Damos a continuación la relación de comunidades o provincias que han participado en 1993, con indicación del número de torneos que han llevado a cabo, número de alumnos participantes en ese año y total de los que han competido en todos los torneos, hasta éste.

COMUNIDAD o PROVINCIA	NUMERO DE TORNEOS	Nº PARTICIPANTES EN 1993	Nº PARTICIPANTES EN TOTAL	SELECCIONADOS
Albacete	4	2.940	10.640	2
Alicante	2	122	226	3
Andalucía	9	2.900	34.556	6
Aragón	5	944	5.114	3
Canarias	9	325	2.614	3
Castellón	3	76	252	3
Castilla-León	1	2.575	2.575	3
Extremadura	2	599	1.287	3
Madrid	1	288	288	4
Murcia	4	242	781	2
Navarra	7	104	634	4
Prº. de Andora	4	161	544	4
TOTALES:				
Doce	51	11.276	59.511	40

El número de participantes en algunas provincias puede parecer muy pequeño, pero es debido a que en ocasiones la Olimpiada local comienza con un grupo de alumnos ya seleccionados en otros torneos que no son considerados Olimpiadas.

La fase final de la IV Olimpiada Matemática Nacional para alumnos de EGB, correspondiente a 1993, ha tenido lugar en Andorra y se celebró los dias 18 al 24 de Junio de este año. Participaron 40 alumnos seleccionados en las fases anterores. Damos en las páginas siguientes los enunciados de los problemas que se propusieron en esta competición.

La organización de la V Olimpiada Matemática Nacional está encomendada a la *Sociedad Castellano-Leonesa del Profesorado de Matemáticas* y se celebrará en Burgos, en la última decena del mes de junio de 1994.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA FASE FINAL DE LA V OLIMPIADA MATEMÁTICA PARA ALUMNOS DE 8º DE E.G.B. CELEBRADA EN ANDORRA

1.- Un multimillonario decide dar un donativo de 9.000.000 de ptas. para tres causas humanitarias: "EL SIDA", "EL CANCER" y "EL HAMBRE" . Si dividimos el número de pesetas que da para el Sida entre el número de pesetas que da para el Cancer, el cociente es 2 y el resto es 1, y si hacemos la misma operación entre el donativo del Cancer y el del Hambre el cociente y el resto es el mismo que en el caso anterior. ¿Qué cantidad le corresponde a cada una de las tres causas?

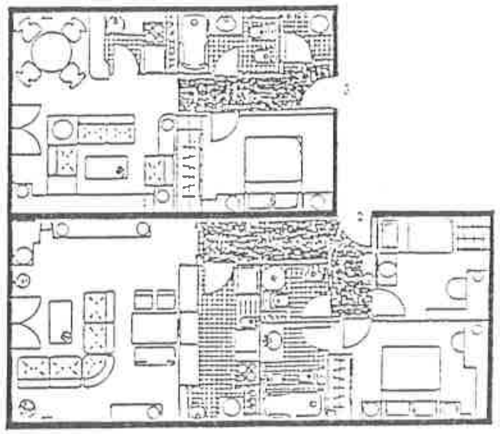
2.- Entre cada una de las siguientes cifras coloca uno de los signos de las cuatro operaciones aritmeticas en los lugares convenientes, para que la expresión siguiente sea una igualdad.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

Hay más de una solución. Encuentra todas las que puedas.

3.- El apartamento Nº 2 del plano tiene 80 m^2 . ¿Cuántos m^2 tiene el apartamento Nº 3 ?

Nota: Los muros no cuentan.

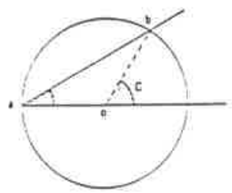


4.- Elena y Marta son hermanas. Viven en la misma casa y van al mismo colegio. Ambas salieron de casa a la misma hora. Elena fue al colegio andando a una media de 4 Km/h y llegó con 5 minutos de retraso. Marta, más rápida, anduvo a 5 Km/h y llegó 10 minutos antes.
¿A qué distancia se encuentra el Colegio?

5.- En un estanque hay tres grifos de entrada de agua. Uno lo llenaria en 6 horas, manando solo., otro lo llenaria en 8 horas y el tercero en 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el estanque, si se abren los tres grifos a la vez? Expresa el resultado en horas y minutos.

6.- ¿Qué relación existe entre los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$?

Razona tu respuesta:



7.- Cada uno de los socios del club V.M. es. o bien veraz (dirá siempre la verdad) o bien mentiroso (responderá siempre una mentira). En mi primera visita al club encontré a todos sus miembros sentados en torno a una gran mesa circular, tomando el almuerzo.

No había forma de distinguir a veraces de mentirosos, así que fui preguntándoles por turno si eran una u otra cosa. De nada me sirvió, pues todos aseguraron ser veraces. Volví a probar, preguntando esta vez a cada uno si su vecino de la izquierda era veraz o mentiroso. Para sorpresa mía, todos contestaron que el hombre sentado a su izquierda era mentiroso.

Al volver a casa había olvidado el número de personas sentadas a la mesa. Telefoneé al presidente del club, quien me informó que eran 37. Después de colgar, me di cuenta de que no podía confiar en esta cifra, porque no sabía si el presidente era veraz o mentiroso. Decidí, pues, preguntar al secretario del club.

"Por desgracia vuestro presidente es un mentiroso empedernido. La verdad es que estábamos 40 comensales reunidos", me contestó. ¿A cuál de estos dos hombres debería yo creer?. De pronto vi una forma clara y sencilla de resolver la cuestión. ¿Podrías determinar cuántos eran los sentados en la mesa?

8.- El pasado día 15 de Marzo el Diari d'Andorra publicó la siguiente noticia:

■ El projecte de Constitució va ser aprovat per una àmplia majoria dels votants en una jornada en què va destacar l'alt percentatge de participació popular

SÍ	NO	BLANCS / NULS
74,2%	25,8%	
4.903	1.706	301

Participació 75,7% Abstenció 24,3%

¿Qué % de las papeletas depositadas en las urnas fueron catalogadas como blancas/nulas?

¿Cuántos electores no pasaron por las urnas?

8° I C M E

Como ya es bien sabido, el **8° Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME)** promovido por la **ICMI** *(International Comission for Mathematical Instruction)*, que corresponde celebrar en 1996, tendrá lugar en **Sevilla**, según se acordó el año pasado en Québec.

Los ICME's se celebran cada cuatro años, alternando con los *Congresos Internacionales de Matemáticas*. Los anteriores tuvieron lugar en Lyon (Francia, 1969), Exeter (Reino Unido, 1972), Karlsruhe (Alemania,1976), Berkeley (U.S.A., 1980), Adelaide (Australia, 1984), Budapest (Hungría, 1988) y Québec (Canadá, 1992).

La *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas*, en la que estamos integrados, como responsable de la celebración de este Congreso en España, ha encomendado a la *Sociedad Andaluza de Educación Matemática* ***"THALES"*** la materialidad de su organización; esta Sociedad lleva muy avanzados los trabajos preparatorios correspondientes.

Las fechas previstas para este gran acontecimiento son las de la semana del **14 al 21 de Julio de 1966**. Se espera que a este Congreso acudirán entre 3500 y 4000 participantes de todo el mundo.

El **ICME-8** ofrecerá un rico programa científico que cubrirá las más importantes áreas de la educación matemática en todos los niveles. Este programa incluira Conferencias plenarias y no plenarias, Grupos de Trabajo, Grupos temáticos, Mesas redondas, Talleres, Presentaciones Nacionales, Comunicaciones breves, Proyectos. Habrá exposiciones de libros, *software* y materiales didácticos.

Los Grupos de Estudio del ICMI y los organizadores de los Seminarios del ICMI presentarán informes sobre sus actividades. También se realizarán encuentros especiales (Asamblea del ICMI, asociaciones, etc.). Se publicarán las Actas del Congreso.

A nivel internacional, la organización depende del *Comité Ejecutivo del ICMI*, que, como es sabido, preside nuestro compatriota el Prof. Miguel de Guzmán. Los contenidos y directrices didácticas del Congreso estarán marcados por el *Comité Internacional del Programa*, en el que figuran los españoles Claudi Alsina (Presidente), Luis Balbuena, Antonio Pérez, Luis Rico y Miguel de Guzmán (como presidente del ICMI).

A finales de este año se constituirá el *Comité Nacional* , y poco antes, lo hará formalmente el *Comité Local de Organización*.

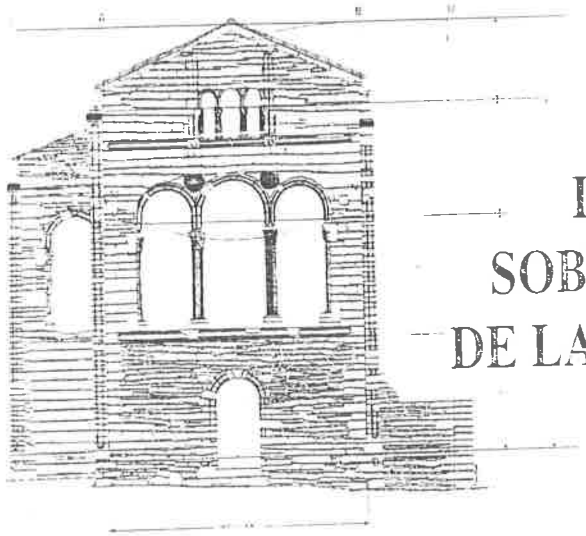
Los 20 **Grupos de Trabajo** provisionalmente previstos (relación sujeta a posibles cambios) son los siguientes:

- Cambios curriculares: Por qué y como.
- Diferenciación en la clase.
- Innovaciones en la evaluación.
- Comunicación en la clase.
- Mejora de las actividades y las motivaciones.
- Errores de los estudiantes en el aprendizaje.
- Dificultades cognitivas en el aprendizaje.
- Género y educación matemática.
- Formación de contenidos matemáticos.
- Aprendizaje a distancia en matemáticas.
- Aprendizaje post-escolar.
- Formación de profesores.
- Enseñanza integrada de matemáticas y ciencias.
- Matemáticas para alumnos singulares.
- Cultura y educación matemática.
- Matemáticas, educación y sociedad.
- Aplicaciones de la realidad y modelización.
- El impacto de la tecnología en el curriculum.
- La didáctica de las matematicas como ciencia.
- Solidaridad en la educación matemática.

Igualmente se han previsto 20 **Grupos temáticos**, que son:
- Reforma de las matemáticas en la enseñanza primaria.
- Reforma de las matemáticas en la enseñanza secundaria.
- Reforma de las matemáticas en la enseñanza universitaria.
- Experiencias innovadoras en la formación del profesor.
- Matemáticas para el trabajo.
- El futuro de la Geometría.
- Arte y Matemáticas.
- Ecología y Matemáticas.
- Ciencias sociales y matemáticas.
- Matemática discreta y cálculo, hoy.
- El papel de las calculadoras y los ordenadores en la clase.
- Metodología de la resolución de problemas.
- Etnomatemáticas.
- Juegos, puzzles y materiales en matemáticas.
- El laboratorio de matemáticas.
- El uso de la TV, películas y vídeos en la clase.
- Lenguaje y matemáticas.
- Competiciones matemáticas.
- Constructivismo, enseñanza y aprendizaje.
- Investigación en educación matemática.

En el *Primer anuncio* del Congreso, que se difundirá próximamente, se dará a conocer la cuantía exacta de la cuota de inscripción, que será alrededor de 40.000 pesetas, incrementada con otras 4.000 para el "fondo de solidaridad" destinado a costear becas o ayudas. Los socios de las sociedades integradas en la Federación (como es nuestro caso), tendran una reducción de **un tercio** de la cuota de inscripcion, siempre que ésta la hagan antes del dia 1 de julio de 1995. La cuota incluirá el importe de una excursion prevista en el programa.

\- - - - - - - -



II JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Gijón

Organizadas por los *Centros de Profesores de Asturias*, la *Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"* y la *Facultad de Matemáticas de la Universidad de Oviedo*, se han celebrado estas **II Jornadas**, los dias 22, 23 y 24 de Septiembre de 1993, en el I.B. nº 7 de **Gijón** .

Pronunció la conferencia inaugural el profesor don **Claudi Alsina Catalá** sobre *"La Educación Matemática, hoy"*. El profesor don **Gustavo Bueno Martínez** disertó sobre la vida y obra de *D. Agustín de Pedrayes.*

Se presentaron tres talleres sobre "Geometría", "Resolución de Problemas" y "El Azar", así como los resultados de Seminarios y Grupos de Trabajo y se celebró una Mesa Redonda.

- - - - - -

TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING CONFERENCE 1993 (TMT - 93)

Los dias 17 al 20 de septiembre de 1993 se ha celebrado el Congreso Internacional "Technology in Mathematics Teaching" en la *School of Education* de la Universidad de Birmingham (Inglaterra).

Durante su apretado programa se exhibieron numerosos e interesantes programas para ordenador, así como lecciones en "hypermedia", diseñados para facilitar el estudio de diversos temas de Matemática a distintos niveles. También se trató ampliamente el papel de las nuevas calculadoras gráficas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Además hubo una interesante exposición de material didáctico.

Las conferencias plenarias corrieron a cargo de los profesores Andrea diSessa (University of California), Colette Laborde (Inst. Fourier, Grenoble), Philip J Rippon (Open University) Bert Waits (Ohio State University), Daphne Kerslake (University of the West of England, Bristol) y Adrian Oldknow (West Sussex Institute of Higher Education).

Se admitieron 51 comunicaciones de 30 minutos, dos de ellas de españoles (una de A. Martínez Sánchez y A. I. Lías Quintero de la Universidad Politécnica de Madrid y la otra de E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano de la Universidad Complutense de Madrid), así como 65 comunicaciones de 15 minutos, tres de ellas de españoles (una de M. Noy, J.M. Brunat y A. Montes de la Univ. Politécnica de Cataluña, otra de J.L. Coronado, A. García, F. García y R. Miñano de la Univ. Politécnica de Madrid y la tercera de A. Lias, A. Martínez y R. Miñano, también de la Politécnica de Madrid).

El programa incluía un Encuentro del Derive User Group, al que asistió el creador de Derive, profesor David Stoutemyer.

Asistieron 267 congresistas de diversos paises, entre ellos los profesores españoles Brunat, Ferrer, Hueso, Mitjana, Roanes Lozano, Roca, Sanguino, Serrat, Torregrosa y Vizmanos.

E. Roanes Lozano

ESTANDARES CURRICULARES Y DE EVALUACION PARA LA EDUCACION MATEMATICA

PUBLICACIONES DE LA S.A.E.M. "THALES"

La *Sociedad Andaluza de Educación Matemática* ***THALES*** está publicando la traducción al castellano de este interesante documento procedente de las **Addenda Series** de *"The National Council of Teachers of Mathematics, Inc."* de Virginia (U.S.A.), siguiendo la linea iniciada con gran éxito en 1991.

Hasta este momento han sido publicados los tres volúmenes siguientes:

1. Nivel Inicial. (IV+35 págs.)
2. Desarrollo del significado numérico. (IV+63 págs.)
3. Conexiones matemáticas. (81 págs.)

Estos cuadernos o volúmenes, editados con profusión de figuras y una presentación pulcra y atractiva, tienen un contenido de gran interés para el profesorado de matemáticas.

El precio conjunto de los tres volúmenes ha sido fijado en 2.150 pesetas. También se facilitan por separado.

- - - - - - -

VII J.A.E.M

Las **VII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas** se celebrarán en Madrid.

Nuestra *Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas* y la *Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"* son las encargadas de organizar esas Jornadas, a las que se espera que asistan cerca del millar de participantes.

- - - - - - -

NOTA INFORMATIVA

Los días 24 y 25 de septiembre tuvo lugar en Madrid, en el Servicio de Innovación Educativa, la junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Matemáticas.

El amplio temario que constituía el orden del día, se indica a continuación:

- Aprobación del Acta anterior
- Solicitudes de ingresos de las Sociedades de Gerona y Tarragona
- Creación de un Servicio de Publicaciones
- Informe de Tesorería
- Informe sobre la revista "Suma": planes y estado económico.
- Informes sobre la IV y V Olimpiadas de E.G.B.
- ICME - 8
- Plan de Actividades de la Federación para 1994
- II Cibem: asistencia y plan de ayudas
- Informe sobre los VII JAEM
- Ruegos y preguntas.

En representación de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, asistieron Julio Fernández Biarge y José V. García Sestafe.

Por su especial interés para nuestros asociados resumimos algunos de los aspectos tratados respecto al 5° punto del orden del día.

La Sociedad Puig Adam satisfizo su cuota federativa correspondiente al curso 1992-93 en 2 de julio de 1993 por giro postal de 403.500 ptas al tesorero de la Federación Florencio Villarrolla.

Por indicación de la Federación se confeccionó y se puso al día una relación completa de los integrantes de la Sociedad Puig Adam (cuyos recibos no hayan sido devueltos) y que en forma de etiquetas autoadhesivas se remitieron al encargado de la Revista Suma, Sixto Romero Sánchez, con fecha 1 de julio de 1993.

Como a finales de septiembre los miembros de la Sociedad Puig Adam no han recibido ejemplares de la revista Suma, se preguntó a Sixto Romero por los motivos de la referida demora.

Al parecer, el anterior encargado del envío de los números de la Revista ha extraviado nuestras etiquetas; por este motivo Sixto Romero nos pidió que confeccionasemos tres nuevas colecciones de etiquetas, que han sido remitidas el día 25 de octubre.

Esperamos recibir inmediatamente, al menos dos números de SUMA.

En el presente boletín se informa, también, de otros aspectos tratados en la Junta de Gobierno.

NUESTRA SOCIEDAD CUMPLE DIEZ AÑOS

La pasada primavera, nuestra Sociedad cumplió los DIEZ AÑOS desde su creación. A lo largo de este tiempo, se han formado numerosas sociedades de profesores de matemáticas de distintos ámbitos geográficos, a pesar de lo cual, la nuestra ha mantenido un número de socios cercano a los tres centenares: En 1984 tenía 217 y ahora cuenta con 273.

Han sido sus presidentes los profesores Pascual Ibarra, Fernández Biarge, Etayo Miqueo, Lorenzo Miranda y García Sestafe.

En la actualidad está integrada en la Federación Española de Soiciedades de Profesores de Matemáticas.

En el número 2 de este Boletín la Sociedad se comprometía a publicar tres números por curso académico, lo que ha cumplido escrupulosamente, ya que en los primeros diez años lleva publicados 34 números, siendo el presente el 35. En el próximo número nos proponemos incluir un índice de los artículos publicados hasta el presente, que complete el que apareció en el número 26.

También nuestros Concursos de Resolución de Problemas para alumnos de Bachillerato se han venido desarrollando con creciente aceptación. En el mismo año de la creación de la Sociedad se celebró el Primero y en el próximo número haremos la convocatoria del XII, correspondiente a 1994.

No hemos preparado ningún acto conmemorativo de nuestro décimo aniversario, pero invitamos a nuestros socios a que nos envíen colaboraciones sobre lo que para ellos ha sido la Sociedad en estos años y lo que podría ser en el futuro, atendiendo a sus sugerencias.

I I CIBEM

El **Segundo Congreso Iberoamericano de Educación Matemática** se celebrará en Blumenau (Brasil), del 12 al 22 de Julio de 1994.

El plazo para inscribirse finaliza el 31 de Diciembre de este año. La Federación en la que estamos integrados estará representada en este acontecimiento internacional.

Se recordará que el Primero de estos Congresos tuvo lugar en Sevilla en 1990, pronunciando la conferencia inaugural el profesor **Santaló**. A él asistieron unos 150 profesores del otro lado del Atlántico y un centenar de protugueses, además de numerosos españoles.

- - - - - - -

JORNADAS NACIONALES DE LA A. P. M. (FRANCIA)

Las Jornadas que organiza la Asociación de Profesores de Matemáticas de Francia, se estarán celebrando los dias 22 a 24 de Octubre de este año en Poitiers, con el título de *"Matemáticas y Enseñanza. Pasado ... Futuro"*.

- - - - - - - -

ALGUNAS GENERALIZACIONES DEL MODELO LOGISTICO

JOSE VICENTE GARCIA SESTAFE

En este artículo se incluyen dos ampliaciones del modelo logístico clásico y se generaliza el método de la pendiente para su ajuste.

1. INTRODUCCION

El matemático, estadístico y astrónomo belga Adolphe Quetelet [1], propuso en 1835 la denominada "hipótesis mecánica" sobre la evolución de las poblaciones, consistente en admitir que la resistencia que se opone a su crecimiento ilimitado es proporcional al cuadrado del tamaño de la correspondiente población. En 1838, Pierre Francoise Verhulst, profesor de Matemáticas en la Escuela Militar de Bruselas, combinando la hipótesis mecánica con la del crecimiento geométrico, [2] y [3], obtuvo la ecuación

$$y=P(t)=\frac{a}{1+be^{ht}} \qquad h<0 \qquad [1]$$

conocida con el nombre de curva logística.

Casi un siglo más tarde, en 1920, los norteamericanos Raymond Pearl y Lowell J. Reed [4], "redescubrieron" la logística de forma empírica, a partir de experiencias realizadas sobre una colonia de moscas drosophila melanogaster, llegando a análogos resultados que Verhulst.

Numerosas han sido las críticas realizadas al valor predictivo del modelo logístico y su utilización había caido en desuso, pero diversos trabajos, relativamente recientes, han vuelto a "poner de moda" a la curva logística, bien bajo la forma expuesta, o bien en su expresión como ecuación en diferencias $X_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n)$, que ha sido estudiada por numerosos investigadores, procedentes de distintos campos científicos. Entre ellos, y por su decisiva influencia, no se puede dejar de citar al físico y biólogo australiano Robert May y al físico-matemático norteamericano Mitchell Feigenbaum que haciendo variar el valor del parámetro r pusieron de manifiesto la aparición de caos, aún operando con un modelo tan sencillo. A este respecto es interesante citar la frase de James Gleick [5] "Los libros de consulta y los de texto, que han tratado la ecuación logística y sus primos más abstrusos, por lo común, ni siquiera admitían la posibilidad del comportamiento caótico".

Robert May puso de manifiesto que la compleja estructura que se deriva de la ecuación logística no está vinculada de modo exclusivo con la biología, disciplina que le había llevado al análisis de los modelos de la Ecología Matemática y en particular al logístico. Tal entusiasmo le produjeron sus investigciones, que en un artículo suyo publicado en 1976 en la revista Nature llego a decir: "El mundo mejoraría si se proporcionara una calculadora de bolsillo a todos los estudiantes para que se entretuviesen con la ecuación logística en diferencias".

Por otra parte en 1981 apareció en el Journal of the Royal Statistical Society un meticuloso trabajo, debido a Donald Leach, donde afirma que, a pesar de que el modelo logístico ha sido rechazado por algunos demógrafos, la curva logística proporciona proyecciones más fiables que el método de componentes, basándose, para tal afirmación, en un detenido análisis de la evolución poblacional de Gran Bretaña, USA y Escocia; termina el artículo señalando que el modelo implícito subyacente en el método de componentes requiere ser examinado. Un año después, el profesor de la Universidad de Exeter, F.R. Oliver, como continuación del trabajo de Leach, publica en la misma revista un artículo donde analiza la matriz de varianzas-covarianzas para la estimación de los parámetros del ajuste logístico y obtiene su desviación típica.

Varias han sido las generalizaciones del modelo logístico. En primer lugar, para su utilización práctica, es conveniente agregar en el segundo miembro, una constante c, que representa la población inicial, escribiéndose

$$y=P(t)=c+\frac{a}{1+be^{ht}} \qquad h<0 \qquad [II]$$

En esta fórmula, resulta que

$$c=\lim_{t\to-\infty} P(t) \quad , \quad c+a=\lim_{t\to+\infty} P(t)$$

esto es y = c, y = c + a son las asíntotas de la curva logística.

Para su ajuste, se pueden seguir los métodos tradicionales, que se pueden consultar en [6] o bien dos métodos propuestos por el autor de esta trabajo [7] y [8].

2. LA LOGISTICA OBLICUA

Una generalización del modelo logístico, debida a Pearl y Reed [9], es la de considerar la curva de ecuación

$$y=P(t)=c+\frac{a}{1+be^{kt^2+ht}} \qquad k<0 \qquad [III]$$

conocida con el nombre de logística oblícua, y que dichos autores utilizaron para la proyección de población de Nueva York y su zona de influencia.

En este trabajo se presenta un método para el ajuste de la logística oblicua en su forma más general

$$y=P(t)=c+\frac{a}{1+be^{h_1t+h_2t^2+\dots+h_nt^n}} \quad , \; h_n<0 \qquad [IV]$$

En primer lugar se aprecia que las curvas [II] y [IV] tienen las mismas asíntotas y = c, y = c + a, que pueden ser obtenidas por el método de la pendiente, que se puede consultar en [6] o en [8].

Obtenidas dichas asíntotas se efectúa el cambio

$$u=\frac{a}{y-c}-1 \qquad [V]$$

resultando

$$u=be^{\sum_{i=1}^{n} h_i t^i}$$

Tomando logaritmos neperianos y haciendo

z = lnu, a = lnb

se tiene

$$z=a+\sum_{j=1}^{n} h_j t^j \qquad [VI]$$

Ajustando por mínimos cuadrados la ecuación [6] a la nube (t_i, z_i) donde

$$z_i=\ln\left(\frac{a}{y_i-c}-1\right)$$

se obtienen los parámetros buscados.

EJEMPLO

Sea ajustar

$$y=c+\frac{a}{1+be^{h_1t+h_2t^2+h_3t^3+h_4t^4}}$$

a los datos

Año	Población	t	Año	Población	t
1887	17549,6	- 13	1940	25878,0	40
1900	18594,4	0	1950	27976,8	50
1910	19927,2	10	1960	30430,7	60
1920	21303,2	20	1970	33823,9	70
1930	23563,9	30	1981	37616,9	80,16

que figura en la pág. 37 de [6]

Los valores de a y c obtenidos son
a = 41055,4482 y c = 14604,5713

Los cálculos previos para la segunda etapa del ajuste son los siguientes

z	t	t^2	t^3	t^4
2,560735	-13	169	-2197	28561
2,228942	0	0	0	0
1,904102	10	100	1000	10000
1,634898	20	400	8000	16000
1,276040	30	900	27000	810000
0,951456	40	1600	64000	2560000
0,727646	50	2500	125000	6250000
0,466345	60	3600	216000	12960000
0,127649	70	4900	343000	24010000
-0,243266	80,16	6426,7	515207,31	41302470,18

Se obtiene

h_0 = 2,2320844383 (126,4) $\qquad$ b = exp (h_0) = 9,319271291

h_1 = - 0,029475781 (-29,1) $\qquad$ h_2 = 2,3290601252.10^{-4} (-2,7)

h_3 = 7,14867206385.10^{-6} (3,2) $\qquad$ h_4 = 5,57187994739.10^{-8} (-3,4)

con un coeficiente de determinación

R^2 = 0,999613

y errpr tipo de la regresión

E = 2,432.10^{-2}

El índice de bondad del ajuste es

$$I=\frac{\sum (y_i-y_i^*)^2}{\sum y_i^2-n\bar{y}^2}=0{,}999$$

Es interesante comparar los resultados obtenidos mediante los ajustes de las logísticas de tipos (*) y (**). De las cifras anteriores se desprende que el segundo ajuste es más preciso que el primero, en lo que respecta a cifras pretéritas, pero si se comparan cifras futuras

t	año	Población (*)	Población (**)
100	2000	42797,3	47971,0
110	2010	45279,0	52462,1
120	2020	47421,8	54812,7

se aprecia el rápido crecimiento proporcionado por la logística del tipo segundo que, sin duda, está fuera de toda lógica. Así pues, aunque la logística oblicua puede proporcionar resultados muy ajustados a las cifras históricas, en general, hay que desconfiar de su valor predictivo.

3. LA ANTILOGISTICA

La logística en su forma tradicional, no sólo ha servido para describir la evolución de una población, si no también para explicar la extensión de una epidemia y el desarrollo de una innovación tecnológica o cultural, esto es, fenómenos que siguen una pauta creciente. Ahora bien, en la transición demográfica, hechos demográficos como la natalidad y la mortalidad presentan tendencias decrecientes. A tal fin Marc Artzrouni, de la Universidad de Carolina del Norte presentó en 1985 la función, denominada por él "antilogística", cuya ecuación adopta la forma

$$y=P(t)=c-\frac{a}{1+be^{ht}} \qquad h<0 \qquad \text{[VII]}$$

Obsérvese que la función, similar a la logística tradicional, es decreciente. Sus asíntotas son y = c e y = c-a.

Supongamos que las tasas de natalidad y mortalidad se ajustan a sendas logísticas decrecientes:

$$n(t)=c-\frac{a}{1+be^{-rt}} \quad , \quad m(t)=c'-\frac{a'}{1+b'e^{-st}} \qquad \text{[VIII]}$$

Entonces, si la población en estudio es cerrada, esto es, no exiten movimientos migratorios, se tiene

$$P(t)=P(0).\exp[\int_0^t(n(x)-m(x))dx]$$

y después de integrar

$$P(t)=P(0).\exp[(c-c')t].\frac{(1+b)^h}{(1+b')^k}.\frac{[b'+\exp(st)]^k}{[b+\exp(rt)]^h} \qquad \text{[IX]}$$

donde h = a/r y k = a'/s.

La ecuación [IX], sin el factor exp [(c-c') t], se suele conocer con el nombre de logística generalizada; la justificación de tal nombre proviene de que si se hace: s = r, b' = b, a -a' = r, resulta

$$P(t)=\frac{\frac{1}{b}\ P(0)}{1+\frac{1}{b}\exp(rt)}$$

que es de la forma de la logística ordinaria

Por tanto, una población sometida a tasas de natalidad y mortalidad, n (x) > m (x), que siguen una ley antilogística, crece según una ley, que es el producto de una exponencial, por una logística generalizada.

EJEMPLO DE AJUSTE

Para ajustar una antilogística a la serie de tasas de natalidad de la población española, en el período 1965-1991, se va a utilizar el método de la pendiente descrito, como ya se ha indicado en [6] ó en [8].

La serie, tomada del Anuario Estadístico del INE es

años	t	tasa = y	años	t	tasa = y	años	t	tasa = y
1965	0	21,13	1974	09	19,47	1983	18	12,71
1966	1	20,70	1975	10	18,85	1984	19	12,34
1967	2	20,81	1976	11	18,85	1985	20	11,85
1968	3	20,03	1977	12	18,05	1986	21	11,37
1969	4	19,79	1978	13	17,32	1987	22	11,02
1970	5	19,50	1979	14	16,22	1988	23	10,79
1971	6	19,51	1980	15	15,22	1989	24	10,50
1972	7	19,36	1981	16	14,12	1990	25	10,29
1973	8	19,21	1982	17	13,58	1991	26	09,89

Deducidas las diferencias divididas, se obtienen para y' los valores

t	y'	t	y'	t	y'	t	y'	t	
1	-0,16	6	-0,07	11	-0,40	16	-0,81	21	-0,41
2	-0,34	7	-0,15	12	-0,76	17	-0,71	22	-0,29
3	-0,51	8	0,06	13	-0,54	18	-0,62	23	-0,26
4	-0,27	9	-0,18	14	-1,05	19	-0,43	24	-0,25
5	-0,24	10	-0,31	15	-1,05	20	-0,48	25	-0,30

Ajustada la parábola

$y^1 = Ay^2 + By + C$

se otiene

$A = 0{,}027$, $B = -0{,}825$, $C = 5{,}447$

Las raíces de la ecuación

$Ay^2 + By + C = 0$

resultan ser

$y_1 = 20{,}71$ $y_2 = 9{,}69$

que son las ecuaciones de las asíntotas de la antilogística. Por tanto

$c = y_1 = 20{,}71$ y $a = y_1 - y_2 = 11{,}02$

Efectuando el cambio

$$z=\frac{a}{c-y}-1$$

resulta

$$z=be^{-ht} \rightarrow lnz=lnb-ht$$

Ajustada una recta a la nube (t_i, z_i) se obtiene ($\rho=-0{,}986$)

$\ln b = 3{,}84$ $h = 0{,}2585$

Luego la ecuación buscada es

$$y=20{,}71-\frac{11{,}02}{1+46{,}60e^{-0{,}2585t}}$$

4. BIBLIOGRAFIA

[1] QUETELET, Adolphe: Sur l'homme ou essai de physique sociale. Bruselas. 1835

[2] VERHULST, Pierre Francoise: Notice sur la loi qui la population suit dans son accroissement. Correspondence Mathematique et Physique. Tomo X. 1838

[3] VERHULST, Pierre Francoise: Recherches Mathematiques sur la loi d'acroissement de la Population. Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruselles. Tomo XVIII.1845.

[4] PEARL, Raymond y REED, Lowell J. On the Rate of Growth of the United States Since 1790 and its Mathematical Representations. Proceedings of the National Academy of Sciences. 1920.

[5] GLEICK, James: Making a New Science. Existe traducción al español, editada por Seix y Barral.

[6] GARCIA SESTAFE, José Vicente: La curva logística. INE.1989

[7] GARCIA SESTAFE, José Vicente: El método de recurrencia para el ajuste de la curva logística. Bol. Soc. Prof. de Mat. Puig Adam. Nº20. 1989.

[8] GARCIA SESTAFE, José Vicente: El método de la pendiente para el ajuste de la curva logística. Bol. Soc. Prof. de Mat. Puig Adam. Nº 21. 1989.

[9] PEARL, Raymond y REED, Lowell J.: Predicted Growth of Population of New York. 1923.

[10] ARTZROUNI, Marc: Generalized stable population theory. Journal of Mathematical Biology, 19. 1985.

SOBRE ANALISIS NO ESTANDAR

Por Manuel Suárez Fernández

CAPITULO V : DEFINICIONES NO ESTANDAR DE CONCEPTOS BASICOS DEL ANALISIS INFINITESIMAL

(SEGUNDA PARTE)

En este Capítulo V, segunda parte, explícitamente decimos variables a los signos x,u,z,t,v.

[45] Se demuestra que si D es un abierto real (7), f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D} \cap \mathbb{R}_s$ ($\overline{D}$ es la adherencia de D), $r \in \mathbb{R}$ y $r = \lim_{x \to x_0} f(x)$ (versión estandar o clásica) (8) entonces $r \in \mathbb{R}_s$.

En efecto, entonces si $P(u)$ es (la fórmula)

---

(7) de la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

(8) Si D es un abierto real, f es una función entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces (versión estandar) « notamos $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y decimos "límite de f en x_0" a r si y solo si, si $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe δ tal que $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ y si $x_1 \in D \setminus \{x_0\}$ y $|x_1 - x_0| < \delta$ entonces $|f(x_1) - r| < \varepsilon$ » (es decir, si y solo si para todo ε, si $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe δ tal que $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ y para todo x_1, si $x_1 \in D \setminus \{x_0\}$ y $|x_1 - x_0| < \delta$ entonces $|f(x_1) - r| < \varepsilon$. Es decir, si y solo si se verifica $\forall z(((z \in \mathbb{R}) \wedge (z > 0)) \Rightarrow \exists t((t \in \mathbb{R}) \wedge (t > 0) \wedge \forall x(((x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (|x - x_0| < t)) \Rightarrow |f(x) - r| < z)))$).

$\forall z(((z \in \mathbb{R}) \wedge (z > 0)) \Rightarrow \exists t((t \in \mathbb{R}) \wedge (t > 0) \wedge$
$\wedge \forall x(((x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (|x - x_0| < t)) \Rightarrow |f(x) - u| < z)))$
entonces $P(u)$ es una fórmula estandar, en $P(u)$ figura libre u y solo u y se verifica $\exists uP(u)$. Entonces se verifica $\exists^{st}uP(u)$ (Principio de transferencia). Entonces $r \in R_s$ ([17]).

[46] Si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D} \cap \mathbb{R}_s$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces (por ejemplo) « notamos $\lim\limits_{x \to x_0}(vne)f(x)$ y decimos "límite versión no estandar de f en x_0 " a r si y solo si « $r \in \mathbb{R}_s$ y si $x_1 \in D \setminus \{x_0\}$ y $x_1 \approx x_0$ entonces $f(x_1) \approx r$ (es decir, si y solo si se verifica $(r \in \mathbb{R}_s) \wedge \forall x(((x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (x \approx x_0)) \Rightarrow (f(x) \approx r))$).

[47] Se demuestra que si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces « $r = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (versión estandar) si y solo si $r = \lim\limits_{x \to x_0}(vne)f(x)$ » ».
En efecto, entonces si $P(z,t)$ es (la fórmula) $(((z \in \mathbb{R}) \wedge (z > 0)) \Rightarrow ((t \in \mathbb{R}) \wedge (t > 0) \wedge \forall x(((x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (|x - x_0| < t)) \Rightarrow (|f(x) - r| < z)))$ y $r \in \mathbb{R}_s$ entonces « $P(z,t)$ es una fórmula estandar en la que figuran libres z,t y solo z,t y « se verifica $\forall z\, \exists tP(z,t)$ si y solo si $r = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (versión estandar). Entonces

* Si $r = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (versión estandar) entonces $r \in \mathbb{R}$ y se verifica $\forall z\exists tP(z,t)$ ({45}). Entonces se verifica $\forall^{st}z\exists tP(z,t)$. Entonces se verifica $\forall^{st}z\exists^{st}tP(z,t)$ (Principio de transferencia). Entonces se verifica $\forall^{st}z\forall t\forall x(((z \in \mathbb{R}) \wedge (z > 0) \wedge (t \in I) \wedge \wedge (x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (|x - x_0| < t)) \Rightarrow (|f(x) - r| < z)$ ([31], [33], [34]). Entonces si $n \in \mathbb{N}_s$, $n \neq 0$, $x_1 \in \in D \setminus \{x_0\}$ y $x_1 \approx x_0$, entonces $|f(x_1) - r| < n^{-1}$ ([6], [17], [19], [36]). Entonces

* si $|f(x_1) - r| = 0$ entonces $f(x_1) \approx r$ ([30], [31], [36]).

* si $|f(x_1) - r| \neq 0$ entonces $n < |f(x_1) - r|^{-1}$. Entonces $|f(x_1) - r|^{-1} \in \overline{\mathbb{R}}$ ([20], [21], [26], [27]). Entonces $|f(x_1) - r| \in I$ ([30], [31]).

Entonces $f(x_1) \approx r$ ([35], [36]).
Entonces se verifica $(r \in \mathbb{R}_s) \wedge \forall x(((x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (x \approx x_0)) \Rightarrow (f(x) \approx r)$. Entonces $r = \lim\limits_{x \to x_0}(vne)f(x)$ ([46]).

* si $r = \lim\limits_{x \to x_0}(vne)f(x)$ entonces se verifica $(r \in \mathbb{R}_s) \wedge \forall x(((x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (x \approx x_0)) \Rightarrow (f(x) \approx r))$ ([46]). Entonces si $x_1 \in D \setminus \{x_0\}$, $\delta \in I$, $\delta > 0$, $|x_1 - x_0| < \delta$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_s$ y $\varepsilon > 0$ entonces $|f(x_1) - r| < \varepsilon$ ([33], [34], [36]). Entonces si $\varepsilon \in \mathbb{R}_s$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe δ tal que $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ y si $x_1 \in D \setminus \{x_0\}$ y $|x_1 - x_0| < \delta$ entonces $|f(x_1) - r| < \varepsilon$ (Principio de existencia, [6], [9], [12], [20], [21], [26], [27], [30], [31]). Entonces se verifica $\forall^{st}z\exists tP(z,t)$ ([17]). Entonces se verifica $\forall z\exists tP(z,t)$ (Principio de transferencia). Entonces $r = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (versión estandar).

Entonces « $r = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (versión estandar) si y solo si $r = \lim\limits_{x \to x_0}(vne)f(x)$ ».

[48] Si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces (por ejemplo) decimos "punto de aglomeración versión no estandar de f en x_0 " a r si y solo si existe x_1 tal que $x_1 \in D \setminus \{x_0\}$, $x_1 \approx x_0$ y $f(x_1) \approx r$ » (es decir, si y solo si se verifica $\exists x((x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (x \approx x_0) \wedge (f(x) \approx r))$).

[49] Se demuestra que si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D} \cap \mathbb{R}_s$ y $r \in \mathbb{R}_s$ entonces « r es un punto de aglomeración de f en x_0 (versión estandar) (9) si y solo si r es un punto de aglomeración versión no estandar de f en x_0 ».
En efecto, entonces si $P(z,t)$ es la fórmula

(9) Si D es un abierto real, f es una función entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces (versión estandar) « decimos "punto de aglomeración de f en x_0" a r si y solo si, si $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ entonces existe x_1 tal que $x_1 \in D \setminus \{x_0\}$, $|x_1 - x_0| < \delta$ y $|f(x_1) - r| < \varepsilon$ » (es decir, si y solo si se verifica $\forall z\forall t(((z \in \mathbb{R}) \wedge (z > 0) \wedge \wedge (t \in \mathbb{R}) \wedge (t > 0)) \Rightarrow \exists x((x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (|x - x_0| < t) \wedge \wedge (|f(x) - r| < z)))$).

$(((z \in \mathbb{R}) \wedge (z > 0) \wedge (t \in \mathbb{R}) \wedge (t > 0)) \Rightarrow \exists x((x \in D \setminus$
$\setminus \{x_0\}) \wedge (|x - x_0| < t) \wedge (|f(x) - r| < z)))$
entonces « $P(z,t)$ es una fórmula estandar, en $P(z,t)$ figuran libres z,t y solo z,t y « se verifica $\forall z \forall t P(z,t)$ si y solo si r es un punto de aglomeración de f en x_0 (versión estandar) » ». Entonces

* si r es un punto de aglomeración de f en x_0 (versión estandar) entonces se verifica $\forall z \forall t P(z, t)$. Entonces si $\varepsilon \in I$, $\varepsilon > 0$, $\delta \in I$ y $\delta > 0$ entonces se verifica $P(\varepsilon, \delta)$ ({31}). Entonces se verifica $\exists x((x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (x \approx x_0) \wedge (f(x) \approx r))$ (Principio de existencia, [6], [9], [12], [20], [21], [26], [27], [30], [31], [34], [36]). Entonces r es punto de aglomeración versión no estandar de f en x_0 ([48]).
* si r es punto de aglomeración versión no estandar de f en x_0 entonces se verifica $\exists x((x \in D \setminus \{x_0\}) \wedge (x \approx x_0) \wedge (f(x) \approx r))$ ([48]). Entonces se verifica $\forall z \forall t P(z, t)$ ([17], [33], [34]). Entonces se verifica $\forall^{st} z \forall^{st} t P(z, t)$ (Principio de transferencia). Entonces se verifica $\forall z \forall t P(z, t)$ (Principio de transferencia). Entonces r es un punto de aglomeración de f en x_0 (versión estandar).

Entonces « r es un punto de aglomeración de f en x_0 (versión estandar) si y solo si r es un punto de aglomeración versión no estandar de f en x_0 ».

[50] Si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$ y $x_0 \in D$ entonces (por ejemplo) « decimos "función continua versión no estandar en x_0" a f si y solo si, si $x_1 \in D$ y $x_1 \approx x_0$ entonces $f(x_1) \approx f(x_0)$ » (es decir, si y solo si se verifica $\forall x(((x \in D) \wedge (x \approx x_0)) \Rightarrow f(x) \approx f(x_0))$).

[51] Se demuestra que si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$ y $x_0 \in D \cap \mathbb{R}_s$ entonces « f es continua versión no estandar en x_0 si y solo si $f(x_0) = \lim_{x \to x_0}(\text{vne}) f(x)$ ».
Demostración fácil ([3], [17], [35], [36], [46]).

[52] Se demuestra que si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$ y $x_0 \in D \cap \mathbb{R}_s$ entonces

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETíN DE INSCRIPCIóN (CENTROS)

D. ... ...

como ... ...del Centro ... ...

... ...

domiciliado en ... ...

ciudad ... ... Codº Post. ... Telfº.. ... .

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR.

Con esta fecha autorizo al Banco ... ...

Sucursal o Agencia ... ... en ... ...

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en nuestra cuenta ... ... nº ... ...

abierta al nombre: ... ...

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1993-94

y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1993

Fdo:

La cuota anual esta actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 pta).

Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas.* Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia ... ... en ... ...

Dirección de esta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...

Nombre de la cuenta... ... ...

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETíN DE INSCRIPCIóN

D. ... ... Teléf.(...)... ... .

Dirección particular ... ...

Ciudad ... ... Codº Postal ... .

Centro de trabajo ... ...

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NúMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ... ...

Sucursal o Agencia ... ... en ... ...

Direccion de la misma ... ...

para que cargue en mi cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1993-94

y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1993

Fdo.:

La cuota anual esta actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 pta).

Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas.* Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...

Dirección de esta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...

Direccion ... ...

« f es continua en x_0 (versión estandar) (10) si y solo si f es continua versión no estandar en x_0 ». Demostración fácil ([47], [51]).

[53] Si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $A \subset D$ y A es estandar entonces « decimos "función uniformemente continua versión no estandar en A" a f si y solo si, si $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ y $x_1 \approx x_2$ entonces $f(x_1) \approx f(x_2)$ » (es decir, si y solo si se verifica $\forall x \forall u(((x \in A) \wedge (u \in A) \wedge (x \approx u)) \Rightarrow (f(x) \approx f(u)))$).

[54] Se demuestra que si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $A \subset D$ y A es estandar entonces « f es una función uniformemente continua en A (versión estandar) (11) si y solo si f es una función uniformemente continua versión no estandar en A ». En efecto, entonces si P(x,u) es (la fórmula) $(((x \in \mathbb{R}) \wedge (x > 0)) \Rightarrow ((u \in \mathbb{R}) \wedge (u > 0) \wedge \forall z \forall t(((z \in A) \wedge (t \in A) \wedge (|z - t| < u)) \Rightarrow (|f(z) - f(t)| < x)))$ entonces P(x,u) es una fórmula estandar en la que figuran libres x, u y solo x, u y « se verifica $\forall x \exists u P(x,u)$ si y solo si f es una función uniformemente

---

(10) Si D es un abierto real, f es una función entre D y $\mathbb{R}$ y $x_0 \in D$ entonces (versión estandar) « decimos que f es continua en x_0 si y solo si existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ (versión estandar) y $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ » (es decir, si y solo si se verifica $\exists u((u = \lim_{x \to x_0} f(x)) \wedge (u = f(x_0)))$).

(11) Si D es un abierto real, f es una función entre D y $\mathbb{R}$ y $A \subset D$ entonces (versión estandar) « decimos "función uniformemente continua en A" a f si y solo si, si $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe δ tal que $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ y si $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ y $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ » (es decir, si y solo si para todo ε si $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe δ tal que $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ y para todo x_1 y para todo x_2, si $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ y $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Es decir, si y solo si se verifica $\forall x(((x \in \mathbb{R}) \wedge (x > 0)) \Rightarrow \exists u((u \in \mathbb{R}) \wedge (u > 0) \wedge \forall z \forall t(((z \in A) \wedge (t \in A) \wedge (|z - t| < u)) \Rightarrow (|f(z) - f(t)| < x)))$).

continua en A (versión estandar) ».

Entonces

* si f es una función uniformemente continua en A (versión estandar) entonces se verifica $\forall x \exists u P(x,u)$. Entonces se verifica $\forall^{st} x \exists u P(x,u)$. Entonces se verifica $\forall^{st} \exists^{st} u P(x,u)$ (Principio de transferencia). Entonces si $\varepsilon \in \mathbb{R}_s$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe δ tal que $\delta \in \mathbb{R}_s$, $\delta > 0$ y si $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ y $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ([17]). Entonces si $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ y $x_1 \approx x_2$ entonces $f(x_1) \approx f(x_2)$ ([33], [34], [35], [36]). Entonces se verifica $\forall x \forall u(((x \in A) \wedge (u \in A) \wedge (x \approx u)) \Rightarrow f(x) \approx$ $\approx f(u))$. Entonces f es una función uniformemente continua versión no estandar en A ([53]).
* si f es una función uniformemente continua versión no estandar en A entonces se verifica $\forall x \forall u(((x \in$ $\in A) \wedge (u \in A) \wedge (x \approx u) \Rightarrow f(x) \approx f(u))$ ([53]). Entonces si $\varepsilon \in \mathbb{R}_s$, $\varepsilon > 0$, $\delta \in I$, $\delta > 0$, $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ y $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ([33], [34], [35], [36]). Entonces se verifica $\forall^{st} x \exists u P(x,u)$ (Principio de existencia, [6], [12], [13], [14], [16], [20], [21], [26], [27], [30], [31]). Entonces se verifica $\forall x \exists u P(x,u)$ (Principio de transferencia). Entonces f es una función uniformemente continua (versión estandar).

Entonces f es una función uniformemente continua en A (versión estandar) si y solo si f es una función uniformemente continua versión no estandar en A.

[55] Se demuestra que si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap \mathbb{R}_s$ y existe $f'(x_0)$ (versión estandar) (12) entonces $f'(x_0) \in \mathbb{R}_s$.
En efecto, entonces si g es una función entre $D\backslash\{x_0\}$ y $\mathbb{R}$ y si $x_1 \in D\backslash\{x_0\}$ entonces $g(x_1) =$ $(f(x_1) - f(x_0))/(x_1 - x_0)$ entonces g es una función

----

(12) Si D es un abierto real, f es una función entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ y $p \in \mathbb{R}$ entonces (versión estandar) « notamos $f'(x_0)$ y decimos "derivada de f en x_0" a p si y solo si $p = \lim\limits_{x \to x_0} ((f(x) - f(x_0))/(x - x_0))$ ».

estandar, existe $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (versión estandar) y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f'(x_0)$. Entonces $f'(x_0) \in \mathbb{R}_s$ ([45]).

[56] Si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap \mathbb{R}_0$ y $r \in \mathbb{R}_0$ entonces « notamos $f'_{vne}(x_0)$ y decimos "derivada versión no estandar de f en x_0" a r si y solo si $r =$ $= \lim\limits_{x \to x_0}(vne)((f(x) - f(x_0))/(x - x_0))$ » (es decir, si y solo si, si $\delta \in I$, $\delta \neq 0$ y $x_0 \in D$ entonces $(f(x_0 + \delta) - f(x_0))/\delta \approx r)$.

[57] Se demuestra que si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap \mathbb{R}_s$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces « $r = f'(x_0)$ (versión estandar) si y solo si $r = f'_{vne}(x_0)$ ».
En efecto, si g es una función entre $D\backslash\{x_0\}$ y $\mathbb{R}$ y si $x_1 \in D\backslash\{x_0\}$ entonces $g(x_1) = (f(x_1) - f(x_0))/(x_1 - x_0)$, entonces g es una función estandar entre $D\backslash\{x_0\}$ y $\mathbb{R}$ y $x_0 \in \overline{D\backslash\{x_0\}}$ (adherencia de $D\backslash\{x_0\}$). Entonces

* si $r = f'(x_0)$ (versión estandar) entonces $r =$ $= \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (versión estandar). Entonces $r =$ $= \lim\limits_{x \to x_0}(vne) g(x)$ ([47]). Entonces $r = f'_{vne}(x_0)$ ([56]).
* si $r = f'_{vne}(x_0)$ entonces $r = \lim\limits_{x \to x_0}(vne) g(x)$ ([56]). Entonces $r = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (versión estandar) ([47]). Entonces $r = f'(x_0)$ (versión estandar).

Entonces « $r = f'(x_0)$ (versión estandar) si y solo si $r = f'_{vne}(x_0)$ ».

[58] Se demuestra que si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap \mathbb{R}_s$, $p \in \mathbb{R}_s$, $T =$ $= \{(x,u) | ((x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \wedge (u = p \cdot (x - x_0) + f(x_0))\}$ (es decir, T es la recta de pendiente p, que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y T es, pues, una recta (que es un conjunto) estandar), $\delta \in I$, $\delta \neq 0$ y $T_1 =$ $= \{(x,z) | ((x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \wedge (z = ((f(x_0 + \delta) - f(x_0))/\delta) \cdot$ $\cdot (x - x_0) + f(x_0))\}$ (es decir, T_1 es la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + \delta, f(x_0 + \delta))$) entonces « $p = f'(x_0)$ (versión estandar) si y solo si, si $x_1 \in \underline{\mathbb{R}}$, $(x_1, u_1) \in T$ y $(x_1, z_1) \in T_1$ entonces $u_1 \approx x_1$ ».
En efecto, entonces

* si $p = f'(x_0)$, $x_1 \in \underline{\mathbb{R}}$, $(x_1, u_1) \in T$ y $(x_1, z_1) \in T_1$

entonces « $u_1 = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0)$ y $z_1 = ((f(x_0 + \delta) - f(x_0))/\delta) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0)$ ». Entonces $u_1 \approx z_1$ ([23], [25], [35], [36], [56]).

* si « si $x_1 \in \underline{\mathbb{R}}$, $(x_1, u_1) \in T$ y $(x_1, z_1) \in T_1$ entonces $u_1 \approx z_1$ » entonces $p \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0) \approx$ $\approx ((f(x_0 + \delta) - f(x_0))/\delta) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0)$. Entonces si $x_1 = 1 + x_0$ entonces $p \cdot (1 + x_0 - x_0) + f(x_0) \approx$ $\approx ((fx_0 + \delta) - f(x_0))/\delta) \cdot (1 + x_0 - x_0) + f(x_0)$ ([23], [25]). Entonces $p \approx (f(x_0 + \delta) - f(x_0))/\delta$. Entonces $p \approx f'(x_0)$ ([35], [36], [56], [57]). Entonces $p = f'(x_0)$ ([19], [33], [56], [57]).

Entonces « $p = f'(x_0)$ si y solo si, si $x_1 \in \underline{\mathbb{R}}$, $(x_1, u_1) \in T$ y $(x_1, z_1) \in T_1$ entonces $u_1 \approx z_1$ ».

[59] Se demuestra que si $r \in \underline{\mathbb{R}}$ entonces existe un elemento de $\mathbb{R}_s$ que notamos ${}^{o}r$ y llamamos "parte estandar de r" tal que ${}^{o}r \approx r$.

En efecto, entonces existe n_0 tal que $n_0 \in \mathbb{N}_s$ y $n_0 \leq |r| \leq n_0 + 1$ ([9], [12], [20], [21]). Entonces existe $r_1, r_2, r_3, \ldots$ tal que $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión de números reales, $r_1 = n_0$, $r_2 = n_0 + 1$, $r_3 = (r_1 + r_2)/2$ y si $n \in \mathbb{N}$ y $n > 3$ entonces « $|r_n - r_{n-1}| = 1/2^{n-2}$ y $|r_n - |r|| \leq 1/2^{n-2}$ ». Entonces si $n \in \mathbb{N}_s^{*}$ (es decir, si $n \in \mathbb{N}_s \backslash \{0\}$) entonces $r_n \in \mathbb{R}_s$ ([6], [17], [19]). Entonces existe $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots$ tal que $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots$ es una sucesión estandar de números reales y si $n \in \mathbb{N}_s^{*}$ entonces $r'_n = r_n$ (Principio de la sucesión). Entonces si $n' \in \mathbb{N}_s^{*}$, $n' > 3$, $n'' \in \mathbb{N}_s^{*}$ y $n'' > 3$ entonces $|r'_{n'} - r'_{n''}| = |r_{n'} - r_{n''}| \leq |r_{n'} - |r|| + ||r| - r_{n''}| \leq 1/2^{n'-2} + 1/2^{n''}$. Entonces si $P(x,u)$ es (la fórmula) $((x \in \mathbb{N}) \wedge (x > 3) \wedge (u \wedge \mathbb{N}) \wedge (u > 3)) \Rightarrow (|r'_x - r'_u| \leq 1/2^{x-2} + 1/2^{u-2})$ entonces $P(x,u)$ es una fórmula estandar en la que figuran libres x,u y solo x,u y se verifica $\forall^{st}x\forall^{st}uP(x,u)$. Entonces se verifica $\forall^{st}x\forall uP(x,u)$ (Principio de transferencia). Entonces se verifica $\forall x\forall uP(x,u)$ (Principio de transferencia). Entonces $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots$ es una sucesión (estandar) de Cauchy (versión estandar). Entonces existe $\lim\limits_{n \to \infty} r'_n$ (versión estandar) y $\lim\limits_{n \to \infty} r'_n \in \mathbb{R}_s$ ([38]). Entonces si $n' \in \mathbb{N}_s$

$n' > 3$, $\delta \in \mathbb{R}$ $\delta > 0$ entonces « $||r| - r_{n'}| \leq 1/2^{n'-2}$, $r_{n'} = r'_{n'}$ y existe n'' tal que $n'' \in \mathbb{N}^{*}$, $|r'_{n'} - r'_{n''}| \leq 1/2^{n'-2} + 1/2^{n''-2}$ y $|r'_{n''} - \lim r'_n| < \delta$ ». Entonces si $n' \in \mathbb{N}_s$, $n' > 3$, $\delta \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ entonces existe n'' tal que $n'' \in \mathbb{N}^{*}$ y $||r| - \lim\limits_{n \to \infty} r'_n| = ||r| - r_{n'} + r_{n'} + r'_{n'} - r'_{n'} + r'_{n''} + r'_{n''} - \lim r'_n| \leq ||r| - r_{n'}| + |r_{n'} - r'_{n'}| + |r'_{n'} - r'_{n''}| + |r'_{n''} - \lim\limits_{n \to \infty} r'_n| < 1/2^{n'-2} + 0 + (1/2^{n'-2} + 1/2^{n''}) + \delta$ ([6]). Entonces si $\varepsilon \in \mathbb{R}_s$ y $\varepsilon > 0$ entonces $||r| - \lim\limits_{n \to \infty} r'_n| < \varepsilon$ ([6], [9], [17], [19]). Entonces $|r| \approx \lim\limits_{n \to \infty} r'_n$ ([31], [34], [36]). Entonces $\lim\limits_{n \to \infty} r'_n = {}^{o}|r|$ ([38]). Entonces « « si $r \geq 0$ entonces $\lim r'_n = {}^{o}r$ » y si $r < 0$ entonces $-|\lim r'_n| = {}^{o}r$ » ([19], [31], [35], [36], [38]). Entonces si $r \in \underline{\mathbb{R}}$ entonces existe ${}^{o}r$.

[60] Se demuestra que « si $r \in \underline{\mathbb{R}}$ entonces « existe ${}^{o}(-r)$ y ${}^{o}(-r) = -{}^{o}r$ » », « si $r \in \underline{\mathbb{R}} \backslash I$ entonces « existe ${}^{o}(1/r)$ y ${}^{o}(1/r) = 1/{}^{o}r$ » » y « si $r \in \underline{\mathbb{R}}$ y $r' \in \underline{\mathbb{R}}$ entonces « existe ${}^{o}(r + r') = {}^{o}r + {}^{o}r'$, existe ${}^{o}(r \cdot r')$ y ${}^{o}(r \cdot r') = {}^{o}r \cdot {}^{o}r'$ » ».

Demostración fácil ([19], [25], [30], [31], [33], [35], [36], [59]).

[61] Se demuestra que si $r' \in \mathbb{R}_s$, $r'' \in \mathbb{R}$, $r' < r''$ y $r \in [r', r'']$ entonces « existe ${}^{o}r$ y ${}^{o}r \in [r', r'']$ ».

En efecto, entonces

* $[r', r''] \subset \underline{\mathbb{R}}$ ([20], [21], [23]). Entonces existe ${}^{o}r$ ([59]).
* Si $r_1 \in \mathbb{R}_s \backslash [r', r'']$ entonces « $r_1 < r'$ o $r_1 > r''$ ».
    * Si $r_1 < r'$ entonces « $r' - r_1 \in \mathbb{R}_s$, $r - r_1 \geq r' - r_1 > 0$ » ([19]). Entonces si $\varepsilon \in I$ entonces $\varepsilon < r' - r_1$ ([33], [34]). Entonces $\varepsilon \neq r - r_1$. Entonces $r - r_1 \notin I$.
    * Si $r_1 > r''$ entonces $r_1 - r \notin I$ ([19], [33], [34]).

Entonces existe ${}^{o}r$ y ${}^{o}r \in [r', r'']$ ([36], [59]).

[62] Si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $r' \in \mathbb{R}_s$, $r'' \in \mathbb{R}_s$, $r' < r''$, $[r', r''] \subset D$, $f(r') < 0$, $f(r'') > 0$ y « si $r \in [r', r'']$ entonces f es continua versión no estandar en r », entonces

existe r_0 tal que $r_0 \in [r', r'']$ y $f(r_0) = 0$.
En efecto, si $n \in \overline{\mathbb{N}}$ entonces existe j tal que $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le n$ y si $x_{j-1} = r' + (j - 1) . ((r'' - r')/n)$ y $x_j = r' + j . ((r'' - r')/n)$ entonces « $x_{j-1} \in [r', r'']$, $x_j \in [r', r'']$, $x_{j-1} \approx x_j$, $f(x_{j-1}) < 0$ y $f(x_j) > 0$ » (Principio de recurrencia). Entonces « existe r_0 tal que $r_0 \in \mathbb{R}_s \cap [r', r'']$, $r_0 \approx x_{j-1}$, $r_0 \approx x_j$ y $f(r_0) = 0$ ». ([3], [33], [50], [61])

[63] Se demuestra que si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $r' \in \mathbb{R}_s$, $r'' \in \mathbb{R}_s$, $r' < r''$, $[r', r''] \subset D$ y existe $\int_{r'}^{r''} f(x).dx$ (integral de Riemann de f en $[r', r'']$) entonces $\int_{r'}^{r''} f(x).dx \in \mathbb{R}_s$.
En efecto, entonces $u = \int_{r'}^{r''} f(x).dx$ es una fórmula estandar en la que figura libre u y solo u y se verifica $\exists u(u = \int_{r'}^{r''} f(x).dx)$. Entonces se verifica $\exists^{st} u(u = \int_{r'}^{r''} f(x).x)$ (Principio de transferencia). Entonces $\int_{r'}^{r''} f(x).dx \in \mathbb{R}_s$.

[64] Si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $r' \in \mathbb{R}$, $r'' \in \mathbb{R}$, $r' < r''$, $[r, r''] \subset D$ y $s \in \mathbb{R}_s$ entonces (por ejemplo) « notamos $\int_{r'}^{r''} (vne) f(x).dx$ y decimos "integral de Riemann versión no estandar de f en $[r', r'']$" a s si y solo si, si $n \in \overline{\mathbb{N}}$ y $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n).S(n,f,[r', r''])$ (13) entonces $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) \approx s$ » (es decir, si y solo si se verifica $\forall u \forall v(((u \in \overline{\mathbb{N}}) \wedge (v \in S(n,f,[r',r'']))) \Rightarrow (v \approx s))$).

[65] Se demuestra que si D es un abierto real, f es una función estandar entre D y $\mathbb{R}$, $r' \in \mathbb{R}_s$, $r'' \in \mathbb{R}_s$, $r' < r''$, $[r', r''] \in D$ y $s \in \mathbb{R}$ entonces « $s = \int_{r'}^{r''} f(x).dx$ (versión estandar) (14) si y solo si $s = \int_{r'}^{r''} (vne) f(x).dx$ ».
En efecto, entonces si $P(u,z)$ es (la fórmula)

----

(13) Si D es un abierto real, f es una función entre D y $\mathbb{R}$, $r' \in \mathbb{R}$, $r'' \in \mathbb{R}$, $r' < r''$, $[r', r''] \subset D$ y $n \in \mathbb{N}^+$ entonces notamos $S(n,f,[r', r''])$ y decimos "conjunto de las sumas n-simas de Riemann de f en $[r', r'']$" al $\{\Sigma_{t=1}^{t=n} f(x_t).((r'' - r')/n) | (x_t \in \mathbb{R}) \wedge \forall t(((t \in \mathbb{N}) \wedge (1 < t < n)) \Rightarrow r' + (t - 1).((r'' - r')/n) < x_t < r' + t.((r'' - r')/n))\}$.

$(((u \in \mathbb{R}) \wedge (u > 0)) \Rightarrow ((z \in \mathbb{N}^+) \wedge \forall t \forall v(((t \in \mathbb{N}^+) \wedge (t > z) \wedge (v \in S(t,f,[r', r'']))) \Rightarrow (|v - s| < u))))$
entonces $P(u,z)$ es una fórmula estandar en la que figuran libres u,z y solo u,z y « se verifica $\forall u \exists z P(u,z)$ si y solo si $s = \int_{r'}^{r''} f(x).dx$ (versión estandar) ». Entonces

* si $s = \int_{r'}^{r''} f(x).dx$ (versión estandar) entonces se verifica $\forall u \exists z P(u,z)$. Entonces se verifica $\forall^{st} u \exists z P(u,z)$. Entonces se verifica $\forall^{st} u \exists^{st} z P(u,z)$ (Principio de transferencia). Entonces si $\varepsilon \in \mathbb{R}_s$, $\varepsilon > 0$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$ y $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) \in S(n,f,[r'', r'])$ entonces $|\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) - s| < \varepsilon$ ([12], [13], [14], [16], [17]). Entonces si $n \in \overline{\mathbb{N}}$ y $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) \in S(n,f,[r', r''])$ entonces $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) \approx s$ ([33], [34], [35], [36]).
Entonces $s = \int_{r'}^{r''} (vne) f(x).dx$ ([64]).
* si $s = \int_{r'}^{r''} (vne) f(x).dx$ entonces si $n \in \overline{\mathbb{N}}$ y $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) \in S(n,f,[r', r''])$ entonces $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) \approx s$ ([64]). Entonces si $\varepsilon \in \mathbb{R}_s$, $\varepsilon > 0$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$ y $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) \in S(n,f,[r', r''])$ entonces $|\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) - s| < \varepsilon$ ([17], [33], [34],

----

(14) Si D es un abierto real, f es una función entre D y $\mathbb{R}$, $r' \in \mathbb{R}$, $r'' \in \mathbb{R}$, $r' < r''$, $[r', r''] \subset D$ y $s \in \mathbb{R}$ entonces (versión estandar) « notamos $\int_{r'}^{r''} f(x).dx$ y decimos "integral de Riemann de f en $[r', r'']$" a s si y solo si, si $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe n_0 tal $n_0 \in \mathbb{N}^+$ y si $n \in \mathbb{N}^+$, $n > n_0$ y $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) \in S(n,f,[r', r''])$ entonces $|\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) - s| < \varepsilon$ (es decir, si y solo si para todo ε, si $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe n_0 tal que $n_0 \in \mathbb{N}^+$ y para todo n y para todo $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n)$, si $n \in \mathbb{N}^+$, $n > n_0$ y $\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) \in S(n,f,[r', r''])$ entonces $|\Sigma_{j=1}^{j=n} f(x_j).((r'' - r')/n) - s| < \varepsilon$. Es decir, si y solo si se verifica $\forall u(((u \in \mathbb{R}) \wedge (u > 0)) \Rightarrow \exists z((z \in \mathbb{N}^+) \wedge \forall t \forall x(((t \in \mathbb{N}^+) \wedge (t > z) \wedge (x \in S(t,f,[r', r'']))) \Rightarrow (|x - s| < u))))$).

[35], [36]). Entonces se verifica $\forall^{st}u\exists zP(u,z)$ (Principio de existencia), [6], [12], [13], [14], [17], [33], [34], [35], [36]). Entonces se verifica $\forall u\exists zP(u,z)$ (Principio de transferencia). Entonces $s = \int_{r'}^{r''} f(x).dx$ (versión estandar).

Entonces « $s = \int_{r'}^{r''} f(x).dx$ (versión estandar) si y solo si $s = \int_{r'}^{r''} (vne)f(x).dx$ ».

OBSERVACIONES

1ª.- Todas las sucesiones de las cuales consideramos el límite y todas las funciones de las cuales consideramos el límite en un punto, la derivada en un punto o la integral en un intervalo, son conjuntos estandar. Sin embargo, no solo es posible un estudio de sucesiones y funciones tanto estandar como no estandar, sino que ello debe representar un objetivo primordial del análisis no estandar.

2ª.- En virtud de lo referido en el Capítulo V, Segunda parte, digamos que,

* un número real r es el límite de una sucesión estandar de números reales si y solo si los términos ilimitadamente avanzados de la sucesión son ilimitadamente próximos a r.

* una sucesión estandar de números reales es regular o de Cauchy si y solo si los términos ilimitadamente avanzados de la sucesión son ilimitadamente próximos entre si.

* un número real r es el límite de una función estandar real de variable real, en un punto estandar x_c si y solo si los valores de la función correspondientes a valores de la variable ilimitadamente próximos a x_0, son ilimitadamente próximos a r.

* una función estandar real de variable real es continua en un punto estandar x_0 si y solo si los valores de la función correspondientes a valores de la variable ilimitadamente próximos a x_0, son ilimitadamente próximos entre sí.

* una función real de variable real es uniformemente continua en un conjunto estandar A (en el que está definida) si y solo si los valores de la función correspondientes a valores de la variable pertenecientes a A e ilimitadamente próximos entre sí, son ilimitadamente próximos entre sí.

Los referidos enunciados, fácilmente imterpretables en el análisis no estandar, son a menudo utilizados por los profesores de matemáticas (en las Enseñanzas Medias, por ejemplo) a pesar de que para el formalismo del análisis estandar, que es el que consideran, no sirven porque son imprecisos, lo que se les perdona en virtud de lo sencillo e intuitivos que resultan.

3ª.- Diferencial en un punto x_0 de una función f real de variable real, definida y derivable en x_0, es la función $df(x_0)$ real, de variable real, que a los valores Δx_0 de la variable considerados como incrementos de la variable de f en x_0, hace corresponder incrementos de la función lineal que define a la recta tangente en x_0 a la curva definida por f (15). Es decir, $df(x_0)(\Delta x_0) = f'(x_0).\Delta x_0$ (figura 1). La diferencial en un punto x_0 de una función f

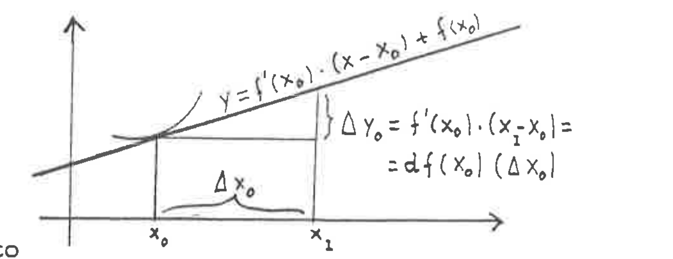


figura 1

----

(15) Entendiendo que si, por ejemplo, D es un abierto real y f es una función continua entre D y $\mathbb{R}$ entonces "curva definida por f" es una función γ entre D y $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tal que si $x_0 \in D$ entonces $\gamma(x_0) = (x_0, f(x_0))$.

(real, de variable real, definida y derivable en x_0) no es, pues, para el análisis estandar, un "muy pequeño" incremento de la función f correspondiente a un "muy pequeño" incremento de la variable en el punto x_0, ni incremento alguno de la función f, correspondiente a incremento alguno de la variable en x_0, ya que (la referida diferencial) es una función.

Sin embargo, físicos, químicos, economistas, ingenieros, etc., cuando utilizan diferenciales y con el fin de razonar de manera rápida e intuitiva, corrientemente lo que hacen, al margen del formalismo del análisis estandar y sin otro formalismo que lo sustituya, es considerar que si $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_0$, el intervalo cerrado de extremos x_0, x_1 está contenido en D y x_1 es "muy próximo" a x_0 entonces una diferencial de la variable de f en x_0 es el número "muy pequeño" $x_1 - x_0$ (y para que se entienda que dicho número es "muy pequeño" se acostumbra a escribir "$x_1 - x_0 = dx_0$" en lugar de "$x_1 - x_0 = \Delta x_0$"), una diferencial de la función f en x_0 es el número "muy pequeño" $f(x_1) - f(x_0)$ (y para que se entienda que dicho número es "muy pequeño" se acostumbra a escribir "$f(x_1) - f(x_0) = df(x_0)$" en lugar de "$f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$") y una diferencial de la curva definida por la función f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es el segmento cerrado de longitud "muy pequeña" y de extremos los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ de la referida curva.

Y todo ello, repito, corrientemente lo hacen al margen del formalismo del análisis estandar y sin otro formalismo o teoría que lo sustituya.

Pues bien, las referidas definiciones fácilmente pueden ser interpretadas en el análisis no estandar conviniendo en que "muy próximo" signifique "ilimitadamente próximo", "casi igual" ([34]) y "muy pequeño" signifique "infinitésimo" ([32]). Y si decimos que "en el plano afín euclideo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, una recta T es ilimitadamente próxima a una recta T_1 si y solo si, si x^* es un número real limitado, $(x^*, y^*) \in T$ y $(x^*, y^*_1) \in T_1$ entonces $y^* \approx y^*_1$", entonces, en virtud de [51], es válida la intuitiva definición siguiente: "recta tangente a una curva definida por una función estandar f real de variable real, en un punto estandar $(x_0, f(x_0))$, es la recta estandar ilimitadamente próxima a toda recta que pase por el punto $(x_0, f(x_0))$ y por otro punto de la referida curva ilimitadamente próximo a $(x_0, f(x_0))$".

4ª.- Es proverbial la incomodidad de los razonamientos en el análisis infinitesimal estandar o clásico, por la necesaria consideraciòn de los tradicionales n_0 (número natural "muy grande"), ε y δ (números reales positivos "muy pequeños"). La utilización de tales n_0, ε y δ en los respectivos papeles que desempeñan en el análisis estandar (16) puede eludirse en el análisis no estandar y así ("sin pasos al límite") conseguir razonar con más fluidez, al estilo del álgebra. Esto ocurre, por ejemplo, utilizando las definiciones no estandar referidas en estas "Observaciones" y, de acuerdo con [53], entendiendo la integral de Riemann de una función estandar real de variable real entre límites estandar como la parte estandar de una cierta suma finita (ilimitada pero finita).

----

(16) ε y n_0 en el esquema « para todo número real positivo ε ("por pequeño que sea") existe un número natural n_0 ("suficientemente grande" como para) que para todo número natural $n > n_0$ ...» y ε y δ en el esquema « para todo número real positivo ε ("por pequeño que sea") existe un número real positivo δ ("suficientemente pequeño" como para) que todo ...».

BIBLIOGRAFIA

Diener, Francine: "Cours d'analyse non standard". Université d'Oran. Département de Mathématiques. 1983.

Nelson, Edward: "Internal Set Theory: a new approach to nonstandard analysis". Bulletin of the Amer. Math. Soc. Vol. 83. Number 6. Pag. 1165-1198. November. 1977.

LA GEOMETRIA DE LA INVERSION

María Ortiz Vallejo
Dpto Algebra Geometría y Topología
Universidad de Valladolid

INTRODUCCION Entre los objetivos prioritarios en la enseñanza de la geometría recomendados en los nuevos planes de secundaria, parece observarse una vuelta atrás en la tendencia a la desaparición de la geometría que presentaban los planes anteriores a los años sesenta [1].

Sin embargo, el citado documento, hablando de la geometría, recomienda "la adquisición de las estructuras conceptuales de un sistema axiomático". Esta consideración, que parece primar el estudio de la geometría mediante un razonamiento deductivo, pierde de vista la faceta inductiva y puede llevar consigo una serie de dificultades en el aprendizaje de esta ciencia. Debemos tener presente que los alumnos de estos cursos, a quien está dirigido el documento de referencia, comprenden mejor la inducción que la deducción, sobre todo en un campo tan ligado a la experiencia personal como es la geometría. No obstante, no nos oponemos al estudio sistemático derivado de una axiomática en otras partes de las Matemáticas, como por ejemplo en el campo numérico.

Recordemos la célebre pugna que mantenían los profesores Huxley y Sylvester [2] sobre si las Matemáticas es una ciencia inductiva o deductiva. Según el primero, célebre biólogo, el razonamiento matemático es casi puramente deductivo, y por tanto concibe que la tarea del estudiante de Matemáticas es el de deducir cualquier resultado pedido a partir de un número limitado de proposiciones. Afirma también en un articulo publicado en el Fortnightly Review que "la matemática es aquel estudio que no sabe nada de la observación, nada del experimento, nada de la inducción, nada de la causación". Sylvester sin embargo defiende y argumenta la importancia de la observación en la mayor parte de las grandes ideas y descubrimientos matemáticos, así como en su propia experiencia matemática. En cuanto a la presentación de la geometría para la enseñanza secundaria Syivester sigue defendiendo esta tendencia, recordando en dicho articulo que: "el prematuro estudio de Euclides me hizo odiar la geometría".

En esta línea, presentamos algunos conceptos relacionados con la inversión, tema lamentablemente olvidado en los currícula actuales, debido a que posee para la enseñanza unas características que permiten pasar directamente de la experiencia a la teoría incluyendo un proceso matemático relativamente complejo. El construir un aparato y presentar mediante su funcionamiento una serie de hechos curiosos, implica inmediatamente unas preguntas que justifican la utilización de un razonamiento formal y la ayuda de dibujos. De esta manera al mismo tiempo que recuperamos la conexión con la experiencia del alumno, creamos esquemas de razonamiento. Así el objetivo de esta primera parte de nuestro trabajo, es presentar un tema de geometría en donde se integra: razonamiento algebraico, dibujo, utilización de aparatos e incluso se dé la posibilidad de que el alumno realice exploraciones basadas en programas informáticos [3].

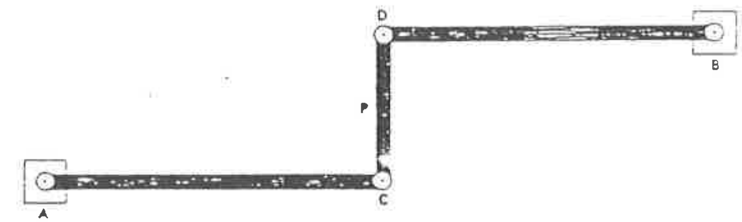
Por último, queremos puntualizar que no se trata de una lección incluida en los curricula actuales de bachillerato y C.O.U., aunque de hecho, en 3° de B.U.P. se estudia la potencia de un punto respecto de una circunferencia y en dibujo se utilizan algunas propiedades de la inversión.

1.MAQUINAS

Dos conceptos básicos en la geometría son los de recta y circunferencia; la construcción de ésta última no ofrece dificultad puesto que el compás (que se puede entender como una barra de longitud constante fija por un extremo), puede describir perfectamente una circunferencia, implícitamente usamos que la circunferencia es una figura acotada y se puede construir en su totalidad. Sin embargo, la recta conlleva una infinitud, lo que hace que su dibujo completo sea imposible. ¿Cómo dibujar un segmento de recta?.

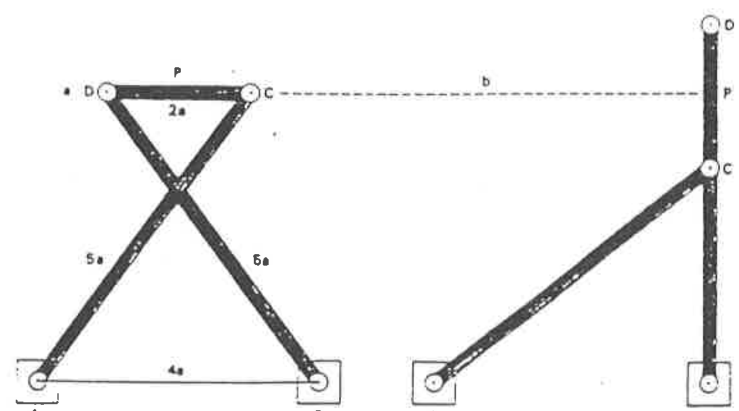
Para resolver este problema que está muy lejos de ser trivial, se crearon algunos sistemas articulados que podrían llevar a construir una recta, y que pasamos a describir [4].

1.a) El sistema de Watt (1736-1819) (Fig.1) está formado por dos varillas de igual longitud AC y BD, fijas en los extremos A y B; el punto medio P de la varilla CD describe una curva que se confundiría con un segmento de recta si las varillas AC y BD fueran infinitamente largas.



I

1.b) El sistema de Tchebychev (1850) (Fig.2) pretende el mismo objetivo y está constituido por tres varillas AC,BD y DC, de forma que el punto medio P de CD, que mide "2a", dista "4a" de la recta AB cuando CD y AB son paralelos, desde esta posición hasta que CD es perpendicular a AB el punto P describe aproximadamente un segmento de recta paralelo a AB.

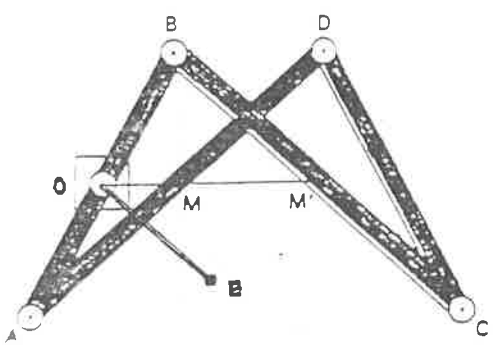


2

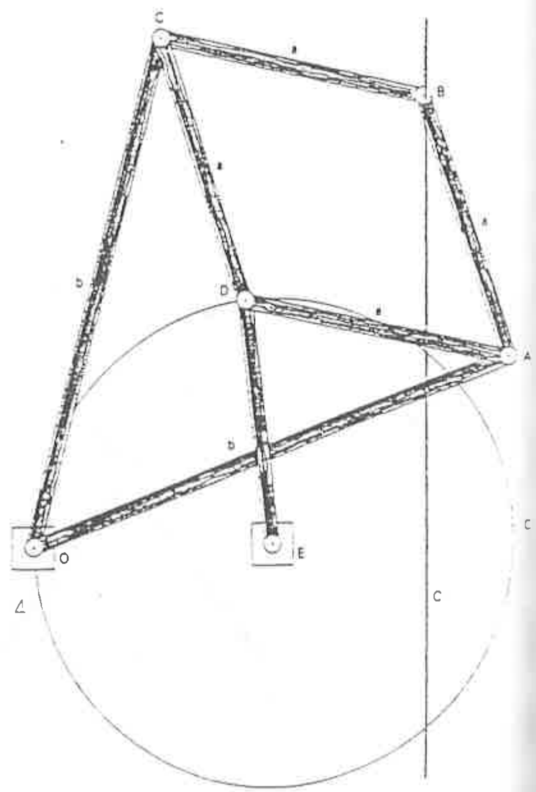
Por otra parte, partiendo de que podemos dibujar una circunferencia existen otras maneras de dibujar rectas, para ello utilizaremos unos sistemas articulados, denominados inversores que transformen las circunferencias en rectas; a continuación los describiremos brevemente.

1.c) Inversor de Peaucellier (Fig.4) constituido por siete varillas, cuatro formando un rombo articulado de lados "a" cuyos vértices opuestos están unidos a otras dos varillas iguales de lados "b" que se articulan en un punto O.

1.d) Inversor de Hart (Fig.3) más simplificado que el anterior, está constituido por cinco varillas, cuatro forman un cuadrilátero no convexo ABCD cuyos lados opuestos son iguales, siendo O, M y M' los puntos medios respectivamente de las varillas AB y AD y BC.



3



4

2.EXPOSICION MATEMATICA

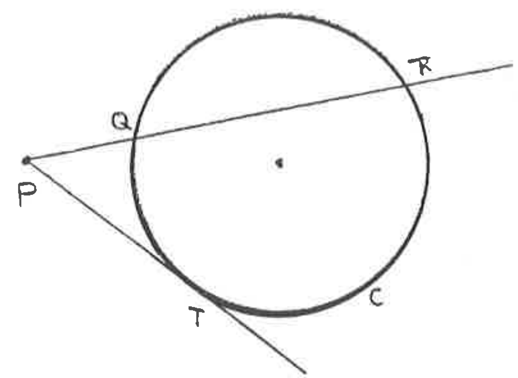
En este apartado vamos a exponer una primera parte de conceptos matemáticos que nos van a permitir justificar algunas observaciones que realizaremos con los aparatos antes descritos.

2.a)Potencia de un punto respecto de una circunferencia.

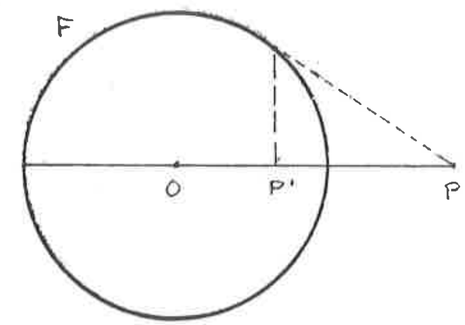
Dada una circunferencia C y un punto no perteneciente a ella P, se verifica que para toda recta que pase por P y corte a C en los puntos Q y R (pueden coincidir si la recta es tangente a C) el producto PQ.PR es constante (Fig. 5).

2.b)Inversión: Sea una circunferencia F(O,R) y un punto P_O, llamamos inversión respecto a F a la transformación geométrica que lleva de cada punto P a otro punto P' sobre el rayo OP, tal que el producto de los segmentos OP y OP' sea igual al cuadrado de radio de la circunferencia dada que se llama razón de inversión. Fig.6.

$$OP.OP' = R^2$$



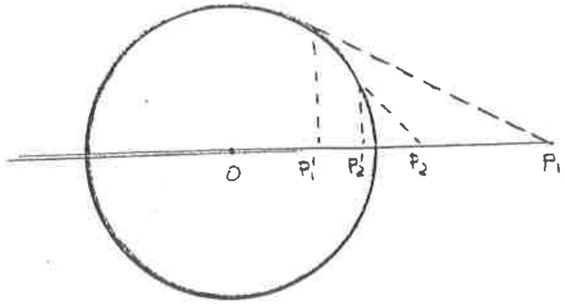
5



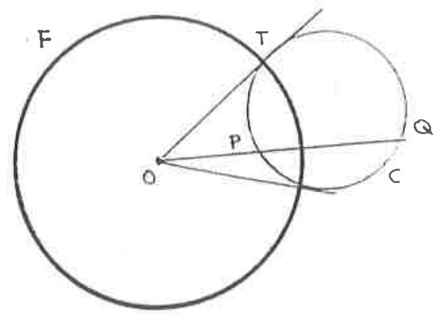
6

Resulta evidente que si el punto P' es inverso de P, igualmente el punto P es inverso de P' en la misma inversión.

De la definición podemos deducir que al ser este producto constante, ocurre que si OP>R entonces OP'< R y viceversa. De modo intuitivo resulta claro que el inverso del punto O (centro de inversión) es un punto infinitamente alejado de él en todas las direcciones, ya que cuando P' se acerca a O, OP' disminuye, y OP debe aumentar; en la figura 7 se ve el proceso.



7



8

Propiedades geométricas de la inversión

Propiedad 1. Puntos invariantes en la inversión de centro O y razón k son los que se encuentran en una circunferencia del mismo centro y radio $\sqrt{k}$. Sea F la circunferencia de inversión de centro O y radio k, su inversa es ella misma, es invariante, puesto que $\forall P \in F$ $f(P)=P$, por tanto $f(F)=F$.

Propiedad 2. Circunferencias invariantes en la inversión. Sea C una circunferencia (fig.8) ortogonal a F, $F \perp C$ y por tanto OT es tangente a C, de aquí, $OT^2 = OP.OQ$, lo que nos indica que todo punto Q de C se transforma en P, $f(Q)=P$, resultando por tanto C también invariante, aunque los transformados en ésta no coincidan.

Propiedad 3. La recta que pasa a través del centro de inversión O es inversa de sí misma.

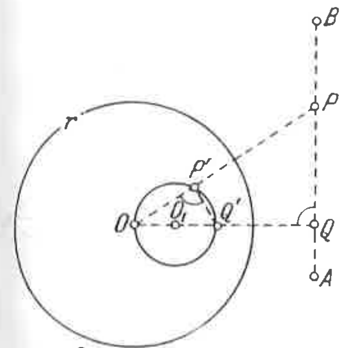
Propiedad 4. La inversa de una recta dada AB que no pasa por el centro de inversión P, es una circunferencia (O_1,OO_1) que pasa por el centro de inversión O, de modo que siempre $OO_1 \perp AB$.

En efecto, (fig.9), sea Q la base de perpendicular bajada del centro de inversión O sobre la recta dada, Q' el punto inverso de Q. Tomemos un punto arbitrario de la recta P, y sea P' su punto de inversión. Por el lema anterior y como los triángulos OP'Q' y OPQ son semejantes:

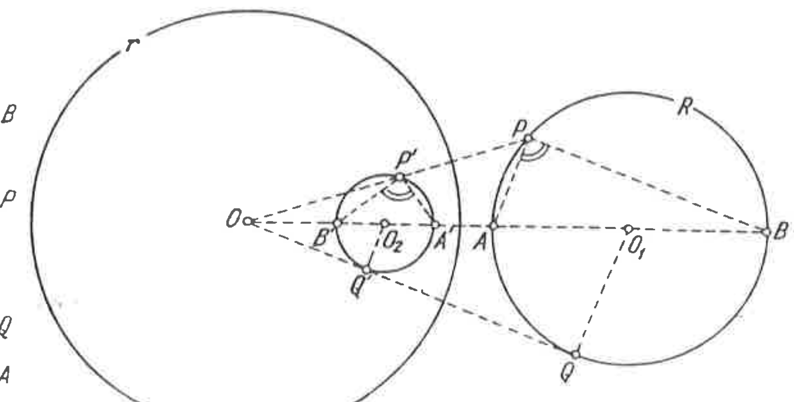
$$\angle OP'Q' = \angle OQP = 90^\circ$$

por tanto, cuando el punto P se desplaza a lo largo de la recta AB, sus puntos de inversión se desplazan describiendo una circunferencia, que tiene como diámetro OO'. Como la circunferencia (O_1,OO_1) y la recta AB son mutuamente inversas, se verifica la afirmación

inversa.



9



IO

Propiedad 5. La inversa de una circunferencia $(O_1.R_1)$ que no pasa por el centro de inversión, es también una circunferencia. (En este caso el centro de inversión O es centro de semejanza de dichas circunferencias) (Fig.10).

En efecto, como se conservan los ángulos: $\angle OA'P' = \angle OPA$ y $\angle OB'P' =$ $\angle OPB$

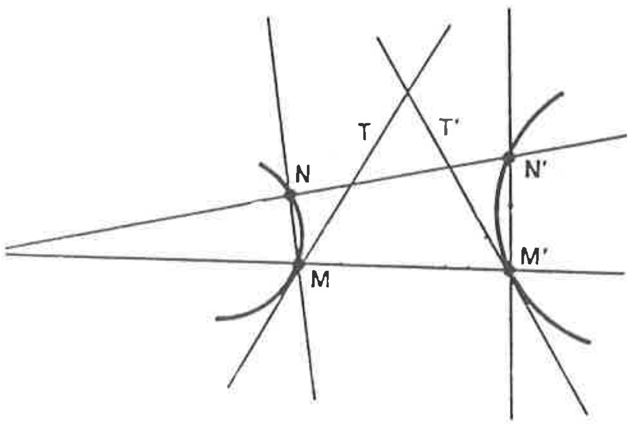
de donde: $\angle OB'P' - \angle OA'P' = \angle OPB - \angle OPA$

como $\angle A'P'B' = \angle OB'P' - \angle OA'P'$ y $\angle APB = \angle OPB - \angle OPA = 90^\circ$

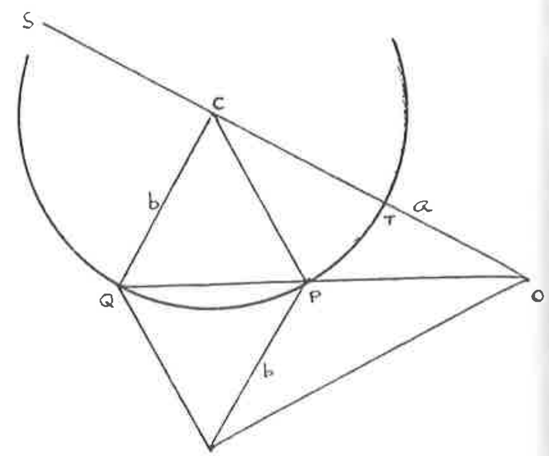
se deduce que: $\angle A'P'B' = \angle APB = 90^\circ$ lo que nos indica que si el punto P se mueve a lo largo de la circunferencia dada (O_1,R_1), entonces P' describe la circunferencia $(O_2,A'B'/2)$.

Propiedad 6. (Fig.11) La inversión es una transformación conforme. Recordemos que el ángulo que forman un segmento AB con un arco AC es el ángulo que forma el segmento AB con la tangente a AC en el punto común A. Consideremos dos curvas MN y M'N' inversas entre sí en una inversión de centro O y cuyas tangentes M y M', homólogos en la inversión son respectivamente MT y M'T'.

Como OM.OM' = ON.ON' por definición de inversión, los ángulos OM'N' y ONM son iguales y también serán iguales los ángulos que se forman con la recta OM y los límites de las secantes TM y T'M'. Puesto que en el límite al tender N a M y N' a M', el ángulos OM'N' será igual a OM'T' y lo mismo entre ONM y OMT = TMM'.



II



I2

3.OBSERVACIONES CON LOS INVERSORES.

a) Vamos a demostrar que en el inversor de Pauceller se verifica que los puntos P y Q se corresponden por una inversión de centro O y potencia $a^2 - b^2$ (Fig.12). Si trazamos una circunferencia de centro C y radio b, corta al rayo OC en dos puntos R y S, por tanto se verificara:

$$OP.OQ = OT.OS = (OC - CT).(OC + CS) = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

luego $OP.OQ = a^2 - b^2 = R^2$ de forma que $(R = \sqrt{(a^2 - b^2)}$

para el caso en que Q = P se verifica que OP = R (prop.1).

Una varilla DE con centro en E y que pase por O al describir una circunferencia hará que el punto B describa una recta. En la fig.12, en la que añadimos la varilla móvil sujeta a P de modo que PE = d, podemos observar que fijando O y E cuando P describe una circunferencia de centro E que pase por O, Q se mueve a lo largo de una recta (proposición 4).

b) Como en el párrafo anterior, vamos a demostrar que en el inversor de Hart (fig.13) los puntos P y T (puntos medios de BD y AC) se corresponden por una inversión de centro O.

Primeramente vamos a ver que los puntos OPTQ se encuentran en línea recta, para

lo cual prolongaremos los lados BA y CD de forma que $BA \cap CD = R$. En la fig 13 podemos observar que los triángulos ABD = ACD (un lado común y dos lados iguales), por tanto: $\angle ABD = \angle ACD$ y $\angle CAD = \angle ADB$. Por otra parte, los triángulos BDC = CAB (un lado común y dos lados iguales), por tanto: $\angle DBC = \angle ACB$ y $\angle CAB = \angle BDC$. Las dos condiciones anteriores implican las siguientes igualdades entre los ángulos del triángulo RBC:

$$\angle RBC = \angle RCB, \angle RAD = \angle RDA;$$

como AD || BC (Thales): OQ || AD || BC

Veamos ahora lo que vale la constante de inversión (Fig.14), para lo cual vamos a trazar una circunferencia que pase por los puntos P,Q,R y T. Que el producto OP.OQ es constante lo podemos averiguar de la forma siguiente:

$$OP.OQ = OR.OI \qquad \text{(OR es constante)}$$

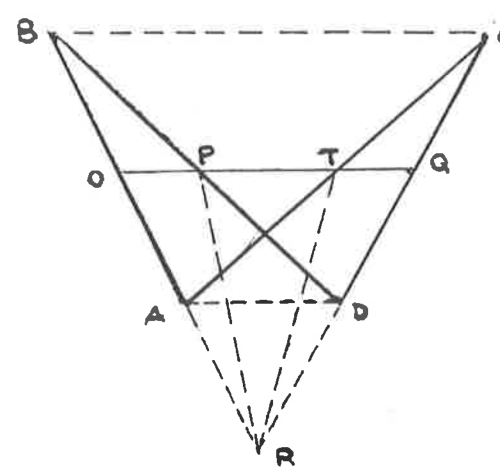
por otra parte como la potencia respecto a un punto (A) es constante, se verifica:

$$AQ.AT = AR.AI ===> AI = AQ.AT/AR = (a/2.a)/b = a^2/2b = K$$

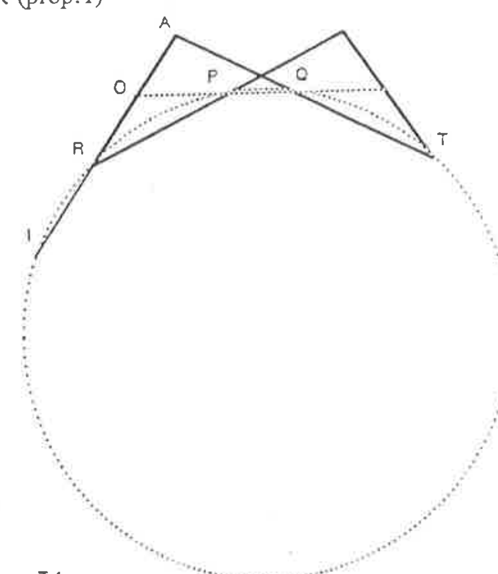
$$OI = AI - OA = (2a^2-2b^2)/4b$$

por tanto: $OP.OQ = OR.OI = (a^2-b^2)/4$ c.q.d.

para el caso en que Q = P se verifica que OP = R (prop.1)



I3



I4

4.APLICACIONES GEOMETRICAS

Podemos citar algunos problemas geométricos que se pueden resolver mediante la inversión, como por ejemplo el trazado de una circunferencia tangente a tres circunferencias. De esta manera problemas relativos a circunferencias los podemos convertir en problemas relativos a rectas y viceversa; se pueden encontrar en numerosos textos de dibujo y tienen obvias aplicaciones en la construcción de engranajes.

BIBLIOGRAFIA:

[1] S.A.E.M. Thales. "Estandares curriculares y de evaluación para la educación matemática". Edit. Thales. sevilla. 1991.

[2] Roanes Macias E. y Roanes Lozano E. "Simulación informática de la transformación geometrica "inversión". Revista Puig Adam. nº 4. 1990.

[3] NEWMAN J.R. Sigma. "El mundo de las Matemáticas". Sylvester J.J.: "El estudio que no sabe nada de la observación". Edit. Grijalbo. Barcelona. 1983.

[4] Rideau F. "Les sistèmes articulés". Revue Pour la science nº 136 fébrier 1989.

[5] Kostovski A.N. "Construcciones geométricas mediante un compás". Edit. Moscú. 1980.

[6] Matemáticas para el curso preuniversitario. Geometría y Trigonometría por Edelvives. Edit. Luis Vives. Zaragoza. 1961.

RESEÑAS DE LIBROS

SIMULACIÓN DIDÁCTICA DE LOS GRUPOS DE SIMETRÍA EN EL ARTE HISPANO-MUSULMAN, por *Eugenio Roanes Macías* y *Eugenio Roanes Lozano*. Universidad Complutense: Publicaciones "Pablo Montesino". 1993. 64 páginas y un disquete con programas.

Este libro recoge el fruto del trabajo que mereció el **premio de investigación "Pablo Montesino" 1992**.

Comienza este breve libro por hacer una introducción clara, sencilla y atractiva a la teoría de los grupos cristalográficos planos, proporcionando al lector los conceptos fundamentales y las proposiciones más importantes relativas a ellos. Incluye unos documentados datos históricos sobre los problemas que suscitan; pasa después a exponer como pueden generarse los 17 grupos de simetría posibles y termina con los métodos para clasificar mosaicos según los grupos a que corresponden.

Para cada uno de los grupos mencionados escoge un ejemplo tomado del enorme repertorio que nos suministran los motivos decorativos de la **Alhambra de Granada**. Es sorprendente que éstos agoten todas las posibilidades matemáticas, siglos antes de que se desarrollase la teoría que los sistematiza. El libro viene ilustrado con profusión de figuras y trae al final una extensa bibliografía. Señalaremos que en ella se citan algunos artículos publicados en este Boletín.

El disquete que acompaña al libro contiene, además de un documento ilustrativo sobre su uso, unos programas ejecutables en ordenadores personales, bajo DOS, que permiten escoger cualquiera de los 17 grupos de simetría, obtener en la pantalla bellas imágenes de un mosaico de la Alhambra de Granada correspondiente a ese grupo y después analizarlo, mostrando su dominio fundamental, las isometrías que generan su célula a partir del dominio, la célula reticular y las traslaciones que generan el mosaico a partir de esa célula. La ejecución de esos programas resulta muy atractiva y tiene gran valor didáctico.

- - - - - - -

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problemas propuestos en la
XXXIV Olimpiada Matemática Internacional
celebrada en Estambul (Turquia)

PROBLEMA 1º:

Sea $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, con n entero, $n > 1$. Demuestre que $f(x)$ no puede ser el producto de dos polinomios, ambos con todos sus coeficientes enteros y de grado mayor o igual que uno.

- - - - -

PROBLEMA 2º:

Sea ABC un triángulo acutángulo y D un punto en su interior tal que

$$AC.BD = AD.BC \quad \text{y} \quad \angle ADB = \angle ACB + 90^\circ .$$

a) Calcule el valor de la razón

$$\frac{AB.CD}{AC.BD} .$$

b) Demuestre que las tangentes en C a las circunferencias circunscritas a los triángulos ACD y BCD son perpendiculares.

- - - - -

PROBLEMA 3º:

Sobre un tablero de ajedrez infinito se juega de la siguiente manera: Al principio hay n^2 fichas dispuestas sobre el tablero en un cuadrado de $n \times n$ casillas adyacentes, con una ficha en cada casilla. Cada jugada es un salto de una ficha en dirección horizontal o vertical sobre una casilla adyacente, ocupada por otra, hasta una no ocupada, contigua a ella. La ficha sobre la que se ha saltado se retira. Halle los valores de n para los que el juego puede terminar quedando una única ficha en el tablero.

- - - - -

PROBLEMA 4º:

Sean P , Q , R tres puntos del plano. Se define $m(PQR)$ como el mínimo de las longitudes de las alturas del triángulo PQR (si P , Q , R están alineados, entonces $m(PQR) = 0$). Sean A , B , C puntos dados del plano. Demuestre que para cualquier punto X del plano, $m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$.

- - - - -

PROBLEMA 5º:

Sea $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$. Determine si existe una función $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que cumpla las condiciones siguientes:

$$f(1) = 2 \quad ,$$

$$f(f(n)) = f(n) + n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad ,$$

$$f(n) < f(n+1) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad .$$

- - - - -

PROBLEMA 6º:

Sea $n > 1$ un entero. Hay n lámparas L_0, L_1, $\ldots$, L_{n-1} dispuestas en círculo. Cada lámpara puede estar encendida o apagada. Se lleva a cabo una sucesión de pasos S_0, S_1, $\ldots$, S_i, $\ldots$. El paso S_j afecta únicamente al estado de L_j (dejando inalterado el estado de las demás lámparas) como sigue:

Si L_{j-1} está encendida, S_j cambia el estado de L_j de encendida a apagada o de apagada a encendida.

Si L_{j-1} está apagada, S_j deja inalterado el estado de L_j .

Las lámapras se denotan mód n , esto es $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, etc. Inicialmente todas las lámparas están encendidas. Demuestre que:

a) Existe un entero positivo $M(n)$ tal que después de $M(n)$ pasos, todas las lámparas están encendidas de nuevo.

b) Si n es de la forma 2^k , todas las lámparas están encendidas después de $n^2 - 1$ pasos.

c) Si n es de la forma $2^k + 1$, todas las lámparas están encendidas después de $n^2 - n + 1$ pasos.

- - - - -

Problemas propuestos en la
VIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
celebrada en Méjico

PROBLEMA 7º:

Un número natural es capicúa si, al escribirlo en notación decimal, se puede leer de igual forma tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda, por ejemplo: 8, 23432, 6446.

Sean $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots$ todos los números capicúas. Para cada i sea $y_i = x_{i+1} - x_i$.

¿ Cuántos números primos distintos tiene el conjunto $\{y_1, y_2, y_3, \ldots \}$?

- - - - -

PROBLEMA 8º:

Demuestre que para cualquier polígono convexo de área 1 , existe un paralelogramo de área 2 que lo contiene.

- - - - -

PROBLEMA 9º:

Sea $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots \}$. Halle todas las funciones $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ tales que:

i) Si $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.

ii) $f(yf(x)) = x^2 f(xy)$, para todos x, y en $\mathbb{N}^*$.

- - - - -

PROBLEMA 10^{o}:

Sea ABC un triángulo equilátero y Γ su circunferencia inscrita. Si D y E son puntos de los lados AB y AC, respectivamente, tales que DE es tangente a Γ, demuestre que $\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1$.

- - - - -

PROBLEMA 11^{o}:

Sean P y Q dos puntos del plano. Denotemos por m(PQ) a la mediatriz del segmento PQ. Sea S un subcnjunto finito del plano, con más de un elemento, que satisface las siguientes propiedades:

a) Si P y Q son puntos distintos de S, entonces m(PQ) interseca a S.

b) Si P_1Q_1, P_2Q_2 y P_3Q_3 son tres segmentos diferentes cuyos extremos son puntos de S, entonces ningún punto de S pertenece simultáneamente a las tres rectas $m(P_1Q_1)$, $m(P_2Q_2)$ y $m(P_3Q_3)$.

Determine el número de puntos que puede tener S.

- - - - -

PROBLEMA 12^{o}:

Dos números enteros no negativos a y b son "cuates" si la expresión decimal de a + b consta solamente de ceros y unos. Sean A y B dos conjuntos infinitos de enteros no negativos, tales que B es el conjunto de todos los números que son "cuates" de todos los elementos de A, y A es el conjunto de todos los números que son "cuates" de todos los elementos de B.

Pruebe que en uno de los conjuntos A o B hay infinitos pares de números x, y tales que x - y = 1.

- - - - -

PROBLEMAS PROPUESTOS POR NUESTROS SOCIOS

PROBLEMA 13^{o}:

Diremos que cuatro puntos de un plano forman una *cuaterna concíclica* si están sobre una circunferencia o sobre una recta.

Si los 8 puntos A, B, C, D, E, F, G, H del plano son tales que las cuaternas ABCD, ABFH, ACFG, BDEH y CDEG son concíclicas, probar que la cuaterna EFGH también lo es.

Propuesto por Julio Fernández Biarge

- - - - -

PROBLEMA 14^{o}:

Dados los números naturales n, m, y siendo $1 \le n \le m$, hallar el determinante de la matriz $A = (a_{ij})$, $(i = 1,2,\ldots,n\ ;\ j = 1,2,\ldots,n)$, siendo

$$a_{ii} = 1 + \binom{m}{i}\binom{n}{i} \quad \text{y, si } i \neq j,\ a_{ij} = \binom{m}{i}\binom{n}{j}.$$

Propuesto por Joaquín Gómez Rey

- - - - -

PROBLEMA 15^{o}:

Demuestra que, siendo p un número primo mayor que 5, la suma $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^4}$, escrita como número racional $\frac{a}{b}$, tiene la propiedad de que a es divisible por p.

Propuesto por Joaquín Gómez Rey

- - - - -

PROBLEMA 16^{o}:

Siendo a_i $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ números reales distintos, calcular

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} 2x}{\prod_{i=1}^{2n} \operatorname{sen}(x - a_i)}\, dx$$

Propuesto por José Vicente García Sestafe

- - - - -

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

Propuestos en el nº	Procedentes de	Números de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	obs.
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2-86 / Varios	18	19	20	18	19	19/17		17	11	17	C
10	China / Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	-	C
11	OME-f1-86 /	13	14	14	14	14	23	20	15/20		12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17/15		15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	C
20	OME-f1-88 / Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26/26		24	C
21	OME-f2-89 /	24	27	24	27	27	24/27		25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	C
22	OMI-89-R.F.A. /	28	28	XX	28	29	30/30		30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	-	-	-	-	-	-	-	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	-	-	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	-	-	C
25	OME-f2 / f1- 90	34	31	29	29	31	32/32		32	32	33	C
26	OMI-90-China /	32	XX	XX	32	XX	XX/XX		32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	-	-	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	-	-	-	-	
29	OMI-91-Suecia	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
30	OI-91-Argentina /	XX	XX	XX	33	XX	XX/XX		33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	-	-	-	-	-	-	
31	OME-f2-92 /	XX	XX	XX	XX	XX	XX/XX		XX	XX	35	
	OME-f1-91 / PNS	XX	XX/XX		35	34	-	-	-	-	-	
32	OMI-92-Moscu /	35	XX	XX	XX	XX	XX/XX		35	XX	XX	
	OI-92-Venez./ PNS	XX	XX/XX		XX	-	-	-	-	-	-	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	XX	XX	XX	XX	XX	35/XX		XX	XX	XX	
	/PNS	XX	XX	XX	XX/XX		-	-	-	-	-	
34	OME-f2-93	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
35	OMI-93-Turq./	XX	XX	XX	XX	XX	XX/XX		XX	XX	XX	
	OI-93-Méjico/ PNS	XX	XX/XX		XX	XX	XX	-	-	-	-	

CLAVES: XX = Pendiente de publicación . C = Completo
OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 o 2).
OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OI = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.
PNS = Propuestos por nuestros socios.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 6º (Boletin nº 27)

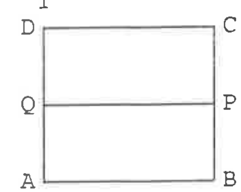
En el plano se considera un cuadrado ABCD, en el que P y Q son los puntos medios de los lados BC y DA, respectivamente. Sea f la transformación delo plano consistente en la simetría de eje la recta AB compuesta con la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$. Análogamente, sea g la transformación producto de la simetría de eje PQ por la traslación de vector $\overrightarrow{PQ}$. Razonar qué transformaciones son:

1) f^n , 2) $(g \circ f)^n$, 3) $g^n \circ f^n$,

según que n sea par o impar.

Solucion:

Sea $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PQ} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$; S la simetría de eje AB y S' la simetría de eje PQ ; S_1 la simetría de eje AD y S_2 la simetría de eje la mediatriz de AB .



Se tiene $T_{\vec{a}} = S_2 \circ S_1$; y puesto que $S_1 \circ S$ es una simetría central, resulta $S_1 \circ S = S \circ S_1$.

Por la misma razón, $S_2 \circ S = S \circ S_2$ y, en consecuencia,

$T_{\vec{a}} \circ S = S_2 \circ S_1 \circ S = S_2 \circ S \circ S_1 = S \circ S_2 \circ S_1 = S \circ T_{\vec{a}}$.

(Indicamos con $T_{\vec{a}}$ la traslación de vector $\vec{a}$).

De todo ello, resulta:

1) $f = T_{\vec{a}} \circ S$; $f^2 = (T_{\vec{a}} \circ S) \circ (T_{\vec{a}} \circ S) =$
$= T_{\vec{a}} \circ (S \circ S) \circ T_{\vec{a}} = T_{2\vec{a}}$; $f^3 = f \circ f^2 =$
$= T_{\vec{a}} \circ S \circ T_{2\vec{a}} = S \circ T_{3\vec{a}}$; $f^4 = f \circ f^3 =$
$= T_{\vec{a}} \circ (S \circ S) \circ T_{3\vec{a}} = T_{4\vec{a}}$; ...

En general, **si** n **es par:** $f^n = T_{n\vec{a}}$;

si n **es impar:** $f^n = S \circ T_{n\vec{a}}$.

Análogamente, **si** n **es par:** $g^n = T_{-n\vec{a}}$;

si n **es impar:** $g^n = T_{-n\vec{a}} \circ S' = S' \circ T_{-n\vec{a}}$.

2) $g \circ f = (T_{-\vec{a}} \circ S') \circ (T_{\vec{a}} \circ S) = S' \circ T_{-\vec{a}} \circ T_{\vec{a}} \circ S =$
$= S' \circ S = T_{\vec{b}}$, y, por tanto, $(g \circ f)^n = T_{n\vec{b}}$
(traslación de vector $n.\overrightarrow{BC}$, sea n par o impar).

3) **Si** n **es par:** $g^n \circ f^n = T_{-n\vec{a}} \circ T_{n\vec{a}} = I$ (la identidad).

Si n **es impar:** $g^n \circ f^n = (S' \circ T_{-n\vec{a}}) \circ (S \circ T_{n\vec{a}}) = (S' \circ S) \circ (T_{-n\vec{a}} \circ T_{n\vec{a}}) = S' \circ S = T_{\vec{b}}$.

Francisco Lorenzo Miranda (Madrid)

- - - - - - -

PROBLEMA 14º (Boletin nº 31)

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo A no vacío y abierto; sean $x_0 \in A$ y $h_0 \in \mathbb{R}^+$, tales que si $h_0 > h > 0$, sea $x_0 - h$, $x_0 + h \in A$; suponemos que f es una función de la variable real x , tal que las derivadas laterales $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ existen.

Calcular el límite de $2.A_h/h^2$ cuando h tiende a 0 , manteniéndose positivo, donde A_h es el área del triángulo orientado determinado por los puntos $P(x_0, f(x_0))$, $Q(x_0-h, f(x_0-h))$, $R(x_0+h, f(x_0+h))$.

Propuesto por Juan Bosco Romero Marquez.

Solucion:

Se cumple la igualdad

$$2A_h = \begin{vmatrix} x_o & f(x_o) & 1 \\ x_o-h & f(x_o-h) & 1 \\ x_o+h & f(x_o+h) & 1 \end{vmatrix} .$$

Restando la primera fila de la segunda y después la tercera, resulta:

$$2A_h = \begin{vmatrix} x_o & f(x_o) & 1 \\ -h & f(x_o-h)-f(x_o) & 0 \\ h & f(x_o+h)-f(x_o) & 0 \end{vmatrix} =$$

$= -h\,[f(x_o+h)-f(x_o)] - h\,[f(x_o-h)-f(x_o)]$. Por tanto,

$$2A_h/h^2 = -\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} - \frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h} ,$$

con lo que el límite pedido es $-f'_+(x_o) - f'_-(x_o)$.

Alberto Aizpún (Madrid)

- - - - - -

PROBLEMA 10º (Boletin nº 31)

Se corta un alambre de un metro de longitud en dos trozos. Con uno de los trozos, se construye un cuadrado y con el otro, una circunferencia. Calcular por dónde hay que realizar el corte para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea: a) Mínima. b) Máxima.

Solucion:

Supongamos que uno de los trozos de alambre tiene una longitud de X metros. La longitud del otro trozo será $1 - X$. Con el trozo de longitud X construimos la circunferencia, en la cual se verifiricará que: $2\pi R = X$, o sea $R = \frac{X}{2\pi}$. El área del círculo será

$$\text{Area del círculo} = \pi R^2 = \frac{X^2}{4\pi} .$$

Con el trozo de longitud $1 - X$ costruimos el cuadrado de lado L que cumplirá: $4L = 1 - X$, con lo que $L = \frac{1-X}{4}$, y su área será:

$$\text{Area del cuadrado} = L^2 = \frac{(1-X)^2}{16} .$$

La suma de las áreas será:

$$S = \frac{(1-X)^2}{16} + \frac{X^2}{4\pi} = \frac{1-2X+X^2}{16} + \frac{X^2}{4\pi} .$$

Para estudiar cuándo esta función es máxima y cuándo es mínima, calcularemos su primera derivada y veremos para qué valores de X se anula. Ya que en los extremos relativos ha de ser $S'(X) = 0$.

$$S'(X) = \frac{-2+2X}{16} + \frac{2X}{4\pi} = \frac{X-1}{8} + \frac{X}{2\pi} = \frac{\pi(X-1) + 4X}{8\pi} .$$

$S'(X) = 0$ implica $\pi(X-1) + 4X = 0$ o sea $X(\pi+4) = \pi$ y, en consecuencia, $\boxed{X = \frac{\pi}{\pi+4}}$.

A continuación calculamos su segunda derivada y vemos si es positiva o negativa en dicho punto; si es positiva, la función tendrá un mínimo en ese punto, y si es negativa, un máximo. $S''(X) = \frac{\pi+4}{8\pi}$, positiva para todo X. Luego la función tiene un mínimo en el punto $X = \pi / (\pi+4)$.

a) De aquí se deduce que la suma de las áreas será mínima cuando uno de los trozos tenga por longitud $\boxed{X = \frac{\pi}{\pi+4}}$ y el otro $\boxed{1 - X = \frac{4}{\pi+4}}$.

b) S(X) es una función polinómica de segundo grado; su gráfica es una parábola. Por otra parte su segunda derivada es siempre positiva, lo que nos indica que la parábola muestra su concavidad hacia arriba y por tanto no tiene un máximo relativo. Tampoco lo tiene absoluto por ser abierto el intervalo de variación.

(Para $0 < X < 1$, S(X) se mantiene inferior a $S(1)=\frac{1}{4\pi}$ y se puede acercar tanto como se quiera a este valor; $X = 1$ correspondería a emplear todo el alambre en la circunferencia, sin cortarlo).

Jesus Izal Pinas

(Alumno del I.B. "Irubide". Pamplona)

- - - - - - - -

PROBLEMA 1º (Boletin nº 32)

Hallar todos los enteros a, b, c, con $1<a<b<c$, tales que $(a-1)(b-1)(c-1)$ divide a $abc - 1$.

Solucion:

Queremos que $\frac{abc - 1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = K \quad (K \in \mathbb{N})$.

Puede verse que $K > 1$, que es lo mismo que

$$abc - 1 > (a-1)(b-1)(c-1) ,$$

esto es, $abc - 1 > abc-(ab+bc+ac)+(a+b+c)-1$, o sea que $ab+bc+ac > a+b+c$, que es cierto, pues $ab>a$, $bc>b$, $ac>c$.

También $K < 4$; en efecto, $K = A - B$, con

$A = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1}$ y $B = \frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$

Como $\frac{n}{n-1}$ es máximo cuando n es mínimo (por ser decreciente para $n > 1$), A será máximo cuando $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ (por ser enteros diferentes mayores que 1), con lo que A valdrá, a lo más, $\frac{2.3.4}{1.2.3} = 4$ y como $B > 0$, será $K < 4$.

Por tanto, quedan los casos $K = 2$ y $K = 3$.

Para $K = 2$, $abc - 1 = 2(a-1)(b-1)(c-1)$, de donde $abc - 1$ es par, y en consecuencia, a, b, c son impares. Supongamos que a no fuese igual a 3, entonces A valdría como máximo $\frac{5.7.9}{4.6.8} = 1,64... < 2$, lo cual es

imposible. Por lo tanto, $a = 3$. Supongamos que b fuese distinto de 5 ; entonces A valdría como máximo $\frac{3.7.9}{2.6.8} = 1,96... < 2$, lo que es imposible. Por tanto, $b = 5$. Entonces, $\frac{3.5.c - 1}{2.4.(c-1)} = 2$, lo que conduce a $c = 15$, obteniéndose la

Solucion 1ª: $a = 3$, $b = 5$, $c = 15$.

Para $K = 3$, $abc - 1 = 3(a-1)(b-1)(c-1)$; si a fuese distinto de 2, A valdría como máximo $\frac{3.4.5}{2.3.4} = 5/2 < 3$, lo que es imposible (ya que $A > K$), por lo que (si hay solución) $a = 2$; en ese caso, $abc - 1$ es impar y deberá serlo $(a-1)(b-1)(c-1)$, por lo que b y c serán pares; si b no fuese 4 , A valdría como máximo $\frac{2.6.8}{1.5.7} = 2,74... < 3$, imposible, por lo que $b = 4$ (de haber solución) . Entonces, $\frac{2.4.c - 1}{1.3.(c-1)} = 3$, lo que da $c = 8$, y en definitiva:

Solucion 2ª: $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$.

No hay otras.

Jordi Sabate Iglesias (Barcelona)

(Alumno de 3º de la ETS de Ing. Industriales)

- - - - - - -

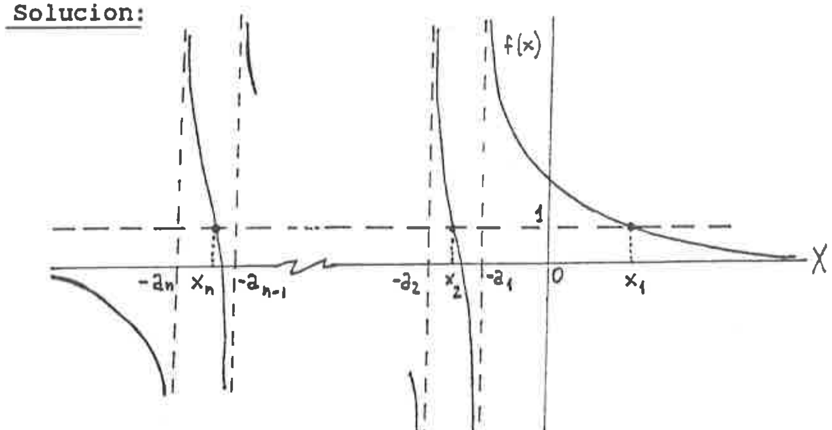
PROBLEMA Nº 8 (Boletin nº 32)

Dada la colección de n números reales positvos $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$, y la función:

$$f(x) = \frac{a_1}{x+a_1} + \frac{a_2}{x+a_2} + \dots + \frac{a_n}{x+a_n} ,$$

determinar la suma de las longitudes de los intervalos, disjuntos dos a dos, formados por todos los valores de x tales que $f(x) \geq 1$.

Solucion:



La ecuación $f(x) = 1$ tiene n soluciones, una positiva, que llamaremos x_1, y (n-1) negativas, que llamaremos $x_2, x_3, \ldots, x_n$, donde $x_i \in [-a_i, -a_{i-1}]$ (ver figura). La longitud pedida es, por tanto:

$$L = (x_1+a_1) + (x_2+a_2) + (x_3+a_3) + \ldots + (x_n+a_n),$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son desconocidas.

Volvamos a la ecuación: $f(x) = 1$, que puede escribirse:

$$a_1(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_n) +$$
$$+ a_2(x+a_1)(x+a_3)(x+a_4)\ldots(x+a_n) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_{n-1}) = (x+a_1)\ldots(x+a_n).$$

Esta ecuación es de la forma:

$$[a_1+a_2+\ldots+a_n]x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \ldots + Cx + D =$$
$$= x^n + [a_1+a_2+\ldots+a_n]x^{n-1} + A'x^{n-2} + \ldots + D', \text{ o sea}$$
$$x^n + 0x^{n-1} + A''x^{n-2} + B''x^{n-3} + \ldots + D'' = 0.$$

Si las soluciones son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la ecuación es $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = 0$, o sea

$$x^n - (x_1+x_2+\ldots+x_n)x^{n-1} + \ldots = 0,$$ y comparando con la anterior, resulta: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, y por tanto: $\boxed{L = a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

Jordi Sabate Iglesias (Barcelona)

(Alumno de 3º de la ETS de Ing. Industriales)

- - - - - -

PROBLEMA Nº 6 (Boletin nº 33)

Dado el número real x, se consideran: su parte entera [x] (es decir, el mayor número entero que es menor o igual que x), su parte fraccionaria {x} = x-[x] y el entero más próximo a x, representado por (x) y que se define como

$$(x) = \begin{cases} [x], & \text{si } 0 \le \{x\} < 1/2 \\ [x]+1, & \text{si } 1/2 \le \{x\} < 1 \end{cases}$$

Resolver la ecuación:

$$\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{10}.$$

Solucion:

Se pueden dar dos casos: a) (x) = [x]; b) (x) = [x] + 1

a) (x) = [x]. Como, evidentemente, x = [x] + (x), sustituyendo ambas expresiones en la ecuación:

$$\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{10}; \quad \{x\} = \frac{[x] + \{x\} + [x] + [x]}{10};$$
$$10\{x\} - \{x\} = 3[x]; \quad 3\{x\} = [x];$$

como estamos en el caso $0 \le \{x\} < 1/2$, ha de ocurrir que $0 \le 3\{x\} < 3/2$ y, por tanto, sólo se puede verificar la ecuación para [x] = 0 y [x] = 1 ; evidentemente, $\boxed{x = 0}$ es una solución.

Si [x] = 1, la (x) tiene que ser igual a 1/3, por tanto la otra solución es $\boxed{x = 4/3}$.

b) (x) = [x] + 1. Sustituyendo en la ecuación

$$\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{10}; \quad \{x\} = \frac{[x] + \{x\} + [x] + [x] + 1}{10}$$
$$10\{x\} - \{x\} = 3[x] + 1; \quad 9\{x\} = 3[x] + 1;$$

como estamos en el caso $1/2 \le \{x\} < 1$, será

$9/2 \le 9\{x\} < 9$; $9/2 \le 3[x] + 1 < 9$; $7/2 \le 3[x] < 8$; $7/6 \le [x] < 8/3$, y en definitiva, [x] = 2.

La {x} se obtendrá de 9{x} = 6 + 1 : {x} = 7/9.

Luego $x = 2 + \frac{7}{9}$ o sea $\boxed{x = \frac{25}{9}}$.

CONCLUSION: Las tres soluciones son:

0	$1,\widehat{3}$	$2,\widehat{7}$

David Brihuega Gonzalez (Madrid)

(alumno de 3º de BUP del I.B. Avda de los Toreros)

- - - - - -