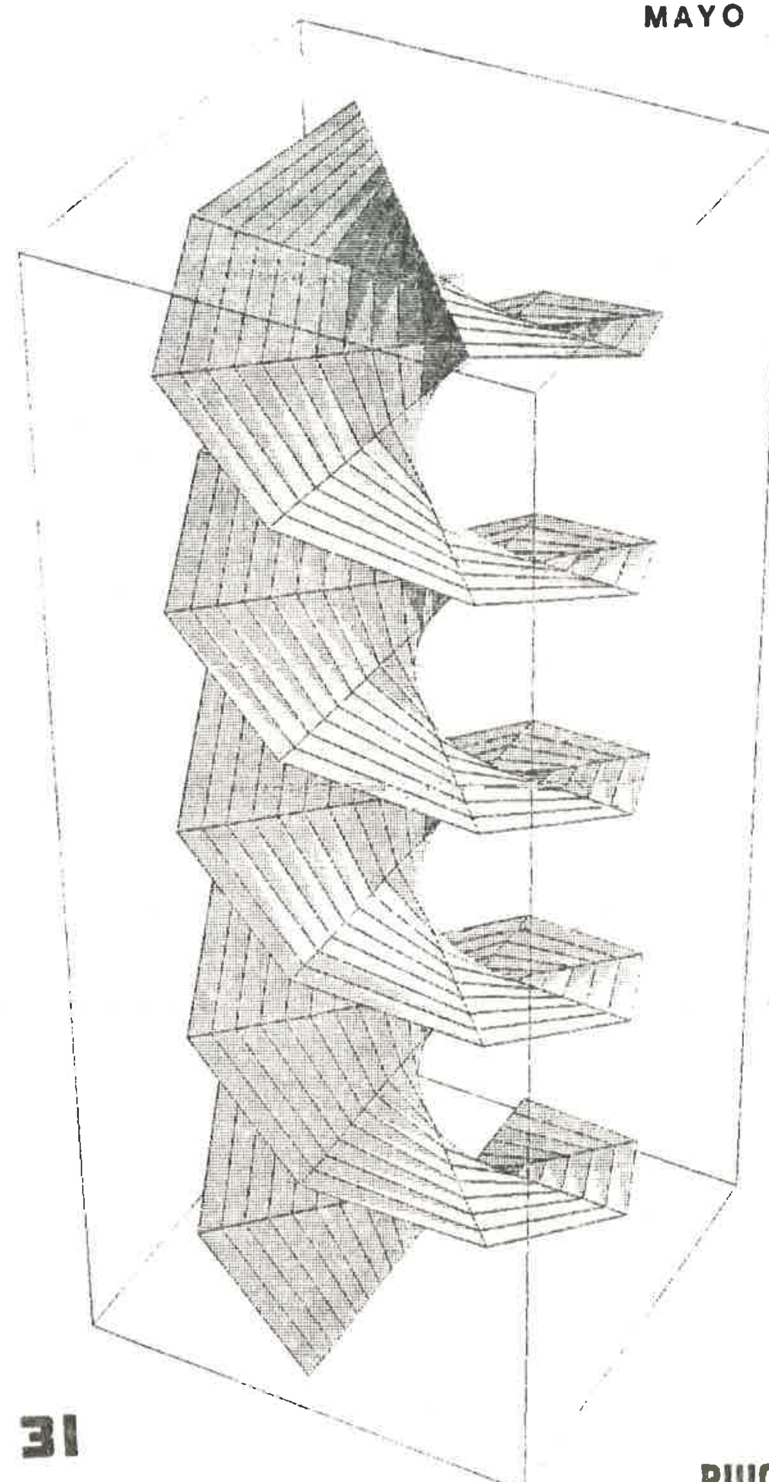
MAYO 1992



BOLETIN Nº 31

SOCIEDAD

PUIG ADAM

DE PROFESORES DE MATEMATICAS

B O L E T Í N de la Sociedad "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Mayo de 1992 nº 31 (1991-92)

- Toda la correspondencia para la Sociedad deberá dirigirse al

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

- La portada de este número presenta una figura realizada con el programa MATHEMATICA por Sonia Alvarez Rubio, profesora de la E. U. I. T. Industrial de la Universidad Politécnica de Madrid, que nos lo ha cedido amablemente para este Boletín.

¡¡ VEA LOS ACUERDOS TOMADOS EN NUESTRAS ASAMBLEAS GENERALES !!

INDICE Pág.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA **SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.**
NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: *Jose Vicente Garcia Sestafe*

Vicepresidente por Madrid:
Jose Manuel Martinez Sanchez
Vicepresidente por Castilla - La Mancha:
Salvador Herrero Pallardo
Vicepresidente por Castilla - León:
Juan Bosco Romero Marquez
Vocal de actividades y concursos:
Juan Ochoa Melida
Vocal de relaciones institucionales:
Eugenio Roanes Macias
Vocal de gestión de publicaciones:
Carmen Garcia-Miguel Fernandez
Vocal de redacción de publicaciones:
Julio Fernandez Biarge
Secretario:
Francisco Gonzalez Redondo
Vicesecretario:
Enrique Rubiales Camino
Tesorero:
Alberto Aizpun Lopez
Bibliotecario:
Jesus Begoña Aina

- - - - - -

ASAMBLEA GENERAL EXTRAORDINARIA

Como anunciábamos en nuestro anterior Boletín, la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* celebró una **Asamblea General Extraordinaria** el pasado día 25 de Abril. Por no estar disponibles en sábado los locales de la E. T. S. de Ingenieros Industriales, esta Asamblea tuvo lugar en la Escuela Universitaria "Pablo Montesino", como se hizo saber a todos los socios mediante una circular.

El Orden de Día de esta Asamblea tenía como único punto el decidir si se solicitaba o no la integración de nuestra Sociedad en la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas*.

Tras una deliberación acerca de las ventajas e inconvenientes de dicha integración, se sometió a votación tal decisión, con el resultado de 11 votos a favor de la integración, 3 abstenciones y ningún voto en contra.

En consecuencia, según el Artº 11 de nuestros Estatutos, se tomó el acuerdo de **solicitar la integración de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas en la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.**

- - - - -

ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA

A continuación se celebró la **Asamblea Ordinaria** de nuestra Sociedad correspondiente a 1992, con arreglo al Orden del Día de la convocatoria.

En ella se aprobó el Acta de la Asamblea Extraordinaria precedente.

A continuación nuestro Presidente, Sr. García Sestafe se refirió a la labor realizada por nuestra Sociedad a lo largo del año precedente, materializada fundamentalmente en la publicación de nuestro Boletín y en los Concursos de Resolución de Problemas, teniendo unas palabras de gratitud para los que colaboran desinteresadamente en ambas tareas, así como en las relativas a las de secretaría y tesorería de la Sociedad. Hizo pública también la gratitud de la Sociedad a "Coca-Cola España", que se ha ofrecido de nuevo a costear el importe de los premios que serán entregados a los ganadores de nuestro X Concurso.

Se refirió después a las previsibles consecuencias de nuestra integración en la Federación Española, que nos permitirá colaborar con las otras sociedades federadas y participar en las actividades programadas conjuntamente, como las reuniones anuales de profesores de Matemáticas.

Dió cuenta a la Asamblea de las dificultades encontradas para la distribución de nuestro Boletín a través de Correos, que ya conocen todos nuestros socios por la carta publicada en el número precedente de este Boletín.

A continuación, el tesorero, Sr. Aizpún, presentó a la Asamblea las cuentas de ingresos y gastos de la Sociedad, que fueron aprobadas por unanimidad. Se lamentó del elevado número de recibos que son devueltos por los bancos, la mayor parte de las veces porque el socio ha cambiado de destino o porque el Centro Benefactor ha cambiado la cuenta, sin que la Sociedad haya tenido noticia del cambio.

Aunque los ingresos producidos por las cuotas de nuestros socios apenas son suficientes para cubrir los gastos de impresión y distribución de nuestro Boletín, se acordó no incrementar este año la cuota destinada a nuetra Sociedad, pero a ella habrá que añadir en lo sucesivo la destinada a la Federación Española, que está fijada en 1.500 pesetas anuales.

En consecuencia, **la cuota total para el próximo curso 1992-93, quedó fijada en 4.500 pesetas.**

La Asamblea acordó confirmar como Secretario a nuestro compañero Francisco González Redondo, tal como fué designado por la Junta Directiva y anunciado en nuestro anterior Boletín. Según disponen nuestros Estatutos, a partir de esta Asamblea se extinguen las vicepresidencias por Cuenca y Segovia. En consecuencia, la Junta directiva queda constituida como se indica en la pagina 2.

Tras un breve punto de ruegos y preguntas, se levantó la sesión.

- - - - -

CURSOS DE FORMACION DEL PROFESORADO ORGANIZADOS POR EL COLEGIO DE DOCTORES Y LICENCIADOS DE MADRID

Como ya se había indicado en el Boletín 30 de nuestra Sociedad el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias ha organizado, dentro de los Cursos de Formación del Profesorado, un ciclo de conferencias denominado "Medios para la clase de Matemáticas" cuyo objetivo básico era presentar y estudiar algunos temas y materiales con el fin de ser usados como medios dicácticos en la clase de matemáticas. Los cursos, coordinados por el profesor D. Víctor Manuel Sánchez González han tenido lugar, como en ocasiones anteriores, en el I.B. Avenida de los Toreros a lo largo del mes de marzo.

Las dos primeras sesiones corrieron a cargo del profesor Alberto García-Milla sobre el tema "Como optimizar una clase de matemáticas".

El segundo día actuó, también, el conocido calculista D. Jaime García Serrano presentando algunas reglas para agilizar el cálculo matemático.

El profesor D. José Ramón Vizmanos Buelta desarrolló, en la tercera sesión, "Las viejas y las nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas".

En las sesiones cuarta y quinta, los profesores D. Eugenio Roanes Macías y D. Eugenio Roanes Lozano disertaron sobre aplicaciones del ordenador a la clase de Matemáticas, y como ejemplos de paquetes matemáticos trataron los Derive y Macro. También expusieron algunas posibilidades del álgebra computacional.

Las dos últimas sesiones a cargo del profesor José V. García Sestafe, se dedicaron a "Algunas cuestiones históricas de la Estadística para la motivación y orientación de los alumnos de BUP y COU.

CONFERENCIAS EN LA ESCUELA UNIVERSITARIA PABLO MONTESINO

Organizadas por la Sección Departamental de Algebra y Unidad Docente de Didáctica de las Matemáticas, se han celebrado dos conferencias pronunciadas por compañeros nuestros.

En la primera, que tuvo lugar el día 2 de abril, el profesor D. Julio Fernández Biarge disertó sobre el tema "M. C. Escher supo dibujar lo imposible, pero ¿sabía matemáticas?".

En la segunda, el día 8 del mismo mes, el profesor José V. García Sestafe trató sobre el "Modelo Logístico, caos y población" (un problema de matemática aplicada).

NUESTRA INTEGRACION EN LA FEDERACION ESPAÑOLA DE PROFESORES DE MATEMATICAS

El deseo expresado por numerosos compañeros de la Sociedad Puig Adam de integrarnos en la Federación Nacional, motivó el que esta Junta Directiva convocase una Asamblea General Extraordinaria para que en ella se acordase la referida integración, si ese era el deseo de nuestros socios.

A pesar de que el número de asistentes a la citada Asamblea fue reducido, como lamentablemente suele ocurrir, creemos que la voluntad de nuestros compañeros, se plasmó adecuadamente al no darse ningún voto negativo.

En consecuencia, se acordó solicitar nuestra integración inmediata.

Con motivo de que la Federación Española de Profesores de Matemáticas celebraba una reunión de su Junta de Gobierno en el Centro de Profesores de Benidorm el día 2 de mayo, nuestro compañero y tesorero de la Sociedad D. Alberto Aizpún se ofreció a llevar personalmente nuestra solicitud de integración.

Nuestra solicitud tuvo una calurosa acogida y fue aprobada en la citada Junta de Gobierno. Con nuestra incorporación son ya once las Sociedades federadas, pues en la misma Junta fue admitida, también, la que acaba de formarse en Castilla y León.

Aunque la integración tiene efectos inmediatos, los de índole económica no tendrán lugar hasta el próximo curso académico, en el que a todos nuestros socios se les pasará el recibo incrementado en 1.500 pts. correspondientes a la cuota federativa.

Nuestra integración nos permitirá participar en las numerosas actividades promovidas al amparo de la Federación; como ejemplo de éstas podemos citar:

Jornadas de "Matemáticas Generales para alumnos singulares" (Diciembre 1992 en el Pazo de Mariñán, La Coruña)

- Reunión de profesores sobre "Software para Matemáticas" (Octubre 1992, Madrid)
- Reunión sobre "Las Matemáticas en el Bachillerato" que se acaba de realizar en Alicante.
- III Edición de "Olimpiada Matemática Nacional" para alumnos de E.G.B., celebrada en Andalucía el pasado año
- Organización del ICME-8 en Sevilla

Confiamos en que las actividades de nuestra sociedad se vean fortalecidas con esta incorporación.

LA JUNTA DIRECTIVA

HOMENAJE

Al término de las Asambleas se celebró una comida homenaje para nuestros compañeros recientemente jubilados, los profesores José Javier Etayo y Juan Ochoa. Lamentablemente, este último no pudo asistir como consecuencia de un accidente que afortunadamente no ha tenido consecuencias graves

RECORDAMOS NUESTRO X CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

Convocado por:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras

BASES

PRIMERA:

Podran participar los alumnos de B.U.P. y F.P. de los centros de las Comunidades Autónomas de Madrid, Castilla-La Mancha y Castilla y León. Los de F.P. 1 lo haran con los de Primero de B.U.P. y los de 2º y 3º de F.P. 2, con los de Tercero de B.U.P.

SEGUNDA:

Las pruebas del Concurso se realizarán en Madrid, en la segunda quincena del mes de Junio (posiblemente el sábado, 20 de ese mes) y consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles).

TERCERA:

Se concederán diplomas para los mejores de cada nivel, acompañados de los premios correspondientes.

CUARTA:

Aquellos centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un maximo de dos en cada uno de los tres niveles) deberán realizar la preinscripción antes del dia 24 de Mayo de 1992, dirigiéndose por carta sin certificar a esta Sociedad (Apartado de Correos nº 9.479, 28080-MADRID). En esta preincripcion no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados

QUINTA:

Se comunicara directamente a los centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos centros entregaran a los alumnos que envien, credenciales **individuales**, en las que se haga constar el curso en el que están matriculados en el año académico 1991-92, y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matematicas.

- - - - - -

Coca-Cola España colabora generosamente en este Concurso, costeando los premios que se entregarán a los ganadores.

XXVIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

FASE FINAL

Como anunciabamos en el último número de nuestro Boletín, Las pruebas de la Segunda Fase de la ***XXVIII Olimpiada Matemática Española***, correspondiente al curso 1991-92, han tenido lugar los dias 14 y 15 del pasado Febrero. Como en los años precedentes, esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*.

En esta **Fase Final** han participado un total de 52 aspirantes, seleccionados por los distintos distritos donde se realizó la Primera Fase, con un maximo de tres por cada uno de ellos. En las Islas Canarias realizaron las pruebas tres alumnos y en Madrid, simultáneamente, los restantes 49; tres de estos lo hicieron "fuera de concurso", con el exclusivo objeto de confirmar su incorporación al equipo que España presentará en las olimpiadas internacionales. Las pruebas de Madrid se realizaron, como el año anterior, en la Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. *"Pablo Montesinos"* de Madrid.

Como es tradicional en esta Segunda Fase, las pruebas consitieron en la resolución de seis problemas, tres en cada una de las dos sesiones de cuatro horas, que tuvieron lugar en dias consecutivos. En nuestra sección de

Problemas Propuestos, en este mismo Boletin, pueden verse sus enunciados.

El Jurado, tras examinar y valorar los ejercicios presentados, se reunió el dia 4 de Marzo, e hizo públicos los nombres de los aspirantes mejor clasificados. Se asignó a cada participante una puntuacion de cero a diez puntos por problema, con lo que habia una posibilidad teórica de obtener 60 puntos.

Como otras veces, para que nuestros lectores puedan juzgar sobre la dificultad que ofrecieron los distintos problemas propuestos, damos a continuacion una tabla con los valores medios de las puntuaciones alcanzadas en cada uno por todos los participantes y por los ocho primeros clasificados (incluidos dos "fuera de concurso").

Problema nº	1	2	3	4	5	6
Media para todos	3,1	1,0	1,6	1,7	1,5	1,9
Media 8 primeros	7,9	2,8	6,4	5,4	3,8	5,8

Es curioso señalar que de las dos partes de que constaba el problema nº 5, fueron varios los participantes que resolvieron la primera y varios también los que resolvieron la segunda, pero ninguno logró llegar a la solución correcta de ambas.

Al igual que en años anteriores, el nivel de preparación de los participantes fué muy desigual, destacando claramente un grupo poco numeroso, del que se escogieron, por sus mejores puntuaciones, los alumnos que recibirán los premios concedidos por el Ministerio de

Educación y Ciencia y los que han de representar a España en las competiciones internacionales.

Las puntuaciones más altas fueron obtenidas por dos de los alumnos que participaban fuera de concurso, pues ya fueron premiados en la XXVII O.M.E. (ver nuestro Boletín nº 28), pero se presentaban de nuevo para confirmar su selección para las olimpiadas internacionales:

Marcos Durantez Ganzukoff ... ... 44 puntos

Roger Espell Llima . ... 41 puntos

Aparte de éstos, los aspirantes mejor clasificados fueron los siguientes:

1º **Alvaro BEGUÉ AGUADO**, del *I.B. "Pinar de la Rubia"*, de Valladolid ... ... 36 puntos (1er premio)

2º **Javier RIBÓN HERGUEDAS**, del *"Leopoldo Cano"* de Valladolid... ... ... 32 puntos (2º premio)

3º **José María ATIENZA RIERA**, del *Colegio JOYFE*, de Madrid ... ... 29 puntos (3er premio)

4º **Raquel BARCO MORENO** del *Colegio "Puerto Sol"*, de Málaga ... ... 25 puntos

5º **Vicente GINER BOSCH**, del Colegio *"San Jose de Calasanz"* de Valencia ... ... 24 puntos

6º **Miguel María AGUADO MARTÍNEZ DE CONTRASTA**, del *I. B. "Praxedes Mateo Sagasta"* de Logroño ... 23 puntos

Con 22 puntos quedó **Marcos TORRE GARCÍA**, del *I. B. "Padre Isla"* de León, y con 21, **Vicente PLÁ BOSCA**, que concurría fuera de concurso. Los restantes participantes no llegaron a alcanzar los 20 puntos.

La Primra Fase de la próxima Olimpiada Matemática Española se celebrará probablemente en el mes de Noviembre de este año, para lo que sera convocada con la debida antelacion.

Damos la enhorabuena a los ganadores y a los Centros que se han esforzado en su preparación y deseamos que tengan una destacada actuación cuando participen representando a España en las próximas Olimpiadas Internacionales.

\- - - - - - -

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Nuestro socio de honor, don **José Ramón Pascual** Ibarra, nos ha autorizado a reproducir el artículo que ofrecemos a continuación y que fué publicado en 1965 como fascículo nº 54 de la *Enciclopedia de la Nueva Educación* de APIS.

Si no fuese porque conocemos la clarividencia con que abordó los problemas de la didáctica metemática hace un cuarto de siglo, resultaría sorprendente la vigencia actual de las ideas que expone en este artículo, si se exceptúa acaso alguna referencia a lo que se esperaba de la introducción de la "Matemática Moderna", tan en boga por aquellas fechas, si bien, al referirse a ella, ya advierte sobre los riesgos de una equivocada interpretación de su papel en la Enseñanza.

Por ello hemos creido interesante brindar a nuestros socios la oportunidad de leer la exposición que el profesor Pascual Ibarra hizo de sus ideas acerca de la Didáctica Matemática, y le agradecemos vivamente que nos haya permitido hacerlo.

- - - - - -

DIDACTICA DE LA MATEMATICA

Por JOSE R. PASCUAL IBARRA

I.—INTRODUCCION

1.1. Tres son, primordialmente, los factores que deben informar la adopción de una didáctica adecuada para la enseñanza de una materia dada. El primer factor a tener en cuenta nos viene impuesto por la propia naturaleza del objeto de nuestra enseñanza; en nuestro caso, el *factor matemático*. El segundo hace referencia al sujeto discente, *factor psicológico*, y, el tercero, responde a un problema de finalidad, o de utilidad, *factor social*. Una buena didáctica deberá realizar la síntesis de estos tres factores; tendrá, evidentemente, que atender a estas tres exigencias. Partiendo de las posibilidades reales del alumno, en cada etapa del aprendizaje, deberá proporcionarle un conocimiento preciso de lo que es hoy la *Matemática* como ciencia, y del lugar que ocupa en el mundo de la cultura, a la vez que ha de suministrarle las técnicas y las actividades que hacen de la *Matemática* un instrumento útil en el ejercicio de las diversas profesiones de la vida social. En términos generales, se puede decir que estos tres factores nos señalan, en cierta manera, el método, el modo y el programa de la enseñanza. Como también nos indican las cualidades requeridas de un profesorado idóneo para ejercerla: dominio, cuanto más elevado mejor, de la ciencia que enseña y de sus conexiones con las demás ramas del saber; capacidad para el conocimiento psicológico de los alumnos, no sólo en abstracto, sino de modo concreto, lo que le permitirá adaptar su enseñanza a la realidad de la clase, y, por último, visión clara de la finalidad perseguida, de la meta a que se propone llegar.

1.2. Siguiendo este esquema, analizaremos sucesivamente cada uno de estos tres factores, con la brevedad obligada por el espacio disponible, para ver de llegar, como consecuencia, a la elaboración de unas normas didácticas generales, que puedan aplicarse en todos los casos, pero salvando desde ahora lo que se ha llamado el postulado de la Didáctica: *la Didáctica ha sido y seguirá siendo una conquista personal.* Quiere esto decir que si el fin esencial de toda enseñanza es desarrollar al máximo posible las capacidades del educando, hasta hacer de él una persona, y aún su propia personalidad, hemos de respetar ese sentimiento de libertad inherente a la condición de persona; y, por ende, hemos de salvaguardar la libertad del profesor para adoptar la didáctica apropiada, liberadora en cada caso de ambas personalidades. No hay, pues, normas rígidas de didáctica. Cada uno, cada profesor, en la medida de sus posibilidades, adoptará, sobre principios generales, la didáctica que mejor se adapte a su peculiar idiosincrasia, y la más adecuada también a la realidad de su clase.

II.—FACTOR MATEMATICO

2.1. ¿Qué es la *Matemática?* No pretendemos dar aquí una definición de esta disciplina. Cualquiera que adoptásemos, desde la que la considera como ciencia de la cantidad y de la forma, hasta la escéptica de BERTRAND RUSSELL, cuando afirma «en Matemática nunca se sabe de qué se está hablando, ni si lo que se dice es verdad», sería falsa o incompleta. Pero lo que sí es cierto es que la *Matemática* ocupa un lugar muy particular en la clasificación de las ciencias. Habrá que considerar la *Matemática,* más que como un acervo de conocimientos, como una forma especial de la actividad intelectual. Ocupa, por eso, un lugar intermedio entre las ciencias de la Naturaleza y las del Espíritu. La Matemática, como la Lógica, es una ciencia formal, abstracta, creación del hombre; pero quizá no sea, como pretendía DEDEKIND, una *libre* creación del espíritu humano. Está fuertemente condicionada, de una parte, por el mundo físico al que debe su nacimiento, y, de otra, por la propia naturaleza de la persona humana. La *Matemática* es un *camino hacia la libertad.* Para poder dominar la inmensa complejidad de los fenómenos naturales, el hombre se vio obligado a la creación de esquemas simples, por abstracción o idealización de los sucesos de la vida real. Nacieron así los entes matemáticos como conceptos independientes, que parecían poseer una nota característica, la de ser una *constante universal.* En el lenguaje ordinario, todavía hoy, «matemático» es sinónimo de verdadero. Esto hizo que las matemáticas se calificaran como Ciencias Exactas, porque sus proposiciones, como, por ejemplo, siete es un número primo, se consideraban como verdades absolutas. Pero lo cierto es que, como consecuencia de las revisiones periódicas que los matemáticos han hecho de su ciencia, y, sobre todo, de la crítica de los fundamentos, esta concepción clásica de la *Matemática* ha cambiado radicalmente. La aparición de las conocidas paradojas en el estudio de los conjuntos y el nacimiento de las Geometrías no euclídeas, sobre todo, han llevado a la Matemática a un grado de máxima abstracción en la que se prescinde incluso de los conceptos para estudiar sólo las relaciones entre los mismos. Los conceptos ya no se definen, sino que se construyen axiomáticamente. Los axiomas vienen a ser así la definición implícita de los conceptos; se les exige solamente que sean lógicamente compatibles, esto es, no contradictorios, y, para la perfección de la teoría elaborada, conviene que sean independientes, es decir, que uno cualquiera de ellos no sea consecuencia de los otros.

2.2. Estas dos notas, *abstracción y construcción axiomática,* son las características esenciales de la llamada *Matemática Moderna,* de la Matemática de hoy. Como consecuencia, las proposiciones matemáticas ya no son verdaderas ni falsas; son simplemente correctas, esto es, coherentes, demostrables a partir del sistema de axiomas enunciados *a priori,* y, por tanto, con un dominio de validez restringido al campo establecido por los axiomas. Estos campos reciben el nombre genérico de *estructuras,* cuyo estudio constituye hoy el objeto de la *Matemática.* Las fundamentales, son: *algebraicas, de orden* y *topológicas.* En la base común se encuentra la *Teoría de Conjuntos.* El concepto primario de toda la *Matemática,* es, pues, la noción de conjunto, noción que le confiere el sentido unitario y armónico que preside hoy todo el edificio matemático, cuyas columnas básicas son: el *Algebra,* estudio de las estructuras algebraicas (grupo, anillo, cuerpo, etc.), y la *Topología* (límite, continuidad, etc.).

2.3. Paralelamente a esta evolución de la *Matemática,* ha sido necesaria la creación de un lenguaje y un simbolismo apropiados, cuyas notas esenciales son: *concisión, precisión* y *universalidad.* Un número muy reducido de palabras y de símbolos, tomados del lenguaje ordinario, si bien desprovistos de toda significación real, forman hoy el apoyo concreto de las creaciones matemáticas. Cada uno de ellos tiene un significado muy claro, simple y preciso, y responde a una necesidad de comunicación unitaria. Naturalmente que cada matemático utilizará en la exposición de una teoría su propia lengua materna, según su propio estilo; pero si asistimos a una lección de matemáticas, y dejamos en el encerado el desarrollo de los cálculos, cada asistente a la lección podrá traducir a su propio idioma todas las ideas expuestas por el profesor en el suyo. En este sentido decimos que el lenguaje matemático es universal.

Para muchos «modernos» —los *formalistas*— este lenguaje formalizado, si no es la *Matemática* misma, por lo menos opinan que ninguna teoría puede calificarse de teoría matemática mientras no haya llegado a expresarse por medio de esta formalización simbólica. Algunos —los *intuicionistas*—, en cambio, estiman que si detrás de los símbolos y de las palabras no existieran las cosas con toda su existencia de realidad, la matemática sería solamente una «logomaquia» estéril.

Una postura intermedia entre ambas tendencias extremas, como la preconizada por PUIG ADAM, sobre todo desde el punto de vista de la enseñanza, parece ser la más aconsejable. La *Matemática* nace y toma vida, como toda la ciencia, en una integración de experiencia y razón, de intuición y razonamiento. Después, en ascensión constante, se libera del pesado lastre de la realidad, para acceder a las más altas cumbres de abstracción y formalismo. Por un retorno a la realidad, las teorías formales elaboradas recobran nueva vida en los campos concretos más diversos. Lo que PUIG ADAM, con brillantes metáforas, acertó a expresar con las siguientes palabras: «He aquí, pues, cómo la *Matemática*, que empezó por desnudar al mundo físico de sus infinitas galas hasta reducirlo a esquemas matemáticos puros, ha terminado desnudándose a sí misma de sus contenidos conceptuales, quedándose en puro esqueleto legislativo. Pero si este esqueleto no sustenta aparentemente carne alguna, es capaz de sostener una infinidad de contenidos vitales, y en esta capacidad está precisamente su gran poder y fecundidad: la paradójica y enorme potencialidad de lo vaciado, de lo abstracto...».

III.—FACTOR PSICOLOGICO

3.1. La Didáctica no es una mera consecuencia directa de la Psicología, pero las conclusiones de la Psicología, como ciencia experimental, base de la Psicopedagogía, deberán aportar un factor imprescindible en la resolución del problema didáctico. Concretamente, en el caso de la enseñanza de la *Matemática*, la experiencia psicológica ha de proporcionar al pedagogo, por una parte, datos precisos sobre la forma en que se desarrolla en la mente del alumno la capacidad de abstracción, y, por otra, deberá señalarle cuáles son las motivaciones que de la manera más activa pueden movilizar sus intereses en el aprendizaje de esta ciencia.

Cualquiera que sea, en la *Teoría del Conocimiento*, la naturaleza de la abstracción, tanto si se acepta la teoría de las ideas universales de LOCKE, como si nos colocamos del lado del nominalismo moderno, que, siguiendo a STUART MILL, niega la objetividad de tales ideas, afirmando tan sólo la existencia de intuiciones individuales surgidas de la atención sostenida, se puede afirmar que en cualquier caso no hay un tipo único de abstracción, sino que ésta se organiza en planos progresivos; y lo que interesa, por tanto, para el objeto de planear una didáctica de la *Matemática* consecuente con la experimentación psicológica, es saber cómo se desarrolla en el niño la capacidad de abstracción, entendiendo como tal la facultad que permite ascender de la percepción de la unidad singular a la concepción de la unidad específica. El paso del objeto al concepto. En términos lingüísticos, la sustantivación del adjetivo, o lo que es lo mismo, la mutación del predicado en sujeto.

Este proceso corresponde en *Matemáticas* a la operación que consiste en formar un conjunto de elementos, y, en un plano superior, la formación de un conjunto de clases, esto es, del conjunto cociente a partir de un conjunto dado, cuando en éste se ha definido una relación de equivalencia. Esta operación de construcción de clases de equivalencia es fundamental para la formación por abstracción de los conceptos matemáticos, y aparece desde el comienzo de la *Aritmética* por ejemplo, en la construcción del número natural como la clase de todos los conjuntos coordinables entre sí.

3.2. Por otra vía, si se considera la abstracción como el resultado de captación de lo universal intuído en las singularidades individuales, entonces llegamos al concepto matemático de *isomorfismo*, reconocimiento de una estructura común en situaciones concretas aparentemente diversas.

La experimentación psicológica nos muestra que hay una tendencia natural espontánea en la mente infantil a distinguir y agrupar los elementos semejantes de un conjunto, esto es, a la formación de clases de equivalencia, basada en la percepción de las formas («*Ges-*

talten»); pero lo que caracteriza el acto inteligente no es sólo simple hecho perceptivo, que muy bien puede conducir a errores, como se comprueba con las conocidas experiencias de rectas que no parecen paralelas, segmentos que decimos no ser congruentes, etc.; sino que, como ha probado la escuela de PIAGET, hay que distinguir claramente dos niveles de conocimiento: el simplemente perceptivo, que corresponde al estadio sensorio-motor, que no es específico de la inteligencia, y de la formación de estructuras mentales propiamente dichas, las cuales se presentan ya al nivel de la inteligencia.

La inteligencia aparece, según PIAGET, cuando existe una coordinación de acciones, ciertamente sugeridas por la percepción, que dan lugar a la formación de esquemas mentales dotados de un dinamismo operatorio, y, sobre todo, del carácter reversible del que carecen las rígidas estructuras perceptivas. Pues bien, PIAGET reconoce en las estructuras primitivas de la inteligencia, esencialmente operatorias y reversibles, tres tipos distintos de organización, en correspondencia con la estructura que los matemáticos consideran como fundamentales: algebraicas, de orden y topológicas.

3.3. La consecuencia más importante de este descubrimiento aplicado a la pedagogía, es que la acción didáctica deberá tender a la organización progresiva de estas estructuras operatorias hasta llegar a constituirse en estructuras matemáticas. El fundamento,pues, de la psicopedagogía derivada de la escuela de PIAGET, está en una participación activa y espontánea del alumno, no sólo limitada a la observación del objeto mismo, lo que favorecería el empirismo, sino más bien a partir de acciones ejercidas sobre él, que, interiorizadas, darán lugar a la formación de las estructuras mentales, y preparan el camino para acceder al estadio lógico-deductivo.

3.4. GATTEGNO, matemático, pedagogo, psicólogo, y siempre original, que ha realizado experiencias con niños de numerosos países, ha llegado por otros caminos a conclusiones análogas a las de PIAGET, pero hace intervenir en la formación de la inteligencia, además de la percepción y de la acción, un elemento nuevo: la *afectividad*. Todo lo que se encuentra en la inteligencia infantil no viene sólo de los sentidos, como afirmaba la psicología clásica. En la formación de las estructurales mentales hay algo que viene del mundo exterior, ciertamente, pero hay también algo que proviene de la propia naturaleza humana, y el hombre —dice GATTEGNO— es esencialmente un ser espiritual, «una energía espiritual en evolución». La afectividad es

una forma de esta energía espiritual, fuerza motriz espontánea, que, al provocar la acción sobre las percepciones, las objetiva en estructuras. De aquí las diferencias individuales de estas estructuras en contraposición con los estadios mentales que PIAGET establece en correspondencia con la edad evolutiva. Notas esenciales de estas estructuras son, según GATTEGNO, el dinamismo, su multivalencia y la libertad de creación. Por eso, la *pedagogía de la situación*, propugnada por este pedagogo, esencialmente dinámica y liberadora, se basa en la creación por parte del maestro de situaciones activas de aprendizaje apoyadas en un material multivalente: regletas, geoplanos, etc.

3.5. En esta misma línea, son, finalmente, notables las aportaciones suministradas por los recientes trabajos de DIENES, sobre todo al nivel de la escuela primaria, acerca de la formación de estructuras matemáticas a partir de «juegos estructurados». DIENES considera la abstracción como reconocimiento de elementos invariantes en una multiplicidad de «juguetes» formados por objetos concretos, reales o imaginados, isomorfos con relación a una estructura determinada. Ha mostrado, por ejemplo, cómo es posible la toma de conciencia de estructuras complejas como la de espacio vectorial de *n* dimensiones por alumnos de las escuelas elementales.

IV.—FACTOR SOCIOLOGICO

4.1. ¿Qué utilidad presenta el estudio de la Matemática en orden a la formación del individuo? ¿Qué servicio debe prestar la enseñanza de la *Matemática* a la sociedad contemporánea?

De siempre se ha reconocido al estudio de esta disciplina una doble finalidad: *formativa* e *instrumental*. Por una parte, la *Matemática* posee un innegable valor formativo de la personalidad del alumno, por actuar directamente sobre las tres potencias del alma: la actividad razonadora y el estilo propio de la Matemática contribuyen a la formación de la inteligencia; la utilización de esquemas lógicos y de un simbolismo preciso sostiene la memoria; y el esfuerzo que insoslayadamente ha de realizar el alumno para la comprensión de las demostraciones y en el planteamiento y resolución de problemas, constituye un buen tónico de la voluntad, a la vez que desarrolla la capacidad creadora y estimula la imaginación. Recordemos, a este propósito, la contestación de HILBERT cuando le comunicaron que cierto alumno abandonaba los estudios matemáticos para dedicarse a la literatura: «se ve —dijo— que no tiene suficiente imaginación para consagrarse a la Matemática». La *Matemática*, por último, como ya hemos dicho, es un camino hacia la libertad, rinde culto a la belleza en la unidad y armonía de sus creaciones, y, en definitiva, conduce a la Verdad.

4.2. Por otra parte, es bien sabido el papel que corresponde a la *Matemática* como auxiliar de la Ciencia y como instrumento de la Técnica. Sin pretender llegar, en el proceso de matematización de la Ciencia, al absolutismo de los pitagóricos, para los que «todo es número», ni al exclusivismo kantiano, según el cual «todo conocimiento tiene de científico lo que tiene de matemático», puede afirmarse que, por lo menos, la *Matemática* suministra a la Ciencia una forma de lenguaje y de formalismo simbólico necesarios para *representar* los fenómenos naturales, aunque, dada la complejidad de los mismos, no sea suficiente para *explicarlos* totalmente. Una organización racional de cualquier especie de conocimiento precisa de una formalización, y, por consiguiente, de la *Matemática*, ciencia formal por excelencia. Por eso, el estudio de la *Matemática* de hoy, y de sus estructuras abstractas, se ha hecho imprescindible para la comprensión del pensamiento científico y filosófico contemporáneos, cada día más influídos e impregnados del espíritu de la *Matemática Moderna*.

Igualmente, toda la Técnica, desde la artesanía más modesta y tradicional, hasta la más moderna y depurada, basada en la automación y en la cibernética, necesita de la *Matemática* como herramienta. De aquí, la importancia creciente que para la Sociedad, y más concretamente para asegurar el progreso científico y técnico de un país, sobre todo en trance de desarrollo, ha adquirido el problema de una mejor formación matemática de su juventud.

4.3. En este orden de ideas, la característica quizá más acusada de la sociedad contemporánea sea la auténtica reacción en cadena experimentada por la investigación científica, seguida y al mismo tiempo impulsada, en perfecta simbiosis, por el desarrollo de las aplicaciones técnicas. En un período de diez años se construye hoy, en este campo, y especialmente en el de la investigación matemática, tanto como en un siglo de épocas pasadas. Se comprende, pues, que no es posible, ni siquiera en la enseñanza superior, proporcionar al alumno un conocimiento de la Ciencia estrictamente actual, esto es, de la ciencia en creación. En este sentido, se ha llegado a decir que la

ciencia enseñada, cuando la enseñanza se concibe como mera transmisión de conocimientos ya elaborados, es una ciencia fósil. De aquí también, por la propia limitación humana, la necesidad de la especialización en el saber, con el consiguiente riesgo de deshumanización de la enseñanza. Si se quiere salvar este peligro no hay más remedio que cambiar una enseñanza de tipo dogmático, esto es, que transmite unos conocimientos —cuya vida será corta y cuya utilidad en el porvenir se desconoce— por otra esencialmente diferente que se proponga como objetivo suministrar la capacidad de saber; como suele decirse, *saber es saber hacer*, o con SPENCER, *la meta de la educación no es ya el conocimiento, sino la acción.*

Es claro, además, que el rápido ritmo de progreso logrado en el campo de la investigación científica no puede ser seguido por la evolución de la enseñanza, que forzosamente habrá de ser más lento. Basta pensar, entre otros factores, que si la vida media de un profesor se calcula, por ejemplo, en treinta y cinco años, existirá una especie de inercia muy explicable, por la cual los jóvenes renovadores encontrarán difícilmente eco en los profesores ya maduros.

4.4. Otro elemento importante de carácter social, que no puede olvidarse a la hora de planear una didáctica, es la profunda transformación experimentada por la población escolar como consecuencia del acceso a las aulas de ingentes masas de estudiantes de ambos sexos, procedentes de todas las capas sociales, que aspiran en principio no precisamente a una mayor cultura, sino más bien a una elevación de su forma de vida mediante una mejora de la situación económica. Fenómeno que se ha llamado democratización de la enseñanza, pero que, en realidad, es sólo un aspecto particular, reflejo de la sociedad de masas típica del mundo moderno.

4.5. Nos encontramos, por consiguiente, con que la sociedad actual presenta dos exigencias a la enseñanza de la *Matemática*. De una parte, la de aumentar la capacidad matemática media de la juventud, y, de otra, la de orientar a los alumnos mejor dotados hacia los estudios superiores de esta disciplina. Para ello se hace preciso que la *pedagogía matemática*, adaptándose a la realidad social de nuestra época, evolucione rápidamente. Los objetivos señalados no pueden alcanzarse simplemente con la modificación de los programas, y menos aún en el sentido de una elevación de su nivel, medida que estaría en evidente contradicción con el fenómeno real de masificación de la enseñanza. Ciertamente, lo que hay que hacer es *modernizar* toda la enseñanza —sin entender que *Matemática Moderna*, como alguien equivocadamente pudiera pensar, sea sinónimo de *Matemática Superior*—, organizando programas funcionales en torno de las estructuras básicas de la *Matemática* de hoy, y, al mismo tiempo, elaborar una metodología y una didáctica apropiadas. Es evidente que una enseñanza dogmática no puede llenar la finalidad formativa que se exige a la *Matemática*, como tampoco, en el extremo opuesto, una acumulación de fórmulas y técnicas operatorias puede satisfacer la exigencia utilitaria. Pero ahora nos encontramos, además, con el hecho interno de que las nociones estructurales de la *Matemática Moderna*, esencialmente creadora y dinámica, son incompatibles con una enseñanza rígida de tipo tradicional según el clásico modelo de la Geometría de EUCLIDES.

4.6. Por otra parte, desde un punto de vista cultural o utilitario, los conocimientos que hoy deben considerarse necesarios en la época de las máquinas de calcular, los ordenadores electrónicos, el control de calidad, la teoría de los juegos y la investigación operativa, no pueden ser ya los mismos de hace veinte años. En un sentido amplio, se puede decir, siguiendo a TANNERY, que «útil es aquello que permite satisfacer mejor las necesidades de los hombres». En cierta manera, diríamos que la utilidad de una enseñanza es la medida de su *humanidad*. Y el hombre de hoy tiene, evidentemente, unas necesidades espirituales, culturales y profesionales, mucho más anchas que los de la generación anterior. La tarea urgente a realizar es, por consiguiente, la de *humanizar* la enseñanza de las *Matemáticas*. Hacer la *Matemática* más humana en el doble sentido de satisfacer mejor las necesidades actuales —y aún futuras— del hombre de hoy, y, al mismo tiempo, más alegre, más viva, menos tediosa para el niño que la aprende. Humanizar la enseñanza es, para mí, la razón más poderosa en favor de la introducción de las nociones de la *Matemática Moderna* en los programas, y de una enseñanza moderna de la *Matemática* en los métodos. Ambas son facetas de una misma tarea que deben considerarse como inseparables.

V.—CONSECUENCIAS DIDACTICAS

5.1. Después del análisis que hemos hecho de los tres factores que deben informar el acto didáctico, estamos ya en condiciones de ex-

traer algunas consecuencias de orden didáctico, que enunciaremos a manera de principios generales. Nos limitamos a la enseñanza de la *Matemática* encuadrada en la tarea general educativa, esto es, dejamos de lado la formación especializada, estrictamente profesional, en sus dos vertientes teórica y práctica, tarea específica de la Universidad o de las Escuelas Especiales.

En primer lugar, se pueden señalar como *fines* de la enseñanza de la *Matemática*, los siguientes:

5.1.1. a) *Espiritual.*—La *Matemática* debe integrarse armónicamente con las demás disciplinas del plan de estudios, para contribuir, en su medida, a la finalidad última de todo proceso educativo. Esta finalidad trasciende el concepto de la pura formación intelectual, entendida como *el modo de pensar correctamente;* el hombre auténticamente formado debe, además, *pensar rectamente*, esto es, con una primacía de los valores espirituales y morales, dirigidos hacia el Bien y la Verdad. Dentro de este marco general, la enseñanza de la *Matemática* deberá cumplir los siguientes objetivos específicos:

5.1.2. b) *Cultural.*—Proporcionar a la persona, sujeto de la educación, un conocimiento exacto, aunque elemental, de lo que es la *Matemática* actual y del papel relevante que ocupa en la cultura contemporánea.

5.1.3. c) *Formativo.*—Contribución de la Matemática tanto a la estructuración del pensamiento como a la formación del carácter.

5.1.4. d) *Utilitario.*—Suministrar los conocimientos y las técnicas necesarios en las distintas actividades humanas.

Se concibe así una enseñanza en que la *Matemática* no tiene un fin en sí misma, sino que es un *medio* para la educación y un *instrumento* para la preparación profesional. La misión, pues, del profesor de Matemáticas, en la enseñanza media, por ejemplo, no es la de formar matemáticos. Pero, dada la necesidad de la sociedad contemporánea, para asegurar su desenvolvimiento científico y técnico, de disponer de un mayor número de cultivadores y de profesores de esta ciencia, se puede añadir a los objetivos anteriores este otro:

5.1.5. e) *Social.*—Orientación hacia los estudios superiores de la Matemática de aquellos alumnos considerados como más aptos.

5.2. Para el logro de estos fines, convendrá tener presente una *metodología* fundada en los siguientes principios:

5.2.1. 1.° *Concebir la Matemática más como una actividad que como una serie de conocimientos.*—Tiene aplicación, a este respecto, la conocida máxima de MONTAIGNE: «Cabezas bien hechas, mejor que bien llenas». Como ya se ha indicado, ni la finalidad formativa de la *Matemática* puede alcanzarse por la fría exposición de teoremas perfectamente concatenados, siguiendo un método lógico-deductivo, ni su valor instrumental se consigue por acumulación pragmática de recetas, trucos y fórmulas muertas, considerados «útiles» para la resolución de problemas. El cultivo simultáneo de las tres fases *—abstracción, formalización y concreción—*, que, según PUIG ADAM, constituyen la auténtica actividad matemática, es indispensable si se quiere lograr una formación completa y un adiestramiento consciente, basados ambos en la adquisición a partir de la actividad desplegada de *hábitos mentales.*

5.2.2. 2.º *Resaltar el sentido unitario de la Matemática.*—El programa ha de ser funcional y establecerse en torno de unidades estructurales. La clásica separación en *Aritmética, Geometría, Algebra...*, no tiene ya razón de existencia. Hoy la *Matemática* estudia estructuras, que, afortunadamente, según han demostrado los psicólogos, están en correspondencia con las estructuras primitivas del pensamiento infantil. En la base se encuentra la *Teoría de Conjuntos*, que es perfectamente asequible a los niños desde la escuela primaria. Pueden dejarse de lado cuestiones particulares «que impiden ver el bosque», o relegarse a meros ejercicios de aplicación, con la consiguiente economía de tiempo y de pensamiento.

5.2.3. 3.º *No olvidar las conexiones de la Matemática con las demás actividades del espíritu y con las otras ciencias.*—Estudiar la Matemática por la *Matemática*, desligada de la realidad y de la vida, sería traicionar, a la vez, a la propia *Matemática*, por ahogo de las fuentes de la invención, y al alumno, asfixiado en una atmósfera enrarecida de fórmulas y símbolos desprovistos de contenido vital.

En particular:

5.2.4. 4.º *Cuidar simultáneamente la formación del lenguaje.* — Son bien conocidas las semejanzas entre las didácticas especiales de la *Matemática* y de la *Lengua Materna.* Toda formación de la mente debe ir acompañada de su expresión en forma verbal. La tolerancia o la introducción de expresiones incorrectas no hacen sino falsear el pensamiento infantil. Se debe huir de todo verbalismo desprovisto de significado preciso, y paso a paso ir formando en el alumno el hábito de expresar correctamente sus intuiciones.

5.2.5. 5.º *Graduación en el proceso concreto-abstracto.*—El aprendizaje de la *Matemática* se presenta como una ascensión constante en el camino concreto-abstracto y discurre paralelo al propio proceso de creación matemática. En ambos, tiene un papel importante el desarrollo de la intuición. Se deberá, pues, partir de lo concreto, real o imaginado, pero no para permanecer en él, lo que favorecería el empirismo, sino para, por intermedio de la intuición, acceder al razonamiento deductivo. Siempre dentro del relativismo de los conceptos concreto y abstracto, cuyos términos ahora no hay que entenderlos en un sentido estrictamente filosófico, sino sencillamente como conceptos más o menos asimilados, que pueden servir de apoyo seguro para la adquisición de nuevos conceptos. En resumen, lo que GATTEGNO designa muy acertadamente con la denominación de «pedagogía del dominio continuo». El uso de métodos intuitivos supone, desde luego, una intensa actividad de razonamiento y busca el acceso a la verdad siguiendo la vía natural del aprendizaje. No es posible colocar al alumno de repente en la cumbre; es necesario hacerle sentir a la vez el esfuerzo y la belleza de la ascensión. Por otra parte, el rigor tiene también sus etapas en correspondencia con los procesos del aprendizaje, y sólo en el vértice podemos identificarlo con la formalización axiomático-deductiva. En cada etapa es riguroso lo que es auténtico. El rigor que podemos y debemos exigir al niño en todo momento es la sinceridad.

5.3. En cuanto a los *modos didácticos*, es tal vez en la enseñanza de la *Matemática* donde encuentran una mayor aplicación el principio de la *centralidad del alumno* y las conquistas de la llamada *Escuela Activa.* El paso de lo potencia al acto es, desde ARISTÓTELES, la clave de la educación. La grandeza y al mismo tiempo la responsabilidad del hombre, a diferencia de los demás seres de la creación, radican en su libertad, en su posibilidad de hacerse, de educarse. Y esta tarea deberá ser primordialmente una labor personal, una conquista. La misión del profesor queda reducida ahora, nada más, pero también nada menos, a una función de *guía;* aparentemente en segundo plano, su papel, sin embargo, es fundamental y decisivo.

Imperativo de la moderna *Didáctica* es, por tanto, la participación activa del alumno en la adquisición del saber; pero también es evidente que por mucho que marquemos el énfasis sobre el segundo término del binomio enseñar-aprender, no puede prescindirse del primero. En primer lugar, el alumno por sí solo no puede aprenderlo todo, y, además, si el alumno ha de ser activo en el acto de aprender, no menos activo ha de serlo el maestro. A él le corresponde:

a) El planteamiento de situaciones dinámicas de aprendizaje tomadas de la propia vida del alumno, no del adulto (DEWEY).

b) La observación de las reacciones psicológicas de sus alumnos, adaptándose a las diferencias individuales de cada uno (CLAPARÈDE).

c) Encontrar las motivaciones —centros de interés— que movilicen la actividad del alumno hacia el conocimiento (DECROLY).

d) La organización social del trabajo escolar (KERCHENSTEINER).

Y comprobar, en fin:

e) «Que en ningún libro ni tratado existe tanta sustancia pedagógica como en el libro abierto de una clase, libro eternamente nuevo y sorprendente» (PUIG ADAM).

Mas, evitando siempre el confundir los medios con los fines, practicará en sus clases un *activismo completo*, dirigiendo la actividad del alumno hacia los intereses más elevados, espirituales y morales, sin dejarlo abandonado en sus primitivas tendencias puramente instintivas o biológicas. Tratará, en definitiva, como ya hemos indicado, de sembrar y cultivar en el alumno todas las virtudes que harán de él una *persona* (STEFANINI); esto es, un *hombre libre*, capaz de realizar un trabajo creador, alegre y fecundo.

5.4. Para esta tarea deberá valerse de todos los *subsidios* didácticos que las técnicas modernas ponen a su disposición. En primer lugar, del *libro de texto*. Aunque se ha llegado a decir, por los enamorados de los métodos activos, que todo libro de texto es malo por definición, puesto que contribuye a la inhibición del alumno al darle ya elaborada en síntesis acabada la doctrina que él debería adquirir como resultado de un trabajo analítico y personal, lo cierto es que también es necesario que el alumno aprenda a estudiar en los libros. Habrá que pensar, no obstante, en una posible reforma del libro de texto tradicional en evitación de la práctica de una enseñanza «libresca». Después, utilizará conscientemente del *material* didáctico,

preferentemente de aquellos materiales y modelos polivalentes, que, por una parte, permitan la construcción por abstracción de las estructuras matemáticas subyacentes en ellos, y, por otra, atiendan al cultivo del sentido de aplicación de las teorías matemáticas: regletas de CUISENAIRE; geoplanos de GATTEGNO; «bloques lógicos» y «bloques aritméticos», de DIENES; geoespacios y modelos, de PUIG ADAM; «Costruiamo la Geometría», de E. CASTELNUOVO... Además, filminas, películas, etc.

BIBLIOGRAFIA

[1] CAMPEDELLI, L.: *L'insegnamento della Matematica nella Scuola Media.* Edit. La Scuola. Brescia, 1965.
[2] CASTELNUOVO, E.: *Didattica della Matematica.* Edit. La Nuova Italia. Firenze, 1963.
[3] DIENES, Z. P.: *Costruiamo la Matematica.* Edit. O. S. Firenze, 1962.
[4] DIENES, Z. P.: *La Mathématique moderne dans l'enseignement primaire.* Edit. O. C. D. L. París, 1964. (Traducción italiana. Edit. O. S., 1965.)
[5] DIENES, Z. P.: *The Power of Mathematics.* Edit. Huchinson. London, 1965.
[6] GATTEGNO, SERVAIS y otros: *Le Matériel pour l'enseignement des Mathématiques.* Edit. Delachaux et Niestlé. Neuchatel, 1958.
[7] GOUTARD, M.: *Les Mathématiques et les enfants.* Edit. Delachaux et Niestlé. Neuchatel, 1963.
[8] MIALARET, G. y otros: *L'enseignement des Mathématiques.* Edit. Preses universitaires de France. París, 1964.
[9] O. E. C. E.: *Les Mathématiques nouvelles.* París, 1961.
[9 bis] O. E. C. E.: *Programme moderne des Mathématiques pour l'enseignement secondaire.* París, 1961.
[10] O. C. D. E.: *Mathématiques modernes.* París, 1963.
[11] PIAGET, BETH y otros: *La enseñanza de las Matemáticas.* Edit. Aguilar. Madrid, 1963.
[12] PUIG ADAM, P.: *La Matemática y su enseñanza actual.* Edit. Revista de Enseñanza Media. Madrid, 1960.
[13] PUIG ADAM, P.: *El material didáctico matemático actual.* Edit. Revista de Enseñanza Media. Madrid, 1958.
[14] PUIG ADAM, P.: *Didáctica Matemática Eurística.* Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral. 2.ª edic. Madrid, 1966.
[15] SKEMP, R.: *The Psychology of Learning and Teaching Mathematics.* Unesco. París, 1962.
[16] VISALBERGUI, A. y otros: *Matematica moderna e scuola.* Scuola e Città. Edit. La Nuova Italia. Firenze, 1965.

"PRECISION INDEFINIDA" Y MATEMATICA ELEMENTAL

Resumen de conferencias del mismo título dictadas por el autor en un curso organizado por el Colegio de Doctores y Licenciados de Madrid (17-3-92) y en la Semana de la Metodología de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (4-5-92)

Eugenio Roanes Lozano
Prof. Titular E.U. "Pablo Montesino"
Depto. Algebra (Univ. Complutense Madrid)

1.1 Planteamiento.

Comenzaremos con una afirmación que, probablemente sorprenderá a muchos:

> Un programa "matemáticamente" correcto y correctamente escrito puede dar lugar por un redondeo o aproximación a un resultado totalmente erróneo, ni siquiera aproximado.

!!!

La razón de ello es que la mayoría de los lenguajes y aplicaciones escritas para ordenador trabajan con una Aritmética llamada "coma flotante" (Floating Point). Veamos los principales tipos de problemas que se nos pueden presentar:

<u>Redondeo de números muy grandes</u>

Hay problemas de representación incluso en $\mathbb{Z}$ (si el tamaño de los números es excesivo):

$$234 \longrightarrow 234$$

$$3450000000 \longrightarrow 3.45 \times 10^9$$

$$3450000001 \longrightarrow 3.45 \times 10^9 \quad \text{¡Inexacto!}$$

Truncamiento de la representación decimal (en $\mathbb{Q}$)

La representación tampoco es exacta si necesitamos demasiados dígitos para representar el número:

$$0.000000003 \longrightarrow 3 \times 10^{-9}$$

$$1.000000003 \longrightarrow 1.0 \qquad \text{¡Inexacto!}$$

Aproximación de fracciones (en $\mathbb{Q}$)

Tampoco puede representar correctamente números cuya expresión requiere infinitas cifras decimales:

$$1/3 \longrightarrow 0.333333333 \qquad \text{¡Inexacto!}$$

(es un truncamiento como en el caso anterior)

Aproximación de raíces y de irracionales en general (usualmente sólo π y e)

Con los reales no racionales tenemos el mismo problema: su representación decimal consta de infinitas cifras decimales (no periódicas):

$$\sqrt{2} \longrightarrow 1.414213562 \qquad \text{¡Inexacto!}$$

1.2 Consecuencias.

Una inexactitud puede dar lugar a diversas consecuencias:

1) A un error al tomar una decisión

Ejemplo: estudiar si el resultado de unos cálculos es cero o no.

2) A un error muy grande

i) Al realizar una iteración de aproximaciones
ii) Al realizar futuras operaciones

(Esta consecuencia 2) se debe a que cuando hablamos de una precisión de α dígitos nos referimos a precisión en CADA PASO, no del número final de dígitos exactos, sobre lo que no se puede afirmar nada).

Ejemplo: $\pi = 3.141592654...$

Tomando $\pi \approx 3.14$ (3 dígitos)

¿Tendremos hasta la cifra de centésimas exacta siempre?

NO: basta hacer una operación:

$$1000 \times \pi \approx 3140$$

para que el error cometido sea del orden de unidades.

NOTA: En la representación interna, como ocurre con las calculadoras, puede haber más dígitos significativos que los que ve el usuario. Además se hacen "arreglos" como:

$$\left[\sqrt{2}\right]^2 \approx 2.0$$

Aquí ha habido un nuevo redondeo, pues si lo que calcula el ordenador es:

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562$$

si introducimos 1.414213562 desde el teclado y lo elevamos al cuadrado, obtenemos:

$$1.414213562^2 \approx 1.999999999$$

En todo caso podemos descubrir el engaño con cálculos del tipo:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} - \sqrt{6} \approx -2 \times 10^{-10} \neq 0$$

1.3 Consideraciones.

Pero, ¿es realmente TAN importante?. En la práctica, por ejemplo los dígitos exactos conocidos de las constantes de la naturaleza son "pocos".

La idea que trato de transmitir es que para algunos problemas bastarán pocos o ningún decimal. Por ejemplo, para calcular el perímetro de la tela de una mesa camilla a la que hay que ponerle una cinta de flecos. Para otros harán falta muchos. Por ejemplo un problema de balística o una cuestión astronómica. Pero hay problemas en los cuales necesitamos TODOS, como a continuación veremos.

Curiosamente estos problemas están relacionados con otras áreas. La creación de la Teoría del Caos (May, Fergembaum, Lorenz) está relacionada con unas observaciones de Lorenz en Meteorología que producen tremendos errores cuando en una iteración se toma una aproximación con pocos decimales. En Métodos Numéricos se usa el "exponente de Liapunov". Siendo los datos la función, el número de iteraciones, el punto, y el error, permite calcular la media de errores al cabo de N iteraciones.

1.4 Algunos problemas escogidos (en distintos lenguajes).

Como observación señalaremos que en los programas que siguen se ha primado la claridad sobre la elegancia y la efectividad, que no son los objetivos del artículo.

Ejemplo 1: Programa en BASIC que estudia si un número entero es múltiplo de otro.

```
10 REM "PROGRAMA QUE VERIFICA SI UN NUMERO ES MULTIPLO
        DE OTRO"
20 PRINT "ESCRIBE EL PRIMER NUMERO"
30 INPUT A
40 PRINT "ESCRIBE EL SEGUNDO NUMERO"
50 INPUT B
55 PRINT ""
60 IF INT(A/B) = (A/B) THEN GOTO 90
70 PRINT "NO ES MULTIPLO"
80 GOTO 100
90 PRINT "ES MULTIPLO"
100 END
```

Veamos sus contestaciones en varios ejemplos:

200.20 ⟶ ES MULTIPLO

23,34 ⟶ NO ES MULTIPLO

300000001,300000000 ⟶ ES MULTIPLO (!!!)

El programa era correcto y estaba bien escrito en GW-BASIC.
La razón es que ambos han sido representados como 3E+08.

Ejemplo 2: Programa en BASIC que calcula $1.000001^{(2^n)}$

```
10 REM "CALCULO DE 1.000001 ELEVADO A (2 ELEVADO A I)"
20 I = 1
30 A = 1.000001
40 IF I = 25 THEN GOTO 100
50 I = I + 1
60 A = A * A
70 PRINT "1.000001 ELEVADO A (2 ELEVADO A" ; I-1 ;") ES " ; A
80 GOTO 40
100 END
```


Al cabo de 24 pasos, el valor calculado es: 8850273
Resulta que hay un grave error en el cuarto paso:

I = 1 ⟶ 1.000002 (trunca)
I = 2 ⟶ 1.000004 (trunca)
I = 3 ⟶ 1.000008 (trunca)
I = 4 ⟶ 1.000015 (trunca y error: el valor correcto es ligeramente mayor que 1.000016)

Ejemplo 2 bis: Cálculo en REDUCE de $1.000001^{(2^n)}$

Cálculo realizado en los modos:
i) Float
ii) BigFloat
iii) Aritmética Exacta

i) Coma flotante:

```
ON FLOAT;
A := 1.000001;
FOR I := 1 : 24 DO WRITE "I := " , I , " ; " , A := A * A ;
OFF FLOAT;
```

El resultado después de 7 pasos es: 1.000128
El resultado después de 24 pasos es: 19088920

ii) Coma flotante (con mayor número de dígitos de precisión):

```
ON BIGFLOAT;
A := 1.000001;
FOR I := 1 : 24 DO WRITE "I := " , I , " ; " , A := A * A ;
OFF BIGFLOAT;
```

El resultado despues de 7 pasos es: 1.000128008
El resultado despues de 24 pasos es: 19330377.93
(al cabo de 24 pasos la cifra de centenas de millar no coincide con la del apartado i)).

iii) En precisión indefinida:

```
ON NUMVAL;
D := 1.000001;
FOR I := 1 : 7 DO WRITE "I := " , I , " ; " , D := D * D ;
```

El resultado despues de 7 pasos es: $\frac{10001280081283413866\ldots01}{100000000000000000000\ldots00}$

(ocupa más de una pantalla y tarda en calcularse varios minutos sobre un PC-486).

Ejemplo 3: Programa en LCSI-LOGO que estudia el número de soluciones de un sistema homogéneo de dos ecuaciones y dos incógnitas.

```
TO SIST
PRINT [DISCUSION (SISTEMA HOMOGENEO]
PRINT [DE DOS ECUACIONES LINEALES)]
PRINT []
MAKE "DET (:A11 * :A22) - (:A21 * :A12)
IF :DET = 0 [PRINT [EL SISTEMA TIENE INFINITAS SOLUCIONES]]
           [PRINT [EL SISTEMA TIENE SOLUCION UNICA]]
END
```

El sistema: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$

es analizado correctamente: tiene infinitas soluciones.

Para el sistema: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

también contesta correctamente: tiene solución.

Pero para el sistema: $\begin{cases} (1/3)x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

yerra: contesta que tiene solución única (!).

Tampoco acierta con el sistema: $\begin{cases} \sqrt{2}\,x + y = 0 \\ 2x + \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$

pues contesta que tiene solución única (!).

Ejemplo 4: Programa en Win-LOGO que calcula potencias de exponente natural.

```
PARA ELEVA :A :B
HAZ "S 1
REPITE :B [HAZ "S :S * :A]
DEVUELVE :S
FIN
```

Por ejemplo: ES (ELEVA 3 4)

es calculado correctamente: $3^4 = 81$

Mientras que: ES (ELEVA 10 13) * (ELEVA 10 13) - (ELEVA 10 26)

no: $10^{13} \times 10^{13} - 10^{26} = 0$

y lo que responde el ordenador es: 17179869184

Ejemplo 5: Programa en Turbo-Pascal que estudia el número de raices de una ecuación de segundo grado con coeficientes racionales.

```
uses
   Crt;

var
   an,ad,bn,bd,cn,cd : integer;
   a,b,c,disc : Real;

begin
    ClrScr;
    writeln;
    writeln;
    write('  Escribe el numerador del coeficiente de x cuadrado: ');
    readln(an);
    write('  Escribe el denominador del coeficiente de x cuadrado: ');
    readln(ad);
    a := an / ad;
    write('  Escribe el numerador del coeficiente de x: ');
    readln(bn);
    write('  Escribe el denominador del coeficiente de x: ');
    readln(bd);
    b := bn / bd;
    write('  Escribe el numerador del término independiente: ');
    readln(cn);
    write('  Escribe el denominador del término independiente: ');
    readln(cd);
    c := cn / cd;
    writeln;
    disc := b*b - 4*a*c;
    if disc = 0 then write('  Tiene una raiz doble')
               else if disc < 0 then write('  No tiene raices reales')
```

```
                    else write(' Tiene dos raices reales');
    readln;
    writeln;
    write(' El discriminante que ha utilizado ha sido: ');
    writeln(disc);
    readln
end.
```

Si pedimos que calcule el número de raices de, por ejemplo: $x^2 - 2x + 1$, contesta correctamente: Tiene una raiz doble.

Sin embargo, al estudiar: $3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$
contesta: Tiene dos raices reales
(la razón es que utiliza como discriminante en este caso 7.27595761E-12, esto es, $7.27595761 \times 10^{-12}$ en lugar de 0).

Ejemplo 6: Veamos rápidamente como MatLab trabaja en coma flotante.

Si tomamos como matriz A: A = [1/7,1;1,7]
al calcular su determinante: det(A)
contesta, en lugar de 0: -5.5511e-017
El rango sí lo calcula correctamente: rank(A)
responde: 1
Y si tratamos de calcular la inversa de A: inv(A)
la calcula (y mal, puesto que A no es invertible), pero al menos avisa de que la matriz es muy próxima a una singular, con lo que el resultado puede ser inexacto.

Otros Ejemplos:

Cálculo del m.c.d. de polinomios adaptando el algoritmo de Euclides.

Se nos presentó este problema en nuestro libro "MACO". La solución que le dimos fué tomar 1000 dígitos de precisión (el máximo permitido en LCSI-LOGO) y tratar de controlar el crecimiento de los números en cálculos intermedios. Claro está que si se supera esa barrera de los 1000 dígitos podemos obtener un resultado erróneo.

2 Aritmética Exacta

Esta serie de inconvenientes llevan a la creación de la ARITMETICA EXACTA, también llamada PRECISION INDEFINIDA. Esta aritmética es la que se usa en los sistemas de Cómputo Algebraico que comentaremos después.

Veamos las principales características de esta aritmética:

- Los números se representán como en notación matemática trabajando con expresiones fraccionarias:

$$137 \longrightarrow 137$$

$$1.5 \longrightarrow \frac{15}{10}$$

$$\sqrt{2} \longrightarrow \text{sqrt(2)}$$

(La única limitación a su tamaño viene dada por la memoria del ordenador).

- Las operaciones se realizan en la forma usual:

$$\frac{15}{10} + \frac{31}{21} = \frac{15 \times 21 + 10 \times 31}{10 \times 21}$$

$$3 \times (1 + 2 \times \pi + \sqrt{3}) = 3 + 6 \times \pi + 3 \times \sqrt{3}$$

- Realiza las simplificaciones usuales:

$$\frac{2}{6} \times \frac{6}{2} = 1$$

$$\left[\sqrt{2} \times \sqrt{3}\right]^2 = 6$$

- Sólo se hacen aproximaciones cuando se especifique (por ejemplo al final de un cálculo exacto para ver cuál es aproximadamente la cantidad obtenida).

3.1 Algunas ideas sobre "Computer Algebra".

El nombre de Computer Algebra parece el aceptado en inglés para denominar a esta disciplina, Calcul Formel en francés y Cálculo Simbólico es una de las traducciones al español.

Una posible definición:

> « Computer Algebra es la parte de las ciencias de la computación que diseña, analiza, implementa y aplica algoritmos algebraicos (R. Loos, [B-C-L]) »

Entre sus características podemos destacar las siguientes:

- Trabajan en "precisión indefinida"
- Permiten operar con variables a las que no se les ha asignado ningún valor (esto es, permiten manipular fórmulas o expresiones polinómicas).
- Las estructuras soportadas son:
  - Conjuntos numéricos usuales: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
  - Extensiones algebraicas
  - Anillos cocientes
  - Anillos de polinomios
  - Anillos de matrices
  - ....

- Hay diversas cuestiones típicas que suelen venir ya implementadas, y que suelen poder ser ampliadas o mejoradas por el usuario:
  - Factorización de polinomios
  - Derivación
  - Integración indefinida
  - Resolución de sistemas de ecuaciones
  - Resolución de ecuaciones diferenciales
  - ....

- Resumen de los Sistemas de Cómputo Algebraico más conocidos:

Nombre	Versión comentad	Requerimientos mínimos / Leng	Observaciones
DERIVE (Soft Warehouse, Honolulu)	2.03	PC-XT 1 Floppy DD	Lenguaje de programación "escaso". Exclusivo PC. Tamaño increible Gráficos 2d y 3d, diferenciación simbólica,...
REDUCE (Univ. Stanford y Utah y Rand Corporation, USA)	3.3	PC-XT con HD (recomendable: AT, al menos) LISP	Interface usuario pésima. Lenguaje "Pascal-like" Gráficos: NO. Listas. Experimentado. Portable. Paquetes: Gröbner,... Novedad: v.4.0 (1992)
MAPLE (Univ. Waterloo, Canada)	V.1	PC-386 SX con HD 1MB de RAM (?) (recom. ≥ 2MB) y Coprocesador C	"Friendly" Lenguaje "Pascal-like" Gráficos: 2D y 3D En plena evolución. Portable. Librerias enormes.
MATHEMATICA (Wolfram Research Inc., USA)	2.02 386/7	PC-386 con HD 640K + 1MB de RAM (recom. ≥ 4MB) y Coprocesador C	Lenguaje sólo similar a Pascal Muy buenos gráficos 2D y 3D Portable. "Ingenieril". Existe versión que no usa coprocesador.
AXIOM (*) SCRATCHPAD (IBM, USA y GB)		IBM RISC (exclusivamente) LISP	Similar a los anteriores. Gran mejora: "categorias" (definimos la estructura en que vamos a trabajar)

(*) Presentado en España en Abril de 1992.

* Otros:

MuMath: Para PC. El precursor de Derive

MathLab: Para PC. Similar a los anteriores. No obstante, no trabaja en precisión indefinida. Necesita coprocesador (basta emulador). Buenos gráficos.

Macsyma: Data de los años 70 (M.I.T.). ¿Abandonado?.

Cocoa: Para Apple Macintosh (≥ Classic). Muy potente para el equipo requerido y eficiente.

Galois: Para PC. Notación incomodísima.

SAC-2: Workstations. Propósito específico (Descomposición Algebraica Cilíndrica).

AlPi y BuchMora: Para PC. Propósito específico (bases Gröbner).

3.2 Aplicación: Demostración Computacional de algunos Teoremas Geométricos Elementales.

En este apartado consideraremos como prerrequisitos ciertos conocimientos de Teoría de Ideales. Trabajaremos en un anillo conmutativo: el anillo de polinomios $\mathbb{R}[x,y]$. Realmente donde puede trabajar el ordenador es en $\mathbb{Q}[a_1,a_2,...,a_s][x,y]$, i.e., el cuerpo base es una extensión algebraica finita de $\mathbb{Q}$ (los a_i son los irracionales algebraicos que van apareciendo en nuestros cálculos y ciertos irracionales que el sistema conoce).

Consideraremos ideales de este anillo y necesitamos usar los conceptos de base de un ideal y variedad de un ideal. También suma e intersección de ideales y sus variedades correspondientes.

3.2.1 Bases de Gröbner.

Una "base de Gröbner reducida" de un ideal I es una base (generalmente minimal) del ideal, con la siguiente particularidad: dado el ideal y el orden entre las variables (por ejemplo, lexicográfico), demos el ideal por la base que lo demos, la "base de Gröbner reducida" a la que llegamos es fija (única) para él (representaremos por GB(I) la base de Gröbner reducida del ideal I).

Además, si el ideal I es principal, GB(I) consta exactamente de un elemento. Y: $GB(1) = \{1\}$.

También son llamadas "Standard Bases" o "Canonical Bases".

Evidentemente es una herramienta potentísima en la Teoría de Ideales, donde muchas veces es muy difícil, por ejemplo, determinar si dos conjuntos de polinomios generan el mismo ideal o no.

Ejemplo 1: (orden lexicográfico)

$$I = (x+y,x-y) \xrightarrow{\text{base de Gröbner}} I = (x,y)$$

Ejemplo 2: (orden lexicográfico inverso)

$$I = (x+y,x-y) \xrightarrow{\text{base de Gröbner}} I = (y,x)$$

Ejemplo 3: (orden lexicográfico)

$$I = (2x+1,x-y,3y) \xrightarrow{\text{base de Gröbner}} I = (1)$$

(el ideal es todo el anillo)

En consecuencia se pueden tratar problemas realmente "duros". Veamos algunos ejemplos:

<u>Igualdad de ideales:</u>

Sean I y J ideales.

$I = J$ syss $GB(I) = GB(J)$

Problema de pertenencia a un ideal:

Sean p un polinomio e I un ideal.

$p \in I$ syss FormaNormal(GB(I), p) = 0

Problema de pertenencia al radical de un ideal:

Sean p un polinomio e I un ideal.

$p \in$ Radical(I) syss GB(I + (pt-1)) = {1}

(t es una nueva variable independiente)

Todo ello podría ser una teoría sin posible aplicación, pero además existe el algoritmo de Buchberger, algoritmo CONSTRUCTIVO de determinación de la base de Gröbner de un ideal.

Existen implementaciones en: REDUCE 3.3, Maple V, Mathematica 2, y AXIOM.

Se puede trabajar con estas implementaciones como si de una "caja negra" se tratara, sin ser imprescindible conocer el algoritmo de obtención de bases de Gröbner.

Sintaxis en REDUCE 3.3:

```
LOAD "GROEBNER";
GROEBNER({pol1,pol2,...,polk},{var1,var2,...,varl});
```

listas

(algo similar a una matriz fila de longitud cualquiera - difiere de "array" en que no hay que dimensionarlo y de conjunto en que se pueden repetir elementos e importa el orden -)

y devuelve una lista.

Sintaxis en Maple V:

```
with(grobner);
gbasis([pol1,pol2,...,polk],[var1,var2,...,varl]);
```

listas

(También es posible trabajar con conjuntos - sets -: { , ..., })

y devuelve una lista.

Ejemplos de aplicación podrían ser:

I) Determinar si un lugar geométrico es vacio o no.

Ejemplo: las tres alturas de un triángulo cualquiera son concurrentes (ortocentro).

La idea es considerar el ideal generado por los tres polinomios cuyas variedades son las alturas del triángulo. Su variedad será el lugar geométrico buscado.

Si la base de Gröbner es {1} o es base de un ideal cuya variedad es vacia, no son concurrentes.

Nos da, efectivamente, el ideal de un punto.

En REDUCE 3.3:

```
load "groebner";

%************************************************************
%*  Procedimientos auxiliares:
%*     Ecuación de una recta dada por dos de sus puntos.
%*     Ecuación de la perpendicular por un punto a una recta
%*          recta dada por dos de sus puntos.
%************************************************************

procedure recta(abscisaP,ordenadaP,abscisaQ,ordenadaQ);
    (abscisaQ - abscisaP) * (y - ordenadaQ) -
    (ordenadaQ - ordenadaP) * (x - abscisaQ);

procedure rectaperp(abscisaS,ordenadaS,
                    abscisaP,ordenadaP,abscisaQ,ordenadaQ);
    (ordenadaQ - ordenadaP) * (y - ordenadaS) +
    (abscisaQ - abscisaP) * (x - abscisaS);

%***********************************
%* Las alturas se cortan en un punto
%* (ortocentro).
%***********************************

% Triangulo de vértices: (0,0),(a,0),(b,c)
% (triangulo cualquiera, colocado en cualquier posición)

Orto := groebner( { rectaperp(b,c,0,0,a,0),
                    rectaperp(0,0,a,0,b,c),
                    rectaperp(a,0,0,0,b,c) } ,
                  {x,y} );
```

Devuelve: ORTO = $\{B*X - B^2, Y - \dfrac{A*B - B^2}{C}\}$

que es, evidentemente, el ideal de un punto.

<u>En Maple V:</u>

```
with(grobner);

x := <x>;
y := <y>;
a := <a>;
b := <b>;
c := <c>;

#****************************************************
#* Ecuación de una recta dada por dos de sus puntos
#* y de la perpendicular por un punto a una recta
#* dada por dos de sus puntos.
#****************************************************

recta := proc(abscisaP,ordenadaP,abscisaQ,ordenadaQ)
    (abscisaQ - abscisaP) * (y - ordenadaQ) -
    (ordenadaQ - ordenadaP) * (x - abscisaQ);
  end;

rectaperp := proc(abscisaS,ordenadaS,abscisaP,ordenadaP,abscisaQ,ordenadaQ)
    (ordenadaQ - ordenadaP) * (y - ordenadaS) +
    (abscisaQ - abscisaP) * (x - abscisaS);
  end;

#**********************************
#* Las alturas se cortan en un punto
#* (ortocentro).
#**********************************

Orto := gbasis( [ rectaperp(b,c,0,0,a,0),
                  rectaperp(0,0,a,0,b,c),
                  rectaperp(a,0,0,0,b,c) ] ,
                [x,y] );

print(Orto);

;end;
```

En Maple podemos realizar la representación gráfica (después de asignarles los valores que queramos a las variables) con plot.

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN (CENTROS)

D. ... ...
como . ...del Centro . ...
.. ..
domiciliado en ... ...
ciudad ... ... Codº Post. ... Telfº.. ... .
SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR.
Con esta fecha autorizo al Banco . ...
Sucursal o Agencia ... ... en .. ..
Dirección de la misma ... ...
para que cargue en nuestra cuenta ... ... nº ... ...
abierta al nombre: ... ...
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1992-93
y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1991
Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 pta).
Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... ... BANCO: ... ...
Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...
Dirección de esta ... ...
RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...
los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.
Les saluda atentamente:
Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...
Nombre de la cuenta... ... ...

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

D. ... ... Teléf.(...)... ... .
Dirección particular . ...
Ciudad ... ... Codº Postal .. ... .
Centro de trabajo ... ...
SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.
Con esta fecha autorizo al Banco . ...
Sucursal o Agencia ... ... en .. ..
Dirección de la misma ... ...
para que cargue en mi cuenta . ... nº ... ...
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1992-93
y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1992

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 pta).
Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... ... BANCO: ... ...
Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...
Dirección de ésta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...
los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.
Les saluda atentamente:
Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...
Dirección ... ...

II) Determinar un lugar geométrico.

Ejemplo: El baricentro de un triangulo existe y sus coordenadas se pueden calcular hallando la media de las de los vértices.

Idea: Análogo al anterior, aunque usa además "solve".

En REDUCE 3.3:

(Suponemos que lo ejecutamos cargamos después del anterior, por lo que ya suponemos cargado el paquete de bases de Gröbner y definidas "recta" y "rectaperp")

```
%****************************************
%* Cálculo del Baricentro en caso de que
%* el triángulo esté en posición general.
%****************************************

% Triangulo de vértices: (a1,a2),(b1,b2),(c2,c3)
% (triangulo cualquiera, colocado en cualquier posición)

Bari :=groebner( { recta(a1,a2,(b1+c1)/2,(b2+c2)/2),
                   recta(b1,b2,(a1+c1)/2,(a2+c2)/2),
                   recta(c1,c2,(a1+b1)/2,(a2+b2)/2) } ,
                 {x,y} );

solve(first(Bari),x);

solve(second(Bari),y);

;end;
```

La penúltima línea devuelve: $\{X=\dfrac{A1 + B1 + C1}{3}\}$

La penúltima línea devuelve: $\{Y=\dfrac{A2 + B2 + C2}{3}\}$

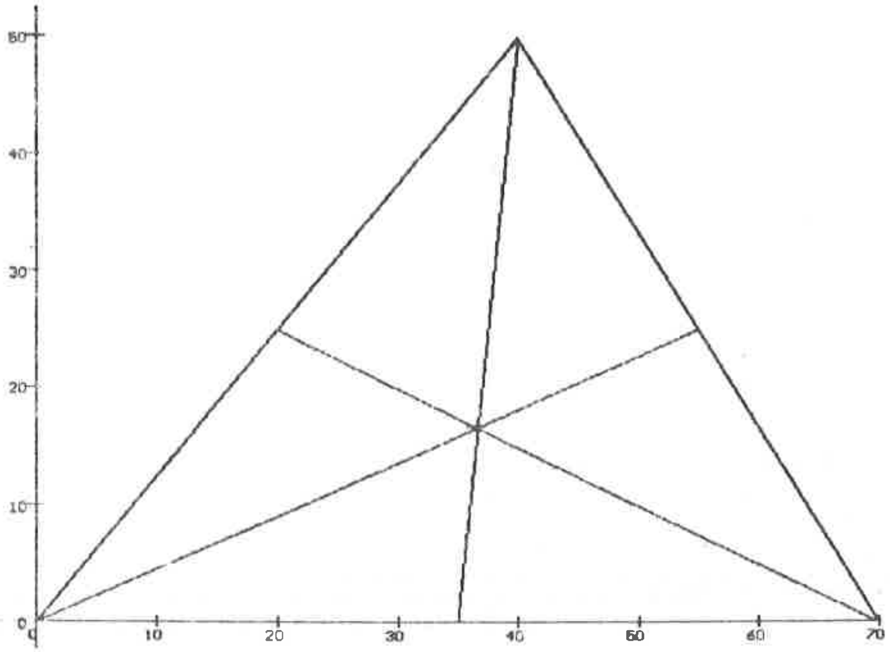


Figura: En Maple V, usando bases de Gröbner, se puede probar que las medianas de un triágulo cualquiera son concurrentes, (existencia del baricentro). Como hicimos en REDUCE en el primer caso, se ha considerado el triángulo de vértices (0,0),(a,0),(b,c). En las variables BariX y BariY hemos almacenado, respectivamente, la abscisa y ordenada del baricentro, obtenidas con "solve" a partir de la base de Gröbner del ideal suma de los ideales de las tres medianas. Después lo hemos representado gráficamente, para lo cual hemos dado los valores: a := 70 , b := 40 , c := 50 . Para que lo dibuje, hemos ordenado:

```
plot({ [0,0,a,0,b,c,0,0] , [BariX,BariY],
    [b,c,a/2,0] , [0,0,(b+a)/2,c/2] , [a,0,b/2,c/2] },
    style=LINE);
```

esto es, que dibuje la poligonal de vértices:
(0,0),(a,0),(b,c) y (0,0) (la frontera del triángulo),
el punto: (BariX,BariY) (el baricentro)
y los segmentos de extremos: (b,c) y (a/2,0),(0,0) y ((b+a)/2,c/2), (a,0) y (b/2,c/2) (es decir, las medianas).

4. Conclusión.

La Aritmética exacta no es sólo necesaria para cuestiones de "alta matemática". También a nivel elemental, el poder asegurar la veracidad de ciertos resultados exige el no trabajar en coma flotante.

Los sistemas de Algebra Computacional, dese mi punto de vista suponen una valiosísima ayuda en diversos campos (Algebra, Cálculo, Física, Astronomía,...). Pero incluso a un nivel de enseñanza media ofrece muchas posibilidades (tengamos en cuenta que todos ellos se pueden manejar en modo interactivo, como una calculadora, por lo que para cuestiones no muy complejas no hace falta ni siquiera escribir programas).

Por una parte nos permite implementar algoritmos pudiendo confiar en la certeza de los resultados obtenidos.

Por otra parte, desde el punto de vista didáctico, permite que el alumno manipule con gran comodidad cálculos tediosos (por ejemplo, desarrollos de Taylor), lo que puede facilitar su aprendizaje al poder tener una experiencia mucho más amplia (lo que desde luego no quiere decir que el alumno no tenga que conocer la teoría subyacente o que no se sepa hacer el cálculo manualmente).

Y por último, la comodidad de manejo de fórmulas facilita el trabajo del profesor y economiza tiempo (por ejemplo para proponer problemas).

5. Bibliografía:

- Manuales (de referencia y/o usuario)

Basic del MS-DOS	;	Turbo-Pascal v.6.0 (1991)
LCSI-LOGO (IBM-LOGO) (1983)	;	WIN-LOGO v.1.01 (1991)
Derive v.2.03 (1990)	;	REDUCE v.3.3 (1987)
MAPLE v.V.1 (1990)	;	MatLab v.2.2 (1986)

- Artículos generales de divulgación:

Gruenberger: *Juegos de ordenador*. Investigación y Ciencia (Junio 1984). Págs. 110-115.

Pavelle, Rothstein, Fitch: *Algebra por ordenador*. Investigación y Ciencia (Febrero 1982). Págs. 82-91.

• Libros Algebra Computacional:

Akritas: *Elements of Computer Algebra with Applications*. Wiley - Interscience, 1989.

Buchberger, Collins, Loos (Editores): *Computer Algebra. Symbolic and Algebraic Computation*. Springer-Verlag, 1983.

Davenport, Siret, Tournier: *Computer Algebra: Systems and Algorithms for Algebraic Computation*. Academic Press, 1988.

Mignotte: *Mathématiques pour le Calcul Formel*. Presses Universitaires de France, 1989.

• Libros sobre lenguajes específicos:

Rayna: REDUCE. *Software for Algebraic Computation*. Springer-Verlag 1987.

Stauffer, Hehl, Winkelmann, Zabolitzky: *Computer Simulation and Computer Algebra (Cap. 3: Reduce for begginers)*. Springer-Verlag,

MacCallum, Wright: *Algebraic Computing with Reduce*. Oxford University Press, 1991.

Char, Geddes, Gonnet, Monagan, Watt: *First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple*. Watcom Pub., 1988

Wolfram: *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley, 1989.

Maeder: *Programming in Mathematica*. Addison-Wesley, 1990.

• Bibliografía de 3.2.1

Buchberger: *Applications of Gröbner Bases in Non-Linear Computational Geometry*. En: Mathematical Aspects of Scientific Software (editor: Rice). Springer -Verlag, 1988. (págs. 59-87).

Chou: *Mechanical Geometry Theorem Proving*. Reidel, 1988.

Recio: *Geometría Algebraica y Geometría Computacional*. Actas II Encuentros Geometría Computacional. U.P.M., 1991.

Roanes Macías: *Interpretación geométrica de la Teoría de Ideales*. Colección Monografías y Memorias del Instituto "Jorge Juan". CSIC, 1975.

Winkler: *Gröbner Bases*. Curso Doctorado Univ. Alcalá. 1991.

SOBRE ANALISIS NO ESTANDAR

Por Manuel Suárez Fernández

CAPITULO V: DEFINICIONES NO ESTANDAR DE CONCEPTOS BASICOS DEL ANALISIS INFINITESIMAL.

(PRIMERA PARTE)

Recordando lo referido en el Capítulo IV sobre el Análisis no estándar que pretendemos construir y en particular los axiomas que llamamos "Principio de existencia", "Principio de transferencia" y "Principio de la sucesión" (ver Nota al final) y que,

[1] Se demuestra que ϕ es un conjunto estándar y (en consecuencia) que 0 es un número natural estándar.

[2] Se demuestra que si E es un conjunto estándar entonces el $E \cup \{E\}$ es un conjunto estándar y (en consecuencia) que si n es un número natural estándar entonces $s(n)$ es un número natural estándar (y, en consecuencia, que 1, 2, 3, etc, son números naturales estándar).

[3] Se demuestra que si E es un conjunto, F es un conjunto y f es una aplicación estándar entre E y F entonces << E es un conjunto estándar y si $A \in E$ y A es un conjunto estándar entonces $f(A)$ es un conjunto estándar >>.

[4] Se demuestra que N, Z, Q, R, C, son conjuntos estándar.

[5] Se demuestra que e, π, i, son números estándar,

consideramos notaciones, definiciones, y teoremas específicamente no estándar y definiciones no estándar de conceptos básicos del Análisis infinitesimal (estándar o no estándar), así como los correspondientes teoremas (no estándar) para establecer las equivalencias de dichas definiciones con las respectivas definiciones estándar (o clásicas) de los referidos conceptos, conviniendo en que (por ejemplo) x, y, z, son los signos a los que (esplícitamente en este Capítulo V, Primera parte) llamamos "variables".

[6] Notamos N_s al conjunto de los números naturales estándar (1)

[7] Se demuestra que N_s es un conjunto externo.
En efecto, << si N_s no es un conjunto externo entonces N_s es un conjunto interno >>; $N_s \subset N$, $0 \in N_s$ y si $n \in N_s$ entonces $n+1 \in N_s$ ([1], [2], [6]). Luego entonces $N_s = N$ (Principio de recurrencia). Luego entonces contradicción (Pricipio de existencia). Luego N_s es un conjunto externo.

[8] Se demuestra (teorema que llamamos "Principio de recurrencia externa") que si $E \subset N_s$, $0 \in E$ y si $n \in E$ entonces $n+1 \in E$, entonces $E = N_s$.
En efecto, entonces << << si $E \neq N_s$ entonces existe n' tal que $n' \in E$ y existe n'' tal que $n'' \in N_s \setminus E$ y $n'' > n'$ >> y si $r_1 , r_2 , r_3 , \ldots$ es una sucesión de números reales, << si $n \in E$ entonces $r_n = 0$ >> y si $n \in N^+ \setminus E$ entonces $r_n = 1$, entonces <<existe $r'_1 , r'_2 , r'_3 , \ldots$ tal que $r'_1 , r'_2 , r'_3 , \ldots$ es una sucesión estándar de números reales y si $n \in N^+ \cap N_s$ entonces $r'_n = r_n$ >> >> (Principio de la sucesión). Luego entonces,

* $r'_{n''} = 1$
* si $B = \{ x \mid (x \in N^+) \quad (x < n'') \quad (r'_x = 0) \}$ entonces << (x = máximo de B) es una fórmula estándar en la que figura libre x y no figura libre variable alguna distinta de x y (se verifica) $\exists x$ (x = máximo de B) >>. Luego entonces (se verifica) $\exists^{st} x$ (x = máximo de B) (Principio de transferencia). Luego entonces existe m tal que $m \in N_s$ y m = máximo de B. Luego entonces,
  * $m+1 \in N^+$ y $m+1 \notin B$
  * $r'_m = 0$ .Luego entonces $m \in E$. Luego entonces $m+1 \in E$. Luego entonces $r'_{m+1} = 0$. Luego entonces $m \in B$, $m+1 \in N^+$, $r'_{m+1} = 0$ y $m+1 \notin B$. Luego entonces $m+1 = n''$.Luego entonces $r'_{n''} = 0$.

Luego entonces $r'_{n''} = 1$ y $r'_{n''} = 0$. Luego entonces contradicción. Luego entonces $E = N_s$.

[9] Se demuestra que si $n \in N_s$ y $m \in N \setminus N_s$ entonces $n < m$.
En efecto, entonces si $E = \{ x \mid (x \in N_s) \wedge (x < m) \}$ entonces << $E \subset N_s$, $0 \in E$ y si $n \in E$ entonces $n+1 \in E$ >> ([1], [2]). Luego entonces $E = N_s$ ([8], Principio de recurrencia externa). Luego entonces $n < m$.

---

(1) En anteriores capítulos notamos $\underline{N}$ al conjunto de los números naturales estándar, pero en lo que sigue asignaremos esta notación al conjunto de los que llamaremos "números naturales limitados" si bien resultará que un número natural es limitado si y sólo si es estándar y, en consecuencia, que $\underline{N} = N_s$

[10] Decimos "número natural límitado" a n si y sólo si << $n \in N$ y si $m \in N \setminus N_s$ entonces $n < m$ >>.

[11] Notamos $\underline{N}$ al conjunto de los números naturales limitados.

[12] Se demuestra que $\underline{N} = N_s$.
Demostración fácil ([9]).

[13] Decimos "número natural ilimitado" a n si y sólo si $n \in N \setminus \underline{N}$

[14] Notamos $\overline{N}$ al conjunto de los números naturales ilimitados.

[15] Se demuestra que $\overline{N}$ es un conjunto externo.
En efecto, <<si $\overline{N}$ no es un conjunto externo entonces $\overline{N}$ es un conjunto interno >> y $\underline{N} = N \setminus \overline{N}$ ([11], [13], [14]). Luego entonces $\underline{N}$ es un conjunto interno. Luego entonces contradicción ([7], [12]). Luego $\overline{N}$ es un conjunto externo.

[16] Se demuestra que si $n \in N \setminus \overline{N}$ y $m \in \overline{N}$ entonces $n < m$.
Demostración fácil ([9], [11], [12], [13], [14]).

[17] Notamos R_s al conjunto de los números reales estándar.

[18] Se demuestra que R_s es un conjunto externo.
En efecto, <<si R_s no es un conjunto externo entonces R_s es un conjunto interno>> y $N_s = N \cap R_s$ ([6]). Luego entonces N_s es un conjunto interno. Luego entonces contradicción ([7]). Luego R_s es un conjunto externo.

[19] Se demuestra que R_s es un subcuerpo externo del cuerpo de los números reales.
En efecto, $R_s \subset R$, <<si $r \in R_s$ entonces $-r \in R_s$ >>, <<si $r \in R_s$ y $r \neq 0$ entonces $r^{-1} \in R$ >>, << si $r \in R_s$ y $r' \in R_s$ entonces << $r+r' \in R_s$ y $r.r' \in R_s$ >> >> y R_s es un conjunto externo (Principio de transferencia, [17], [18]). Luego R_s es un subcuerpo externo del cuerpo de los números reales.

[20] Decimos "número real limitado" a r si y sólo si << $r \in R$ y existe n tal $n \in \underline{N}$ y $|r| \leq n$ >>.

[21] Notamos $\underline{R}$ al conjunto de los números reales limitados.

[22] Se demuestra que $\underline{R}$ es un conjunto externo.
En efecto, << si $\underline{R}$ no es un conjunto externo entonces $\underline{R}$ es un conjunto interno >> y $\underline{N} = N \cap \underline{R}$ ([9], [12], [20], [21]). Luego entonces $\underline{N}$ es un conjunto interno. Luego entonces contradicción ([7] y [12]). Luego $\underline{R}$ es un conjunto externo.

[23] Se demuestra que $R_s \subset \underline{R}$.
En efecto, si $r \in R_s$ entonces <<$(x \in N) \wedge (|r| \leq x)$ es una fórmula estándar en la que figura libre x y no figura libre variable alguna distinta de x y (se verifica) $\exists x\, ((x \in N) \wedge (|r| \leq x))$>> ([17]). Luego entonces (se verifica) $\exists^{st} x\, ((x \in N) \wedge (|r| \leq x))$ (Principio de transferencia). Luego entonces $r \in \underline{R}$ ([6], [12], [20], [21]). Luego $R_s \subset \underline{R}$.

[24] Se demuestra que $R_s \neq \underline{R}$.
En efecto, existe μ tal que $\mu \in N \setminus N_s$ (Principio de existencia, [6]). Luego entonces $\mu \in R \setminus R_s$ y $1 < \mu$ ([2], [6], [9], [17]). Luego entonces $\mu^{-1} \notin R$ y $\mu^{-1} < 1$ ([19]). Luego entonces $\mu^{-1} \in \underline{R}$ ([2], [12], [20] y [21]). Luego $R_s \neq \underline{R}$.

[25] Se demuestra que $\underline{R}$ es un subanillo unitario externo del cuerpo de los números reales.
En efecto, $\underline{R} \subset R$, $1 \in \underline{R}$, <<si $r \in \underline{R}$ entonces $-r \in \underline{R}$>>, <<si $r \in \underline{R}$ y $r' \in \underline{R}$ entonces $r+r' \in \underline{R}$ y $r.r' \in \underline{R}$>> >> y $\underline{R}$ es un conjunto externo (Principio de transferencia [2], [12], [20], [21], [22]). Luego $\underline{R}$ es un subanillo externo del cuerpo de los números reales.

[26] Decimos número real ilimitado a r si y sólo si $r \in R \setminus \underline{R}$.

[27] Notamos $\overline{R}$ al conjunto de los números reales ilimitados

[28] Se demuestra que $\overline{R}$ es un conjunto externo.
En efecto, << si $\overline{R}$ no es un conjunto externo entonces $\overline{R}$ es un conjunto interno >> y $\underline{R} = R \setminus \overline{R}$ ([21], [26], [27]). Luego entonces $\underline{R}$ es un conjunto interno. Luego entonces contradicción ([22]). Luego $\overline{R}$ es un conjunto externo.

[29] Se demuestra que si $r \in R \setminus \overline{R}$ y $\mu \in \overline{R}$ entonces $|r| < |\mu|$.
Demostración fácil ([20], [21], [26], [27]).

[30] Decimos "número real infinitésimo" a ε si y sólo si << $\varepsilon \in R$ y ó $\varepsilon = 0$ ó $\varepsilon^{-1} \in \overline{R}$ >>.

[31] Notamos I al conjunto de los números reales infinitésimos.

[32] Se demuestra que I es un conjunto externo.
En efecto, <<si I no es un conjunto externo entonces I es un conjunto interno >> y $\overline{R} = \{ x \mid (x \in R) \wedge (x \neq 0) \wedge (x^{-1} \in I) \}$ ([1], [12], [20], [21], [26], [27], [30], [31]). Luego entonces $\overline{R}$ es un conjunto interno. Luego entonces contradicción ([28]). Luego I es un conjunto externo.

[33] Se demuestra que $I \cap R_s = \{0\}$.
En efecto,

* $\{0\} \subset I \cap R_s$ ([19], [30], [31]).
* Si $I \cap R_s \not\subset \{0\}$ entonces existe r tal que $r \in I \cap R_s$ y $r \neq 0$. Luego entonces $r^{-1} \in R$ y $r^{-1} \notin R$ ([19], [23]. [26], [27], [30], [31]). Luego entonces contradicción. Luego $I \cap R_s \subset \{0\}$.

Luego $I \cap R_s = \{0\}$.

[34] Se demuestra que si $\varepsilon \in I$ y $r \in R \setminus I$ entonces $|\varepsilon| < |r|$.
En efecto, entonces,
* si $\varepsilon = 0$ entonces demostración fácil
* << << si $\varepsilon \neq 0$ entonces $\varepsilon^{-1} \in \overline{R}$ >> y $r^{-1} \notin \overline{R}$ >> ([30], [31]). Luego entonces $|r^{-1}| < |\varepsilon^{-1}|$ ([29]). Luego entonces $|\varepsilon| < |r|$.

[35] Se demuestra que I es un ideal externo del subanillo unitario externo $\underline{R}$ del cuerpo de los números reales.
En efecto, $I \subset \underline{R}$, << si $\varepsilon \in I$ entonces $-\varepsilon \in I$ >>, << si $\varepsilon \in I$ y $\delta \in I$ entonces $\varepsilon + \delta \in I$ >> , << si $\varepsilon \in I$ y $r \in \underline{R}$ entonces $\varepsilon . r \in I$ >> e I es un conjunto externo ([2], [6], [11], [12], [17], [19], [20], [21], [25], [26], [27], [30], [31], [32]). Luego I es un ideal externo del subanillo externo $\underline{R}$ del cuerpo de los números reales.

[36] Si << $\xi \in R$ ó ξ es una variable >> y << $\eta \in R$ ó η es una variable >> entonces notamos $\xi \simeq \eta$ y decimos " ξ es ilimitadamente próximo a η " ó " ξ es casi igual a η " a (la fórmula) $\xi - \eta \in I$.

[37] Se demuestra que si E es un conjunto finito (2) y $E \subset N$ entonces << E es un conjunto estándar si y sólo si $E \subset N_s$>>.
En efecto, entonces
* Si $E = \phi$ entonces demostración fácil ([1], [6]).
* Si $E \neq \phi$ entonces
  * Si E es un conjunto estándar entonces << (x = máximo de E) es una fórmula estándar en la que figura libre x y no figura libre variable alguna distinta de x y (se verifica) $\exists x$ (x = máximo de E). Luego entonces (se verifica) $\exists^{st} x$ (x = máximo de E) (Principio de transferencia). Luego entonces $E \subset N_s$ ([6], [9]).
  * Si $E \subset N_s$ entonces <<existe m tal que m = máximo de E y $m \in N$ y existe n' tal que $n' \in N$ y existe f tal que si $F = \{ x \mid (x \in N^+) \wedge (x \leq n) \}$ entonces f es una aplicación biyec-

---

(2) Decimos "conjunto finito" a E si y sólo si existe n tal que $n \in N$ y existe f tal que f es una aplicación biyectiva entre n y E (es decir, si y sólo si existe n tal que $n \in N$ y existe f tal que f es una aplicación biyectiva entre el $\{ x \mid (x \in N^+) \wedge (x \leq n)\}$ y E).

tiva entre F y E >>. Luego entonces $n' \leq m$ (Principio de recurrencia). Luego entonces $n' \in N_s$ ([9]). Luego entonces << F es un conjunto estándar y si $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión de números reales, << si $n \in F$ entonces $r_n = f(n)$ >> y si $n \in N^+ \setminus F$ entonces $r_n = 0$, entonces existe $r_1', r_2', r_3', \ldots$ tal que $r_1', r_2', r_3', \ldots$ es una sucesión estandar de números reales y si $n \in N^+ \cap N_s$ entonces $r_n' = r_n$ >> (Principio de la sucesión). Luego entonces si f_0 es una aplicación entre F y R y si $n \in F$ entonces $f_0(n) = r_n'$, entonces << $f_0 = f$ y f_0 es una aplicación estándar>> Luego entonces f es una aplicación estándar. Luego entonces $f(F)$ es un conjunto estandar (Principio de transferencia). Luego entonces E es un conjunto estándar.

Luego entonces << E es un conjunto estándar si y sólo si $E \subset N_s$ >>.

[38] Se demuestra que si $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión estándar de números reales (ver Nota al final), $r \in R$ y $r = \lim_{n\to\infty} r_n$ (versión estándar o clásica) (3) entonces $r \in R_s$.

En efecto, entonces << $(x = \lim_{n\to\infty} r_n)$ es una fórmula estándar en la que figura libre x y no figura libre variable alguna distinta de x y (se verifica) $\exists x\ (x = \lim_{n\to\infty} r_n)$ >>. Luego entonces (se verifica) $\exists^{st} x\ (x = \lim_{n\to\infty} r_n)$ (Principio de transferencia). Luego entonces $r \in R_s$.

[39] Si $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión estándar de números reales, y $r \in R$ entonces (por ejemplo) << notamos $\lim_{n\to\infty}(\text{vne})\, r_n$ y decimos "límite versión no estándar de $r_1, r_2, r_3, \ldots$" a r si y sólo si << $r \in R_s$ y si $n \in \overline{N}$ entonces $r_n \approx r$ >> >> (es decir si y sólo si (se verifica) $(r \in R_s) \wedge \forall x\ (x \in \overline{N} \Longrightarrow r_x \approx r)$).

[40] Se demuestra que si $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión estándar de números reales y $r \in R$ entonces << $r = \lim_{n\to\infty} r$ (versión estándar) si y sólo si $r = \lim_{n\to\infty}(\text{vne})\, r$ >>.

En efecto, entonces si $P(x,y)$ es (la fórmula) $\forall z\ (((x \in$

---

(3) Si $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión de números reales y $r \in R$ entonces (versión estándar) << notamos $\lim_{n\to\infty} r_n$ y decimos "límite de $r_1, r_2, r_3, \ldots$" a r si sólo si, si $\varepsilon \in R$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe n_0 tal que $n_0 \in N^+$ y si $n \in N^+$ y $n \geq n_0$ entonces $|r_n - r| \leq \varepsilon$ >> (es decir, si y sólo si para todo ε, si $\varepsilon \in R$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe n_0 tal que $n_0 \in N^+$ y para todo n, si $n \in N^+$ y $n \geq n_0$ entonces $|r_n - r| \leq \varepsilon$. Es decir, si y sólo si (se verifica) $\forall x\ (((x \in R) \wedge (x > 0)) \Longrightarrow \exists y\ ((y \in N^+) \wedge \forall z\ (((z \in N^+) \wedge (z \geq y)) \Longrightarrow |r_z - r| \leq x)))$).

$R) \wedge (x > 0)) \Longrightarrow ((y \in N^+) \wedge (((z \in N^+) \wedge (z \geq y)) \Longrightarrow |r_z - r| \leq x)))$ y $r \in R_s$ entonces $P(x,y)$ es una fórmula estándar (ver Nota al final) en la que figuran libres x, y y no figura libre variable alguna distinta de x, y y << (se verifica) $\forall x \exists y\ P(x,y)$ si y sólo si $r = \lim_{n\to\infty} r$ (versión estándar) >> >>. Luego entonces,

* si $r = \lim_{n\to\infty} r_n$ (versión estándar) entonces << $r \in R_s$ y (se verifica) $\forall x \exists y\ P(x,Y)$ >> ([38]). Luego entonces (se verifica) $\forall^{st} x \exists y\ P(x,y)$. Luego entonces (se verifica) $\forall^{st} x \exists^{st} y\ P(x,y)$ (Principio de transferencia). Luego entonces (se verifica) $\forall^{st} x \forall y\ ((y \in \overline{N}) \Longrightarrow P(x,y))$ ([6], [12], [13], [14], [16]). Luego entonces si $\varepsilon \in R_s$, $\varepsilon > 0$ y $n \in N$ entonces $|r_n - r| \leq \varepsilon$ ([17]). Luego entonces si $n \in \overline{N}$, $m \in \underline{N}$ y $m \neq 0$ entonces $|r_n - r| < m^{-1}$ ([6], [12], [17], [19]). Luego entonces si $|r_n - r| \neq 0$ entonces $m < |r_n - r|^{-1}$. Luego entonces $|r_n - r|^{-1} \in \overline{R}$ ([20], [21], [26], [27]). Luego entonces $|r_n - r| \in I$ ([30], [31]). Luego entonces $r_n \approx r$ ([35], [36]). Luego entonces si $n \in \overline{N}$ entonces $r_n \approx r$. Luego entonces (se verifica) $(r \in R_s) \wedge \forall x\ (x \in \overline{N} \Longrightarrow r_x \approx r)$. Luego entonces $r = \lim_{n\to\infty}(\text{vne})\, r_n$ ([39]).
* Si $r = \lim_{n\to\infty}(\text{vne})\, r_n$ entonces (se verifica) $(r \in R_s) \wedge \forall x\ (x \in \overline{N} \Longrightarrow r_x \approx r)$ ([39]). Luego entonces si $n_0 \in \overline{N}$, $n \in N^+$, $n \geq n_0$, $\varepsilon \in R_s$ y $\varepsilon > 0$ entonces $|r_n - r| \leq \varepsilon$ ([16], [33], [34], [36]). Luego entonces si $\varepsilon \in R_s$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe n_0 tal que $n_0 \in N^+$ y si $n \in N^+$ y $n \geq n_0$ entonces $|r_n - r| \leq \varepsilon$ (Principio de existencia), ([1], [6], [12], [13], [14]). Luego entonces (se verifica) $\forall^{st} x \exists y\ P(x,y)$ ([17]). Luego entonces (se verifica) $\forall x \exists y\ P(x,y)$ (Principio de transferencia). Luego entonces $r = \lim_{n\to\infty} r_n$ (versión estándar).

Luego entonces << $r = \lim_{n\to\infty} r_n$ (versión estándar) si y sólo si $r = \lim_{n\to\infty}(\text{vne})\, r_n$ >>.

[41] Si $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión estándar de números reales entonces << decimos "sucesión regular versión no estándar" o "sucesión de Cauchy versión no estándar" a $r_1, r_2, r_3, \ldots$ si y sólo si, si $n \in \overline{N}$ y $m \in \overline{N}$ entonces $r \approx r$ >> (es decir si y sólo si (se verifica) $\forall x \forall y\ (((x \in \overline{N}) \wedge (y \in \overline{N})) \Longrightarrow r_x \approx r_y)$).

[42] Se demuestra que si $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión estándar de números reales entonces << $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión regular (versión estándar) (4) si y sólo si $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión regular versión no estándar >>.

En efecto, entonces si $P(x,y)$ es (la fórmula) $\forall z\ (((x \in R) \wedge (x > 0)) \Longrightarrow ((y \in N^+) \wedge (((z \in N^+) \wedge (z \geq y)) \Longrightarrow |r_z - r_y| \leq x)))$ entonces << $P(x,y)$ es una fórmula estándar en la que figuran libres x, y y no figura libre variable alguna distinta de x, y y << (se verifica) $\forall x \exists y\ P(x,y)$ si y sólo si $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión regular (versión esándar) >> >>. Lue go entonces,

* Si r_1, r_2, r_3, ... es una sucesión regular (versión estándar) entonces (se verifica) $\forall x \exists y\ P(x,y)$. Luego entonces $\forall^{st} x \forall y\ (y \in \overline{N} \Longrightarrow P(x,y))$ ([40]). Luego entonces si $\varepsilon \in R_s$, $\varepsilon > 0$, $n \in \overline{N}$, $n' \in N^+$ y $n' \geq n$ entonces $|r_{n'} - r_n| \leq \varepsilon$ ([17]). Luego entonces si $n \in \overline{N}$, $n' \in \overline{N}$, $m \in N$ y $m \neq 0$ entonces $|r_{n'} - r_n| < m^{-1}$ ([6], [12], [16] [17], [19]). Luego entonces si $|r_{n'} - r_n| \neq 0$ entonces $m < |r_{n'} - r_n|^{-1}$. Luego entonces $|r_{n'} - r_n|^{-1} \in \overline{R}$ ([20], [21], [26], [27]). Luego entonces $|r_{n'} - r_n| \in I$ ([30], [31]). Luego entonces $r_{n'} \approx r_n$ ([25], [35], [36]). Luego entonces si $n \in \overline{N}$ y $n' \in \overline{N}$ entonces $r_{n'} \approx r_n$. Luego entonces (se verifica) $\forall x \forall y\ (((x \in \overline{N}) \wedge (y \in \overline{N})) \Longrightarrow r_x \approx r_y)$. Luego entonces r_1, r_2, r_3, ... es una sucesión regular versión no estándar ([41]).

* Si r_1, r_2, r_3, ... es una sucesión regular versión no estándar entonces (se verifica) $\forall x \forall y\ (((x \in \overline{N}) \wedge (y \in \overline{N})) \Longrightarrow r_x \approx r_y)$ ([41]). Luego entonces si $\varepsilon \in R_s$, $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \overline{N}$, $n \in N^+$ y $n \geq n_0$ entonces $|r_n - r_{n_0}| \leq \varepsilon$ ([14], [16], [17], [33], [34], [36]). Luego entonces si $\varepsilon \in R_s$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe n_0 tal que $n_0 \in N^+$ y $n \geq n_0$ entonces $|r_n - r| \leq \varepsilon$ (Principio de existencia, [1], [12], [13], [14]). Luego entonces (se verifica) $\forall^{st} x \exists y\ P(x,y)$ ([17]). Luego entonces (se verifica) $\forall x \exists y\ P(x,y)$ (Principio de transferencia). Luego entonces r_1, r_2, r_3, ... es una sucesión regular (versión estándar).

Luego entonces << r_1, r_2, r_3, ... es una sucesión regular (versión estándar) si y sólo si r_1, r_2, r_3, ... es una sucesión regular versión no estandar >>.

[43] Si r_1, r_2, r_3, ... es una sucesión estándar de números reales y $r \in R_s$ entonces << decimos "punto de aglomeración versión no estándar de r_1, r_2, r_3, ..." a r si y sólo si existe n tal que $n \in \overline{N}$ y $r_n \approx r$ >> (es decir, si y sólo si (se verifica) $\exists x\ ((x \in \overline{N}) \wedge (r_x \approx r))$).

[44] Se demuestra que si r_1, r_2, r_3, ... es una sucesión estándar de números reales y $r \in R$ entonces << r es punto de aglomeración de r_1, r_2, r_3, ... (versión están-

---

(4) Si r_1, r_2, r_3, ... es una sucesión de números reales entonces (versión estándar) << decimos "sucesión regular" o "sucesión de Cauchy" a r_1, r_2, r_3, ... si y sólo si, si $\varepsilon \in R$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe n_0 tal que $n_0 \in N^+$ y si $n \in N^+$ y $n \geq n_0$ entonces $|r_n - r_{n_0}| \leq \varepsilon$ >> (es decir, si y sólo si para todo ε, si $\varepsilon \in R$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe n_0 tal que $n_0 \in N^+$ y para todo n, si $n \in N^+$ y $n \geq n_0$ entonces $|r_n - r_{n_0}| \leq \varepsilon$. Es decir si y sólo si (se verifica) $\forall x(((x \in R) \wedge (x > 0)) \Longrightarrow \exists y((y \in N^+) \wedge \forall z\ (((z \in N^+) \wedge (z \geq y)) \Longrightarrow |r_z - r_y| \leq x)))$).

dar) (5) si y sólo si r es punto de aglomeración versión no estándar de r_1, r_2, r_3, ... >>.
En efecto, entonces si $P(x,y)$ es (la fórmula) $\exists z\ (((x \in R) \wedge (x > 0) \wedge (y \in N^+)) \Longrightarrow ((z \in N^+) \wedge (z \geq y) \wedge (|r_z - r| \leq x)))$ entonces << $P(x,y)$ es una fórmula estándar en la que figuran libres x,y y no figura libre variable alguna distinta de x,y y << (se verifica) $\forall x \forall y\ P(x,y)$ si y sólo si r es punto de aglomeración de r_1, r_2, r_3, ... (versión estándar) >> >>. Luego entonces,

* Si r es punto de aglomeración de r_1, r_2, r_3, ... (versión estándar) entonces (se verifica) $\forall x \forall y\ P(x,y)$. Luego entonces si $\varepsilon \in I$, $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \overline{N}$ entonces existe n tal que $n \in N^+$, $n \geq n_0$ y $|r_n - r| \leq \varepsilon$ ([1], [6], [12], [13], [14], [31]). Luego entonces existe n tal que $n \in \overline{N}$ y $r_n \approx r$ (Principio de existencia, [6], [12], [13], [14], [16], [34], [35], [36]). Luego entonces r es punto de aglomeración versión no estándar de r_1, r_2, r_3, ... ([43]).

* Si r es punto de aglomeración versión no estándar de r_1, r_2, r_3, ... entonces (se verifica) $\exists x\ ((x \in \overline{N}) \wedge (r_x \approx r))$ ([43]). Luego entonces si $\varepsilon \in R_s$, $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in N^+ \cap N_s$ entonces existe n tal que $n \in N^+$, $n \geq n_0$ y $|r_n - r| \leq \varepsilon$ ([12], [13], [14], [16], [33], [34], [35], [36]). Luego entonces (se verifica) $\forall^{st} x \forall^{st} y\ P(x,y)$. Luego entonces (se verifica) $\forall^{st} x \forall y\ P(x,y)$ (Principio de transferencia). Luego entonces (se verifica) $\forall x \forall y\ P(x,y)$ (Principio de transferencia). Luego entonces r es punto de aglomeración de r_1, r_2, r_3 ... (versión estándar).

Luego entonces << r es punto de aglomeración de r_1, r_2, r_3, ... (versión estandar) si y sólo si r es punto de aglomeración versión no estandar de r_1, r_2, r_3, ... >>.

NOTA: Recordemos que,

- Admitimos (Principio de existencia) que existe un (algún) número natural noestandar.

---

(5) Si r_1, r_2, r_3, ... es una sucesión de números reales y $r \in R$ entonces (versión estándar) << decimos "punto de aglomeración de r_1, r_2, r_3, ..." a r si y sólo si, si $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in N^+$ entonces existe n tal que $n \in N^+$, $n \geq n_0$ y $|r_n - r| \leq \varepsilon$>> (es decir, si y sólo si para todo ε y para todo n_0, si $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in N^+$ entonces existe n tal que $n \in N^+$, $n \geq n_0$ y $|r_n - r| \leq \varepsilon$. Es decir, si y sólo si (se verifica) $\forall x \forall y\ (((x \in R) \wedge (x > 0) \wedge (y \in N^+)) \Longrightarrow \exists z\ ((z \in N^+) \wedge (z \geq y) \wedge (|r_z - r| \leq x)))$).

- Admitimos (Principio de transferencia) que si $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ son variables y α es una fórmula estándar en la que figuran libres $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ y no figura libre variable alguna distinta de $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ entonces (se verifica) $\forall^{st}\xi \ldots \forall^{st}\eta\, (\forall^{st}\zeta\ \alpha \Longrightarrow \forall \zeta\ \alpha)$ (y con el Principio de transferencia se demuestra que entonces (se verifica) $\forall^{st}\xi \ldots \forall^{st}\eta\, (\exists \zeta\ \alpha \Longrightarrow \exists^{st}\zeta\ \alpha)$).

- Admitimos (Principio de la sucesión) que si $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión (interna o externa) de números reales y si n es un número natural estándar entonces r_n es un número real estándar, entonces existe $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots$ tal que $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots$ es una sucesión estándar de números reales y si n es un número natural estándar entonces $r'_n = r_n$.

- Decimos que α es una fórmula estándar si y sólo si α es una fórmula interna (es decir, de las de la matemática clásica, "de las de siempre") en la que no figura (notación alguna de) conjunto noestandar alguno. Así por ejemplo,
  * $\exists x\ (x \simeq 0)$ no es una fórmula estándar pues no es una fórmula interna (es, pues, una fórmula externa) ya que el signo $\simeq$ no es un signo de la matemática clásica ([36]).
  * $\forall x\ (x \in \underline{N} \Longrightarrow x \in \underline{R})$ no es una fórmula estándar pues no es una fórmula interna ya que $\underline{N}$ y $\underline{R}$ no son conjuntos internos (es decir, no son conjuntos de la matemática clásica) ([6], [7], [12], [22]).
  * $\exists^{st} x\ (x = 0)$ no es una fórmula estándar pues no es una fórmula interna ya que el signo st no es de la matemática clásica (el signo st que significa "estándar" no es, pues, un signo estándar).
  * Si μ es (una notación de) un número real ilimitado entonces $\exists x\ ((x \in R) \wedge (x < \mu))$ es una fórmula interna (μ, por ser un número real ilimitado, es un número real y los números reales son conjuntos internos, que son los conjuntos de la matemática clásica) pero no es una fórmula estándar ya que μ no es un conjunto estándar ([17], [23], [26]).
  * $\exists x \exists y\ ((x \in R) \wedge (y \in \bar{R}) \wedge (x < y))$ no es una fórmula estándar pues no es una fórmula interna ya que $\bar{R}$ no es un conjunto interno ([28]).
  * $\forall x\ (x \in N \Longrightarrow x \in Z)$ es una fórmula estándar (y es, pues, interna) ([4]).

- Decimos que $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión estándar de números reales si y sólo si << $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión de números reales y existe $F(x,y)$ tal que $F(x,y)$ es una fórmula estándar en la que figuran libres x,y y no figura libre variable alguna distinta de x,y, $F(x,y)$ es una fórmula funcional de función y y si $n \in N^+$ (6) entonces (se verifica) $F(n, r_n)$ >>. Así por ejemplo la sucesión $r_1, r_2, r_3, \ldots$ tal que si $n \in N^+$ entonces $r_n = \sqrt{n^2}$, es una sucesión estándar de números reales ya que $(x \in N^+ \Longrightarrow y = \sqrt{x^2})$ es una fórmula estándar en las que figuran libres x,y y no figura libre variable alguna distinta de x,y, $(x \in N^+ \Longrightarrow y = \sqrt{x^2})$ es una fórmula funcional de función y y si $n \in N^+$

entonces (se verifica) $(n \in N^+ \Longrightarrow r = \sqrt{n^2})$. (Puesto que una sucesión es un conjunto, puntualizando decimos que $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es una sucesión estándar de números reales si y sólo si existe $F(x,y)$ tal que $F(x,y)$ es una fórmula estándar en la que figuran libres x,y y no figura libre variable alguna distinta de x,y, $F(x,y)$ es una fórmula funcional de función y, (se verifica) $\forall x\ ((x \in N^+) \Longrightarrow \exists y\ ((y \in R) \wedge F(x,y))$ y $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es el $\{ z \mid \exists x\ \exists y\ ((x \in N^+) \wedge (y \in R) \wedge F(x,y) \wedge (z = (x,y)) \}$).

---

(6) N^+ es un conjunto estándar ($N^+ = N \setminus \{0\}$, $\{0\} = 1$, [2], [4]).

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matematicas, deseo que me envien gratuitamente los siguientes numeros atrasados del Boletin *(señalar con unas aspas los que interesen)*:

3	4	5	21	22	23	24
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
25	26	27	28	29	30	
☐	☐	☐	☐	☐	☐	

Envio adjuntos sellos para el franqueo *(**48** pts. por numero para Madrid y **73** pts. por numero para provincias)*.

Hagan el envio utilizando como direccion la consignada en este recuadro:

Los numeros 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento recorte o copie este cupon y envielo a la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matematicas, Apartado 9479 - 28080 - MADRID.*

SIMETRIA PLANA EN LA CLASE: GRUPOS Y GEOMETRIA

Por Juan Bosco Romero Márquez

I.B. Isabel de Castilla. Avila.

En este artículo relatamos una experiencia sobre Simetria de las letras del abecedario, vivida con los alumnos de 1° y 3° de BUP, en la clase de Matemáticas.

El problema principal fue el estudiar las diferentes simetrías que presentan las figuras planas: simetrías axiales (respecto de un eje o una recta), y la simetría central u homotecia de razón - 1, o semigiro de 180° (respecto de un punto).

A cada tipo de alumnos se les mandó hacer un trabajo sobre este tema, de acuerdo con su nivel de conocimientos: a los alumnos de 1° de BUP, sobre todo, la manipulación de todo tipo de simetría; a los alumnos de 3° de BUP, aparte de lo anterior se les pidió el estudio geométrico-algebraico de la simetriá: el aspecto analítico de coordenadas y la estructura del grupo de simetría de las letras del abecedario, y los diferentes grupos de simetría que aparecen cuando estas vienen escritas en la tipografía de imprenta (figura 1): grupos de un elemento, de dos y de cuatro elementos.

ABCDEFGHIJKLM
NOPQRSTUVWXYZ

fig. 1.

I.- Conceptos iniciales previos.-

Sea E el plano euclídeo en el que se ha hecho la identificación de los puntos y de los vectores libres, respecto de un origen de coordenadas.

Una figura plana F es cualquier subconjunto no vacio de E.

Una simetría (isometría, movimiento rígido) de una figura F es una aplicación biyectiva s de F sobre F que conserva la distancia euclídea: la distancia d(P,Q) entre dos puntos cualesquiera de F y la distancia entre sus imágenes u homólogos s(P) y s(Q), esto es, que

d(P,Q) = d (s(P),s(Q)).

Describamos algunos casos particulares de simetrías : cualquier figura F tiene la simetría trivial, es decir, la aplicación identidad que pasa cada punto de la figura en el mismo. Además, se comprueba de forma inmediata que si s y s' son dos simetrías de F, es claro que la composición como aplicaciones de s s' es otra simetría. Designamos por S(F) el conjunto de todas las simetrías de la figura F con la estructura interna dada por la composición de aplicaciones se prueba que es un grupo, llamado el grupo de simetría de la figura F. Supuesto, que la figura F, tiene un grupo de simetría ,S(F) finito, tendrá una tabla de Cayley que se construye en la forma habitual. Es claro que la simetría trivial o identidad "e" (giro de 360°) de la figura F es el elemento unidad, ya que si s es cualquier otra simetría de F, entonces e·s = s·e = s.La simetría trivial e actúa bajo la composición de

aplicaciones de la misma forma que el número 1, y por eso, a veces, ambas se identifican a efectos de cálculos.

Notas y observaciones.- Una simetría de un objeto F es una transformación o permutación de F que, es una biyección $\sigma: F \to F$, conservando un conjunto de propiedades P, es decir, se mueven todos los puntos individuales de F, pero deja invariante a F como un todo .

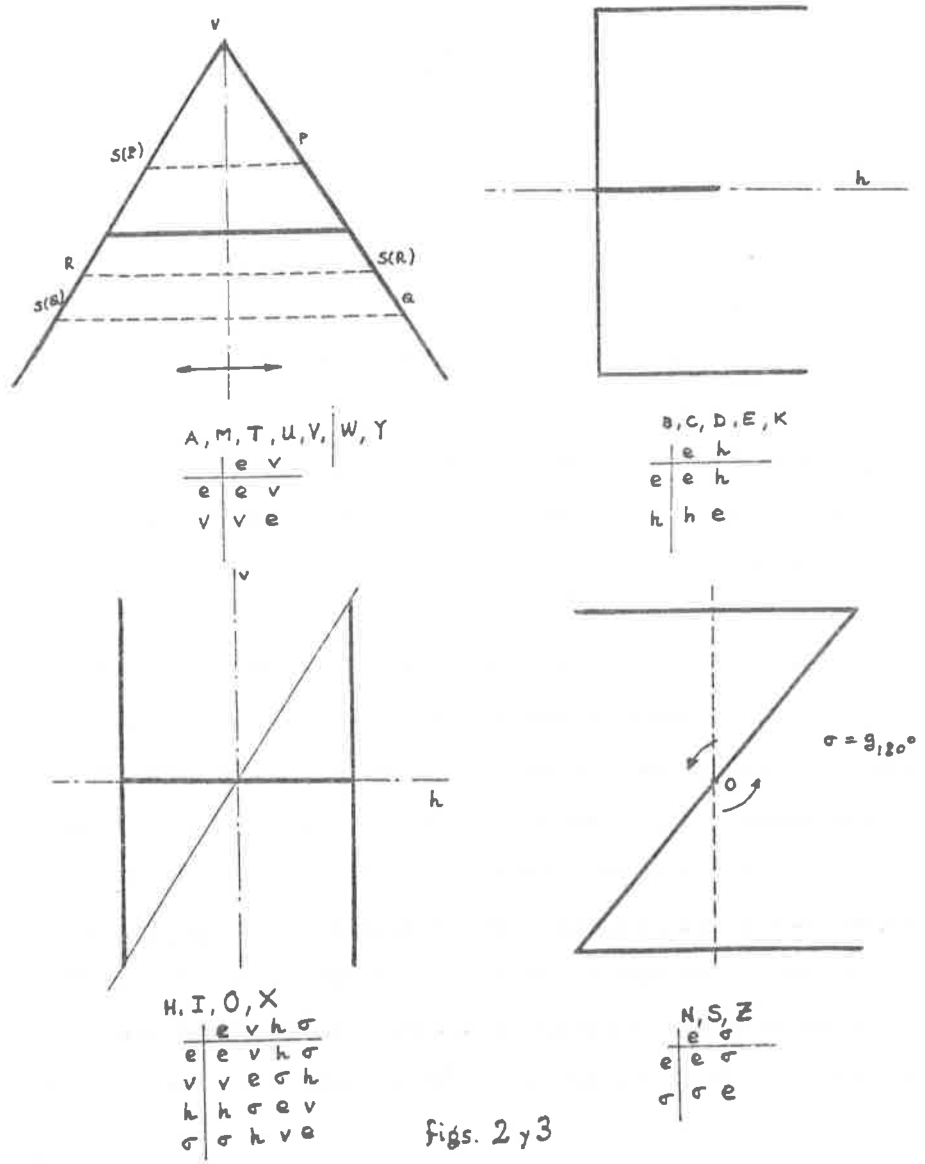
Si F es un subconjunto de un espacio métrico, tal como una figura F de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, y P consiste de las distancias d(P,Q) entre los distintos puntos P y Q de F, por tanto la simetría " s" aplicará estos puntos, respectivamente, en s(P), y s(Q) verificando: d(s(P),s(Q)) = d(P,Q).

La simetría desde el punto de vista racional del analisis de la estética significa armonía y proporción en los objetos y en los seres.

II.- Grupos de simetría de las letras del abecedario.-

Empecemos calculando las simetrías y por tanto, los grupos de simetría de dos letras representativas del abecedario: la letra A y la Z.

Simetrías y grupo de simetrías de la letra A.- (figura 2).- Si reflejamos la letra A según un eje vertical s= v que pasa por su apex (vértice), entonces cada punto P es transformado o aplicado en su correspondiente punto imagen v(P) sobre el semiplano contrario o opuesto al que se encontraba P. Los puntos R sobre el eje (como el vértice, por ejemplo), quedan fijos o invariantes, esto es v(R)=R). La transformación o permutación anterior se ilustra en la figura 2, y deja, la letra A como un todo invariante al no saber distinguir el lado anterior y posterior de la letra antes y después de aplicarle "v". Más aún, v conserva la distancia entre dos puntos cualesquiera de la letra A. Por lo tanto "v" es una isometría de la letra A. Esta isometría también la tienen las letras: A,M,T,H,U,V,W,Y y X, y es



figs. 2 y 3

llamada simetría bilateral, ya que ella intercambia los dos lados de A. Similarmente, B y E se reflejan sobre un eje horizontal, y H sobre ambos ejes :horizontal y vertical.

Otros tipos de isometría o simetría es la formada por las rotaciones. Por ejemplo, si giramos la letra Z alrededor de su centro por un giro de 180°, como en la figura 3, entonces la letra Z se transforma en si misma, y la distancias entre pares de puntos originales y transformados se conservan por dicha rotación que es por lo tanto una simetría de la letra Z, mientras que la rotación de 90° no lo es, para dicha letra Z.De la misma forma, las letras H,N, y S tienen la simetría dada por el giro de 180° alrededor del centro de la figura de cada letra.El triángulo equilátero tiene las simetriás dadas por los giros, respectivamente, 120° y 240°; y la letra O identificada, a un círculo tiene cualquier tipo de simetría obtenida por rotación de la misma, cualquier ángulo alrededor de su centro.

III.- Aplicacion a la obtención de todas las simetrías y grupos de simetría de las letras del abecedario escritas en la tipografía de imprenta.-

Se trata de estudiar y obtener las simetrías de cada letra y el grupo de simetría asociada a la misma.Clasificar cada letra por el mismo tipo de simetría cuando tienen el mismo grupo de simetría o uno isomorfo. Dos letras se dirán distintas desde el punto de vista geométrico o algebraico cuando tengan grupos de simetría no isomorfos.De esta forma, obtenemos una relación de equivalencia en el conjunto de las letras del abecedario, a saber:

Dos letras son equivalentes "geometrica-algebraica " cuando sus dos grupos de simetría son el mismo, o siendo distintos son isomorfos.

Finalmente, obtendremos las clases de equivalencia.

Descripción de las simetriás y grupos de simetría:

1.- Las letras A,M,T,U,V,W, y Y admiten el mismo grupo de simetría: es un grupo con dos elementos: la identidad o trivial e y la simetría o reflexión de eje vertical v. Su tabla de Cayley es : S(F)= {e,v}

	e	v
e	e	v
v	v	e

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el mismo grupo de simetría anterior.

2.- Las letras B,C,D,E y K admiten el mismo grupo de simetría (es decir, tienen los mismos tipos de simetría), a saber: es un grupo de dos elementos: la identidad e y la reflexión o simetría de eje horizontal "h". Su tabla de Cayley es: S(F)={e,h}.

	e	h
e	e	h
h	h	e

Los grupos de los epígrafes 1) y 2) tienen elementos distintos, pero, son isomorfos, es decir, existen entre ellos, una aplicación biyectiva que conserva la estructura algebraica de los dos, o que transporta la estructura de grupo cíclico, de uno en el otro.

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el mismo grupo de simetría anterior.

3.- Las letras F,G,J,L,P,Q,R poseen sólo la simetría trivial. Su grupo de simetría es el grupo trivial, con un sólo elemento, S(F)={1=e}. Su tabla de multiplicación es :

	1
1	1

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el mismo grupo de simetría anterior.

4.- Las letras N,S y Z admiten como simetría no trivial g, un semigiro o rotación de 180°, alrededor del centro de la figura, es decir, de su centro de simetría.El grupo de simetría de tales letras tiene dos elementos y por lo tanto, es isomorfo a los grupos obtenidos en 1) y 2), esto es S(F)= {e,g}.Su tabla de Cayley es la siguiente:

	1	g
1	1	g
g	g	1

Los grupos de 1), 2) y 4) son isomorfos como grupos abstractos, aunque, obviamente, tienen significados geométricos diferentes.

5.- Las restantes letras con la tipografía en que han sido dibujadas, H,I,O,X, admiten todas las simetrías siguientes e,v,h,g consideradas antes, y de hecho no admiten otras.De aquí, si F designa cualquiera de las letras anteriores, su grupo de simetría , S(F)={e,v,h,g}, que es isomorfo al grupo de Klein del rectángulo (simetrías del rectángulo). La tabla de Cayley, de este grupo es:

	e	v	h	g
e	e	v	h	g
v	v	e	g	h
h	h	g	e	v
g	g	h	v	e

Para probar , por ejemplo, que e,v,h,g son las únicas simetrías de la letra H, basta ver que cada simetría s cambiaría de posición las cuatro terminaciones verticales de esta letra.

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geometricos del plano que tengan el grupo de simetría anterior.

Notas y obrsevaciones.- Si la letra I fuera considerada como una barra vertical delgada, entonces las aplicaciones e y v coinciden como aplicaciones al restringirlas a dicha letra.Y de la misma forma, las simetrías h y g coinciden y su grupo de simetría es ahora: S(I)= {e,h}.

Usualmente, las simetrías de una figura F no se consideran como isometrías que dejan invariante a F globalmente sólo, sino que se consideran como transformaciones (movimientos o isometrías) del plano euclídeo E. Las excepciones a este concepto amplio de simetría se deben, al caso, en que la figura F esté contenida en alguna recta de E.

Observemos que si consideramos la letra O como un círculo, admite todas las rotaciones de cualquier ángulo como simetrías alrededor de su centro, como también cualquier reflexión o simetría según un diámetro.Y así, su

grupo de simetría sería infinito.

Si consideramos la letra X como una cruz, X como construída con dos segmentos perpendiculares bisecando cada uno al otro, entonces su grupo de simetría, tendría ocho elementos.

Un buen ejercicio como completo de todo lo anterior, sería el siguiente: Hallar las simetrías y el grupo de simetrías de un polígono regular de cualquier número de lados.Pero, esto será hecho en otra aventura del descubrimiento geométrico-algebraico que en otra ocasión abordaremos.

BIBLIOGRAFIA.-

(1) The Open University.: Curso básico de matemáticas. Grupos, I,II. México, 1971.

(2) H. Weyl.: La Simetría.Ed. Nueva Visión. Buenos Aires.1958.

(3) I. Stewart.:Conceptos de Matemática Moderna.Alianza.Madrid, 1971.

(4) J.A.C. Reynolds.: Colección Principios de Matemática Moderna. Forma, Tamaño y lugar. Vicens Vives. Barcelona, 1968.

(5) H. Freudental.: Las Matemáticas en la vida cotidiana. Guadarrama, Madrid, 1967.

(6) H.S.M. Coxeter.:Fundamentos de geoemtría. Limusa Wiley. México, 1971.

(7) F. Papy.: Matemática Moderna,1,2,3,4,5. Eudeba. Buenos Aires.1970.

(8) G. Matthews.: Colección principios de Matemática Moderna. Matrices, I,II.Vicens Vives. Barcelona, 1968.

(9) M. Otte, H. Steinbring, R. Stowasser, A. Dress.: Enciclopedia de las ciencias: Matemáticas.Desclée de Brouwer. Bilbao, 1985.

(10) T. J. Fletcher.:Didáctica de las Matemáticas . Teide. Barcelona, 1974.

(11) H. Steinhaus.:Instántaneas Matemáticas. Biblioteca Científica Salvat.Barcelona, 1986.

(12) M. Gardner.: Izquierda y derecha en el cosmos. Biblioteca Científica Salvat.Barcelona,1986.

(13) P.S. Stevens.:Patrones y pautas en la naturaleza. Biblioteca científica Salvat. Barcelona, 1986.

(14) E.H. Lockwood y R.H. MacMillan.:Geometry Symmetry.Cambridge University Press.Cambridge,1978.

(15) J. Rosen.: Symmetry discovered: concepts and applications in natura and science.Cambridge University Press. London, 1971.

Nota.- En este último libro aparece numerosa bibliografía sobre el tema de la simetría.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS CUATERNIOS DE HAMILTON

por José Aldeguer Carrillo
Univ. Politécnica de Valencia

1. Itroducción

Es sabido que los cuaternios de Hamilton son los elementos del espacio vectorial $(Q_H,\mathbb{R})$, definido por

$$Q_H = \{ (a_0,a_1,a_2,a_3) \ , \ a_i \in \mathbb{R} \} \ ,$$

con la base canónica $B = \{ e_0,e_1,e_2,e_3 \}$, cuando entre ellos se ha definido un producto interno poniendo:

$$<e_0,e_0> = e_0 \ ;$$

para i = 1,2,3, $<e_0,e_i> = <e_i,e_0> = e_i, \ <e_i,e_i> = -e_0 \ ;$

$$\begin{aligned} <e_1,e_2> &= - <e_2,e_1> = e_3 \ , \\ <e_2,e_3> &= - <e_3,e_2> = e_1 \ , \\ <e_3,e_1> &= - <e_1,e_3> = e_2 \ . \end{aligned} \qquad [1]$$

(que son las llamadas *condiciones de Hamilton*), y en general, para que se cumpla la propiedad distibutiva:

Si $a = \sum a_i e_i \ , \quad b = \sum b_i e_i \ , \qquad (i = 0,1,2,3)$

$$<a,b> = \sum \sum a_i b_j <e_i,e_j> =$$

$$= (a_0,a_1,a_2,a_3) \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & -e_0 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & -e_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad [2]$$

Nótese que en esta expresión formal, los elementos de la matriz cuadrada, que en lo sucesivo denominaremos con $\mathbb{A}$, pertenecen a Q_H, mientras que los de las otras matrices son números reales. Escribiremos abreviadamente [2] en la forma $<a,b> = A \ \mathbb{A} \ B^t$. A veces, denotaremos con m_0, m_1, m_2, m_3 las coordenadas de $<a,b>$, con lo que

$m_0 = a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3$, $m_1 = a_1b_0+a_0b_1-a_3b_2+a_2b_3$,
$m_2 = a_2b_0+a_3b_1+a_0b_2-a_1b_3$, $m_3 = a_3b_0-a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3$.

1.1. Propiedades

Son casi evidentes las siguientes propiedades:

a) Dado B , la aplicación $\varphi_1 : Q_H \to Q_H$, definida por $\varphi_1(X) = X \mathbb{A} B^t$, es lineal.

b) Dado A , también lo es φ_2 dada por $\varphi_2(X) = A \mathbb{A} X^t$.

c) La multiplicación **<a,b>** es distributiva respecto a la adición.

d) **<a,e$_0$>** = **<e$_0$,a>** = **a** (**e$_0$** es elemento unidad).

Siendo **a,b,c** $\in Q_H$, el producto **<a,<b,c>>** es, por la propiedad distributiva, $\sum\sum\sum a_ib_jc_k\langle e_i,\langle e_j,e_k\rangle\rangle$, mientras que **<<a,b>,c>** es $\sum\sum\sum a_ib_jc_k\langle\langle e_i,e_j\rangle,e_k\rangle$; como $\langle e_i,\langle e_j,e_k\rangle\rangle = \langle\langle e_i,e_j\rangle,e_k\rangle$ cualesquiera que sean i, j, k (como se comprueba directamente), la multiplicación resulta ser *asociativa*, es decir:

e) **<a,<b,c>>** = **<<a,b>,c>** ,

lo que permite representar estos dos productos con la notación común **<a,b,c>**.

Todo elemento **a** de Q_H puede escribirse en la forma $a_0e_0 + \vec{a}$, donde $\vec{a} = a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$; diremos que $\vec{a}$ es el *vector* de **a** y podemos interpretarlo como un elemento del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{V}_3$ en el que $\{e_1,e_2,e_3\}$ es una base ortonormal. El producto de dos vectores, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ es, con esta interpretación,

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = -(\vec{a}.\vec{b})e_0 + \vec{a}\times\vec{b} ,$$

donde . y $\times$ denotan los productos escalar y vectorial en $\mathbb{V}_3$, y en general, siendo **a,b** $\in Q_H$, será

$$\langle a,b\rangle = (a_0b_0-\vec{a}.\vec{b})e_0 + a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b} . \qquad [3]$$

Resulta así que la multiplicación *no es conmutativa*, salvo que sea $\vec{a}\times\vec{b} = \mathbf{0}$. En concreto:

f) **<a,b>** - **<b,a>** = $2.\vec{a}\times\vec{b}$ ..

2. Elementos conjugados e inverso.

Se define el conjugado de $a = a_0e_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$, y se representa con **a*** , como

$$a^* = a_0e_0-a_1e_1-a_2e_2-a_3e_3 .$$

Es decir, si $a = a_0e_0 + \vec{a}$, $a^* = a_0e_0 - \vec{a}$.

Directamente de la definición se deducen las propiedades:

g) $(\alpha a)^* = \alpha(a^*)$.

h) $[\alpha a+\beta b]^* = \alpha a^*+\beta b^*$ (linealidad).

i) **<a,b>*** = **<b*,a*>** (Nótese el cambio de orden)

j) **(a*)*** = **a** (involutiva).

k) **<a,a*>** = $[a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2]e_0$

El coeficiente de e_0 que figura en *k)* es un número real positivo que representaremos con N(**a**), cuya raiz cuadrada recibe el nombre de **modulo** de **a** . Es evidente que

l) N(**0**) = 0 y si **a** $\neq$ **0** , N(**a**) > 0 .

Como **<a,a*>** = N(**a**)**e$_0$** , será $\langle a,\frac{a^*}{N(a)}\rangle = e_0$, lo permite considerar a $\frac{a^*}{N(a)}$ como **inverso** de **a** y representarlo con a^{-1}

m) Siendo $a^{-1} = \frac{a^*}{N(a)}$, es $\langle a,a^{-1}\rangle = \langle a^{-1},a\rangle = e_0$.

La aplicación N : $Q_H \to \mathbb{R}$ definida antes, satisface a las propiedades:

n) N(**<a,b>**) = N(**a**).N(**b**) .

Puede hacerse la comprobación directa. Esta propiedad puede escribirse en la forma

$$\sum m_i^2 = \sum a_i^2 .\sum b_i^2 \qquad (i = 0,1,2,3),$$

que se conoce como *identidad de Lagrange*.

o) $N(a+b) = N(a) + N(b) + 2\sum_{i=0}^{3} a_ib_i$.

En efecto, N(**a+b**)**e$_0$** = **<(a+b),(a+b)*>** =
= **<a,a*>** + **<b,b*>** + **<a,b*>** + **<b,a*>** =
= [N(**a**)+N(**b**)]**e$_0$** + **<a,b*>** + **<a,b*>*** =

$$= \left[N(\mathbf{a}) + N(\mathbf{b}) + 2a_0b_0 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3\right]e_0 \, .$$

De ahí que:

p) Si $\sum a_ib_i = 0$ (y sólo entonces), $N(\mathbf{a+b}) = N(\mathbf{a})+N(\mathbf{b})$.

Nótese que $\sum a_ib_i$ puede ser positivo, negativo o nulo.

3. Una aplicacion lineal interesante.

Dado un elemento $\mathbf{a} \in Q_H$, se puede definir la aplicación $\Psi_{\mathbf{a}} : Q_H \to Q_H$ mediante

$$\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}^*, \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \; ;$$

esta aplicación es evidentemente lineal; poniendo $\mathbf{x}' = \Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ se obtiene fácilmente:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(\mathbf{a}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2 & 2(a_0a_3+a_1a_2) & 2(a_1a_3-a_0a_2) \\ 0 & 2(a_1a_2-a_0a_3) & a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2 & 2(a_0a_1+a_2a_3) \\ 0 & 2(a_0a_2+a_1a_3) & 2(a_2a_3-a_0a_1) & a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Denotaremos con A a la matriz cuadrada que figura en esta expresión y con $\bar{A}$ a la que resulta de suprimir su primera fila y su primera columna. De esta expresión se deduce inmediatamente que los subespacios de Q_H de bases $\{e_0\}$ y $\{e_1,e_2,e_3\}$ son invariantes en $\Psi_{\mathbf{a}}$ y que la matriz correspondiente a $\Psi_{\mathbf{a}^*}$ es la traspuesta de la correspondiente a $\Psi_{\mathbf{a}}$.

La aplicación $\Psi_{\mathbf{a}}$ induce un automorfismo de $\mathbb{V}_3$ definido por la matriz $\bar{A}$. Con objeto de calcular la matriz A^tA , aplicaremos sucesivamente $\Psi_{\mathbf{a}}$ y $\Psi_{\mathbf{a}^*}$, lo que nos dará la aplicación $\mathbf{x} \to \langle \mathbf{a}, \langle \mathbf{a}^*, \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle, \mathbf{a}^* \rangle$ que, por la propiedad asociativa es $\mathbf{x} \to \langle\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^* \rangle, \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^* \rangle\rangle = N(\mathbf{a})^2\mathbf{x}$, es decir $A^tA = N(\mathbf{a})^2 I_4$ y $\bar{A}^t\bar{A} = N(\mathbf{a})^2 I_3$ (donde I_n es la matriz unidad de orden n). De ahí que $\det(A) = N(\mathbf{a})^4$ y $\det(\bar{A}) = N(\mathbf{a})^3$.

Es importante el caso en que $N(\mathbf{a}) = 1$. Entonces las matrices A y $\bar{A}$ son *ortogonales* y el automorfismo inducido en $\mathbb{V}_3$ por $\Psi_{\mathbf{a}}$ es una *rotacion* o *giro* en ese espacio vectorial euclídeo (con la base ortonormal

considerada). Como, por la propiedad asociativa *e)* es:

$\langle \mathbf{b}^*, \langle \mathbf{a}^*, \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle, \mathbf{b} \rangle = \langle\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{a}^* \rangle, \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^*, \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle\rangle$

resulta, para la composición de aplicaciones:

$$\Psi_{\mathbf{b}} \circ \Psi_{\mathbf{a}} = \Psi_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} \, .$$

Como además, por la propiedad *n)*, de $N(\mathbf{a}) = N(\mathbf{b}) = 1$ se deduce $N(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = 1$, el resultado de la composición de los giros definidos en $\mathbb{V}_3$ por los cuaternios a y b es el giro definido por $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Es inmediato que al cuaternio (1,0,0,0) corresponde la transformación idéntica de $\mathbb{V}_3$, y al cuaternio $(0,a_1,a_2,a_3)$ (con $a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 1$), la rotación de matriz (simétrica y ortogonal y por tanto involutiva):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2a_1^2-1 & 2a_1a_2 & 2a_1a_3 \\ 2a_2a_1 & 2a_2^2-1 & 2a_2a_3 \\ 2a_3a_1 & 2a_3a_2 & 2a_3^2-1 \end{pmatrix}$$

que es una simetría (o giro de amplitud π) respecto al eje de vector $a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$. Los giros de amplitud ϕ y ejes según los vectores e_1, e_2, e_3 son, respectivamente, los correspondientes a los cuaternios $(\cos\frac{\phi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}, 0, 0)$, $(\cos\frac{\phi}{2}, 0, \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}, 0)$, $(\cos\frac{\phi}{2}, 0, 0, \operatorname{sen}\frac{\phi}{2})$ y por composición de estos giros se pueden obtener otros cualesquiera.

Bibliografia

I. N. Herstein. *Algebra Moderna*.

L. A. Santaló. *Geometria Proyectiva*.

C. Alsina-E. Trillas. *Lecciones de Algebra y Geometría*.

J. Burgos. *Algebra*.

NUEVA SECCION DE NUESTRO BOLETíN

PROBLEMAS PROPUESTOS POR NUESTROS SOCIOS

Nuestra habitual sección de PROBLEMAS PROPUESTOS recoge normalmente enunciados procedentes de las distintas Olimpiadas Matematicas o de algunas oposiciones a cuerpos del Estado. Nos proponemos abrir ahora una nueva seccción destinada a recoger enunciados originales, que nos sean enviados por nuestros socios, para su inclusión en ella, con indicación de su procedencia.

Invitamos, por tanto, a los lectores de este Boletín a que nos remitan aquellos enunciados de problemas que hayan ideado, y que crean que pueden servir de desafío a los aficionados que abundan entre nuestros socios. No es preciso que estos problemas se mantengan dentro del repertorio de materias propio de las Olimpiadas. Los que deseen colaborar en esta nueva Sección, deberán enviarnos sus enunciados acompañados de la solución resumida.

Con posterioridad a la publicación de los mencionados enunciados, invitamos a todos a que nos envíen sus soluciones, que seran publicadas en números posteriores.

- - - - - -

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA FASE FINAL DE LA XXVIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA CELEBRADA EN FEBRERO DE 1992

PROBLEMA 1º :

Un número N, múltiplo de 83, es tal que su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar N, sabiendo que es el menor número que cumple las condiciones anteriores.

- - - - - -

PROBLEMA 2º :

Dadas dos circunferencias exteriores de radios r y r' (r≠r'), se pide dibujar, razonadamente, una recta paralela a una dirección dada, tal que determine sobre ambas circunferencias dos cuerdas tales que la suma de sus longitudes sea igual a una longitud dada l.

- - - - - -

PROBLEMA 3º :

Probar que si a, b, c, d, son números enteros no negativos, y es

$$(a+b)^2+2a+b = (c+d)^2+2c+d, \qquad (*)$$

necesariamente es $a=c$ y $b=d$.

Probar la misma conclusión, si en vez de (*) es

$$(a+b)^2+3a+b = (c+d)^2+3c+d.$$

Ver que, en cambio, existen enteros no negativos $a\neq c$, $b\neq d$, tales que

$$(a+b)^2+4a+b = (c+d)^2+4c+d.$$

- - - - - -

PROBLEMA 4º :

Sea la sucesión (progresión aritmética)

3, 7, 11, 15,...

Demostrar que en dicha sucesión existen infinitos números primos.

- - - - - -

PROBLEMA 5º :

Dibujado el triángulo de vértices A, B, C, se pide determinar gráficamente el punto P tal que

$$\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}.$$

Expresar una función trigonométrica de este ángulo $\widehat{PAB}$, mediante funciones trigonométricas de $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$.

- - - - - -

PROBLEMA 6º :

Dados un número natural $n>0$ y un número complejo de módulo unidad $z=x+iy$, $x^2+y^2=1$, puede verificarse, o no, la igualdad

$$(z + 1/z)^n = 2^{n-1}(z^n + 1/z^n).$$

Fijado n, designemos por S(n) al subconjunto de los complejos de módulo unidad, para los que se verifica esta igualdad. Se pide

a) Calcular razonadamente S(n), para n = 2, 3, 4, 5.
b) Acotar superiormente el número de elementos de S(n), para n>5, en función de n.

- - - - - -

PROBLEMAS ESCOGIDOS ENTRE LOS PROPUESTOS EN DIVERSOS DISTRITOS EN LA PRIMERA FASE DE LA XXVIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PROBLEMA 7º : (propuesto en ALICANTE)

Se denota con h(n) el número de cincos que aparecen en la representación del entero positivo n . Así, por ejemplo: h(5203)=2, h(37)=0, h(555)=3, h(4711)=0, etc.

Halla el valor S de la suma siguiente:

$$5^{h(1)} + 5^{h(2)} + 5^{h(3)} + \ldots\ldots + 5^{h(1991)}$$

- - - - - -

PROBLEMA 8º : (propuesto en ALICANTE)

Sean r y h el radio y la altura respectivamente, de un cono recto. Discute, en función de h , la existencia de un punto P sobre la superficie lateral del cono tal que AP = PB = AB . Se supone que A y B designan puntos diametralmente opuestos de la circunferencia de la base y AP, PB y AB son los caminos de longitud mínima sobre la superficie lateral del cono, de A a P , de P a B y de A a B , respectivamente.

Calcula la distancia del punto P a la base del cono en el caso de que h = 4 cm y r = $\sqrt{2}$ cm .

- - - - - -

PROBLEMA 9º : (propuesto en ALICANTE)

Considera un alfiler especial, que cuando se "pincha" en uno de los puntos del plano, colorea de rojo a todos aquellos puntos cuya distancia al punto pinchado es irracional. ¿ Cuántos pinchazos como mínimo son necesarios efectuar, para que todos los puntos del plano se coloreen de rojo ?

- - - - - -

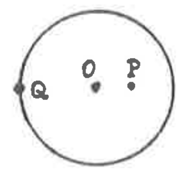
PROBLEMA 10º : (propuesto en ZARAGOZA)

Se corta un alambre de un metro de longitud en dos trozos. Con uno de los trozos, se construye un cuadrado y con el otro, una circunferencia. Calcular por donde hay que realizar el corte para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea: a) Mínima. b) **Máxima**.

\- - - - - -

PROBLEMA 11º : (propuesto en VALENCIA)

Un submarino, cuyas velocidades, sumergido y en superficie, son v y kv $(k \geq 1)$, respectivamente, se encuentra situado en un punto P a 30 millas del centro O de un circulo de 60 millas de radio. La vigilancia de una escuadra enemiga le obliga a navegar sumergido mientras está en el interior del círculo (si puede navegar en superficie en la circunferencia borde del circulo).



Discutir segun los valores de k el camino mas rapido para trasladarse a un punto Q (del borde del circulo), opuesto a P, que está en el diametro que pasa por P (ver figura).
¿ Para qué valores de k el camino mas rapido es una recta ?

\- - - - - -

PROBLEMA 13º : (propuesto en NAVARRA)

En la aburrida conferencia inaugural de la última Olimpiada Matemática Internacional, cuyo idioma oficial era el sueco, cada uno de los cinco componentes del equipo ibérico se durmió exactamente dos veces. Para cada dos de entre esos cinco colegas, hubo algún instante en que ambos se encontraban dormidos al mismo tiempo. Pruébese que, en algún momento de la conferencia, al menos tres componentes del equipo se encontraban dormidos.

\- - - - - -

ENUNCIADOS DE PROBLEMAS PROPUESTOS POR NUESTROS SOCIOS:
(Nueva seccion de nuestro Boletin)

PROBLEMA 13º:

Si $b, c \in \mathbb{R}^+$, probar las desigualdades:

$$(1)\quad \frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{b^6+c^6}{(b^2+c^2)^3}}\,, \qquad (2)\quad bc \leq \sqrt{\frac{b^6+c^6}{b^2+c^2}}\,,$$

$$(3)\quad \frac{1}{2}\, bc \leq \frac{b^6+c^6}{(b^2+c^2)^2}\,,$$

con la igualdad si y sólo si $b = c$.

Se sugiere un razonamiento algebraico para *(1)* y uno geométrico para *(2)*.

Propuesto por Juan Bosco Romero Marquez.

\- - - - - - -

PROBLEMA 14º :

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo A no vacío y abierto; sean $x_0 \in A$ y $h_0 \in \mathbb{R}^+$, tales que si $h_0 > h > 0$, sea x_0-h, $x_0+h \in A$; suponemos que f es una función de la variable real x, tal que las derivadas laterales $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ existen.

Calcular el límite de $2.A_h/h^2$ cuando h tiende a 0, manteniéndose positivo, donde A_h es el área del triángulo orientado determinado por los puntos
$P(x_0, f(x_0))$, $Q(x_0-h, f(x_0-h))$, $R(x_0+h, f(x_0+h))$.

Propuesto por Juan Bosco Romero Marquez.

\- - - - - - -

PROBLEMA 15º:

Dar reglas para calcular directamente el valor de la función $b(n)$ definida por:

$$b(0) = -1 \quad \text{y si } n \in \mathbb{N}, \quad b(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\binom{n}{k}}.$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Marquez

\- - - - - - -

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

propuestos en nº	procedentes de	Numeros de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de numeros: 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	Obs.
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	13-14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OI-85-Bogota	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19 /	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	20-21	20	23	21	-	C
11	OME-f1-86 /	13	14	14	14	14	23	20	15 /	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	C
12	OI-87-Uru/OME-f1	16	14	14	17	15	17 /	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21					C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89 /	24	27	24	27	27	24 /	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30 /	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	-	-	-	-	-	-	-	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	-	-	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	-	-	C
25	OME-f2/f1-90	XX	31	29	29	31	XX /	XX	XX	XX	XX	
26	OMI-90-China /	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OIM-90-Vallad.	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
27	OME-f1-91	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
28	OME-f2-91	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
29	OMI-91-Suecia	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OME-f1-91	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	
31	OME-f2-91/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OME-f1-91/PNS	XX	XX /	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	

CLAVES: XX = Pendientes de publicacion . C = Completo.
OME = Olimpiada Matematica Española (fase 1 o 2).
OMI = Olimpiada Matematica Internacional.
OI = Olimpiada Iberoamericana de Matematicas.
PNS = Propuestos por nuestros socios.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA Nº 10 (Boletín nº 22)

Sabiendo que $z + 1/z = 2 \cos t$, $z \in C$, hallar el valor de $z^n + 1/z^n$, lo más simplificado posible.

Solución:

Si $z = m_\alpha$, será $1/z = (1/m)_{-\alpha}$; ahora bien, si los módulos m y $1/m$ fuesen distintos, su suma no podría ser un número real, a menos que fuese $\alpha = k\pi$ $(k \in Z)$.

Luego si $z + 1/z = 2 \cos t$, salvo en el caso indicado, será $m = 1/m$, o sea $m = 1$. Si es $\alpha = k\pi$, z y $1/z$ serán reales y $z + 1/z = \pm(m + 1/m) = 2 \cos t$, o sea m^2 $2 m \cos t + 1 = 0$, $m = \pm \cos t \pm \sqrt{\cos^2 t - 1} =$ $= \pm \cos t \pm \sqrt{- \operatorname{sen}^2 t}$, que sólo tiene solución real si es $\operatorname{sen} t = 0$, con lo cual $m = \pm 1$, o por ser un módulo, $m = 1$, como en el caso anterior.

Como m vale 1 , $z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$, y también $1/z = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha$; $z + 1/z = 2 \cos \alpha$, luego será $2 \cos \alpha = 2 \cos t$; como $z^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)$ y $(1/z)^n = \cos(-n\alpha) + i \operatorname{sen}(-n\alpha)$, será $z^n + (1/z)^n = 2 \cos(n\alpha)$ o sea, en definitiva: $z^n + (1/z)^n = 2 \cos (nt)$, que es el valor pedido.

Amparo Ortega (Valencia)

otra solución de José V. García Sestafe (Madrid)

- - - - - -

PROBLEMA Nº 11 (Boletín nº 22)

Sea $R_n[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n $(n>1)$ en una indeterminada x.

Estudiar si forman o no subespacio vectorial de $R_n[x]$, y en su caso obtener una base y la dimensión, los siguientes conjuntos:

a) L, conjunto de los polinomios de $R_n[x]$ con la raiz real dada c.

b) L_k, $(1 \leq k \leq n)$, conjunto de todos los polinomios de $R_n[x]$ que tienen k raices reales distintas (con cualquier orden de multiplicidad) $c_1, c_2, \ldots, c_k$, dadas.

c) S, conjunto de los polinomios de $R_n[x]$ con una raiz SIMPLE, c, dada.

Solución:

a) Todos los polinomios de grado menor o igual que n, que admiten la raiz $x = c$ (simple o múltiple) forman un espacio vectorial, ya que siendo $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios de L, se tiene $P(x) = (x-c)P_1(x)$, $Q(x) = (x-c)Q_1(x)$ y tanto su suma como el producto por $\lambda \in R$:

$P(x)+Q(x)=(x-c)[P_1(x)+Q_1(x)] \in L$; $\lambda P(x)=(x-c)[\lambda P_1(x)] \in L$.

El polinomio $P(x) \in L$, de grado $m \leq n$, se puede escribir $P(x) = (x-c)P_1(x) = (x-c)(a_0x^{m-1}+a_1x^{m-2}+\ldots+a_{m-1})$ luego una base del subespacio vectorial L es

$\{ x-c , (x-c)x , (x-c)x^2 , \ldots , (x-c)x^{n-1} \}$.

b) Razonando de manera análoga resulta que L_k es también un subespacio vectorial de $R_n[x]$, siendo una base:

$\{ p_k , xp_k , x^2p_k , \ldots , x^{n-k}p_k \}$,

donde $p_k = (x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_k)$. Como la dimensión es el número de elementos de una base,

$\dim [L] = n$, $\dim [L_k] = n - k + 1$.

c) S no es subespacio vectorial; se pone de manifiesto con un contraejemplo. Sean los polinomios

$P(x) = (x-1)(x-4)$, $Q(x) = (x-1)(x+2)$,

ambos con la raiz SIMPLE $x = 1$; sin embargo, su suma

$P(x) + Q(x) = (x-1)(x-4+x+2) = 2(x-1)^2$,

es un polinomio que no admite $x = 1$ como raiz SIMPLE.

José V. García Sestafe (Madrid)

- - - - - -

PROBLEMA Nº 6 (Boletín nº 23)

Estudiar la naturaleza y, en su caso, hallar la suma, de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (2n / (n^3+6n^2+11n+6))$.

Solución:

Sea a_n el término general de la serie a estudiar y consideremos la serie de termino general $b_n = 1/n^2$ (serie de Riemann convergente): Como

$\lim (a_n/b_n) = \lim (2n^3 / (n^3+6n^2+11n+6)) = 2$,

por el criterio de comparación por cociente, la serie Σa_n es **convergente**.

Puesto que $a_n = 2n /[(n+1)(n+2)(n+3)]$, calculemos A, B, C para que $a_n = A/(n+1) + B/(n+2) + C/(n+3)$; se obtiene $A=-1$, $B=4$, $C=-3$. Así la suma S de la serie será:

$$S = \lim_{n\to\infty} \Big(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{4}{4} - \frac{3}{5} - \frac{1}{4} + \frac{4}{5} - \frac{3}{6} - \frac{1}{5} + \frac{4}{6} - \ldots \Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{3}{n+2} + \frac{4}{n+2} - \frac{3}{n+3} \Big) = \frac{1}{2}.$$

Miguel E. Serrano Caballero (Segovia)

Otras soluciones de José M. Celorrio Laseca (Soria), José P. Sánchez Mielgo (Segovia) y Jose V. García Sestafe (Madrid)

PROBLEMA Nº 7 (Boletín nº 23)

Probar que el producto de cuatro números naturales consecutivos no puede ser el cuadrado de un entero.

Solución:

Sean los números n , $n+1$, $n+2$, $n+3$; su producto es $p = n^4+6n^3+11n^2+6n = (n^2+3n+1)^2 - 1$.

Luego p , producto de cuatro naturales consecutivos, para $n \in N$, es siempre un cuadrado disminuido en una unidad, luego no puede ser un cuadrado.

Observación: Como caso particular, $0.1.2.3 = 0^2$, pero 0 no lo consideramos como natural.

Jose V. Garcia Sestafe (Madrid)

- - - - - -

PROBLEMA Nº 2 (Boletín nº 24)

Sean dos angulos α y β tales que $0 < \alpha < \beta < \pi/2$; ¡demostrar que:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} > \frac{\text{sen } \beta}{\beta} \qquad \frac{\text{tg } \alpha}{\alpha} < \frac{\text{tg } \beta}{\beta}$$

Solución:

La función $f(x) = \text{sen } x / x$ es decreciente en el primer cuadrante; en efecto, $f'(x) = [x.\cos x - \text{sen } x]/x$ y como para $0 < x < \pi/2$, $x < \text{tg } x$ y, por tanto, el numerador anterior es negativo, resulta $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente, y si $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, $f(\alpha) > f(\beta)$, o sea $\text{sen } \alpha / \alpha > \text{sen } \beta / \beta$.

La funcion $g(x) = \text{tg } x / x$ es creciente; en efecto,

$g'(x) = [x/\cos^2 x - \text{tg } x] / x^2 = [x - \text{sen } x \cos x]/(x^2\cos^2 x)$ y como para $0 < x < \pi/2$ es $2x - 2\text{sen } x \cos x = 2x - \text{sen } 2x$ que es positivo, resulta $g'(x) > 0$, o sea que $g(x)$ es creciente, y si $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, $g(\alpha) < g(\beta)$, o sea $\text{tg } \alpha / \alpha < \text{tg } \beta / \beta$, c. d. d.

José V. García Sestafe (Madrid)
Otras soluciones de J. P. Sánchez Mielgo (Segovia)
y de Miguel A. Cabezón Ochoa.

- - - - - -

PROBLEMA Nº 3 (Boletín nº 24)

Demostrar que si las longitudes a , b , c de los lados de un triangulo satisfacen $a^2 = b^2 + bc$, el angulo A es doble del ángulo B .

Solución:

Según el teorema del coseno,

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2+c^2-2bc.\cos A \\ b^2 = a^2+c^2-2ac.\cos B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2+bc = b^2+c^2-2bc.\cos A \\ b^2 = b^2+bc+c^2-2ac.\cos B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos A = \frac{c-b}{2b} \\ \cos B = \frac{c+b}{2a} \end{array}$$

El cálculo de $\cos 2B$ nos da ahora:

$$\cos 2B = \cos^2 B - \text{sen}^2 B = 2.\cos^2 B - 1 = 2\left(\frac{c+b}{2a}\right)^2 - 1 = \frac{(c+b)^2}{2a^2} - 1 =$$
$$= \frac{(c+b)^2}{2(b^2+bc)} - 1 = (c+b)/(2b) - 1 = (c-b)/(2b) = \cos A .$$

De ahí que $\cos 2B = \cos A$, lo que implica que $2B = A$, por ser angulos menores que π .

José P. Sanchez Mielgo (Segovia)

- - - - - -

PROBLEMA N° 5 (Boletin n° 24)

Si la descomposición en factores primos de un número n es $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$, se llama indicador de n y se denota con $\phi(n)$, al producto $a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)c^{\gamma-1}(c-1)\ldots$

Determinar todos los números impares cuyo indicador sea el mismo que el de 1990.

Solucion:

Como $1990 = 2.5.199$, $\phi(1990) = 4.198 = 2^3.3^2.11$. Sea n impar tal que $\phi(n) = 2^3.3^2.11$. Entonces:

-- La descomposición de n en factores primos no puede tener más de 3 factores distintos, ya que las diferencias (a-1) , (b-1) , dan números pares y solo aparece 2^3 en $\phi(n)$.

-- Ninguno de los factores primos de n es 2^{α} , pues n es impar.

-- Ninguno de los factores primos de n es 11^{α} , pues no aparece $11-1 = 10 = 2.5$ en $\phi(n)$.

-- Ninguno de los exponentes de la descomposición de n puede ser superior a 3, ya que en $\phi(n)$ el máximo exponente correspondiente a algún factor de n es 2.

Las distintas posibilidades para la descomposición de n son:

1) Un solo factor:

i) $n = a \Rightarrow \phi(n) = a-1 = 2^3.3^2.11 \Rightarrow a = 793$, que no es primo.

ii) $n = a^p$ $(p\neq 1)$ $\Rightarrow \phi(n) = a^{p-1}(a-1) = 2^3.3^2.11 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 3$, que es absurdo.

2) Dos factores:

i) $n = a^{\alpha}b^{\beta}$ $(\alpha,\beta \neq 1)$, no es posible, pues sólo 3 podría ser factor primo.

ii) $n = a.b^{\beta}$ $(\beta \neq 1)$ $\Rightarrow \phi(n) = (a-1)b^{\beta-1}(b-1) =$ $= 2^3.3^2.11$, con $b = 3$ y $b-1 = 2$; si $\beta = 3$, será $a-1 = 44$, que no es posible, pues $a = 45$ no es primo; si $\beta = 2$, será $a-1 = 132$, $a = 133$ y $n = 133.3^2 = 1197$.

iii) $n = a.b$ $\Rightarrow \phi(n) = (a-1)(b-1)$ por lo que a-1

o b-1 será múltiplo de 11; estos son los casos posibles:

a-1 = 22 , a = 23 , b = 37 ,	**n = 23.37 = 851**
a-1 = 66 , a = 67 , b = 13 ,	**n = 67.13 = 871**
a-1 = 132, a = 133, b = 7 ,	**n = 133.7 = 931**
a-1 = 198, a = 199, b = 5 ,	**n = 199.5 = 995**
a-1 = 396, a = 397, b = 3 ,	**n = 397.3 = 1191**

***3)* Tres factores:**

***i)* $n = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ $(\alpha,\beta,\gamma \neq 1)$, imposible, por ser 3 el único factor posible.**

***ii)* $n = a.b^{\beta}c^{\gamma}$ $(\beta,\gamma\neq 1)$, $\phi(n) = (a-1)b^{\beta-1}(b-1)c^{\gamma-1}(c-1)$ imposible por la misma razón.**

***iii)* $n = a.b.c^{\gamma}$ $(\gamma\neq 1)$, $\phi(n) = (a-1)(b-1)c^{\gamma-1}(c-1) =$ $= 2^3.3^2.11$. Debe ser, por tanto, $c = 3$; si $\gamma = 3$, será $(a-1)(b-1) = 2^3.11$, imposible pues a-1 y b-1 son distintos de 2, ya que $c = 3$.**

***iv)* $n = a.b.c \Rightarrow \phi(n) = (a-1)(b-1)(c-1) = 2^3.3^2.11$, lo que nos lleva a otras dos posibilidades:**

$a-1 = 2$, $b-1 = 2.3$, $c-1 = 2.3.11 \Rightarrow n = 3.7.67 = 1407$

$a-1 = 2$, $b-1 = 2.3^2$, $c-1 = 2.11 \Rightarrow n = 3.19.23 = 1311$

En consecuencia, n debe pertenecer al conjunto:

{ 851, 871, 931, 995, 1191, 1197, 1311, 1407, 1449 }

José P. Sánchez Mielgo (Segovia)

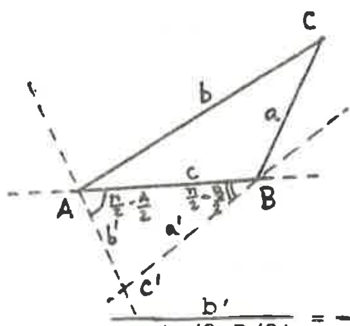
\- - - - - - -

PROBLEMA N° 8 (Boletín n° 24)

Sea ABC un triángulo arbitrario. Las bisectrices exteriores en A y B se cortan en C'. Sean a', b', c , los lados del triángulo ABC' opuestos respectivamente a A, B y C' . Expresa el cociente b/b' en función de las razones trigonométricas de A, B y C .

Solución

Analizando la figura se observa rápidamente que los ángulos del triángulo ABC' son:



$\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$ y $\frac{A+B}{2}$ o sea:
$\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$ y $\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$, luego al aplicar el teorema de los senos a cada uno de los triángulos ABC y ABC' se tiene: $\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$ y

$$\frac{b'}{\text{sen}(\pi/2-B/2)} = \frac{c}{\text{sen}(\pi/2-C/2)} \Leftrightarrow \frac{b'}{\cos(B/2)} = \frac{c}{\cos(C/2)}$$

Dividiendo las anteriores igualdades y operando tenemos:

$$\frac{b}{b'} = \frac{\text{sen } B.\cos(C/2)}{\text{sen } C.\cos(B/2)} = \frac{2.\text{sen}(B/2)\cos(B/2)\cos(C/2)}{2.\text{sen}(C/2)\cos(C/2)\cos(B/2)} =$$

$$= \frac{\text{sen}(B/2)}{\text{sen}(C/2)} = \sqrt{\frac{1-\cos B}{1-\cos C}}, \text{ así que:}$$

$$\frac{b}{b'} = \sqrt{\frac{1-\cos B}{1-\cos C}}$$

José P. Sánchez Mielgo (Segovia)

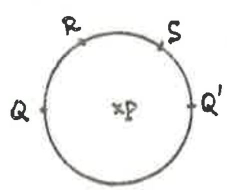
- - - - - - -

PROBLEMA N° 2 (Boletín n° 25)

Cada punto del plano está pintado de un color elegido entre tres distintos. ¿ Existen necesariamente dos puntos de ese plano distantes entre sí un cm y pintados del mismo color ?

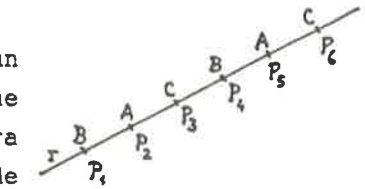
Solución

Supongamos que los colores son A, B y C. Por reducción al absurdo, supongamos que no existen dos puntos del plano distantes entre sí un cm y que estén pintados del mismo color.



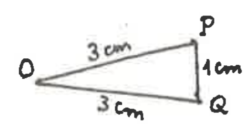
Sea P un punto del plano que suponemos pintado de un color A. Si trazamos una circunferencia de centro en P y radio un cm, sus puntos sólo pueden estar coloreados con los colores B o C. Si tomamos un punto Q de la circunferencia (fig. primera) de color B, el

punto Q' diametralmente opuesto a Q debe ser de color C, ya que R, a un cm de Q, sería de color C y S, a un cm de R, sería de color B.



Si tomamos una recta r y un punto sobre ella P_1, que suponemos de color B (figura segunda) y otro P_2 a un cm de P_1, que supondremos de color A, deducimos fácilmente de lo anterior que el punto P_3 a un cm de P_2, sobre r, en la dirección P_1P_2, debe ser de color C. Partiendo de P_2, deduciríamos que P_4 sería de color B y así sucesivamente, con puntos P_5, P_6, ...la secuencia de sus colores sería B, A, C, B, A, C, B, ...

De esto deducimos que tomando puntos alineados a un cm de distancia y ordenados según un sentido dado, los tres primeros tienen colores distintos y la secuencia de sus tres colores se repite ordenada e indefinidamente en los restantes puntos. Por ello, los puntos situados a 3 cm de distancia deben tener el mismo color.



Trazando ahora un triángulo isósceles POQ con d(O,P)=d(O,Q)=3 cm y d(P,Q)=1 cm, los tres vértices deberían ser del mismo color y esto contradice a la hipótesis de que no hubiese dos puntos del plano del mismo color a un cm de distancia.

José Miguel Celorrio Laseca (Soria)

Otra solución de Manuela Fernández Manzano (alumna del I. "Manuel Godoy" de Castuera (Badajoz)

- - - - - - -

PROBLEMA N° 5 (Boletin n° 25)

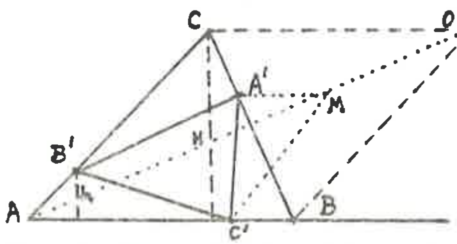
Sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo dado ABC de área S , se sitúan respectivamente tres puntos A', B', C' tales que $\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = p$

siendo p, $0<p<1$, un parámetro variable. Determinar:

1. El área del triángulo $A'B'C'$ en función de p.
2. El valor de p para el que dicha área es mínima.
3. El lugar geométrico de los puntos M de intersección de las paralelas trazadas por A' y C' a los lados AB y AC respectivamente, al variar p.

Solucion:

1. De $AB/AC' = 1/p$ se deduce $C'B/AC' = 1/p - 1$
y de $AC'/AB = p$ se deduce $C'B/AB = 1 - p$.
Si h es la altura de $AB'C'$ y H la de ABC, el área S' de $AC'B'$ será $\frac{1}{2}AC'.h$ y $\frac{S}{S'} = \frac{AB}{AC'}.\frac{H}{h} = \frac{1}{p(1-p)}$, con lo que será: $S' = Sp(1-p)$. Análogamente, el área S'' de



$BA'C'$ será $S''=Sp(1-p)$ y el mismo valor tendrá el área S''' de $CB'A'$. En definitiva, el área buscada, de $A'B'C'$ será:

$$S^* = S(1 - 3p(1-p)) .$$

2. Pongamos $f(p) = S(1 - p(1-p))$. La ecuación $f(p) = 0$ no tiene raices reales, por lo que f(p) conserva el signo positivo en [0,1]. La derivada es $f'(p) = S(6p-3)$ que se anula para $p = 1/2$. Como $f''(1/2) = 6.S > 0$, el área se hace mínima para $p = \frac{1}{2}$, siendo el valor mínimo $\frac{1}{4}S$.

3. El lugar geométrico pedido es la diagonal AO del paralelogramo ABOC, como se deduce por simple aplicación del teorema de Thales.

Manuela Fernández Manzano (alumna del Instituto "Manuel Godoy" de Castuera (Badajoz)

- - - - - - - -