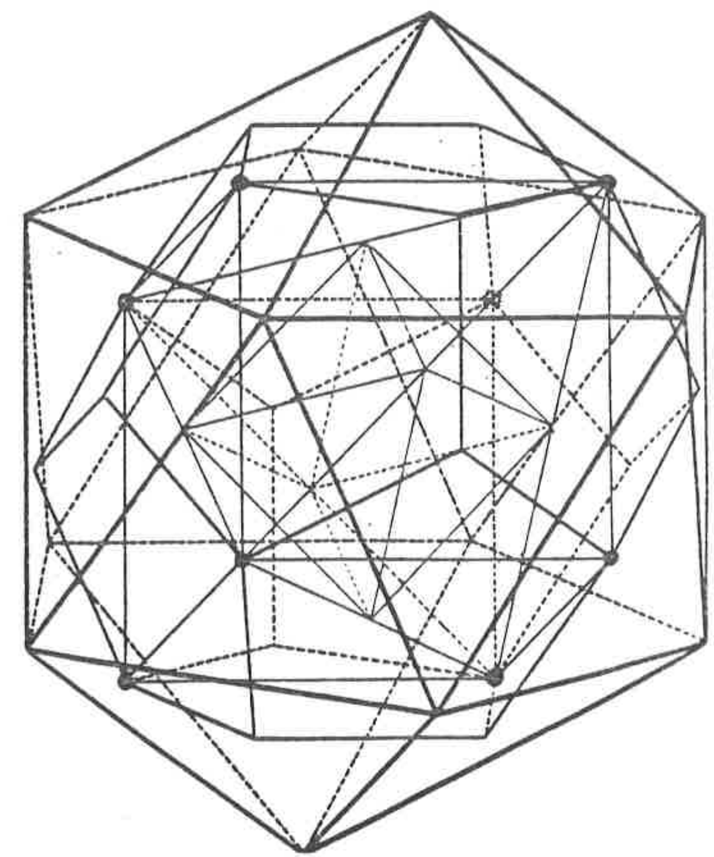
boletín nº 32

octubre 1992



sociedad

PUIG ADAM

de profesores

de matemáticas

B O L E T Í N de la Sociedad "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Octubre de 1992 nº 32 (1991-92)

- Toda la correspondencia para la Sociedad deberá dirigirse al

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

- La portada de este número presenta una perspectiva de los cinco poliedros regulares inscritos unos en otros.

INDICE Pág.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: *Jose Vicente García Sestafe*

Vicepresidente por Madrid:
Jose Manuel Martínez Sanchez

Vicepresidente por Castilla - La Mancha:
Salvador Herrero Pallardo

Vicepresidente por Castilla - León:
Juan Bosco Romero Marquez

Vocal de actividades y concursos:
Juan Ochoa Melida

Vocal de relaciones institucionales:
Eugenio Roanes Macías

Vocal de gestión de publicaciones:
Carmen García-Miguel Fernandez

Vocal de redacción de publicaciones:
Julio Fernandez Biarge

Secretario:
Francisco Gonzalez Redondo

Vicesecretario:
Enrique Rubiales Camino

Tesorero:
Alberto Aizpun Lopez

Bibliotecario:
Jesus Begoña Aina

- - - - - -

X CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

El X *Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas*, convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, se celebró el sábado 27 de Junio de 1992, en los locales del Instituto de Bachillerato *"Beatriz Galindo"*, que, como otras veces, nos fué amablemente cedido para ello.

Como es sabido, los Centros de Bachillerato o Formación Profesional pueden seleccionar hasta dos alumnos por curso de B. U. P. o análogo, para participar en este Concurso.

Este año, el número de Centros inscritos ha sido de 40, y el de alumnos seleccionados de 136 en total: 41 de Primero, 53 de Segundo y 42 de Tercero. La participación ha sido, por tanto, más alta que los años precedentes. De los 40 centros, 20 eran Institutos de Bachillerato, 2 de Formación Profesional y 18 colegios privados. De la Comunidad de Madrid eran 33 (17 de ellos de la capital), de Castilla y León, 5 y de Castlla - La Mancha, 2.

A los alumnos de cada curso se les propusieron cuatro problemas, para resolverlos en dos tandas de dos horas cada una. Damos los enunciados al final de esta crónica.

La entrega de premios se realizó en la tarde del mismo dia, en el salón de Actos del Instituto *"Beatriz Galindo"*. En ella, nuestro Presidente pronunció unas palabras de felicitación a los ganadores y a los Centros que los prepararon y de agradecimiento a los participantes y a cuantos, con su colaboración, han hecho posible la realización de este Concurso.

En particular hizo público el agradecimiento a la firma *"Coca-Cola" de España"*, que costeó los premios entregados a los ganadores.

Aunque entre los alumnos premiados hay algunos destacables, el nivel medio de los participantes ha sido este año realmente bajo. Fueron bastantes los que no llegaron a obtener ni un solo punto. Nuestros lectores puden juzgar esta situación, ya que, junto con los enunciados de los problemas propuestos, damos la media de las puntuaciones obtenidas por los concursantes.

Damos a continuación la lista de alumnos premiados, con indicación del centro que los presentó y de la puntuación alcanzada (la máxima que se podía obtener era de 40 puntos):

PRIMER CURSO:

1º - **Tamara Illescas Molina**, del *I.B. "Arquitecto Pedro Gumiel" de Alcala de Henares* — 22 puntos

2º - **Jesús Chavero García-Esteban**, del *Colegio JOYFE* de Madrid — 21 puntos

3º - **Jesús Dorado Manzanares**, del *Colegio Retamar* de Pozuelo de Alarcón (Madrid) — 14 puntos

4º - **Fernando Regacho Angulo**, del *Colegio Santa Maria del Pilar* de Madrid — 11 puntos

5º - **Ricardo Herranz Lopez**, del *Colegio "Nueva Castilla"*, de Madrid — 11 puntos

SEGUNDO CURSO:

1º - **David Vaqueriza Cubillo**, del *Colegio de San Viator* de Madrid — 27 puntos

2º - **José Tomás Baeza Oliva**, del *I. B. "Avenida de los Toreros"* de Madrid — 23 puntos

3º - **David Sevilla Gonzalez**, del *I. B. "Luis Buñuel* de Alcorcón (Madrid) — 22 puntos

4º - **Ivana Raos**, del *Liceo Anglo-Español (LAE)* de Madrid — 15 puntos

5º - **Jose Quintanar Vaquero**, del *I.B. "Salvador Dali"* de Leganés (Madrid) — 15 puntos

TERCER CURSO:

1º - **Alvaro Begué Aguado**, del *I. B. "Pinar de la Rubia"* de Valladolid — 38 puntos

2º - **Alvaro Gómez Rey**, del *I. B. "Gran Capitán"* de Madrid — 28 puntos

3º - **Carlos Benito Sánchez**, del *Colegio de San Agustín* de Madrid — 24 puntos

4º - **Ramón Gordillo Gutiérrez**, del *Colegio de San Viator* de Madrid — 20 puntos

5º - **Raul Barranco García**, del *I.B. "Gerardo Diego"* de Pozuelo de Alarcón (Madrid) — 14 puntos

- - -

Señalaremos que **David Sevilla González** e **Ivana Raos**, 3º y 4º premios de Segundo Curso, recibieron los premios 1º y 2º, como alumnos de Primero, en nuestro Concurso de 1991. También **Alvaro Gómez Rey**, 2º premio de Tercer Curso, recibió el 4º de Segundo en 1991 y el 1º de Primero de 1990 y **Ramón Gordillo Gutiérrez**, 4º de Tercero, fué 2º de Segundo en 1991.

- - -

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en este X Concurso y, tras cada uno de ellos, la media de las puntuaciones obtenidas por todos los participantes y la de las alcanzadas por los cinco premiados (puntuaciones de 0 a 10):

PRIMER CURSO

Problema 1º: A un comerciante le preguntan cual es el % de ganacia en las ventas de un artículo. El sabe que compra al mayor con un descuento de 2 % sobre precio de catálogo y que vende con recargo de 47 % sobre catálogo. ¿ Cual es la contestación que debe dar ?

- *Medias de puntuaciones: Todos, 0,3 ; Premiados, 2,0*

\- - -

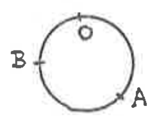
Problema 2º: Si $a + b + c = 0$, calcular (simplificar totalmente):

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{a^5+b^5+c^5}$$

- *Medias de puntuaciones: Todos, 1,4 ; Premiados, 8,4*

\- - -

Problema 3º: De un punto O de un velódromo circular parten dos ciclistas en sentidos contrarios y con velocidades constantes, encontrándose en el punto A (tal que el arco OA mide 720 m). Siguen circulando con la misma velocidad y después de pasar por O una vez se encuentran en B (tal que OB mide 360 m), después de 60 segundos del primer encuentro. Hallar la longitud de la pista y las velocidades de ambos ciclistas.



- *Medias de puntuaciones: Todos, 2,7 ; Premiados, 4,6*

\- - -

Problema 4º: Se tiene la sucesión $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ en la que todos los términos son números de dos cifras, y cuya ley de formación es $u_{n+1} = 4a + 2b$, donde a y b son las cifras de u_n (decenas y unidades, respectivamente). Razonar que esa sucesión es estacionaria, es decir, que todos sus términos son iguales a partir de uno de ellos.

- *Medias de puntuaciones: Todos, 0,2 ; Premiados, 0,8*

\- - -

SEGUNDO CURSO

Problema 1º: Expresar la altura de un tronco de cono de revolución en función de los radios de sus bases, sabiendo que su área lateral es igual a la suma de las áreas de sus bases.

- *Medias de puntuaciones: Todos, 0,6 ; Premiados, 3,2*

\- - -

Problema 2º: Probar que el número combinatorio $\binom{n}{m}$, si es $1 < m < n-1$, no puede ser primo.

- *Medias de puntuaciones: Todos, 0,5 ; Premiados, 1,4*

\- - -

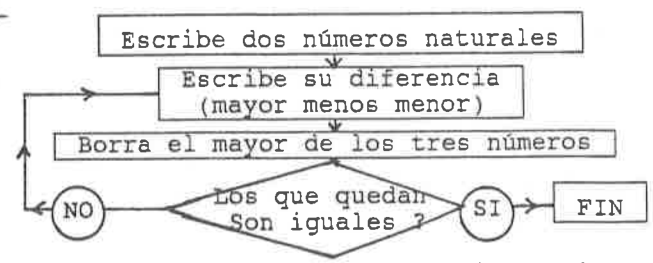
Problema 3º: En una división, se conoce el dividendo 258728 y los restos sucesivos que se obtuvieron al ir efectuando la división, que son 379, 480 y 392. Hallar el divisor y el cociente Existe más de una solución ?

- *Medias de puntuaciones: Todos, 3,2 ; Premiados, 8,2*

\- - -

Problema 4º:

Observa este algoritmo:



Razona qué número se obtiene con este algoritmo (el que queda igual al otro) e identifica este método con otro que conozcas.

- *Medias de puntuaciones: Todos, 1,7 ; Premiados, 7,6*

\- - -

TERCER CURSO

Problema 1º: Razonar si existen triángulos (aparte de los equiláteros) tales que las longitudes de sus lados formen progresión aritmética y las longitudes de sus alturas también formen progresión aritmética.

- *Medias de puntuaciones: Todos, 0,8 ; Premiados, 4,6*

\- - -

Problema 2°: En un plano, un segmento rectilíneo de longitud $2a$ gira en torno a su punto medio con velocidad angular ω. Expresar en función del tiempo la tangente del ángulo bajo el cual se ve ese segmento desde un punto situado en ese plano, a distancia b (con $b > a$) de dicho punto medio.

- Medias de puntuaciones: Todos, 0,6 ; Premiados, 4,6

- - -

Problema 3°: En un semiplano cuyo borde es la recta r, se trazan varias circunferencias exteriores dos a dos. Sean r_1, r_2, r_3, ... todas las rectas paralelas a la recta r y tangentes a alguna de aquellas circunferencias, estando sus subíndices numerados de modo que r_1 sea más próxima que r_2 a la recta r, que r_2 sea más próxima que r_3, etc. Decidir si es cierta o falsa la siguiente afirmación: "Si es c_1 la única de aquellas circunferencias a la que r_1 es tangente, entonces, trasladando c_1 en dirección perpendicular a la recta r y en sentido tal que la distancia de su centro a la recta r decrezca, ningún punto de c_1 pasa por puntos pertenecientes a las restantes circunferencias". Si es cierto, probarlo y si no lo es, justificar la respuesta negativa.

- Medias de puntuaciones: Todos, 1,6 ; Premiados, 6,4

- - -

Problema 4°: Se coloca una ficha en el origen de abscisas y se lanza una moneda al aire; si sale cara, se mueve la ficha una unidad a la derecha y si sale cruz, una unidad a la izquierda; determinar la probabilidad de que después de 10 lanzamientos la ficha se encuentre en el punto de abscisa $x = 4$ y la probabilidad de que después de 9 lanzamientos se encuentre en $x = -3$.

- Medias de puntuaciones: Todos, 3,1 ; Premiados, 9,2

- - -

XXXIII OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL MOSCU - RUSIA - 1992

La *XXXIII Olimpiada Matemática Internacional*, correspondiente a 1992, se celebró en la capital de Rusia. Las reuniones del jurado para seleccionar los problemas se iniciaron el 11 de Julio y las pruebas, que tuvieron lugar en la Universidad Estatal Lomonosov de Moscú, se realizaron los dias 15 y 16 del mismo mes.

Como de costumbre, la prueba consistió en la resolución de **seis** problemas, repartidos en dos sesiones de cuatro horas y media cada una. En cada uno de ellos, se podían obtener hasta **siete puntos**, por lo que la puntuación máxima alcanzable era de **42**. Las medallas de oro se concedieron desde 32 puntos en adelante. Las de plata desde 24 hasta 31 y las de bronce de 14 a 23.

Los seis enunciados pueden verse, en este mismo Boletín, en la sección de *Problemas Propuestos*. Al parecer, la prueba resultó mucho más dfícil que la de la Olimpiada anterior, celebrada en Suecia.

Los representantes españoles fueron los seis mejores clasificados en la XXVIII Olimpiada Matemática Española (ver nuestro Boletín n° 31), incluidos los dos que actuaron en ella fuera de concurso por hacerlo por segunda vez y haber participado ya en la Olimpiada Matemática Internacional de 1991, en Suecia.

Su actuación, sin llegar a ser brillante, fué digna, incluso algo mejor que la que se consiguió en la Olimpiada anterior. El jefe de la Delegación española fué el profesor D. Francisco Bellot y el delegado adjunto, D. Juan Manuel Conde. Damos a continuación las puntuaciones obtenidas por cada uno de los participantes españoles:

Roger ESPELL LLIMA, 16 puntos, medalla de bronce.
Marcos DURÁNTEZ GAMZUKOFF, 12 puntos, mencion honorifica.
Alvaro **BEGUÉ AGUADO**, 9 puntos.
Javier **RIBÓN HERGUEDAS**, 5 puntos.
Jose Miguel **ATIENZA RIERA**, 5 puntos.
Raquel **BARCO MORENO**, 3 puntos.

Podemos señalar que el orden en que se clasificaron estos alumnos en la Olimpiada Matemática Española fué este mismo, con la única excepción de que el Sr. Durántez aventajó entonces al Sr. Espell.

Se concedieron 26 medallas de oro, 55 de plata y 74 de bronce. Cuatro alumnos (tres chinos y un ruso) obtuvieron la puntuación máxima (42 puntos). Los seis alumnos chinos consiguieron medalla de oro y, en conjunto, sacaron 60 puntos de ventaja a los de Estados Unidos, que fueron los segundos clasificados. En tercera posición quedaron los rumanos.

De los paises iberoamericanos, Argentina logró una medalla de plata, otra de bronce y una mención honorífica; Brasil, una de bronce y una mención; Colombia y Portugal, una de bronce cada uno; México, dos menciones y Cuba (con sólo 3 estudiantes), una mención.

Felicitamos a todos los componentes de la representación española por su actuación en esta Olimpiada.

\- - - - - - -

VII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS
Caracas (VENEZUELA), 1992

La *VII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas* de 1992 se ha celebrado en Caracas (Venezuela) entre los dias 18 y 27 de Septiembre.

Este año, el número de paises participantes ha sido de 16; damos sus nombres por orden alfabético: Argentina, Brasil, Colombia, Costa Rica, Cuba, Chile, Rep. Dominicana, El Salvador, España, Méjico, Panamá, Perú, Portugal, Puerto Rico, Uruguay y Venezuela. Cada pais presentaba cuatro aspirantes, salvo Perú, que participó con 3, Portugal, con 2 y El Salvador, con uno.

Las pruebas se realizaron en dos sesiones. En cada una de ellas, de cuatro horas y media de duración, se propusieron tres problemas, cuyos enunciados se pueden ver en la sección de PROBLEMAS PROPUESTOS de este Boletín. Cada solución se calificó de 0 a 10 puntos, por lo que la puntuación máxima alcanzable era de 60 puntos.

Los Primeros Premios (oro) se otorgaron a los que obtuvieron por lo menos 55 puntos, los Segundos (plata) a los que alcanzaron 37 y los Terceros (bronce) a los que llegaron al menos a 27. Mención honorífica tuvieron a partir de 20.

Se otorgaron seis medallas de oro, que corespondieron a estudiantes de Colombia, Chile, Cuba, Brasil, España y Argentina. Los dos primeros alcanzaron la puntuación máxima de 60 puntos, lo cual no ocurría desde la II Olimpiada, celebrada en Uruguay, en la que el español Carlos Ueno los obtuvo. Las medallas de plata fueron 10 y las de bronce, 15. Los paises cuyos equipos reunieron más puntos fueron Brasil, con 171, Cuba, con 165, y España y Colombia, ambos con 157.

Los españoles participantes tuvieron una brillante actuación: Estos fueron sus resultados:

- **Javier RIBÓN HERGUEDAS**	56 puntos	**oro**
- **Alvaro BEGUÉ AGUADO**	53 puntos	**plata**
- **Jose M. ATIENZA RIERA**	28 puntos	**bronce**
- **Raquel BARCO MORENO**	20 puntos	**mención**

Recordaremos que los dos primeros proceden de los Institutos de Bachillerato de Valladolid *"Leopoldo Cano"* y *"Pinar de la Rubia"*, el tercero del Colegio *JOYFE* de Madrid y la cuarta del colegio malagueño *"Puerto Sol"*. Alvaro BEGUÉ, que empieza ahora el C.O.U., puede repetir el próximo año, si resulta seleccionado en nuestra Olimpiada Nacional.

Para apreciar la dificultad relativa de los problemas que se propusieron damos las medias de las puntuaciones en cada uno por todos los participantes y por los cuatro componentes del equipo español:

Problema	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Media general	6.4	2.4	5.6	3.9	4.0	5.6
Media españoles	7.5	5.0	7.5	6.5	5.5	7.3

El "Trofeo Puerto Rico", otorgado al pais que más ha mejorado, correspondió este año a Colombia. Se acordó suprimir la prueba de resolución de problemas con ordenador, por plantear problemas de infraestructura a muchos de los paises sede. Se celebró, en cambio, a título experimental, una prueba

por equipos. Los equipos, de dos estudiantes, se formaron por sorteo. La prueba se desarrolló en dos sesiones: la primera, con 9 cuestiones de rápida respuesta y un problema de tipo Olimpiada; en la segunda se pidió a los equipos que crearan un problema a partir de una situación matemática que les fué presentada (teorema de Pitágoras), valorándose la originalidad y la relación con aquella situación.

Está previsto celebrar las próximas Olimpiadas Iberoamericanas en las siguientes sedes:

1993:	Méjico D. F. (MEJICO)
1994:	Fortaleza (BRASIL)
1995:	CHILE

Nuestra Sociedad felicita cordialmente a los participantes españoles, que han alcanzado tan brillante resultado.

- - - - -

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Numero y año		Convocado en el boletin	Cronica y enunciados
I	(1983)	1	2 , pag 11
II	(1984)	3	4 , pag 7
III	(1985)	5	7 , pag 3
IV	(1986)	9	10 , pag 5
V	(1987)	13	15 , pag 3
VI	(1988)	17	19 , pag 17
VII	(1989)	20	22 , pag 9
VIII	(1990)	24	26 , pag 3
IX	(1991)	27	29 , pag 3
X	(1992)	30	32 , pag 3

OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA :

Numero y año		Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX	(1984)	- -	3 , pag 77
XXI	(1985)	5 , pags. 8 y 9	5 , pags. 8 y 10
XXII	(1986)	8 , pag 5	9 , pags. 15 y 75
XXIII	(1986-87)	11 , pags. 3 y 87	13 , pags. 9 y 83
XXIV	(1987-88)	16 , pags. 7 y 70	17 , pags. 7 y 71
XXV	(1988-89)	20 , pags. 13 y 79	21 , pags. 7 y 61
XXVI	(1989-90)	24 , pags. 11 y 67	25 , pags. 9 y 73
XXVII	(1990-91)	27 , pags. 7 y 77	28 , pags. 17 y 79
XXVIII	(1991-92)	30 , pags. 19 y 67	31 , pags. 11 y 81

OLIMPIADA MATEMATICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar			Cronica y enunciados en boletin nº
I	(1986)	Colombia	8 , pags. 11 y 83
II	(1987)	Paraguay	12 , pags. 3 y 75
III	(1988)	Perú	18 , pags. 5 y 73
IV	(1989)	Cuba	21 , pags. 11 y 63
V	(1990)	España (Valladolid)	26 , pags. 13 y 73
VI	(1991)	Argentina	30 , pags. 15 y 65
VII	(1992)	Venezuela	32 , pags. 11 y 71

OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL :

Numero, año y lugar			Cronica y enunciados en boletin nº
XXIV	(1983)	Paris	2, pag. 15
XXV	(1984)	Praga	4 ,pag. 67
XXVI	(1985)	Helsinski	7 , pags. 9 y 89
XXVII	(1986)	Varsovia	10 , pag. 11 y 11 , pag. 89
XXVIII	(1987)	Cuba	15 , pags. 9 y 37
XXIX	(1988)	Australia	19 , pags. 23 y 77
XXX	(1989)	R. F. A.	22 , pags. 15 y 73
XXXI	(1990)	China	26 , pags. 11 y 71
XXXII	(1991)	Suecia	29 , pags. 11 y 79
XXXIII	(1992)	Rusia	32 , pags. 9 y 69

CONVOCATORIA

XXIX OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

Organizada por la Real Sociedad Matemática Española bajo el patrocinio de la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio.

NORMAS

1.- PARTICIPANTES. Podrán participar en la 1ª Fase de la XXIX Olimpiada Matemática Española los alumnos matriculados en COU, en el último curso de Formación Profesional de segundo grado, 2º curso del 2º Ciclo del Bachillerato Experimental (Reforma),3º curso de B.U.P. y 1º curso del bachillerato L.O.G.S.E.

2.- INSCRIPCION. Los interesados en participar en esta Olimpiada, solicitarán por escrito su inscripción, bien directamente bien a través del Centro donde realizan sus estudios, indicando en ella el nombre,D.N.I. , dos apellidos, domicilio, teléfono y Centro donde se hallan estudiando especificando la direccion y telefono de dicho centro. Las solicitudes se dirigirán a:

(*)

3.- PRIMERA FASE DEL CONCURSO. En cada Distrito Universitario se celebrarán las primeras eliminatorias, que constarán de dos sesiones (la primera de ellas podrá ser eliminatoria si así lo estima oportuno el Tribunal), en las que se propondrán a los participantes varios problema sobre cuestiones de Matemáticas.

(*)

Por cada Distrito actuará un Tribunal delegado por la Real Sociedad Matemática Española, que calificará los ejercicios y propondrá a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio a los ganadores de Distrito, en número de tres como máximo para la concesión de las correspondientes becas para cursar estudios de Licenciatura en Ciencias Matemáticas, en la Universidad española en la que se matriculen. Excepcionalmente se concedera tambien beca a los que deseen efectuar estudios de otras Licenciaturas o Ingenierias. La beca concedida se renovará anualmente, siempre que se continúen los estudios en las condiciones establecidas por la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio (Está en estudio la posibilidad de sustitución de esta beca por un premio)

4.- SEGUNDA FASE. La segunda fase del concurso se realizará en Madrid (Los concursantes del Distrito de La Laguna realizarán dicha prueba en su distrito) los días 26 y 27 de febrero de 1993, y podrán concurrir a esta fase:

a) Los ganadores de la fase primera.

b) Alumnos que, habiendo participado en alguna edición anterior de la Olimpiada, sean invitados formalmente por la R.S.M.E.

Las pruebas consistirán en la resolución de problemas o cuestiones de Matemáticas, en dos sesiones.

Un tribunal designado por la Real Sociedad Matemática Española, calificará los ejercicios y determinará los ganadores de esta fase nacional. Los primeros clasificados recibirán un premio en metálico cuya cuantía determinará la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio.

5.- Las decisiones de los Tribunales son inapelables.

6.- La participación en la Olimpiada Matemática Española supone la aceptación de estas normas.

(*) Ver NOTA en la página siguiente.

NOTA: En cada Distrito se harán públicos oportunamente los siguientes datos:

- Fecha límite de recepción de inscripciones.
- Dirección a la que deben remitirse esas inscripciones.
- Fechas, horas y locales en los que se realizaran las pruebas de la primera fase.
- Normas especiales, si las hay, para dichas pruebas.

\- - - - - -

EN EL DISTRITO DE MADRID:

- **Las solicitudes de inscripción se enviarán antes del 20 de Noviembre de 1992.**
- **Se dirigirán a la atención del**

Prof. José Javier Etayo Gordejuela
Vicerrectorado de Desarrollo Estatutuario y Claustro
de la Universidad Complutense de Madrid
(Edificio de Alumnos - Ciudad Universitaria)
28040 - MADRID

- Las pruebas de la Primera Fase tendrán lugar el **viernes 27 de Noviembre a las 16 h. 30 m. y el sábado 28 a las 9 h. 30 m.**, en el nuevo edificio de la **Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense** (Ciudad Universitaria, junto al de la de Ciencias Químicas)
- La primera prueba no será eliminatoria.

\- - - - - -

MODELO DE SOLICITUD DE INSCRIPCION:

- **La inscripción se solicitará enviando un boletín como el del modelo que se da en la página siguiente, sin dejar de consignar en él ninguno de los datos que allí se piden.**

XXIX OLIMPIADA MATEMATICA 1993

BOLETIN DE INSCRIPCION

Muy Sr. mío,

D. ____

con domicilio en ____________________, provincia de __________

calle ______________________________, nº ___, Tfno.__________

de _____ años de edad , con D.N.I. __________y alumno de _____

del Colegio/Instituto/ Centro de F.P.______________________________

____________________de la localidad de ____________________

________, Provincia de______________________________Calle

______________________________________num.__________

Tfno.______________.Pone en su conocimiento que desea tomar parte en la XXIX Olimpiada Matematica,y le solicita ser inscrito en la misma

Fdo______________________________

(El solicitante)

CONVENIO DE COLABORACION CON EL M.E.C. DE LA FEDERACION ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMATICAS

La Federación de Sociedades en la que recientemente se ha integrado la nuestra, ha firmado con el Ministerio de Educación y Ciencia un convenio de gran importancia, no sólo por contribuir a resolver el problema de la financiación, sino sobre todo por lo que supone de reconocimiento oficial de la labor que venimos desarrollando y de compromiso por nuestra parte para mantener y ampliar nuestras actividades sin que decaiga la calidad alcanzada.

El Convenio, que tiene una duración de dos años (1992 y 1993) es renovable por mutuo acuerdo de ambas partes. Se crea una comisión mixta de seguimiento que tiene por objeto garantizar el cumplimiento de los fines establecidos.

Según establece el Convenio, la actuación de la Federación se efectuará siguiendo las lineas básicas del Plan de Investigación Educativa y Formación del Profesorado del M.E.C. Las aportaciones del M.E.C. a las actividades de la Federación comprenderán los ámbitos: Administrativo (facilidades para la participación del profesorado en las actividades), Técnico (asistencia técnica), Académico (homologación cuando proceda) y Financiero (aportación por el M.E.C. de subvenciones).

La Federación ha requerido a todas las Sociedades que la integran para que le transmitan sus proyectos de actividades para 1993, con objeto de incorporarlos al Plan que debe ser presentado al M.E.C. para ese año.

- - - - - -

VII CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACION MATEMATICA

El **ICME - 7** se celebró, como anunciamos en nuestro Boletín n^{o} 30, en Qubec (Canadá), el pasado mes de Agosto. Concurrieron a él 88 paises. De España acudió la representación más numerosa registrada hasta ahora, con 122 inscritos. Sólo superaron este número de participantes Estados Unidos, Canadá, Japón, Reino Unido y Australia.

En este Congreso se presentó a España como sede del próximo ICME - 8, que se celebrará en Sevilla en 1996. El *stand* español daba amplia información sobre España y Sevilla, así como sobre los trabajos realizados por la Federación a la que pertenecemos y por las Sociedades que la integramos.

Al acto de clausura fué invitado el Presidente de la Federación, don Gonzalo Sánchez Vazquez, que pronunció un discurso en tres idiomas, acerca del ICME-8 y de su celebración en España.

En el próximo número de nuestro Boletín daremos información sobre los temas tratados en este Congreso.

- - - - -

n-ágono (n=10)

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas distibuyó el número 5 de su pequeño Boletín "n-ágono (n=10)", cuyo título alude a las 10 sociedades que integran la Federación que son:

S. Andaluza de Educación Matemática "THALES"
S. Aragonesa "P. SANCHEZ CIRUELO" de Profesores de M^s.
S. Canaria "ISAAC NEWTON" de Profesores de Matemáticas
S. Navarra "TORNAMIRA" de Profesores de Matemáticas
S. Castellonenca de Matematiques
S. Extremeña de Educación Matemática
S. de Profesores de Matemáticas Madrileña
S. de Profesores de Matemáticas de Alicante
S. de Enseñantes de Ciencias de Galicia
S. "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas.

- - - - - -

WORLD MATHEMATICAL YEAR 2000

Durante la celebración del 40° Aniversario del *IMPA*, el profesor **J.L.Lions**, presidente de la *Union Matematica Internacional (UMI)*, declaró, en nombre de esa Unión, el año 2000 como el **Año Matemático Mundial**.

La decisión de celebrar este **W. M. Y. 2000**, está recogida en la **Declaración de Rio de Janeiro sobre las Matemáticas**, que fija tres objetivos, descritos bajo los siguientes titulares:

1. **Los grandes desafios del siglo XXI.**
2. **Las Matemáticas, base del Desarrollo.**
3. **La imagen de las Matemáticas.**

La Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas ha ofrecido ya su colaboración en tan importante acontecimiento.

- - - - - -

ESPACIOS FRACTALES
y
UNA ESTRUCTURA COSMOLOGICA TOPOLOGICA-FRACTAL

Josué B.Bonnin de Góngora
Univ.Complutense. Fac.CC.Matemáticas. Sec."Astronomía,Mecánica,Geodesia"
Prof.Dr.José Vicente García Sestafe
Catedrático de Matemáticas . Doctor en CC.Económicas
Prof.Dr.Carlos Mª Rodríguez Calderón
Catedrático de Matemáticas . Doctor en Ciencias

En el presente artículo se pretende ajustar el principio cosmológico perfecto , si se admite que el espacio se pliega sobre si mismo y tiene dimensión fractal.

Se inicia el trabajo recordando el concepto de estructura espacio-tiempo galileica y fijando las ideas básicas sobre variedades diferenciables de clase p ; a continuación se introducen las dimensiones no enteras (fractales) para llegar al **modelo cosmológico fractal.**

1. ESTRUCTURA ESPACIO-TIEMPO GALILEANA

Para definir la **estructura espacio-tiempo galileana** hay que considerar:

- El Universo es un espacio afín cuatridimensional, A^4.
  En A , cada $p \in A^4$ se le considera **suceso.**
- El **tiempo** es una representación lineal $t: R^4 \longrightarrow R$ siendo R^4 el espacio vectorial de desplazamientos paralelos al "eje tiempo" real.

Hay que dotar a A^4 de un producto escalar con la **distancia** entre dos sucesos simultáneos, definida

$$\rho(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{\langle a-b, a-b \rangle} \qquad a,b \in R^3$$

Al espacio A^4 con la estructura anterior se le denomina **espacio-tiempo galileico.**

* Una importante propiedad de estos espacios A^4 es que son ***isotropos***, es decir que ***no tienen direcciones "preferentes".***

2. VARIEDAD DIFERENCIABLE DE CLASE p

Sea X un conjunto y $p \in N \cup \{\infty\}$. Se dice que $(U, \varphi, (E, \Lambda))$ es una carta en X si:

- a) $U \subset X$
- b) E es un espacio de Banach real.
- c) Λ es un sistema linealmente independiente y finito de elementos $\mathcal{L}(E,R)$ (aplicaciones lineales de E en R).
- d) φ es una aplicación inyectiva $U \longrightarrow E^+_\Lambda$ y $\varphi(U)$ es un abierto de E^+_Λ.

  $(E^+_\Lambda = \{x \in E \;/\; \lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0 \;; \forall \lambda_i \in \alpha(E,R)$

* La condición d) impone que

$$\forall \; y \in E^+_\Lambda \text{ si } \varphi(x_i) = \varphi(x_{i+1}) \longrightarrow x_i = x_{i+1}$$

U es el dominio de la carta ; φ es el morfismo de la carta ; E es el espacio modelo de la carta.

* Sean $(U, \varphi, (E, \Lambda))$ y $(U', \varphi', (E', \Lambda'))$ dos cartas en X. Se dice que son **compatibles de clase p** si:

$$\varphi' \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \longrightarrow \varphi'(U \cap U') \quad \text{y} \quad \varphi \varphi'^{-1} : \varphi'(U \cap U') \longrightarrow \varphi(U \cap U')$$

son de clase p.

* Se denomina atlas la unión de cartas compatibles.

A partir de aquí se puede definir:

Variedad diferenciable *es una clase de atlas equivalentes.*

* Dentro de las variedades diferenciables se consideran:

1) **variedades diferenciables conexas,**
2) **variedades diferenciables inconexas** (múltiplemente conexas).

2.1. VARIEDAD DIFERENCIABLE CONEXA . DIMENSION .

Sean $(X_i, \varphi_i, (E_i, \Lambda_i)_X \;\; i \in N^*$ cartas en X, todas compatibles .
A la suma conexa

$$V = \mathop{\#}_{i=1}^{n} (X_i, \varphi_i, (E_i, \Lambda_i))$$

se la llama **variedad diferenciable conexa.**

* Observese que no existen dos abiertos disjuntos en X

Sea X una variedad diferenciable y $x \in X$. Se define **dimensión de X en x** y se designa $\dim_x X$, a la dimensión del espacio vectorial real E donde $(U, \varphi, (E, \Lambda))$ es una carta de X con $x \in U$.

* Sea una variedad diferenciable o topológica, X. Resultan:

- a) X es localmente conexa.
- b) X es localmente conexo por caminos .

Por consiguiente, *si X es conexo equivale a que X es conexo por caminos.*

* Se consideran X, una variedad diferenciable y C una componente conexa de X. $x, z \in C \longrightarrow \dim_x X = \dim_z X$

Por tanto, si *X es conexa,* ***la dimensión se mantiene constante en toda la variedad*** .

Intuitivamente, *un conjunto conexo es aquel que* ***está hecho de "una sola pieza".***

2.2. DIMENSION TOPOLOGICA EN VARIEDADES DIFERENCIABLES.

Sean X un conjunto y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X tal que $U_i \neq \emptyset$ para $i \in I$ (no todos vacíos).

Se considera el conjunto $E = \{n / n \in N^* \cup \{0\}\}$ tales que existen índices i, j distintos dos a dos , para los que se cumplen:

$$\bigcap_{j=1}^{n-1} U_{ij} \neq \emptyset$$

ésto es $\quad E = \{n / n \in N^* \cup \{0\}\} \text{ y } \bigcap_{j=1}^{n-1} U_{ij} \neq \emptyset\}$

Se llama **orden** de dicho conjunto $\mathcal{U}$ a sup.E en $\{0\} \cup \{+\infty\} \cup N^*$, es decir, sup.E *sólo puede tomar valores naturales,* $+\infty$ *o cero.*

Por consiguiente, si sup.E $\in R \setminus Z$ ó sup.E $\in R \setminus Q$, se tomará como supremo ***el menor número E mas cercano a sup. E ∈ R∖Z que esté en {0} ∪ {+∞} ∪ N* con la métrica considerada.***

Nótese que sup.E actúa, en realidad, de elemento máximal, ésto es, que habiendo varios elementos maximales, se elige el que esté contenido en $\{0\} \cup \{+\infty\} \cup N^*$.

Por convenio, el orden de una familia de subconjuntos vacíos es -1.

* Analogamente, sea X un espacio topológico. Se considera $E = \{n \in N^* \cup \{-1,0\} \cup \{+\infty\}\}$ tal que todo recubrimiento abierto y finito de X tenga un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ y orden $\mathcal{V} \leq n$. Al número min.X en E se le llama **dimensión** por recubrimiento de X y se escribe dim.X.

Nótese que esta definición es análoga a la anterior, salvo unicamente, que se toma min. y no sup. de X.

* La **dimensión** por recubrimiento *es un invariante topológico*.
Es decir, para f homeomorfismo $(X,\tau) \longrightarrow (X',\tau')$ se tiene que si $\dim.X = n \longrightarrow \dim.X' = n$.

* Igualmente se cumple que: $\forall n \in N^* \cup \{0\}$, $\dim.R^n = n$.
Esto es, *toda bola abierta o cerrada de un espacio euclídeo R^n tiene dimensión n.*

3. LAS DIMENSIONES NO ENTERAS

Sea $X = \coprod_{i=1}^{\infty} (X_i, \varphi_i, (E_i, \Lambda_i))$ una variedad diferenciable conexa de clase infinito en todos sus puntos. Cada componente conexa en un punto tiene dimensión n.

Si $C_i \in X$ (una componente conexa) $\longrightarrow \dim.C_i = \dim.(E_i, \Lambda_i) \in \{0\} \cup N^*$ puesto que la dimensión de un espacio vectorial real es siempre un número entero.

El problema se plantea cuando $\dim.X \notin \{0\} \cup N^*$, es decir, *cuando la dimensión del espacio no es entera*

* Si tomamos las variedades $R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots\ldots, R^n \in \{0\} \cup N^*$

$R^1 = p + [v]$ donde $[v]$ pertenece al espacio vectorial real$(R^1;+,.)$
En este caso R^1 es una **línea.**

$R^2 = p + [v_1, v_2]$ (v_1, v_2 linealmente independientes). $[v_1, v_2]$ pertenece al espacio vectorial real $(R^2;+,.)$. Ahora R^2 es una **superficie.**

$R^3 = p + [v_1, v_2, v_3]$ (v_1, v_2, v_3 linealmente independientes)

$[v_1, v_2, v_3] \in (R^3;+,.)$. En este caso R^3 es el **espacio euclideo tridimensional.**
En general, $R^n = p + [v_1, v_2, \ldots, v_n]$; $[v_1, v_2, \ldots, v_n] \in (R^n;+,.)$ **espacio euclideo n-dimensional,** que tal y como se ha visto **es conexo.**

* Consideremos, ahora, por ejemplo, el caso de un espacio:

$$R^p \;/\; p:\ 1 < p < 2$$

estaremos ante *un espacio que no es ni una línea ni una superficie;* este espacio es un **fractal.** Es decir, *no "cubre" una superficie, pero tampoco es una línea, sino "algo intermedio" entre ambos espacios.*

3.1. CONJUNTO TERCIARIO DE CANTOR

Sea $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ una serie normalmente convergente en R^n.
A un conjunto $C_a = \bigcup_{I \subset N^*} \{\sum_{i \in I} a_i\}$ se le dice **asociado** a $\sum_{i=0} a_i$ si cumple:

1) C_a es compacto.
2) C_a es simétrico respecto al punto $x \in \frac{1}{2} \sum_{i=0} a_i$
3) Propiedad de bipartición:

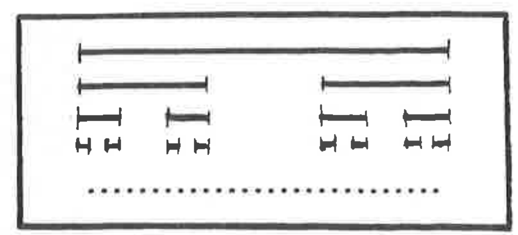
$C_a = \{\bigcup_{I \subset \mathcal{P}_j} \left| \sum_{i \in I} a_i + C_{a,j+1} \right\}$ $j \in N^*$ y $\mathcal{P}_j$: partes del conjunto $\{0,1,..,j\}$

* Consideremos la serie

$$a_i = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

El conjunto asociado a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^i$$



es el conjunto que resulta de dividir cada intervalo en tres partes y extraerle la parte central $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ (ver figura adjunta).

Calculando la **dimensión algebraica** de dicho conjunto

$$d = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{Ln}(\varepsilon)}{\mathrm{L}\varepsilon}$$

donde $N(\varepsilon)$ es el número de hipercubos n-Dimensionales $(n \in N^* \cup \{0\})$ de radio ε necesarios para cubrir el conjunto.

De esta forma, si se toma $\varepsilon = 3^{-k}$, $k \to \infty$, es claro que $N(\varepsilon) = 2^{k}$

Si k=1 se necesitan dos intervalos ; si k=2 se precisan cuatro, etc. .

Esto implica:

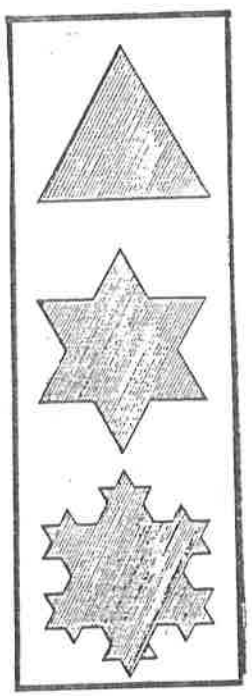
$$d = -\lim_{k \to \infty} \frac{\ln 2^{k}}{\ln 3^{-k}} = -\lim \frac{k.\ln 2}{k.\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 0,60309...$$

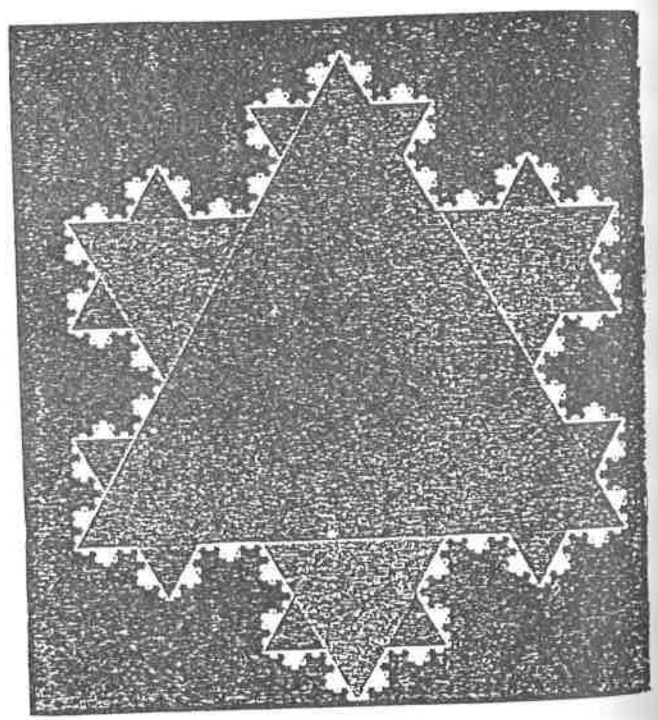
lo que significa que *el **conjunto de Cantor** es un "algo" intermedio entre un conjunto de puntos* p / *dim.*$(\#_{i=j}\, p_i) = 0$ *y una línea.*

Este tipo de espacios se denominan **fractales**.

3.2. CURVA DE KOCH

De manera análoga, partiendo de un triángulo equilátero, dividiendo su lado en tres partes iguales, sustituyéndoles por cuatro segmentos (ver figuras adjuntas) reiterando el proceso se obtiene la denominada **curva de Koch.**





Su dimensión es $d = \lim -\frac{\ln 4^{n}}{\ln (1/3)^{n}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \cong 1,2619...$

Resulta que *es "más" que una línea, pero no llega a ser un área.*

* Es curioso observar que *la longitud de la **curva de Koch** es infinita, mientras que el área que encierrra es finita.*

Siendo L el lado:

$$L_1 = 3L\ ,\ L_2 = \frac{4}{3}\,3L\ ,\ L_3 = \frac{4}{3}\frac{4}{3}\,3L\ ,\ \ldots\ ,\ L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} 3L \longrightarrow \lim L_n = \infty$$

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2,\ S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right),\ S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27}\right)$$

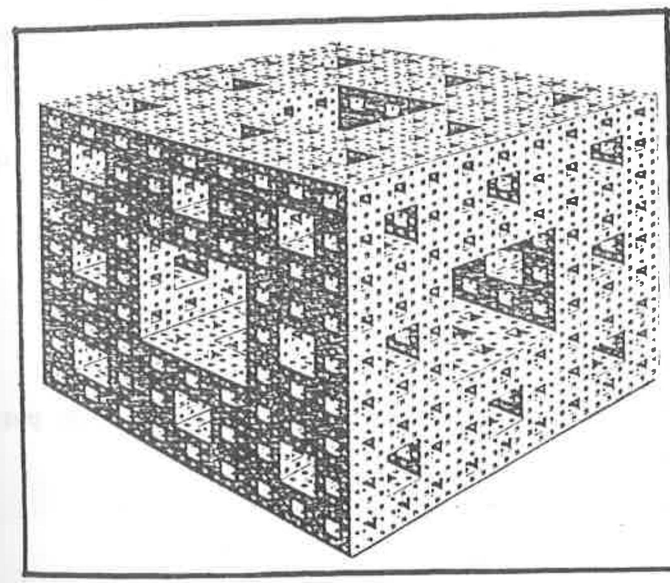
que es una suma finita.

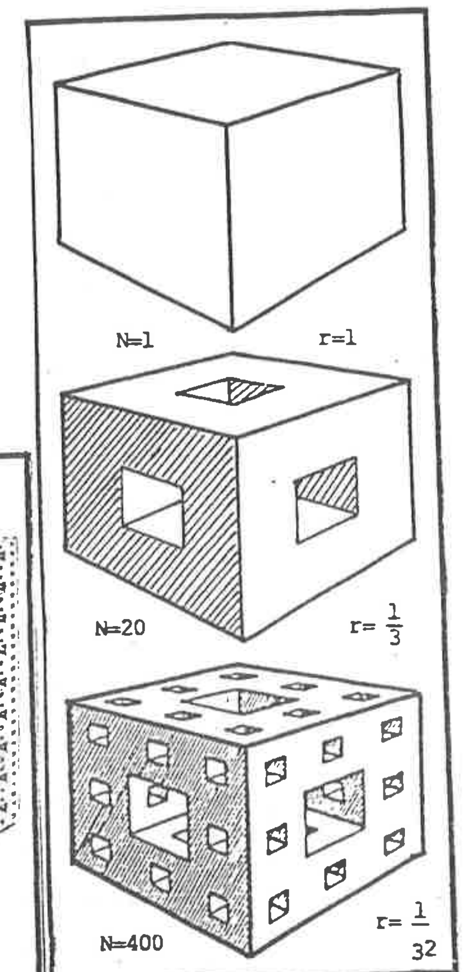
3.3. ESPONJA DE SIERPINSKI

A partir de un cubo y como se indica en las figuras adjuntas, se obtiene la denominada **esponja de Sierpinski** , cuya dimensión es

$$d = \lim \frac{\ln 20^{n}}{\ln 3^{n}} = \frac{\ln 20}{\ln 3} \cong 2,7268...$$

dimensión *"superior" a una superficie, pero "inferior" a la de un cuerpo tridimensional.*





* Los **fractales** *son "simétricos" respecto a las dilataciones y homotéticos frente a los cambios de escala.*

4. AUTOSIMILARIDAD

Una importante propiedad que caracteriza a los espacios anteriores es la **autosimilaridad.**

Sea Ξ el conjunto de todos los conjuntos isomorfos desde el punto de vista abstracto.

Se estima, para evitar las paradojas de Cantor sobre "conjunto de todos los conjuntos", para clases de equivalencia respecto a la isomorfía desde la consideración abstracta) que *el número de estas clases será finito.*

Se considera $(X,\mathcal{T}_i)$ $i\in\bar{R}^+=\{R^+\cup\infty\}$ un conjunto. Se dice que $(X,\mathcal{T}_i)$ es **autosimilar** cuando:

1) $\forall i\in\bar{R}^+ : \mathcal{T}_i\in\Xi$
2) $(X,\mathcal{T}_i)=\Lambda(X_i,\mathcal{T}_i)$; $i\in\bar{R}^+$
3) $(X_i,\mathcal{T}_i)=(X_{i+1},\mathcal{T}_{i+1})$ $\forall i\in\bar{R}^+$
4) $(X,\mathcal{T}_i)=(X_i,\mathcal{T}_i)$ $\forall i\in\bar{R}^+$

La operación Λ actua del siguiente modo. Sean E^S el conjunto de todas las estructuras matemáticas y $(X,\mathcal{T})$ un conjunto con $\mathcal{T}\in\Xi$; bajo dichas condiciones:

$$\Lambda_{i\in\bar{R}^+}(X,\mathcal{T}_i) = \int_{\Omega}(X_i,\mathcal{T}_i) \;/\; (X_i,\mathcal{T}_i)\in E^S \quad i\in\bar{R}^+$$

Ω: espacio de estructura E^S

Intuitivamente, Λ *es una operación que hace biparticiones hasta el infinito, sumando las estructuras resultantes*

Así mismo, un espacio autosimilar es un espacio que se "ve" igual desde cualquier parte que se le observe".

5. UN MODELO COSMOLOGICO FRACTAL

A la operación Λ la denominamos **operación de agregación por difusión limitada.**

Sea $n\in N^*$ y consideremos la bola cerrada

$$D_n=\{x\in R^n / \|x\|<1\} \quad , \quad \forall i=1,2,\ldots,n$$

Para $(V_i^+,\varphi_i^+,(R^n,p_i))$ y $(V_i^-,\varphi_i^-,(R^n,-p_i))$ donde

$$V_i^+=\{x\in p_n / x_i>0\} \quad , \quad V_i^-=\{x\in p_n / x_i<0\}$$

$$\varphi_i^+(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{1-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}-x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

$$\varphi_i^-(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_{i-1},-\sqrt{1-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}-x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

Luego

$$B=\{(V_i^+,\varphi_i^+,(R^n,p_i))/\ i\in N^*\}\cup\{V_i^-,\varphi_i^-,(R^n,p_i))/\ i\in N^*\}$$

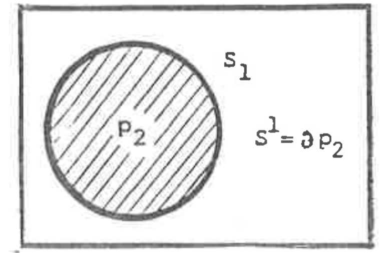
es un atlas de clase infinita en p_n.

Bajo dichas condiciones se tiene que

$$\partial p_n = S^{n-1} \qquad \partial^2 p_n=\emptyset$$

donde con ∂ se simboliza el borde de la variedad p_n.

Para la variedad bidimensional p_2 se comprueba en la figura adjunta.



*Una consideración importante en el planteamiento para la Cosmología es:

Si se tienen una variedad $X=\#_{i=0}^{\infty}(X_i,\varphi_i,(E_i,\Lambda_i)$

y se establece una aplicación f que "cierre" el espacio, *el espacio deformado es el borde de un espacio de dimensión mayor.*

Esto es, si cerramos una línea habremos engendrado un espacio de dimensión dos , si cerramos una superficie en una esfera el espacio que tendremos será de dimensión tres (siendo la superficie de la esfera el borde de la esfera).

De esta forma resultan:

$$f:(\#_{i=0}^{\infty}(X_i,\varphi_i,(E_i,\Lambda_i))\longrightarrow(\#_{i=0}^{\infty}(X_i',\varphi_i',(E_i',\Lambda_i'))$$

$$\partial\,\#_{i=0}^{\infty}(X_i',\varphi_i',(E_i',\Lambda_i')=V\ /\ \dim V>\dim\#_{i=0}^{\infty}(X_i,\varphi_i,(E_i,\Lambda_i))$$

Luego, esta aplicación actua de la siguiente forma:

Para $\#_{i=0}^{\infty}(X_i,\varphi_i,(E_i,\Lambda_i))$ y f aplicación de "cierre" por un punto de X, *está bien definida* , puesto que lo que hace *es "doblar" el espacio punto a punto.*

$$f(\#_{i=0}^{\infty}(X_i,\varphi_i,(E_i,\Lambda_i)) = \#_{i=0}^{\infty}(X_i',\varphi_i',(E_i',\Lambda_i'))$$

y cumple que :

$$\#_{i=0}^{\infty}(X_i,\varphi_i,(E_i,\Lambda_i)) \approx \#_{i=0}^{\infty}(X_i',\varphi_i',(E_i',\Lambda_i')) \qquad \forall i$$

2) $\partial \#_{i=0}^{\infty}(X_i',\varphi_i',(E_i,\Lambda_i')) = V$ / dim $V >$ dim X

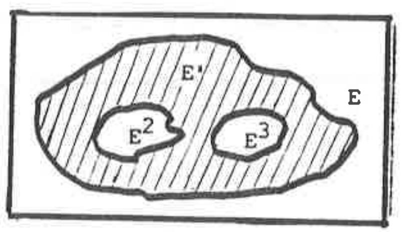
Por consiguiente, *la deformación por curvatura implica un cambio de dimensiones.*

6. AGUJEROS NEGROS . SINGULARIDADES.

Consideremos E^i, $i \in \{1,\dots,n\}$ estructuras matemáticas.

Para E un conjunto n-múltiplemente conexo , cada parte n-conexa va a corresponder a una estrcutura E^i.

Sea $E = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, el conjunto; C_i cada parte n-conexa , supuesta como variedad diferenciable de clase infinito.



Denominamos a cada C_i , con estructura E^i, **agujero negro** de E si:

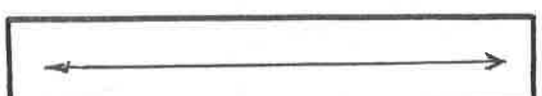
- 1) $C_i = \#_{j=0}^{\infty}(X_j,\varphi_j,(E_j,\Lambda_j)$

  tiene estructura E^i

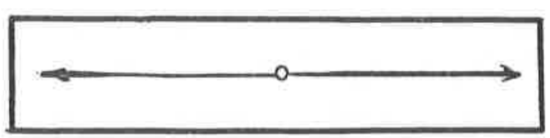
- 2) $f(\#_{j=0}^{\infty}(X_j,\varphi_j,(E_j,\Lambda_j)) = V_j \in E^j$, $j \neq i$ / dim V_j dim C_i

* Por consiguiente, *el espacio resultante por el borde de $f(C_i)$ "crece" hacia "dentro", formando un espacio de **dimensión mayor** que la de C_i .*

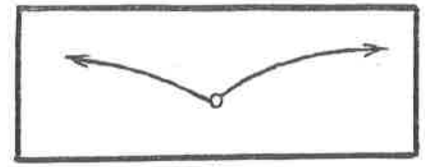
Por ejemplo, para el conjunto conexo en R,



si "abrimos" un agujero y dejamos inconexa la línea resulta



Se ha cortado y "abierto"un **agujero** causando un espacio de dimensión mayor . Si doblamos la línea obtenemos que por **deformación gravitatoria**, producida por el "punto blanco" de la línea (ver figuras) se ha pasado al plano del papel es decir, a una dimensión mayor.



Igualmente, un **agujero** en el papel nos introduce en un espacio tridimensional, siendo el papel bidimensional.

Por tanto, *los **agujeros negros** modifican las estructuras de un conjunto . Los **agujeros negros**, en el Cosmos, son puntos singulares que deforman el espacio, por su fuerza gravitatoria, causando un cambio de métrica*

7. MODELO NOUMENICO EN LAS PROXIMIDADES DE UN AGUJERO NEGRO

- (**Noumenico** es un término kantiano que significa "la cosa en si")

Sea $p \in (X_i,\varphi_i,(E_i,\Lambda_i)$ un punto agujero negro de una variedad diferenciable . Se considera un entorno centrado en p de radio ε . Hemos definido, pués, una métrica y al hablar de bolas, un espacio métrico.

En $B(p,\varepsilon)$ se produce un cambio de métrica por deformación gravitatoria.

Considerando, por tanto, i-métricas de la forma:

$$B_i(p,\varepsilon_i) \xrightarrow{F_i} (ds)_i \quad \text{(F asocia a cada bola una métrica)}$$

$$ds_i^2 = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} (g_{pq})_i \, dx_i^p \, dx_i^q$$

donde $(g_{pq})_i$ es el tensor métrico en $B_i(p,\varepsilon)$.

Si a cada $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i(p,\varepsilon_i)$ se le asocia, por F_i, una métrica $(ds)_i$ y aplicamos Λ (agregación por difusión limitada) se obtiene

$$B_i(p,\varepsilon_i) \xrightarrow{F_i} (ds)_i \quad , \quad \Lambda(ds_i)^2 = \int_{\Omega} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} (g_{pq})_i dx_i^p \, dx_i^q, \; E^i)$$

es decir, unas biparticiones por métricas del espacio $B_i(p,\varepsilon_i)$

dotado de una estructura E^1. De este modo, el espacio galileico espacio-tiempo inicial queda sumergido en un Λ; ésto es, en lugar de explicar los fenómenos desde el punto de vista espacio-tiempo, se ha llegado a la estructura

(ESPACIO-TIEMPO, METRICA)

Luego, *a cada estructura espacio-tiempo le hacemos corresponder una métrica.*

Nótese que $\Lambda(ds_i)^2$ está bien definido, puesto que la métrica, según el cálculo variacional, es una funcional y el conjunto aquí considerado es el de las funcionales con estructura de E^1.

8. PRINCIPIO COSMOLOGICO . CONCLUSION

El **principio cosmológico perfecto** establece que el **Universo** cumple las siguientes propiedades:

- *1) homogeneidad*
- *2) isotropía*

La primera indica que *las propiedades de la materia son iguales en todas las partes del Universo* .

La isotrópía señala la falta de direcciones escogidas.

(Ejemplo es la igualdad de la ley de dispersión de las galaxias)

El **principio cosmológico perfecto** establece que *el Universo es igual desde cualquier punto en el que se le observe,* lo cual indica *una autosimilaridad, una fractalidad ajustable a las teorías cosmológicas de estado físico y creación continua de materia* , admitiendo que el espacio se pliega sobre si mismo y tiene dimensión fractal. Se cambia, así, toda estructura espacio-tiempo, considerando *el tiempo, un espacio fractal.*

BIBLIOGRAFIA:

"Topología general" SEYMOUR LIPSCHUTZ . Ed.Schaum
"Cours d'analyse" LAURENT SCHWARTZ . Ed.Hermann
"Cosmología" H.BONDI . Ed.Labor
"Astronomía general" L.OSTER . Ed. Reverté
"Topology" K.KURATOWSKI . Academia Press
"Measure, Topology and Fractal Geometry" GERALD A.EDGAR.Ed.Springer-Verlag
"Análisis topológico del Cosmos desde espacios fractales" J.E.BONNIN . En prensa)
"Astronomía general" BAKOLIN,KONONOVICH,MAROZ . Ed.Mir
*"Los objetos fractales"*BENOIT MANDELBROT . Tusquet Edit.

LEMA DE BURNSIDE

Por Luis Villacorta Mas
Catedrático del I. B. de Vicálvaro

El Lema de Burnside es una herramienta importante en matemática combinatoria, en especial, para resolver problemas de contar. Demostraremos el Lema y presentaremos varios ejemplos de aplicacion, donde podremos observar que aparecen resultados conocidos de la teoria elemental de numeros, como el Teorema de Fermat y el Teorema de Wilson.

El Lema hace uso del concepto de grupo actuando sobre un conjunto. Este concepto es una pequeña generalizacion de la idea de grupo de permutaciones, y nos proporciona un punto de vista que es muy util para atacar una amplia variedad de problemas.

Definicion.- Un grupo $(G,\circ)$ actua sobre un conjunto S si cada $g\in G$ es una funcion de S en S tal que

i) $(g\circ h)(s)=g(h(s))$ para todo $g,h\in G, s\in S$

ii) $I(s)=s$ para todo $s\in S$, donde I es la identidad de G.

Sea $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ y sea $g\in G$ entonces

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots\dots & s_n \\ g(s_1) & g(s_2) & \dots\dots & g(s_n) \end{bmatrix}$$

es decir, g induce una permutacion del conjunto S

Lema de Burnside. (1897).

Sea un conjunto finito $S=\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$. Sea $G=\{\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_n\}$ un grupo finito que actua sobre S induciendo permutaciones del conjunto S. Diremos que s_i es esencialmente igual a s_j si existe (no necesariamente unico) un elemento $\pi\in G$ tal que $s_i=\pi(s_j)$; por tanto, s_i y s_j seran esencialmente diferentes si s_i es diferente de $\pi(s_j)$ para cada $\pi\in G$.

Sea $\psi(\pi)$ el numero de elementos de S que permanecen fijos por el elemento $\pi \varepsilon G$. Entonces el numero N de elementos de S esencialmente diferentes por la ... de los elementos de G es

$$N = \frac{1}{n}\{\ \psi(\pi_1)+\psi(\pi_2)+\psi(\pi_3)+\ldots+\psi(\pi_n)\ \} \qquad [1]$$

Es evidente que la relacion de ser "esencialmente igual" que establece G en S es de equivalencia e induce en S una particion.
Sea $s\varepsilon S$ y designemos con $\eta(s)$ el numero de elementos $\pi\varepsilon G$ que dejan fijo a s. es decir. $\pi(s)=s$. sea C_s la clase de equivalencia que contiene a s.
Vamos a ver que

$$\sum_{s'\varepsilon C_s} \eta(s') = |G| = n$$

Sea $T(s,s')$ el conjunto de los distintos $\pi\varepsilon G$ tales que $\pi(s)=s'$.
Sea $T(s,s)=\{\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots\ldots,\ \pi_k\}, k=\eta(s)$. y $\pi_x(s)=s'$. Entonces para cada $1\leq i \leq \eta(s)$ es

$$\pi_x \circ \pi_i\ (s) = \pi_x(\ \pi_i(s)) = \pi_x\ (s) = s'$$

luego $\pi_x \circ \pi_i\ \varepsilon\ T(s,s')$. Tambien se verifica

$$\pi_x \circ \pi_i = \pi_x \circ \pi_j \implies \pi_x^{-1} \circ \pi_x \circ \pi_i = \pi_x^{-1} \circ \pi_x \circ \pi_j \implies \pi_i = \pi_j$$

es decir $i=j$. Supongamos ahora que $\pi_y\ \varepsilon\ T(s,s')$

$$\pi_x^{-1} \circ \pi_y\ (s) = \pi_x^{-1}\ (\pi_y\ (s)) = \pi_x^{-1}\ (s') = s$$

entonces $\pi_x^{-1}\circ\ \pi_y\ \varepsilon\ T(s,s')$, por tanto, para algun $j, 1\leq j\leq\eta(s)$ se verifica $\pi_j = \pi_x^{-1}\circ \pi_y \implies \pi_y = \pi_x \circ \pi_j$. Por tanto

$$T(s,s') = \{\ \pi_x \circ \pi_1,\ \pi_x \circ \pi_2\ ,\ldots\ldots.,\ \pi_x \circ \pi_{\eta(s)}\ \}$$

Tambien se verifica que $T(s',s) = \{\ \pi^{-1}\ :\ \pi\ \varepsilon\ T(s,s')\ \}$. Por tanto

$$\eta(s) = |T(s,s)| = |T(s,s')| = |T(s',s)| = \eta(s')$$

Como el conjunto $T(s,s')$, $s\ \varepsilon\ C_s$ agota G, tendremos

$$\sum_{s'\varepsilon C_s} \eta(s') = \sum_{s'\varepsilon C_s} |\ T(s,s')| = |\ G\ | = n$$

Por otro lado, tambien se verifica que $|T(s,s)|\,|C_s| = |G|$
Entonces

$$\sum_{s\varepsilon S} \eta(s) = \sum_{cada C_s} \left[\sum_{s'\varepsilon C_s} \eta(s')\right] = N\,|G|$$

o bien

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{s\varepsilon S} \eta(s) = \frac{1}{n}\sum_{s\varepsilon S} \eta(s) \qquad [2]$$

Vamos ahora a ver que

$$\sum_{s\varepsilon S} \eta(s) = \sum_{\pi\varepsilon G} \Psi(\pi)$$

donde recordemos que $\Psi(\pi)$ es el nùmero de elmentos de S que permanecen fijos por π. Para ello definimos

$$\gamma(s,\pi) = \begin{cases} 1 \text{ si } \pi(s)=s \\ 0 \text{ si } \pi(s)\neq s \end{cases}$$

entonces

$$\eta(s) = \sum_{\pi\varepsilon G} \gamma(s,\pi) \qquad y \qquad \Psi(\pi) = \sum_{s\varepsilon S} \gamma(s,\pi)$$

luego

$$\sum_{s\varepsilon S} \eta(s) = \sum_{s\varepsilon S}\ \sum_{\pi\varepsilon G} \gamma(s,\pi) = \sum_{\pi\varepsilon G}\ \sum_{s\varepsilon S} \gamma(s,\pi) = \sum_{\pi\varepsilon G} \Psi(\pi)$$

con lo que llegamos de [2] a

$$N = \frac{1}{n} \sum_{\pi \in G} \Psi (\pi)$$

A continuación mostraremos varios ejemplos de aplicación del Lema de Burnside.

Ejemplo 1.- Consideremos un cuadrado y dos colores, por ejemplo, blanco y negro. Estudiemos el número de formas esencialmente diferentes de colorear los vértices del cuadrado con esos dos colores.
Sea S el conjunto de todas las coloraciones que podemos hacer, su número es 2^4. (figura 1).

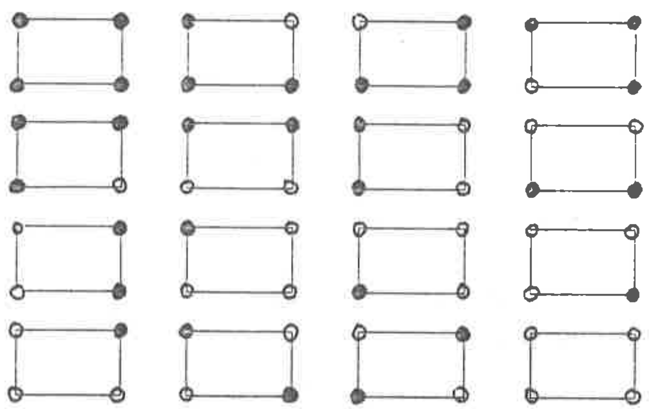


figura 1.

Sea G el grupo de simetrias de un cuadrado (figura 2).

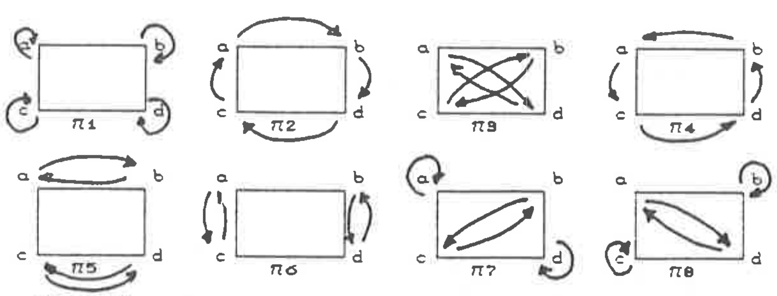


figura 2.

π_1, π_2, π_3 y π_4 son las rotaciones de 0°, 90°, 180° y 270° respectivamente: π_5 y π_6 simetrias respecto de ejes perpendiculares a los lados: y π_7 y π_8 simetrias respecto a ejes que pasan por vértices opuestos. Veamos el número de coloraciones del conjunto S que quedan fijas al aplicar cada elemento de G. Una coloración queda fija si cada vértice tiene el mismo color que el vértice en que se transforma por la acción del elemento del grupo G de simetrias. De acuerdo con esto, se verifica :

$\Psi (\pi_1) = 2^4$

$\Psi (\pi_2) = \Psi (\pi_4) = 2$

$\Psi (\pi_3) = \Psi (\pi_5) = \Psi (\pi_6) = 2.2 = 4$ (en cada uno de ellas los vértices que se intercambian pueden ser blancos o negros)

$\Psi (\pi_7) = \Psi (\pi_8) = 2.2.2=8$ (en cada una de ellas los vértices que se intercambian pueden ser blancos o negros, asi como los que se trasforman en si mismos)

Aplicando el Lema de Burnside resulta que el número de coloraciones esencialmente diferentes es:

$$N = 1/8\ [16 + 2.2 + 4.3 + 2.8] = 6$$

Ejemplo 2.- Sea un tablero de NxN cuadriculas y k fichas iguales, $k<N^2$. Estudiemos el número f(k,n) de formas esencialmente diferentes de colocar las fichas en el tablero. Por ejemplo, si N=2 y k=2 el conjunto S de todas las formas de colocar las fichas en el tablero es : (figura 3)

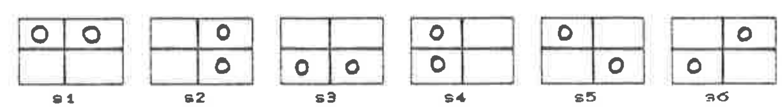


figura 3.

F(2,2)= 2

El conjunto S de todas las formas de colocar las k fichas en un tablero de NxN tiene $\binom{N\times N}{k}$ elementos.

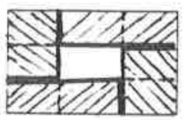
Sea G = { π_1, π_2, ...,π_8} el grupo de simetrias de un cuadrado (figura 2). Vamos a calcular $\Psi (\pi_i)$, i=1.2,...,8, los números de elementos de S que quedan fijos por π_i.

Se verifica que $\Psi(\pi_1) = \binom{N\times N}{k}$.

Estudiemos los casos de π_2 y π_4. Es evidente que $\Psi(\pi_2) = \Psi(\pi_4)$.
Si N es par, el tablero NxN esta formado por cuatro tableros congruentes $N/2 \times N/2$ y las fichas tienen que estar colocadas de forma igual en cada subtablero. Por tanto

$$\Psi(\pi_2) = \Psi(\pi_4) = \begin{cases} \binom{N/2\times N/2}{k/4} & k\equiv 0 \pmod 4 \\ 0 & k\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

Si N es impar, el tablero tiene una cuadricula central y N^2-1 cuadriculas restantes, y las fichas, en estas cuadriculas, se pueden colocar en conjuntos de 4 que se permutan ciclicamente (figura 4)



Por tanto,

$$\Psi(\pi_2) = \Psi(\pi_4) = \begin{cases} \binom{(N-1)/2 \times (N-1)/2}{k/4} & k\equiv 0 \pmod 4 \\ \binom{(N-1)/2 \times (N-1)/2}{(k-1)/4} & k\equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & k\not\equiv 2,3 \pmod 4 \end{cases}$$

Estudiemos ahora π_3.
Si N es par, el tablero queda dividido en dos subtableros congruentes $N \times N/2$, por tanto

$$\Psi(\pi_3) = \begin{cases} \binom{N\times N/2}{k/2} & \text{si k es par} \\ 0 & \text{si k es impar} \end{cases}$$

Si N es impar, con un argumento similar al caso π_2 y π_4 es (figura 5)

$$\Psi(\pi_3) = \begin{cases} \binom{(N^2-1)/2}{k/2} & \text{si k es par} \\ \binom{(N^2-1)/2}{(k-1)/2} & \text{si k es impar} \end{cases}$$

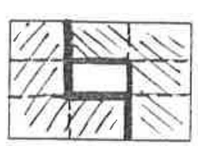


figura 5.

Estudiemos a continuación π_5 y π_6. Es evidente que $\Psi(\pi_5) = \Psi(\pi_6)$.
Si N es par, dividimos el tablero en dos mitades congruentes entre si, la colocación de las fichas en una de las mitades determina la colocación en la otra mitad, por tanto

$$\Psi(\pi_5) = \Psi(\pi_6) = \begin{cases} \binom{(N\times N)/2}{k/2} & \text{si k es par} \\ 0 & \text{si k es impar} \end{cases}$$

En el caso de N impar, considerando el tablero como en la figura 6, en la columna central podemos colocar i fichas de $\binom{N}{i}$ maneras. El número de fichas restantes, k-i, debe ser par, para colocar (k-i)/2 fichas en el lado de cuadriculas $\frac{(N-1)\times N}{2}$ y las correspondientes en el otro. Por tanto

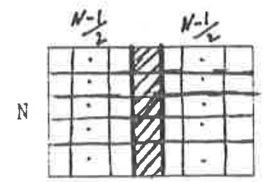


figura 6.

$$\Psi(\pi_5) = \Psi(\pi_6) = \sum_{i\equiv k \pmod 2} \binom{N}{i} \binom{\frac{(N-1)\times N}{2}}{\frac{(k-i)}{2}}$$

Finalmente calculemos $\Psi(\pi_7)$ y $\Psi(\pi_8)$, donde tambien es $\Psi(\pi_7)=\Psi(\pi_8)$.
Consideremos el tablero como en la figura 7, en las casillas de la diagonal podemos colocar i fichas de $\binom{N}{i}$ maneras. De forma similar al caso anterior resulta

$$\Psi(\pi_7) = \Psi(\pi_8) = \sum_{i\equiv k \pmod 2} \binom{N}{i} \binom{\frac{N\times(N-1)}{2}}{\frac{(k-i)}{2}}$$

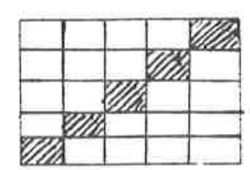


figura 7

Uniendo todo lo anterior, del Lema de Burnside resulta

Si N es par

$$8\,N = \begin{cases} A + 2B + 3C + 2D & \text{si } k\equiv 0 \pmod 4 \\ A + 2B + 3C & \text{si } k\equiv 2 \pmod 4 \\ A + 2B & \text{si } k\equiv 1 \text{ o } 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Si N es impar

$$8\,N = \begin{cases} A + 4B + C + 2D & \text{si } k\equiv 0 \text{ ó } 1 \pmod 4 \\ A + 4B + C & \text{si } k\equiv 2 \text{ ó } 3 \pmod 4 \end{cases}$$

siendo

$$A = \binom{N\times N}{k} \quad ; \quad B = \sum_{i\equiv k \ (\mathrm{mod}\ 2)} \binom{N}{i} \left[\begin{matrix} \frac{N\times(N-1)}{2} \\ \frac{(k-i)}{2} \end{matrix} \right]$$

$$C = \left(\begin{matrix} \left[\frac{N\times N}{2}\right] \\ \left[\frac{k}{2}\right] \end{matrix} \right) \qquad D = \left(\begin{matrix} \left[\frac{N\times N}{4}\right] \\ \left[\frac{k}{4}\right] \end{matrix} \right)$$

donde [ ] es la función parte entera.

Ejemplo 3.- Sea un polígono regular de n lados, donde n es primo y m colores. Podemos colerear los n lados del polígono de m^n formas. Es decir, tendremos m^n coloraciones del n-polígono. Sea G el grupo de las rotaciones del n-polígono regular:

$$G = \{ Q_0, Q_\alpha, Q_{2\alpha}, \ldots, Q_{(n-1)\alpha} \} \qquad \alpha = 2\pi/n$$

Bajo la acción de G, ¿ cuantas m-coloraciones esencialmente diferentes hay? Sea S el conjunto de todas las m-coloraciones del n-polígono. Q_0 deja fijo m^n elementos de S, $\Psi(Q_0) = m^n$. Cada rotación deja fijo los m n-polígonos monocolores, es decir, $\Psi(Q_{i\alpha}) = m$, i=1,2,..,(n-1). Aplicando el Lema de Burnside resulta:

$$N = \frac{1}{n}\,[\, m^n + m + m + \overset{(n-1)}{\ldots\ldots} + m \,] = \frac{1}{n}\,[m^n + (n-1).m]$$

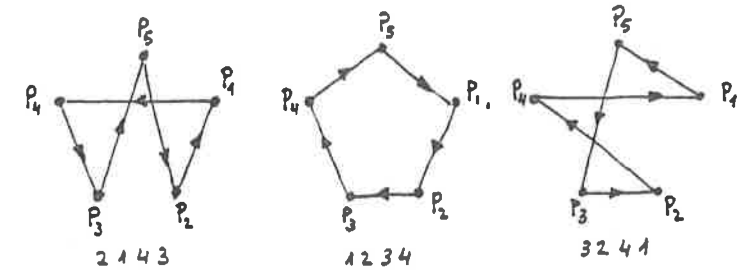
Como N tiene que ser un número entero, tiene que verificarse que

$$m^n + (n-1).m \equiv 0 \pmod n \quad \text{o bien} \quad m^n \equiv m \pmod n$$

Si m no es divisible por n, resulta $m^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ que es el Pequeño Teorema de Fermat.

Ejemplo 4.- Sean P_1, P_2, ..., P_n los n vértices de un polígono regular, siendo n primo. A cada permutación $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ de (1,2,..., n-1) corresponde de forma única un n-polígono dirigido construido dibujando los

vectores $P_n P_{\alpha_1}$, $P_{\alpha_1} P_{\alpha_2}$, ... $P_{\alpha_{n-1}} P_n$. Por ejemplo, en la figura aparecen tres n-polígonos si n=5

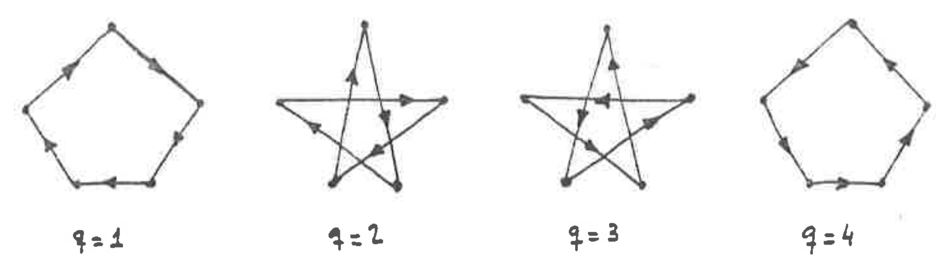


Podemos dibujar en total (n-1)! n-polígonos dirigidos. Sea G el grupo de las rotaciones de un n-polígono regular:

$$G = \{Q_0, Q_\alpha, Q_{2\alpha}, \ldots, Q_{(n-1)\alpha}\} \qquad \alpha = 2\pi/n$$

Bajo la acción de este grupo ¿ Cuantos n-polígonos dirigidos esencialmente diferentes hay? Aplicando el Lema de Burnside se verifica:

(n-1)! n-polígonos quedan invariantes por la acción de la identidad Q_0.
Cada una de las restantes rotaciones dejan invariantes los n-1 n-polígonos regulares siguiente: tomando q=1,2,3,4; comenzando por P_5 unir sucesivamente de q en q vértices. Por ejemplo, en la figura aparecen los n-polígonos dirigidos que quedan invariantes por cada rotación.



Por tanto, el número de n-polígonos dirigidos esencialmente diferentes es

$$N = \frac{1}{n}\,[\,(n-1)! + (n-1).(n-1)]$$

Como N tiene que ser entero, se tendrá que verificar

$$(n-1)! + (n-1).(n-1) \equiv 0 \pmod{n}$$

lo cual es equivalente a

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$$

Y este resultado es el conocido Teorema de Wilson de la teoría elemental de números.

Finalmente podemos combinar los dos ejemplos anteriores de la siguiente forma. Sean m colores. Coloreamos los n lados de cada uno de los $(n-1)!$ n-polígonos dirigidos de todas las formas posibles con los m colores. Lo podemos hacer de $m^n.(n-1)!$ maneras. Cada rotación deja fijo $m.(n-1)$ n-polígonos dirigido regular monocromo. Por tanto, el número de m-coloraciones esencialmente diferentes de los n-polígonos dirigidos es

$$N = \frac{1}{n} [m^n.(n-1)! + (n-1).m.(n-1)]$$

En consecuencia

$$m^n.(n-1)! \equiv m.(n-1) \pmod{n}$$

Si ponemos m=1, resulta el conocido Teorema de Fermat

$$(n-1)! \equiv n-1 \pmod{n}$$

Bibliografia:

Moser,Willian O.J "Placing counter to ilustrate Burnside´s Lema", Mathematics Magazine. Vol 52. Nov 1979

Tucner, Alan, "Polya´s enumeration formula by example", Mathematics Magazine Nov-Dic 1974

Berge.C, Principes de combinatoire. Dunod, 1968

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN (CENTROS)

D ... ...

como ... ...del Centro . ...

... ...

domiciliado en ... ...

ciudad ... ... Codº Post. ... Telfº.. ... .

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR.

Con esta fecha autorizo al Banco . ...

Sucursal o Agencia ... ... en .. ..

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en nuestra cuenta ... ... nº ... ...

abierta al nombre: ... ...

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1992-93

y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1991

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 pta).

Remítanse ambas partes a ***Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas.*** **Apartado 9479. 28080-MADRID.**

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...

Dirección de esta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...

Nombre de la cuenta... ... ...

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

D. ... ... Teléf.(...)... ... .

Dirección particular . ...

Ciudad ... ... Codº Postal .. ... .

Centro de trabajo ... ...

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco . ...

Sucursal o Agencia ... ... en .. ..

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en mi cuenta . ... nº ... ...

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1992-93

y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1992

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 pta).

Remítanse ambas partes a ***Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas.*** **Apartado 9479. 28080-MADRID.**

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...

Dirección de ésta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...

Direccion ... ...

UNAS NOTAS AL TEOREMA DE DESARGUES Y PAPPUS

por Juan Bosco Romero Márquez

Departamento de Algebra y Geometria
Universidad de Valladolid

En este articulo presentamos unas notas al teorema de Desargues y Pappus, con las que probamos que, asociando a todo triángulo y a toda sección del mismo (un par de triangulos copolares y coaxiales), obtenemos un nuevo triángulo sección "media" de Desargues construido a partir de los dos triángulos dados mediante incidencia y baricentros. De tal manera que, cuando los dos triángulos dados son homotéticos este teorema se reduce al ya demostrado por la semejanza baricéntrica, ver (1).

Al final damos unos teoremas que,en cierto sentido, complementan al teorema clásico de Pappus que, como se sabe, caracteriza en los espacios afin y proyectivo la alineación o colineación de tres puntos. Nuestros teoremas completan a éste, por que se establecen tanto para el hecho de ser tres puntos colineales, como de no serlo.

1.- Comenzamos con el enunciado del teorema que queremos demostrar.

Teorema.-a) Sea dado el triángulo ABC y A'B'C' una sección de él como se indica en la figura 1. Entonces los puntos P,Q, y R definidos como la intersección de los pares de rectas que se indican: P = AB ∩ A'B',

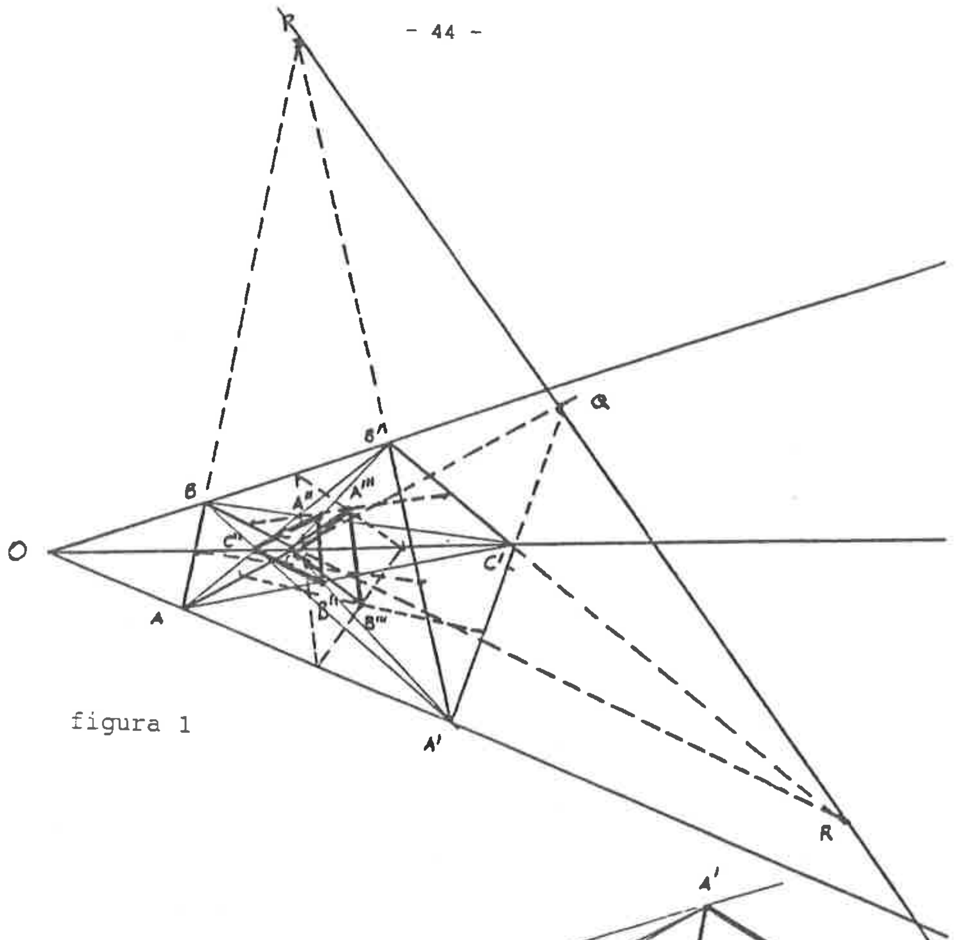


figura 1

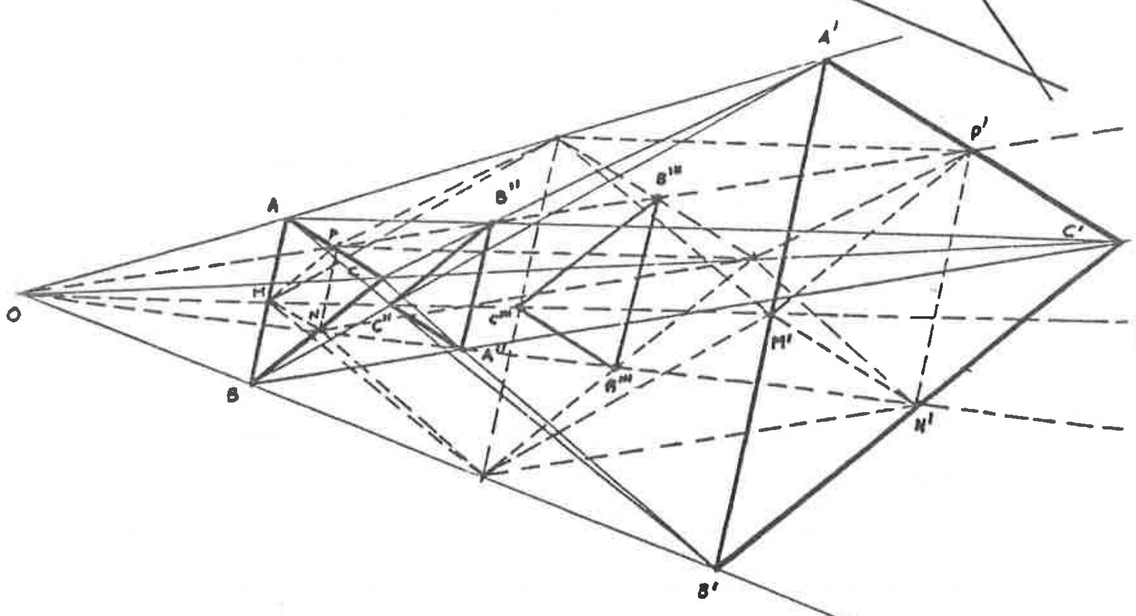


figura 1' - Caso homotéticos ABC y A'B'C'

b) Sean ahora los puntos A",B" y C" definidos como la intersección de los pares de rectas que se indican: A" = BC'∩ CB', B" = AC'∩ CA' y C" = AB'∩ BA'. Entonces al triángulo A"B"C" es una sección media o baricentrica de los dos triángulos dados obtenida por incidencia.

c) Sea el triángulo A''' B''' C''' definido como sigue: A''' es el baricentro del cuadrilátero BCC'B'; B'''es el baricentro del cuadrilátero ACC'A'; y C''' es el baricentro del cuadrilátero ABB'A'.Entonces el triángulo A B C es otra sección media o baricentrica de los triángulos dados obtenida por baricentros.

Demostración.- El teorema lo probaremos por métodos vectoriales.

Para las construcciones geométricas indicadas en este teorema ver la figura 1.

Manejamos en todos los casos la ecuacion baricéntrica de cada una de las rectas que intervienen en el teorema.

a) Es el enunciado clásico afín del teorema de Desargues.

Teorema de Desargues de dos triángulos.- Los triángulos copolares son coaxiales, y reciprocamente.

Nota.- Dos triángulos ABC y A'B'C' se dicen copolares si AA',BB',CC' son concurrentes; se dice que son coaxiales si los puntos de intersección de BC y B'C', CA y C'A' y AB y A'B' son colineales (figura 1).

Por simetría basta que determinemos el punto P, ya que lo demás se sigue de forma inmediata aplicando el mismo razonamiento.

Sean respecto el origen O los vectores de posición de los puntos $A \leftrightarrow a$, $B \leftrightarrow b$, $C \leftrightarrow c$, $A' \leftrightarrow a'$, $B' \leftrightarrow b'$, y $C' \leftrightarrow c'$ y $P \leftrightarrow p$, y lo mismo para todos los puntos que intervienen en el teoremas. Podemos suponer sin perdida de generalidad que se tienen entre los vectores de posición de los triángulos ABC y A'B'C' las siguientes relaciones: $a' = ha$, $b' = kb$ y $c' = lc$ para ciertos números reales dos a dos distintos.

Entonces como $P = AB \cap A'B'$ podemos escribir al manejar las ecuaciones baricéntricas de estas rectas que,

$$P \leftrightarrow p = ta + (1-t)b = sa' + (1-s)b'$$

para ciertos números reales t y s. Sustituyendo a' y b' por los valores que los definen, podemos poner

$$ta + (1-t)b = sha + (1-s)kb. \qquad (1).$$

Como los vectores a y b son linealmente independientes llegamos al sistema lineal en las incognitas t y s siguiente:

$$t - sh = 0,$$

$$(1-t) - (1-s)k = 0.$$

Sistema que resuelto en t y s nos da al sustituir estos valores obtenidos en p que:

$$P \leftrightarrow p = (h(k-1))/(k-h))a + (k(1-h))/(k-h))b \quad (1).$$

De la misma forma obtenemos

$$Q \leftrightarrow q = (h(l-1))/(l-h))a + (l(1-h))/(l-h))c \quad (2), \text{ y}$$

$$R \leftrightarrow r = (k(l-1))/(l-k))b + (l(1-k))/(l-k))c \quad (3).$$

Para comprobar que los puntos P,Q, y R son colineales es suficiente comprobar por cálculo directo que los vectores $q - p$ y $r - p$ son paralelos como es inmediato.

Teorema de Menelao, que es una consecuencia, del siguiente teorema más general: Tres puntos cualesquiera dados en el plano proyectivo(afín), donde dos por lo menos son distintos están alineados, es decir , en la misma recta si y solo si el determinante de la matriz formada con sus coordenadas, en una referencia proyectiva es nulo. Ver (4) y (5).

b) Procediendo de forma análoga a la parte a) podemos encontrar para a", b" y c" vectores de posición de los puntos A",B" y C", respectivamente, las siguientes expresiones:

Para el cálculo de a'' ponemos la ecuación vectorial baricéntrica siguiente:

$$a'' = t\, b + (1-t)\, c' = s\, c + (1-s)\, b'$$

que, después de efectuar las operaciones correspondientes de acuerdo con las hipotésis, da el sistema lineal:

$$t + s\,k = k,$$

$$t\,l + s = l$$

que resuelto, nos da a'', el vector de posición del punto A''. El mismo razonamiento se aplica para obtener B'' y C''. Llegamos entonces a

$$A'' \leftrightarrow a'' = (k(1-l))/(1-kl))b + ((1-k)/(1-kl))lc \quad (4),$$

$$B'' \leftrightarrow b'' = (l(1-h)/(1-hl))\, c + ((1-l)/(1-hl))ha \quad (5).$$

$$C'' \leftrightarrow c'' = (h(1-k)/(1-hk))\, a + ((1-h)/(1-hk))kb \quad (6),$$

siempre los productos kl, hl y hk sean distintos de 1. En particular, cuando h=k=l las ecuaciones anteriores se reducen a a" = (k/(k+1))(b+c),

b" = (k/(k+1))(c+a),

c" = (k/(k+1))(a+b),

que no es otra cosa que los vectores de posición del triángulo baricéntrico medio semejante por una homotecia, a los triángulos dados ABC y A'B'C', que son semejantes(homotecia) por hipótesis, directamente.

c) Se prueba sin más que escribir la ecuación vectorial de los baricentricos de los cuadriláteros citados en el enunciado del teorema.

Asi, obtenemos que

A''' ⟷ a'''= b(1+k)/4 + c(1+1)/4,

B''' ⟷ b'''= a(1+h)/4 + c(1+1)/4,

C''' ⟷ c'''= a(1+h)/4 + b(1+k)/4.

En el caso de que h=k=1, es decir , los triángulos ABC y A'B'C' sean semejantes por una homotecia de razón k , el triángulo A B C es baricéntrico medio de los triángulos dados y es inversamente semejante a ellos.

Es claro en todos los casos que se ha de probar previamente que las ternas de puntos definidas en las partes b) y c),definen respectivamente triángulos, comprobando que no son colineales.

Observación.- 1) Es obvio que las partes b) y c) podrían tener un recíproco en virtud de las relaciones (1),(2),(3), para a) y (4), (5), (6) para la b).

2) Asociando los pares de vectores p,c" , q,b" , r,a", se obtienen al dividir las coordenadas de sus expresiones, en los vectores a,b ; a,c ; b,c; la expresión matemática

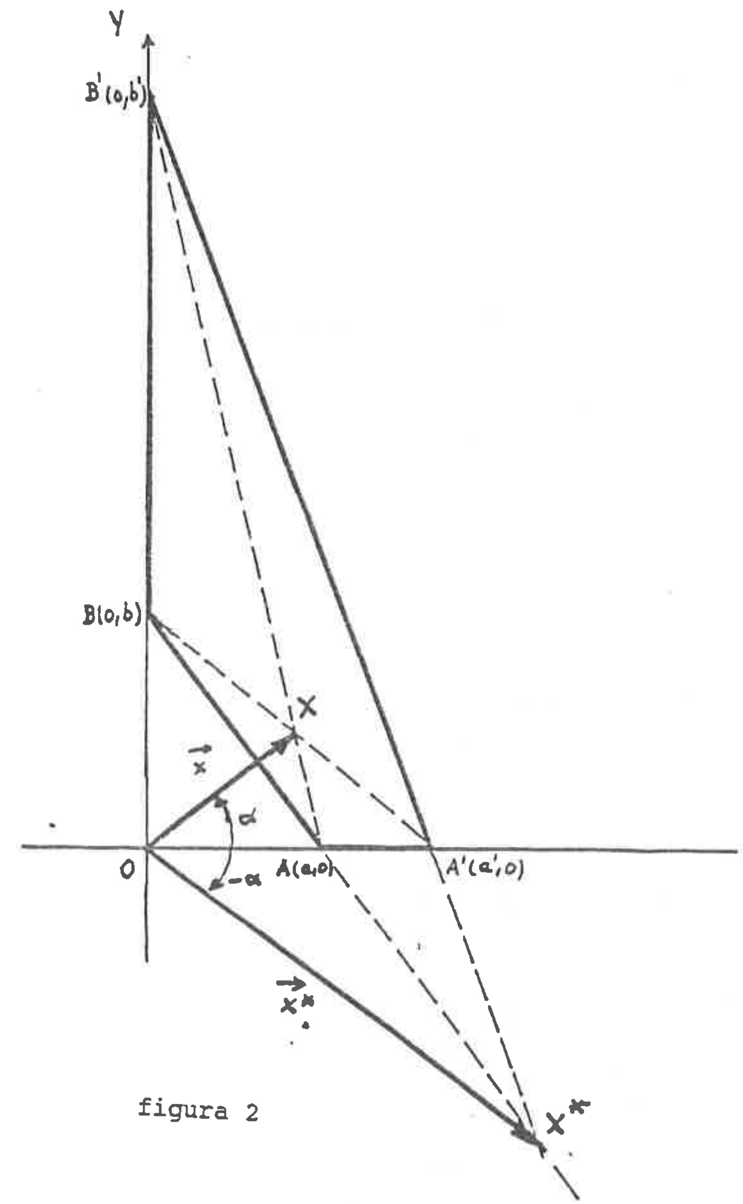


figura 2

y su opuesta, si ponemos: th $A = h$, th $B = k$, y th $C = 1$.

Con el siguiente problema tenemos una interpretación geométrica elemental de la idea anterior.

Problema:

Sea un sistema de referencia cartesiano en el plano. Sean los puntos $A(a,0)$, $A'(a',0)$, $B(0,b)$ y $B'(0,b')$, donde a, a', b, b' son números reales no nulos, donde $a \neq a'$ y $b \neq b'$. Supongamos además, que $a'b'-ab \neq 0$ y $a'b-ab' \neq 0$, y definimos los números $s = a'/a$ y $t = b'/b$.

Sean los puntos $X^* = (x^*,y^*) = AB \cap A'B'$, y $X = (x,y) = AB' \cap A'B$. intersección de los pares de rectas indicadas (figura 2)

Entonces se tiene:

a) Si llamamos $\alpha = \text{ang}(\overrightarrow{OX}, \text{eje } X)$ entonces $-\alpha = \text{ang}(\overrightarrow{OX^*}, \text{eje } X)$

b) Se verifica: $\dfrac{x}{x^*} = \dfrac{-y}{y^*} = \dfrac{s-t}{1-st} = \text{th}(A^*-B^*)$.

que es, la tangente hipérbólica de la diferencia de dos ángulos, con $\text{th}\,A^* = s$ y $\text{th}\,B^* = t$.

II.- Los teoremas que a continuación enunciamos se prueban también por métodos vectoriales y con los mismos argumentos utilizados antes. Resumen y completan a todos los teoremas vistos en la sección anterior.

Teorema.-a) Pappus.-Sean A,B,C y A',B',C' dos ternas de puntos, tomados respectivamente, sobre las rectas dadas r y s. Definimos los puntos siguientes: $C'' = AB' \cap BA'$, $B'' = AC' \cap A'C$ y $A'' = BC' \cap B'C$.

Entonces, los puntos C'', B'' y A'' son colineales.

b) Sean ABC y $A'B'C'$ dos triangulos (dos ternas de puntos no colineales). Sean los puntos $C'' = AB' \cap A'B$, $B'' = AC' \cap A'C$ y $A'' = BC' \cap B'C$. Entonces los puntos A'', B'' y C''

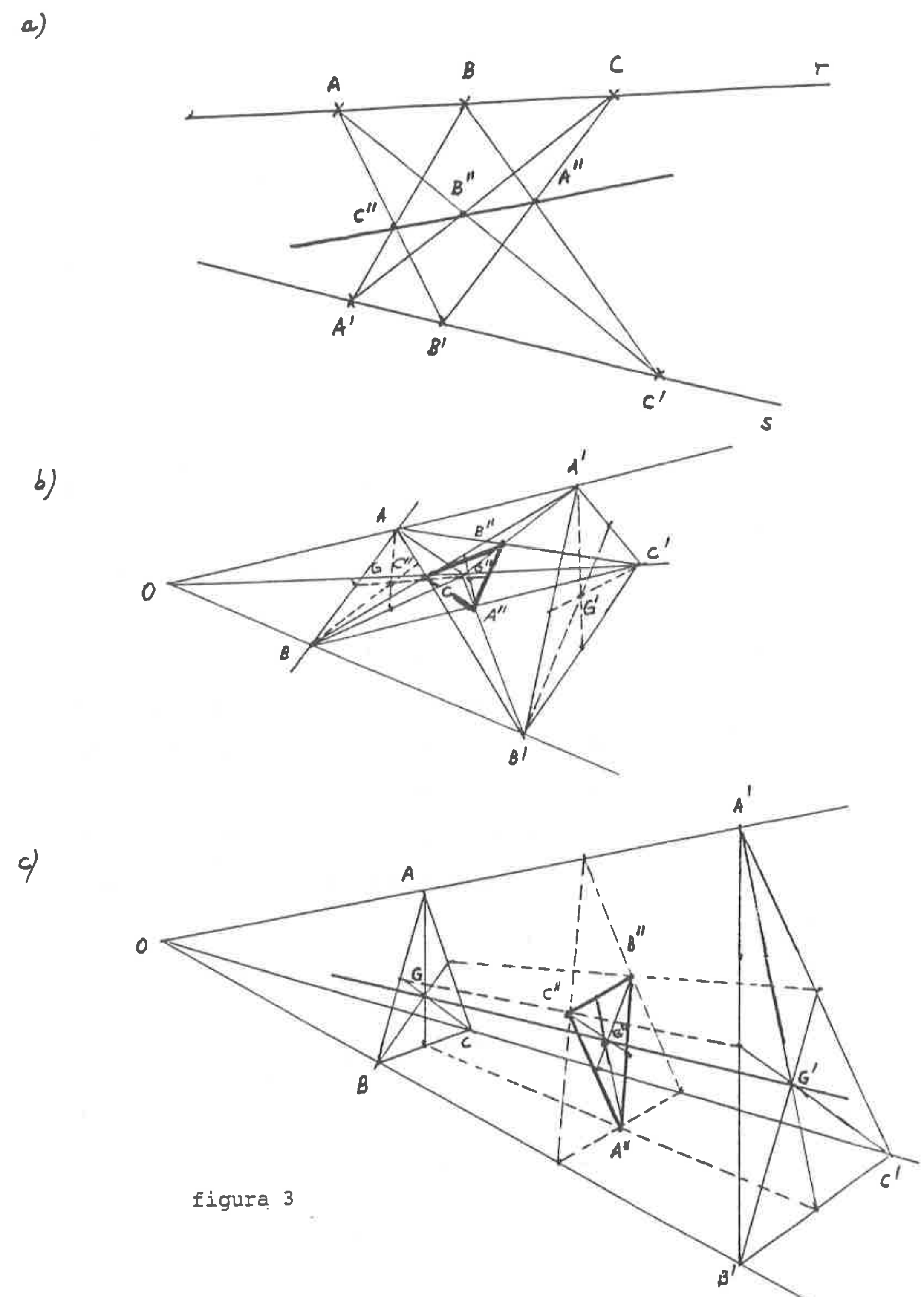


figura 3

G,G' y G" son los centros de gravedad de los triángulos, ABC, A'B'C' y A"B"C", entonces, ellos forman un nuevo triángulo o una terna de puntos no colineales.

c)Sean ABC y A'B'C' dos triángulos dados,y A",B" y C" son respectivamente,los centros de gravedad de los cuadriláteros BCC'B',ACC'A' y ABB'A',respectivamente.Entonces,los puntos A"B"C" son una terna de puntos no colineales.Además,si G,G'y G" son los centros de gravedad de los respectivos triángulos,entonces ellos, forman una terna de puntos colineales.

Ver, las figuras de estos teoremas en hojas aparte. (fig 3)

BIBLIOGRAFIA:

(1) J.B. Romero Márquez: Semejanza baricentrica entre triángulos: Triangulos baricéntricos .Gaceta Matemática, V.2, N. 1

(2) C. Davis y B. Grumbaum y F.A. Scherk (editors): The Geometric Vein: The Coxeter Fetschrift.Springer. N.Y,1982.

(3) D. Pedoe : A course of Geometric for colleges and universities. University Press. Cambridge,1970.

(4) H. Eves : Estudios de las Geometrías, I,II. Uteha. México, 1969.

(5) S. Dubuc.: Geometríe Plane. Prensas Universitarias de Francia. Paris, 1971.

CONSTRUCCION VECTORIAL DE LOS NUMEROS HIPERCOMPLEJOS

por Javier Peralta
Catedrático del I. B. "Conde de Orgaz" de Madrid
Profesor Asociado de la Universidad Complutense

1. INTRODUCCION.-

Desde hace algún tiempo venimos trabajando con los números complejos superiores o hipercomplejos, de los que hemos dado distintas construcciones, entre las que hemos encontrado ciertas relaciones.

El objetivo que ahora nos proponemos es el de tratar de definir el álgebra de los octonios en términos vectoriales, por métodos similares a los que utilizamos en [4] para la construcción de los cuaternios.

En el apartado 2 resumimos algunos resultados logrados en [4] y [5] que ahora necesitaremos. En los apartados 3 y 4 se presenta el álgebra de los octonios por procedimientos vectoriales, tal y como nos habíamos planteado. En el apartado 5 se obtienen los cuaternios, los complejos y los reales como subálgebras suyas.

2. ALGUNOS RESULTADOS PREVIOS.-

Sea V_3 el espacio vectorial euclídeo tridimensional con una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ positivamente orientada, y denotaremos por $v.v'$ y vxv', respectivamente, al producto escalar y al producto vectorial de los vectores v y v'.

En el conjunto $\mathbb{R}xV_3$, producto cartesiano de $\mathbb{R}$ y V_3, definimos las operaciones:

$$\left.\begin{array}{r} (r,v)+(r',v') = (r+r',v+v') \\ s.(r,v) = (sr,sv) \\ (r,v).(r',v') = (rr'-v.v',rv'+r'v + vxv') \end{array}\right\} (1);$$

$\forall r,r',s \in \mathbb{R}$; $\forall v,v' \in V_3$;

que le confieren la estructura de R-espacio vectorial y de cuerpo no conmutativo ([4]).

Los elementos neutros de la adición y la multiplicación son, respectivamente, $(0,\vec{0})$ y $(1,\vec{0})$ (sólo pondremos la flecha de vector a $\vec{0}$, para diferenciarlo del número real 0), y los elementos simétricos de (r,v) son $(-r,-v)$ para la adición, y $(r^2+|v|^2)^{-1}.(r,-v)$ para la multiplicación (si (r,v) es no nulo).

Es obvio que fijada la base anterior $\{u_1,u_2,u_3\}$, cada (x_o,v) de $\mathbb{R}xV_3$ puede identificarse con $(x_o,x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^4$, donde (x_1,x_2,x_3) son las coordenadas de v respecto de dicha base y, traduciendo las operaciones definidas en (1) a $\mathbb{R}^4$, resultan las operaciones habituales de los cuaternios (véase por ejemplo [1]). En consecuencia, desde un punto de vista algebraico podemos identificar a las álgebras $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}xV_3$, con lo que se obtiene un tratamiento esencialmente geométrico de los cuaternios. Nótese que, en particular, si se opera con los elementos de la forma $(0,v)$, $v \in V_3$, aparecen las operaciones que se realizan habitualmente entre los vectores del espacio: la adición, la multiplicación por números reales, la multiplicación escalar y la multiplicación vectorial:

$(0,u) + (0,v) = (0,u+v)$, $r.(0,u) = (0,ru)$, $(0,u).(0,v) = (-u.v,uxv)$.

En otro orden de ideas, sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ el conjunto de los números complejos, $H = \mathbb{R}^4$ el conjunto de los cuaternios y $K = \mathbb{R}^8$ el conjunto de los octonios. Es evidente que con las operaciones habituales tienen estructura de espacio vectorial real, de dimensiones 1, 2, 4 y 8, respectivamente.

En [5] se han descrito las distintas maneras de multiplicar en los conjuntos anteriores, y se ha probado que todas ellas se reducen esencialmente a dos, lográndose por cada uno de dichos procedimientos estructuras isomorfas.

Si escribimos $E_1 = \mathbb{R}$, $E_2 = \mathbb{C}$, $E_4 = H$, $E_8 = K$ (esto es, $\dim E_p = p$), las dos posibilidades son las siguientes:

1) Considerando cada elemento de E_p como un par de elementos de $E_{p/2}$; es decir, cada número complejo como un par de números reales: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, cada cuaternio como un par de números complejos: $H = \mathbb{C}^2$, y cada octonio como un par de cuaternios: $K = H^2$.

Si $x,x',y,y' \in E_{p/2}$; $(x,x'),(y,y') \in E_p$, la multiplicación viene dada por:

$$(x,x').(y,y') = (xy-\bar{y}'x',\ y'x+x'\bar{y}) \qquad (2);$$

donde $\bar{z}$ significa el conjugado de z, que si $z \in \mathbb{C}$ (ó $z \in \mathbb{R}$), coincide con la noción de conjugado de un número complejo (o un número real); si $z = (z_o,z_1,z_2,z_3)$ es un cuaternio, $\bar{z} = (z_o,-z_1,-z_2,-z_3)$; y si $z = (z_o,z_1,\ldots,z_7)$ es un octonio, $\bar{z} = (z_o,-z_1,\ldots,-z_7)$. En [3] pueden verse las propiedades de la conjugación en H y K, muy similares a las de la conjugación en $\mathbb{C}$, salvo que el conjugado de un producto cambia el orden de los conjugados de los factores: $\overline{x.y} = \overline{y}.\overline{x}$.

2) Considerando a cada elemento de E_p como una cuaterna de elementos de $E_{p/4}$. Se obtienen así los cuaternios como una cuaterna de números reales: $H = \mathbb{R}^4$, y los octonios como una cuaterna de complejos: $K = \mathbb{C}^4$.

Si $x_i, y_i, z_i \in E_{p/4}$, $0 \leq i \leq 3$; (x_o,x_1,x_2,x_3), (y_o,y_1,y_2,y_3), $(z_o,z_1,z_2,z_3) \in E_p$; entonces

$(x_o,x_1,x_2,x_3).(y_o,y_1,y_2,y_3) = (z_o,z_1,z_2,z_3)$, siendo

$$\left.\begin{aligned} z_o &= x_oy_o - x_1\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_2 - \bar{x}_3y_3 \\ z_1 &= x_oy_1 + x_1\bar{y}_o + \bar{x}_2y_3 - x_3\bar{y}_2 \\ z_2 &= x_oy_2 - \bar{x}_1y_3 + x_2\bar{y}_o + x_3\bar{y}_1 \\ z_3 &= \bar{x}_oy_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_o \end{aligned}\right\} (3);$$

donde $\bar{w}$ significa, igual que antes, conjugado de w.

Como se ha dicho más arriba, los conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, H y K tienen estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial respecto de las operaciones habituales. Consideremos la adición del mismo y la siguiente multiplicación: en $\mathbb{R}$, la habitual; en $\mathbb{C}$, la habitual - esto es, (2) - en H y en K, cualquiera de las dos: (2) ó (3). Se verifica entonces ([5]) que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ tienen estructura de cuerpos conmutativos, H de cuerpo no conmutativo, y la multiplicación en K no es conmutativa ni asociativa, aunque tiene elemento neutro e inverso, y es distributiva respecto de la adición, Así, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son álgebras asociativas y conmutativas, H es un álgebra asociativa pero no conmutativa, y K es un álgebra no asociativa ni conmutativa.

3. PRESENTACION VECTORIAL DE LOS OCTONIOS.-

Tratamos ahora de introducir los octonios de manera similar a como se han construido los cuaternios en [4].

Un primer intento consistirá en considerar el conjunto $\mathbb{R}xV_7$, siendo V_7 el espacio vectorial euclídeo de dimensión 7 con la base ortonormal $\{u_1,u_2,\dots,u_7\}$ positivamente orientada. Fijada dicha base, cada $(x_o,u) \in \mathbb{R}xV_7$ puede identificarse con $(x_o,x_1,\dots,x_7) \in \mathbb{R}^8$, si es $u = \sum_{i=1}^{7} x_iu_i$.

Es obvio que se le puede dotar a $\mathbb{R}xV_7$ de estructura de espacio vectorial real con las operaciones habituales pero, en cambio, no es posible definir una multiplicación de forma análoga a la que aparece en la tercera igualdad de (1), por la imposibilidad de construir un producto vectorial de dos vectores 7-dimensionales (sí podría definirse, sin embargo un producto vectorial de seis vectores 7-dimensionales, como puede verse en [2]). En consecuencia, tendremos que buscar otra vía.

Como hemos dicho en el apartado 2, una de las formas de multiplicar en K es considerando cada octonio como un par de cuaternios y, según ya hemos indicado, en [4] se identificó H con $\mathbb{R}xV_3$. Tomemos, por tanto el conjunto $(\mathbb{R}xV_3)^2$ donde, por comodidad de notación escribiremos $((r,w),(r',w')) = (r,w,r',w')$; es decir, consideramos iguales a los conjuntos $(\mathbb{R}xV_3)^2$ y $\mathbb{R}xV_3x\mathbb{R}xV_3$.

Es evidente que, fijada la base ortonormal de V_3, $B = \{u_1,u_2,u_3\}$, que supondremos positivamente orientada, cada $(x_o,u,x_o',u') \in (\mathbb{R}xV_3)^2$ puede identificarse con el octonio $(x_o,x_1,\dots,x_7) \in \mathbb{R}^8$, siendo $u = \sum_{i=1}^{3} x_iu_i$, $x_o' = x_4$, $u' = \sum_{i=5}^{7} x_iu_{i-4}$.

Resulta trivial probar que el conjunto $(\mathbb{R}xV_3)^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones

$$\left.\begin{aligned} (x_o,u,x_o',u') + (y_o,v,y_o',v') &= (x_o+y_o,u+v,x_o'+y_o',u'+v'), \\ r.(x_o,u,x_o',u') &= (rx_o,ru,rx_o',ru'), \end{aligned}\right\} (4);$$

$\forall x_o,x_o',y_o,y_o' \in \mathbb{R}$; $\forall u,u',v,v' \in V_3$.

Y dicho espacio vectorial tiene dimensión 8, siendo una base suya el conjunto $\{(1,\vec{0},0,\vec{0}),(0,u_1,0,\vec{0}),(0,u_2,0,\vec{0}),(0,u_3,0,\vec{0}),$

$(0,\vec{0},1,\vec{0}),(0,\vec{0},0,u_1),(0,\vec{0},0,u_2),(0,\vec{0},0,u_3)\}$.

4. MULTIPLICACIÓN EN EL CONJUNTO $(\mathbb{R}\times V_3)^2$.-

En cuanto a la multiplicación, en virtud de (2), se tiene:

$$(x_o,u,x'_o,u').(y_o,v,y'_o,v') =$$

$$= ((x_o,u).(y_o,v) - \overline{(y'_o,v')}.(x'_o,u'),\ (y'_o,v').(x_o,u) + (x'_o,u').\overline{(y_o,v)}).$$

Pero $\overline{(y'_o,v')} = (y'_o,-v')$, $\overline{(y_o,v)} = (y_o,-v)$ (ver[4]),

y utilizando la tercera igualdad de (1), se llega a que el producto anterior es:

$$((x_oy_o-u.v,x_ov+y_ou+uxv) - (y'_ox'_o+v'.u',y'_ou'- x'_ov'-v'xu'),$$
$$(y'_ox_o-v'.u,y'_ou+x_ov'+v'xu) + (x'_oy_o+u'.v,-x'_ov+y_ou'-u'xv)).$$

Teniendo en cuenta la identificación $(\mathbb{R}\times V_3)^2=\mathbb{R}\times V_3\times\mathbb{R}\times V_3$, se define finalmente:

$(x_o,u,x'_o,u').(y_o,v,y'_o,v') = (z_o,w,z'_o,w')$, siendo

$$\left.\begin{aligned} z_o &= x_oy_o - x'_oy'_o - u.v - u'.v' \\ w &= x_ov + y_ou + x'_ov' - y'_ou' + uxv - u'xv' \\ z'_o &= x_oy'_o + x'_oy_o - u.v' + u'.v \\ w' &= x_ov' + y_ou' - x'_ov + y'_ou - uxv' - u'xv \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Mediante esta definición se ha logrado, por tanto, expresar la multiplicación con terminología vectorial.

Se puede probar que esta multiplicación no es asociativa ni conmutativa, pues si $x=(0,\vec{0},1,\vec{0})$, $y=(0,\vec{0},0,u_1)$, $z=(0,\vec{0},0,u_2)$, (recordemos que $B = \{u_1,u_2,u_3\}$ es una base ortonormal positivamente orientada de V_3), entonces:

$$(x.y).z = (0,u_1,0,\vec{0}).(0,\vec{0},0,u_2) = (0,\vec{0},0,-u_3),$$
$$x.(y.z) = (0,\vec{0},1,\vec{0}).(0,-u_3,0,\vec{0}) = (0,\vec{0},0,u_3),$$
$$x.y = (0,u_1,0,\vec{0}),\ y.x = (0,-u_1,0,0).$$

En cambio, es distributiva respecto de la adición (su comprobación es muy pesada), tiene elemento unidad $(1,\vec{0},0,\vec{0})$, y como $(x_o,u,x'_o,u').(x_o,-u,-x'_o,-u')=(x_o^2+x_o'^2+|u|^2+|u'|^2,\vec{0},0,\vec{0})$,

resulta que el elemento inverso de un elemento distinto de cero (x_o,u,x'_o,u') es

$$(x_o,u,x'_o,u')^{-1}=(x_o^2+x_o'^2+|u|^2+|u'|^2)^{-1}.(x_o,-u,-x'_o,-u').$$

Se expone a continuación otra forma de llegar a la definición de multiplicación en $(\mathbb{R}\times V_3)^2$.

En el conjunto $K = \mathbb{R}^8$, la multiplicación que habitualmente aparece en los libros es la siguiente.

Si $x = (x_o,x_1,...,x_7)$, $y = (y_o,y_1,...,y_7)\in K$, entonces $x.y = z\in K$, donde $z = (z_o,z_1,...,z_7)$ viene determinado por:

$$\left.\begin{aligned} z_o &= x_oy_o-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4-x_5y_5-x_6y_6-x_7y_7 \\ z_1 &= x_oy_1+x_1y_o+x_2y_3-x_3y_2+x_4y_5-x_5y_4-x_6y_7+x_7y_6 \\ z_2 &= x_oy_2-x_1y_3+x_2y_o+x_3y_1+x_4y_6+x_5y_7-x_6y_4-x_7y_5 \\ z_3 &= x_oy_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_o+x_4y_7-x_5y_6+x_6y_5-x_7y_4 \\ z_4 &= x_oy_4-x_1y_5-x_2y_6-x_3y_7+x_4y_o+x_5y_1+x_6y_2+x_7y_3 \\ z_5 &= x_oy_5+x_1y_4-x_2y_7+x_3y_6-x_4y_1+x_5y_o-x_6y_3+x_7y_2 \\ z_6 &= x_oy_6+x_1y_7+x_2y_4-x_3y_5-x_4y_2+x_5y_3+x_6y_o-x_7y_1 \\ z_7 &= x_oy_7-x_1y_6+x_2y_5+x_3y_4-x_4y_3-x_5y_2+x_6y_1+x_7y_o \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Sean (x_o,u,x'_o,u'), $(y_o,v,y'_o,v')\in(\mathbb{R}\times V_3)^2$ y queremos definir su producto (z_o,w,z'_o,w').

Si suponemos que $(x_1,x_2,x_3),(x_5,x_6,x_7),(y_1,y_2,y_3),(y_5,y_6,y_7),(z_1,z_2,z_3),(z_5,z_6,z_7)$ son las coordenadas, respectivamente, de u,u',v,v',w,w' en la base B, y llamamos $x'_o=x_4$, $y'_o=y_4$, $z'_o=z_4$, se tendrán que cumplir las relaciones (6).

Se deducen sin dificultad:

$$z_o = x_oy_o-x'_oy'_o-u.v-u'.v',$$

$$w = (z_1,z_2,z_3) = (x_oy_1,x_oy_2,x_oy_3) + (x_1y_o,x_2y_o,x_3y_o) +$$
$$+ (x_4y_5,x_4y_6,x_4y_7) - (x_5y_4,x_6y_4,x_7y_4) + (x_2y_3-x_3y_2,-x_1y_3+x_3y_1,$$
$$x_1y_2-x_2y_1) - (x_6y_7-x_7y_6,-x_5y_7+x_7y_5,x_5y_6-x_6y_5) =$$
$$= x_ov+y_ou+x'_ov'-y'_ou'+uxv-u'xv',$$

$$z'_o = x_o y'_o + x'_o y_o - u.v' + u'.v \;,$$

$$w' = (z_5, z_6, z_7) = (x_o y_5, x_o y_6, x_o y_7) + (x_5 y_o, x_6 y_o, x_7 y_o) -$$
$$- (x_4 y_1, x_4 y_2, x_4 y_3) + (x_1 y_4, x_2 y_4, x_3 y_4) - (x_2 y_7 - x_3 y_6, -x_1 y_7 + x_3 y_5,$$
$$x_1 y_6 - x_2 y_5) - (x_6 y_3 - x_7 y_2, -x_5 y_3 + x_7 y_1, x_5 y_2 - x_6 y_1) =$$
$$= x_o v' + y_o u' - x'_o v + y'_o u - u x v' - u' x v,$$

con lo que se tiene (5).

5. PRESENTACION VECTORIAL DE LOS NUMEROS HIPERCOMPLEJOS.-

Fijada una base ortonormal orientada positivamente $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ del espacio vectorial euclídeo tridimensional V_3, consideramos el conjunto $K' = \mathbb{R} x V_3 x \mathbb{R} x V_3$, y sus subconjuntos

$$H' = \{(x_o, u, x'_o, u') \in K' \mid x'_o = 0,\ u' = \vec{0}\} \;,$$
$$C' = \{(x_o, u, x'_o, u') \in K' \mid u = u' = \vec{0}\} \;,$$
$$\mathbb{R}' = \{(x_o, u, x'_o, u') \in K' \mid x'_o = 0,\ u = u' = \vec{0}\} \;.$$

Se definen en K'las operaciones naturales, expresadas en (4), que le dotan de estructura de espacio vectorial real de dimensión 8. Resulta entonces que H', $\mathbb{C}$'y $\mathbb{R}$'son subespacios vectoriales suyos de dimensiones 4, 2 y 1, respectivamente (trivial).

También se define en K'la multiplicación dada por (5), que no es asociativa ni conmutativa, pero es distributiva respecto de la adición y tiene elemento neutro y simétrico, por lo que K'es un álgebra no asociativa ni conmutativa.

La restricción de dicha multiplicación a H', $\mathbb{C}$'y $\mathbb{R}$'es, respectivamente:

$$(x_o, u, 0, \vec{0}).(y_o, v, 0, \vec{0}) = (x_o y_o - u.v, x_o v + y_o u + u x v, 0, \vec{0}),$$
$$(x_o, \vec{0}, x'_o, \vec{0}).(y_o, \vec{0}, y'_o, \vec{0}) = (x_o y_o - x'_o y'_o, \vec{0}, x_o y'_o + x'_o y_o, \vec{0}),$$
$$(x_o, \vec{0}, 0, \vec{0}).(y_o, \vec{0}, 0, \vec{0}) = (x_o y_o, \vec{0}, 0, 0).$$

De esta forma, H'es un cuerpo no conmutativo, $\mathbb{C}$'y $\mathbb{R}$'son cuerpos conmutativos, y H', $\mathbb{C}$'y $\mathbb{R}$'son subálgebras de K.

Las álgebras K', H', $\mathbb{C}$'y $\mathbb{R}$'son isomorfas, respectivamente, a K (álgebra de los octonios), H (álgebra de los cuaternios), $\mathbb{C}$ (álgebra de los números complejos) y $\mathbb{R}$ (álgebra de los números reales), y podemos identificarlas. De esta forma, si $x_o \in \mathbb{R}$, $u = \sum_{i=1}^{3} x_i u_i \in V_3$, $x'_o = x_4 \in \mathbb{R}$, $u' = x_5 u_1 + x_6 u_2 + x_7 u_3 \in V_3$, se puede escribir:

$$(x_o, u, x'_o, u') = (x_o, x_1, \ldots, x_7) \in K,$$
$$(x_o, u, 0, \vec{0}) = (x_o, x_1, x_2, x_3) \in H,$$
$$(x_o, \vec{0}, x'_o, \vec{0}) = (x_o, x'_o) \in \mathbb{C},$$
$$(x_o, \vec{0}, 0, \vec{0}) = x_o \in \mathbb{R}.$$

BIBLIOGRAFIA.-

[1] A.D. Aleksandrov y otros. "La Matemática: su contenido, métodos y significado". Vol. 3. Alianza Universidad. Madrid, 1973.

[2] D.M. Bloom. "Linear Algebra and Geometry". Cambridge University Press. Cambridge, 1979.

[3] N. Jacobson. "Basic Algebra I". W.H. Freeman and Company. New York, 1985.

[4] J. Peralta. "Una presentación de los cuaternios". (Aparecerá en el nº 16 de Thales. Revista de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas. Sevilla).

[5] J. Peralta. "Multiplicación de números hipercomplejos". Boletín de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas. Madrid, 25 (1990), 29-44.

RESEÑAS DE LIBROS

RECENT ADVANCES IN GEOMETRIC INEQUALITIES, por *D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric, V. Volenec*. Kluwer Academic Publishers, 1989. 710 págs. ISBN-90-227-2565-9.

Ha habido que esperar 30 años, pero ha merecido la pena. Es el primer pensamiento que uno tiene al empezar a hojear el enciclopédico libro de Mitrinovic y sus colegas, continuación del ya clásico - y agotado hace tiempo - *Geometric Inequalities*: la "Biblia de Bottema", como se le llama en la revista canadiense *Crux Mathematicorum*.

Aquí, además de un apéndice con correcciones y añadidos al libro de Bottema citado, se recopilan alrededor de 3000 desigualdades para figuras planas, del espacio de tres dimensiones y del de n dimensiones, publicadas de forma completamente dispersa en muy variadas revistas, algunas inaccesibles para los lectores occidentales, desde 1969 (la fecha de publicación del Bottema) y 1987.

El tratamiento del tema es, en la medida de lo posible, unificado, y también, en cierto modo, histórico (los autores han procurado establecer prioridades en las demostraciones, y siempre que pueden citan fuentes originales).

Es difícil resumir en unas líneas los 20 capítulos del contenido, cuyos títulos incluimos aquí: I, La existencia del triángulo; II, Dualidad entre desigualdades geométricas y desigualdades entre números postivos; III, Polinomios simétricos homogéneos y desigualdades geométricas; IV, Dualidad entre desigualdades triangulares y desigualdades con (R,r,s); V, Transformaciones de los ángulos de un triángulo; VI, Algunas desigualdades trigonométricas; VII, Otras transformaciones; VIII, Funciones convexas y desigualdades geométricas; IX, Desigualdades diversas entre los elementos de un triángulo; X, Triángulos especiales; XI, Triángulo y punto; XII, Desigualdades con varios triángulos; XIII, Los teoremas de Möbius-Pompeiu; XIV, Desigualdades para cuadriláteros; XV, Desigualdades para polígonos; XVI, Desigualdades para el círculo; XVII, Desigualdades especiales (isoperiméricas) en geometría plana; XVIII, Desigualdades para simplex en E^n $(n\geq 2)$; XIX, Desigualdades para tetraedros; XX, Otras desigualdades en E^n; Apéndice.

La obra que comentamos es una referencia fundamental para todo matemático y en particular para los aficionados al fascinante y complejo mundo de las desigualdades geométricas.

Prof. Francisco Bellot Rosado

\- - - - - - - -

GEOMOUSE, por Julio Castiñeira Merino y Jorge Pascual Sancho. Instituto de Bachillerato "Marqués de Lozoya". Cuellar. 40200 Segovia.

Julio Castiñeira es Catedrático de Matemáticas del I.B. de Cuellar, Profesor Asociado del Departamento de Matemática Aplicada a la Técnica y a la Programación en la Escuela Universitaria Politécnica de la Universidad de Valladolid y miembro de nuestra Sociedad "Puig Adam". Jorge Pascual es estudiante de Ingeniería Industrial.

Geomouse es un programa de dibujo geométrico, cuyo objetivo es hacer geometría experimental de modo rápido y placentero. Se trata de una herramienta que permite sustituir la regla y el compás por el ratón del ordenador. Este programa obtuvo un tercer premio en el concurso convocado por el MEC. Cabe en un disquete de alta densidad e incluye un manual explicativo.

La presentación, de tipo "windows" 100%, es "muy profesional" (similar a Dr. Halo o Autosketch, pero con una orientación más geométrica). Su manejo es muy cómodo. La programación está realizada en Turbo Pascal (versión 6.0). El programa ha sido diseñado para funcionar en cualquier ordenador compatible sobre la versión 3.0, o superior, del DOS, requiriendo la presencia de ratón y tarjeta gráfica (preferible EGA o VGA). Al ejecutarlo, la pantalla queda dividida en varias partes: área de trabajo, línea de iconos de trabajo, paleta de colores, zona de coordenadas e información, línea de mensajes de ayuda y línea de títulos.

El programa permite elaborar "configuraciones geométricas", esto es, conjuntos de objetos geométricos: puntos, segmentos, circunferencias, etc. Estos tres tipos de objetos se pueden determinar mediante coordenadas y distancias, pero otros no (ángulos). El tipo de construcciones y actividades que permite realizar es muy variado. En el manual se describen, a título orientativo, las siguientes:

- suma de ángulos de un triángulo
- medianas de un triángulo y baricentro
- bisectrices de un triángulo, incentro y circunferencia inscrita
- bisectrices exteriores y excentros
- recta de Euler de un triángulo
- teorema de Tales
- construcción de un pentágono regular de lado dado
- construcción aproximada de Durero del pentágono regular
- construcción de polígonos estrellados
- resolución de triángulos
- teorema de Morley
- tangentes a una circunferencia por un punto exterior
- circunferencias tangentes entre sí y tangentes interiores a otra dada
- potencia de un punto respecto de una circunferencia
- eje radical de dos circunferencias exteriores
- teorema de Napoleón
- punto de Georgonne de un triángulo
- medida de ángulo exterior a una circunferencia
- triángulo simétrico a uno dado

El programa se puede utilizar a muy distintos niveles, por lo que es muy recomendable para alumnos de enseñanza primaria, bachillerato y escuelas universitarias, en actividades de Gemetría Descriptiva, e incluso para alguno de los temas de Geometría Sintética, que se incluyen en el primer curso de algunas facultades y escuelas técnicas superiores.

Los autores merecen una felicitación por la calidad del programa y por la idea de desarrollar una herramienta que puede contribuir a la tan necesaria y deseada recuperación de la Geometría Elemental.

E.R.M.

NUEVA SECCION DE NUESTRO BOLETíN

PROBLEMAS PROPUESTOS POR NUESTROS SOCIOS

Nuestra habitual sección de PROBLEMAS PROPUESTOS recoge normalmente enunciados procedentes de las distintas Olimpiadas Matemáticas o de algunas oposiciones a cuerpos del Estado. Nos proponemos abrir ahora una nueva sección destinada a recoger enunciados originales, que nos sean enviados por nuestros socios, para su inclusión en ella, con indicación de su procedencia.

Invitamos, por tanto, a los lectores de este Boletín a que nos remitan aquellos enunciados de problemas que hayan ideado, y que crean que pueden servir de desafío a los aficionados que abundan entre nuestros socios. No es preciso que estos problemas se mantengan dentro del repertorio de materias propio de las Olimpiadas. Los que deseen colaborar en esta nueva Sección, deberán enviarnos sus enunciados acompañados de la solución resumida.

Con posterioridad a la publicación de los mencionados enunciados, invitamos a todos a que nos envíen sus soluciones, que serán publicadas en números posteriores.

- - - - - -

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín *(señalar con unas aspas los que interesen)*:

3 ☐ 4 ☐ 25 ☐ 26 ☐ 27 ☐ 28 ☐ 29 ☐

30 ☐ 31 ☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo *(48 pts. por número para Madrid y 73 pts. por número para provincias)*.

Hagan el envío utilizando como dirección la consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 y 24 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento recorte o copie este cupón y envíelo a la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Apartado 9479 - 28080 - MADRID.*

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problemas propuestos en la XXXIII Olimpiada Matematica Internacional, celebrada en Rusia en Julio de 1992.

PROBLEMA 1^{o}:

Hallar todos los enteros a, b, c, con $1 < a < b < c$ tales que $(a-1)(b-1)(c-1)$ divide a $abc-1$.

- - - - -

PROBLEMA 2^{o}:

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para todos x, y en $\mathbb{R}$ se verifica que

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + \left(f(x)\right)^2 .$$

- - - - -

PROBLEMA 3^{o}:

Se consideran nueve puntos en el espacio, tales que no hay cuatro en un mismo plano. Cada dos puntos se unen por una arista (es decir, un segmento de recta). Cada arista o bien se colorea de azul o bien de rojo o se deja sin colorear. Hallar el menor valor de n tal que siempre que se colorean exactamente n aristas se tiene necesariamente algún triángulo cuyas aristas son del mismo color.

- - - - -

PROBLEMA 4^{o}:

En el plano sean C una circunferencia, L una recta tangente a C y M un punto de L . Encontrar el lugar geométrico de los puntos P con la siguiente propiedad:

Existen dos puntos Q , R en L tales que M es el punto medio de QR y C es la circunferencia inscrita en el triángulo PQR .

- - - - -

PROBLEMA 5^{o}:

Sea S un conjunto finito de puntos en el espacio tridimensional con el sistema de coordenadas cartesianas. Sean S_x , S_y , S_z los conjuntos formados por las proyecciones de S sobre los planos yz , zx , xy respectivamente. Demostrar que

$$|S|^2 \le |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z| \ ,$$

donde $|A|$ denota el número de elementos del conjunto finito A .

Nota: La proyección ortogonal de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada desde el punto al plano.

\- - - - -

PROBLEMA 6^{o}:

Para cada entero positivo n , se define S(n) como el mayor entero que, para todo entero k , $1 \le k \le S(n)$, n^2 puede escribirse como suma de k cuadrados estrictamente positivos.

(a) Demostrar que $S(n) \le n^2 - 14$ para cada $n \ge 4$.

(b) Hallar un entero n tal que $S(n) = n^2 - 14$.

(c) Demostrar que hay un número infinito de enteros n tales que $S(n) = n^2 - 14$.

\- - - - -

XXXIII Международная Математическая Олимпиада

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA VII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS CELEBRADA EN CARACAS (VENEZUELA) EN 1992

PROBLEMA 7^{o}:

Para cada entero positivo n, sea a_n el último dígito del número

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Calcular $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1992}$.

\- - - - - -

PROBLEMA 8^{o}:

Dadas la colección de n números reales positivos

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$$

y la función

$$f(x) = \frac{a_1}{x + a_1} + \frac{a_2}{x + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{x + a_n} \ ,$$

determinar la suma de las longitudes de los intervalos, disjuntos dos a dos, formados por todos los x tales que $f(x) \ge 1$.

\- - - - - -

PROBLEMA 9^{o}:

En un triángulo equilátero ABC cuyo lado tiene longitud 2 se inscribe la circunferencia Γ .

a) Demostrar que para todo punto P de Γ la suma de los cuadrados de sus distancias a los vértices A, B y C es 5.

b) Demostrar que para todo punto P de Γ es posible construir un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos AP, BP y CP, y que su área es $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

\- - - - - -

PROBLEMA 10°:

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números enteros que verifican las siguientes condiciones:

i) $a_0 = 0$; $b_0 = 8$.

ii) $a_{n+2} = 2\,a_{n+1} - a_n + 2$; $b_{n+2} = 2\,b_{n+1} - b_n$

iii) $a_n^2 + b_n^2$ es un cuadrado perfecto para todo n.

Determinar al menos dos valores del par (a_{1992}, b_{1992}).

- - - - - -

PROBLEMA 11°:

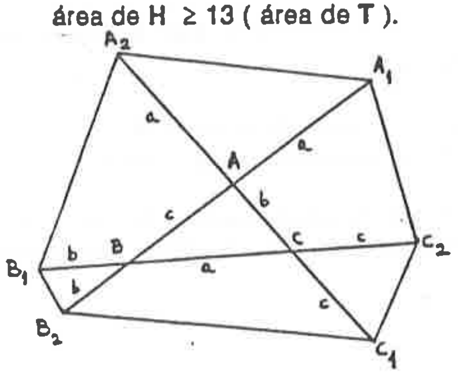
Se da la circunferencia Γ y los números positivos h y m de modo que existe un trapecio $ABCD$ inscrito en Γ, de altura h y en el que la suma de las bases AB y CD es m. Construir el trapecio $ABCD$.

- - - - - -

PROBLEMA 12°:

A partir del triángulo T de vértices A, B y C se construye el hexágono H de vértices A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 como se muestra en la figura. Demostrar que

área de H $\geq$ 13 (área de T).



- - - - - -

ENUNCIADOS DE PROBLEMAS PROPUESTOS POR NUESTROS SOCIOS:
(Nueva seccion de nuestro Boletín)

PROBLEMA 13°:

Tres ciclistas con los dorsales 1, 2 y 3 participan en una carrera en la que hay cuatro metas volantes y la meta final.

Los puntos que se dan a cada ciclista al paso por la meta i-ésima en la j-ésima posición son $(3-j).3^{i-1}$, para todo $i = 1,2,3,4,5$ y todo $j = 1,2,3$. Los premios en metálico son directamente proporcionales a los puntos que se consigan y la cantidad ganada por cada ciclista según sus dorsales ha sido de: 584000 pesetas, 772000 pesetas y 96000 pesetas, respectivamente.

Halla la posición de los tres ciclistas en todas las metas.

Propuesto por Joaquín Gómez Rey

- - - - - - -

PROBLEMA 14°:

Hay n comités $(n \geq 2)$; cada par de comités tiene un único miembro en común y cada persona está exactamente en dos comités. Halla:

a) Cuantas personas hay ?

b) Cuantas personas hay en cada comité ?

Propuesto por Joaquín Gómez Rey

- - - - - - -

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

pro- pues- tos en nº	procedentes de	Numeros de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de numeros: 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	Obs.
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	13-14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OI-85-Bogota	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19 /	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	20-21	20	23	21	-	C
11	OME-f1-86 /	13	14	14	14	14	23	20	15 /	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	C
12	OI-87-Uru/OME-f1	16	14	14	17	15	17 /	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21					C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	C
18	OI-88-Peru	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89 /	24	27	24	27	27	24 /	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30 /	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	-	-	-	-	-	-	-	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	-	-	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	-	-	C
25	OME-f2/f1-90	XX	31	29	29	31	32 /	32	32	32	XX	
26	OMI-90-China /	32	XX	XX	32	XX	XX /	XX	32	XX	XX	
	OIM-90-Vallad.	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
27	OME-f1-91	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
29	OMI-91-Suecia	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OME-f1-91	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	
31	OME-f2-91/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OME-f1-91/PNS	XX	XX /	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	
32	OMI-92-Moscú /	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OI-92-Venez/PNS	XX	XX /	XX	XX	-	-	-	-	-	-	

CLAVES: XX = Pendientes de publicación . C = Completo.
OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2).
OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OI = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.
PNS = Propuestos por nuestros socios.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 6º (Boletin nº 25)

Se consideran n puntos del plano tales que no existen dos parejas equidistantes. Por cada punto se traza el segmento que le une al mas cercano. Probar que ningún punto está unido a más de cinco puntos.

Solución:

Supongamos A, B y C tres puntos cualesquiera entre los n. Tenemos que el triángulo ABC no tiene dos lados iguales. Sea BC el lado mayor. Entre B y C no puede aparecer ningún segmento de unión, pues A está más cercano de B que C y A está más cercano de C que B.

Sea ahora un punto O unido con P y con Q por sendos segmentos. Por lo anterior deducimos que P no puede estar unido con Q y PQ es el lado mayor del triángulo OPQ.

Aplicando el teorema del seno al triángulo OPQ anterior concluimos que el ángulo $\widehat{POQ}$ es el mayor del triángulo y por tanto mayor que 60º. De esto deducimos que O no puede estar unido a más de cinco puntos.

José Miguel Celorrio Laseca (Soria)

- - - - - -

PROBLEMA Nº 7.: (Boletín 25)

Tenemos una red formada por cuadrados de lado 1 ¿qué lado debe tener un cuadrado C de modo que, como quiera que se coloque, contenga al menos uno de los cuadrados de la red?

Solución

Sea un círculo de radio $r = \sqrt{2}$, y centro O; si O coincide con un vértice de la cuadrícula recubre 4 cuadrados; para cualquier desplazamiento de su centro O el círculo desplazado de centro O', ha sufrido una traslación $\overline{v} = \overline{OO'}$, de forma que O' es

a) interior a un cuadrado C.

b) es incidente con un lado común a dos cuadrados C'y C''y O'no coincide con ningún vértice.

c) coincide con un vértice.

En el caso a), la distancia de O' a cada vértice del cuadrado es menor que $\sqrt{2}$, luego C es interior al círculo de centro O'.

En el caso b), los seis puntos, vértices de los dos cuadrados C' y C''distan de O' menos que $\sqrt{2}$, luego los dos cuadrados serán interiores al círculo.

El caso c) coincide con el indicado en primer lugar, luego los cuatro cuadrados estarán contenidos.

Un cuadrado circunscriptible a un círculo de radio $\sqrt{2}$, por recubrir a tal círculo contendrá en cualquier posición al menos uno de los cuadrados de lado unidad. Un cuadrado de lado menor que $2\sqrt{2}$ sería de lado $2\sqrt{2}-2\epsilon$ y su circulo inscrito tendría de radio $\sqrt{2} - \epsilon$, que con centro en un vértice de la cuadrícula no contendría ningún cuadrado completo; un cuadrado circunscrito a dicho círculo no necesariamente recubre a ningún cuadrado, p. ej.: el de diagonales paralelas a las rectas de la red.

Luego, como un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$, recubre en todos los casos al menos un cuadrado y como cualquier cuadrado de lado menor no cumple necesariamente, el lado pedido es $2\sqrt{2}$.

José V. García Sestafe (Madrid)

PROBLEMA Nº 8 (Boletin nº 25)

Probar que $2^{55} + 1$ es divisible por 11.

Solución:

Como $2^5 \equiv -1$ (mód. 11) , elevando a 11,

$$(2^5)^{11} \equiv (-1)^{11} \text{ (mód. 11)} .$$

Luego $2^{55} \equiv -1$ (mód. 11) , que equivale a lo que queríamos demostrar.

Rodolfo Esteve Arolas (Valencia)

otra solución de José V. García Sestafe (Madrid)

- - - - - -

PROBLEMA Nº 9 (Boletin nº 25)

Sean $x_1,\ldots,x_n$ números positivos tales que su suma $x_1 + \ldots + x_n$ es menor o igual que n . Probar que su producto es menor o igual que 1 .

Solución

Es sabido que si la suma de varios números positivos es constante, su producto es máximo si dichos números son iguales.

Sea, entonces, $x_1+x_2+\ldots+x_n = s \le n$. El producto será máximo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{s}{n} \le \frac{n}{n} = 1$, luego $P = x_1.x_2. \ldots .x_n = \left(\frac{s}{n}\right)^n \le 1$.

NOTA: La propiedad utilizada es fácilmente demostrable mediante la optimización de funciones de varias variables; pero se puede deducir usando funciones de una variable. Supongamos que se han determinado todos los números salvo dos, x_i y x_j. Entonces hay que determinar el máximo de $P = k_{ij}x_ix_j$, con la condición $x_i+x_j = s_{ij}$, donde k_{ij} es el producto de los restantes y s_{ij} su suma. Entonces $P = k_{ij}x_i(s_{ij}-x_i)$ que alcanza el máximo para $x_i = s_{ij}/2$, luego $x_i = x_j$ lo que indica que cada par de números deben ser iguales, esto es, que todos ellos deben ser iguales.

José V. García Sestafe (Madrid)

- - - - - -

PROBLEMA 1º (Boletin nº 26)

Sea f una función definida en el conjunto de los enteros mayores o iguales que cero, que verifica las dos condiciones siguientes:

I) Si $n = 2^j-1$, para $j = 0,1,2,...,$ entonces $f(n)$ es cero.

II) Si $n \neq 2^j-1$, para $j = 0,1,2,...,$ entonces $f(n+1)=f(n)-1$

a) Demostrar que para todo entero n, mayor o igual que cero, existe un entero k, mayor o igual que cero, tal que $f(n) + n = 2^k - 1$.

b) Calcular $f(2^{1990})$.

Solucion:

a) Si $n = 2^j-1$, entonces $f(n) = 0$ y por tanto $f(n)+n = 2^j-1$, luego $k = j$.

Sea $n = 2^j$; por la condición II) se tiene:

$$f(2^j+1) = f(2^j) - 1$$
$$f(2^j+2) = f(2^j+1) - 1$$
$$f(2^j+3) = f(2^j+2) - 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(2^{j+1}-1) = f(2^{j+1}-2) - 1$$

Sumando y simplificando se obtiene, en virtud de I) : $f(2^{j+1}-1) = f(2^j) - (2^j-1) = 0$, de donde $f(2^j) = 2^j - 1$, luego $f(n) + n = 2^j-1+2^j = 2^{j+1}-1$ y $k = j+1$.

Sea $n = 2^j + h$, con $0 < h < 2^j-1$. Se tiene, según lo anterior:

$$f(2^j+1) = f(2^j)-1 = 2^j-1-1 = 2^j-2$$
$$f(2^j+2) = f(2^j+1)-1 = 2^j-3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(2^j+h) = 2^j-(h+1) \qquad ;$$

de donde resulta:

$f(n)+n = f(2^j+h)+2^j+h = 2^j-h-1+2^j+h = 2^{j+1}-1$; por tanto, $k = j+1$.

b) $f(2^{1990}) = 2^{1990}- 1$.

Francisco Lorenzo Miranda (Madrid)

PROBLEMA Nº 4 (Boletin nº 26)

Sea Q^+ el conjunto de los números racionales estrictamente positivos. Constrúyase una función $f : Q^+ \longrightarrow Q^+$, tal que: $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$ para todos los $x,y \in Q^+$.

Solución :

La función pedida ha de cumplir:

(I) $f[f(x)] = f[1.f(x)] = \frac{f(1)}{x}$; en particular, $f[f(1)] = f(1)$, de donde $f[xf(f(x))] = f[f(1)] = f(1)$, o sea $\frac{f(x)}{f(x)} = 1 = f(1)$.

(II) Si $f(\alpha) = m$ $(\alpha,m \in Q^+)$, se tiene:

$$f(m) = f[f(\alpha)] = 1/\alpha \ , \quad f(1/\alpha) = f[f(m)] = 1/m \ ,$$
$$f(1/m) = f[f(1/\alpha)] = \alpha \ .$$

Además, si $f(\beta) = n$, es:

$$f(\alpha.\beta) = f[\alpha.f(1/n)] = f(\alpha).n = m.n = f(\alpha).f(\beta) \ .$$

En particular, $f(\alpha^p) = m^p = [f(\alpha)]^p$,

$$f(\alpha/\beta) = f(\alpha.\tfrac{1}{\beta}) = f(\alpha.f(n)) = f(\alpha)/n = m/n = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \ .$$

Sea 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... la sucesión de números primos ordenados de menor a mayor. Pongamos

$f(2) = 3$, $f(5) = 7$, $f(11) = 13$, $f(17) = 19$, ... *(III)*

Sea $x = \frac{h}{k} \in Q^+$ una fracción irreducible (eventualmente un número entero). Descompongamos h y k en factores primos. Aplicando las propiedades *(I)* y *(II)* y las definiciones *(III)*, calculamos $f(h)$ y $f(k)$ y en consecuencia, $f(x) = f(h/k) = f(h)/f(k)$.

La función así construida cumple las condiciones del enunciado.

Ejemplo: Calculemos f(504/325) .

$504 = 2^3.3^2.7$; $325 = 5^2.13$.

$f(504) = f(2^3).f(3^2).f(7) = 3^3.(1/2)^2.(1/5) = \frac{27}{20}$;

$f(325)\ \ f(5^2).f(13) = 7^2.(1/11) = \frac{49}{11}$;

$f(\frac{504}{325}) = \frac{f(504)}{f(325)} = \frac{27}{20} : \frac{49}{11} = \frac{297}{980}$.

Francisco Lorenzo Miranda (Madrid)

\- - - - - -

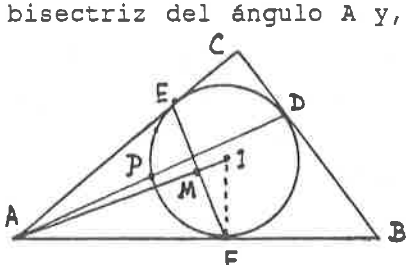
PROBLEMA N° 8 (Boletin n° 26)

En un triángulo ABC , sean I el centro de la circunferencia inscrita y D , E y F sus puntos de tangencia con los lados BC , AC y AB respectivamente. Sea P el otro punto de intersección de la recta AD con la circunferencia inscrita.

Si M es el punto medio de EF , demostrar que los cuatro puntos P , I , M y D pertenecen a una misma circunferencia o están alineados.

Solución:

1°. - Si el punto I pertenece a la recta AD, ésta es bisectriz del ángulo A y, por tanto, corta a EF en su punto medio M . Luego en este caso los cuatro puntos P , I, M y D están alineados.



2°. - Si I no pertenece a AD (veáse la figura), se tiene: $\overline{AP}.\overline{AD} = \overline{AF}^2 = \overline{AM}.\overline{AI}$, luego la circunferencia determinada por los puntos P , D , I contiene también el punto M .

Francisco Lorenzo Miranda (Madrid)

\- - - - - -

PROBLEMA 1° (Boletin n° 28)

En el plano, en el que se ha tomado un sistema de referencia cartesiano (ortonormal), se consideran todos los puntos (m,n) cuyas coordenadas son números enteros. Se suponen trazados todos los segmentos rectilìneos que unen dos cualesquiera de esos puntos y cuya longitud sea un nùmero entero. Probar que no hay dos de esos segmentos que formen un ángulo de 45 grados.

Si se hace lo mismo con los puntos (m,n,k) del espacio, ¿habrá algún par de esos segmentos que formen un ángulo de 45 grados ?

Solución: Todo segmento con dichos extremos determina vectores de coordenadas enteras, (p,q), tales que su módulo, o sea, $\sqrt{p^2+q^2}$, también es un número entero.

Consideremos dos de ellos con vectores asociados a=(p,q), y b =(m,n). Si formasen un ángulo de 45° sería

$$\cos(45°) = \frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|} \quad \text{, o sea,}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{p\,m + q\,n}{\sqrt{p^2+q^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2}},$$

lo que resulta imposible, pues el primer miembro es irracional y el segundo racional.

Si consideramos el problema en el espacio, la respuesta es la misma, pues tendríamos entonces a =(p,q,r), b =(m,n,k), y debería suceder que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{m\cdot p + n\cdot q + k\cdot r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+k^2}}$$

ciertamente imposible por el mismo motivo que antes.

Ramón Fraile Peláez (Pamplona)

PROBLEMA 2º (Boletín nº 28)

Siendo a y b números enteros, distintos de 0, 1 y -1, se considera la matriz:

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b^2 & a+b^3 \ldots\ldots & a+b^m \\ a^2+b & a^2+b^2 & a^2+b^3 \ldots\ldots & a^2+b^m \\ a^3+b & a^3+b^2 & a^3+b^3 \ldots\ldots & a^3+b^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^n+b & a^n+b^2 & a^n+b^3 \ldots\ldots & a^n+b^m \end{pmatrix}$$

Determinar un subconjunto, S, de filas de esa matriz, lo menor posible, tal que cualquier otra fila se pueda expresar como suma de las filas de S multiplicadas por números enteros apropiados (es decir, como combinación lineal con coeficientes enteros de las filas de S). Explicitar dichas combinaciones lineales.

Solución: Es evidente que no hay dos filas proporcionales, pues

$$a^j + b^k = \alpha\cdot(a^s + b^k) \Rightarrow \quad \alpha = 1 + \frac{a^j - a^s}{b^k + a^s} \quad ,$$

y esto hace que α dependa de k.

Tomemos ahora las dos primeras filas y hagamos combinaciones lineales,

$$\alpha\cdot(\ldots, a+b^k, \ldots) + \beta\cdot(\ldots, a^2+b^k, \ldots) =$$
$$= (\ldots, \alpha\cdot a + \beta\cdot a^2 + (\alpha+\beta)\cdot b^k, \ldots)$$

Para obtener otra fila cualquiera, por ejemplo la j–ésima, $j \geq 3$, es obvio que

$$\begin{cases} \beta = 1-\alpha \\ \alpha\cdot a + \beta\cdot a^2 = a^j, \end{cases} \qquad \text{y, por tanto, si}$$

llamamos $j = 2 + r$, $r \geq 1$, quedará

$$\alpha\cdot a + (1-\alpha)\cdot a^2 = a^2\cdot a^r \Rightarrow \alpha = -a\cdot\frac{a^r - 1}{a - 1} = -a\cdot(1+a+\ldots+a^{r-1}) =$$
$$= -a - a^2 - \ldots - a^r \Rightarrow 1-\alpha = 1+a+\ldots+a^r.$$

Naturalmente α y $1-\alpha$ son números enteros, pues lo es a. Por tanto S está formado por las dos primeras filas, y

$$(\ldots, a^j+b^k, \ldots) = (-a - \ldots - a^r)\cdot(\ldots, a+b^k, \ldots) +$$
$$+ (1+a+\ldots+a^r)\cdot(\ldots, a^2+b^k, \ldots) \ .$$

Ramón Fraile Peláez (Pamplona)

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- **Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.**

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluimos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *