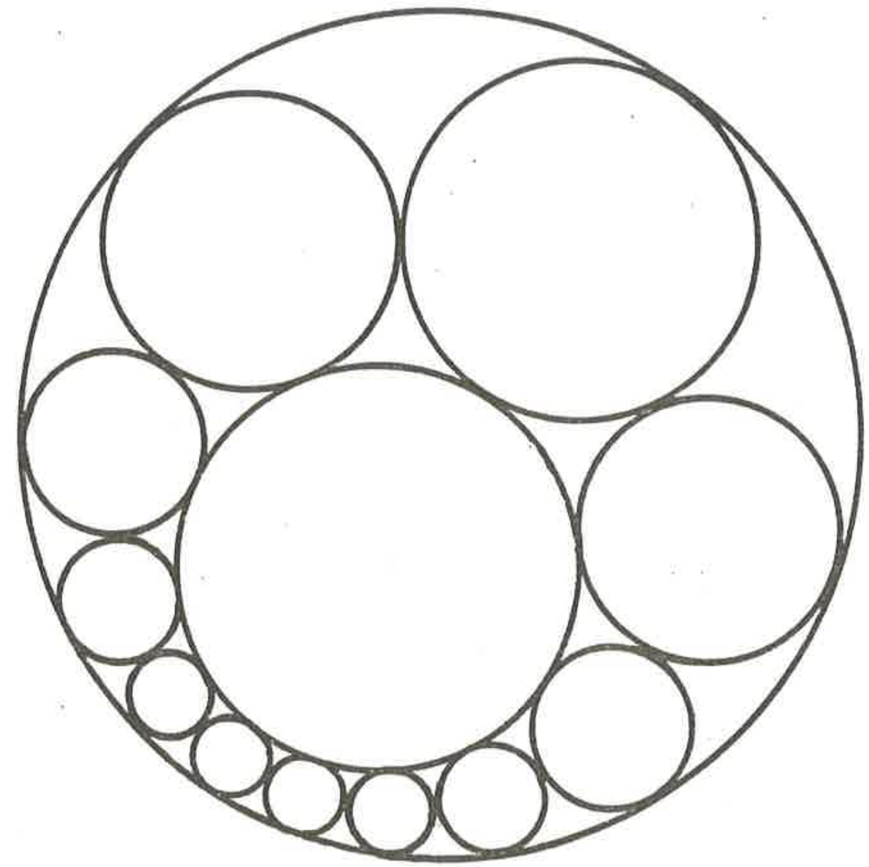
BOLETIN Nº

30



FEBRERO

1992

SOCIEDAD

PUIG ADAM

DE PROFESORES DE MATEMATICAS

B O L E T Í N de la Sociedad "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Febrero de 1992 nº 30 (1991-92)

- Toda la correspondencia para la Sociedad deberá dirigirse al

Apartado nº 9479

28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

- La portada de este número reproduce la figura empleada en el logotipo de la XXVIII Olimpiada Matemática Española, que es objeto de comentario en un artículo que presentamos en este mismo Boletín.

¡ VEA NUESTRAS CONVOCATORIAS !

INDICE

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.
NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: *José Vicente García Sestafe*

Vicepresidente por Madrid:
José Manuel Martínez Sánchez
Vicepresidente por Castilla - La Mancha:
Salvador Herrero Pallardo
Vicepresidente por Castilla - León:
Juan Bosco Romero Márquez
Vocal de actividades y concursos:
Juan Ochoa Mélida
Vocal de relaciones institucionales:
Eugenio Roanes Macías
Vocal de gestión de publicaciones:
Carmen García-Miguel Fernández
Vocal de redacción de publicaciones:
Julio Fernández Biarge
Secretario:
Francisco González Redondo
Vicesecretario:
Enrique Rubiales Camino
Tesorero:
Alberto Aizpún López
Bibliotecario:
Jesús Begoña Aina
Vicepresidencias a extinguir en 1992:
por Cuenca: *Valero Antonio Alías Tuduri*
por Segovia: *Juan Luis Sanz de Andrés*

- - - - - -

CONVOCATORIA DE ASAMBLEA GENERAL EXTRAORDINARIA

Se convoca *Asamblea General Extraordinaria* de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, para el dia 25 de **Abril** de **1992**, a las 11 h 15 m, en primera convocatoria y a las **11 h 45 m** en segunda, en nuestra sede social, *Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales* (c/ José Gutierrez Abascal, 2, Madrid), con el siguiente

ORDEN DEL DIA

Punto único: Previa deliberación, votación para decidir (por mayoría simple de los presentes, según el Artº 11 de nuestros Estatutos) si se solicita o no la integración de nuestra Sociedad en la **Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.**

- - - - - -

CONVOCATORIA DE LA ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE 1991

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* correspondiente a 1992, para el dia **25** de **Abril**, a las 12 h en primera convocatoria y a las **12 h 30 m** en segunda, en nuestra sede social, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales (c/ José Gutierrez Abascal, 2, Madrid), con el siguiente

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, de las actas de la Asamblea Extraordinaria precedente y de la Ordinaria anterior .

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

3. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

4. Fijación de la cuota para el próximo curso 1992-93.

5. Confirmación o elección, si procede, de cargos en la Junta Directiva, según los Estatutos.

6. Ruegos y preguntas.

- - - - - -

¡ ESPERAMOS TU ASISTENCIA !

En páginas posteriores damos información adicional sobre el asunto que se someterá a votación en la Asamblea Extraordinaria y sobre el punto 5 de la Ordinaria.

HOMENAJE

Un grupo de socios hemos tenido la iniciativa de brindar un homenaje a nuestros queridos compañeros, profesores **José Javier Etayo Miqueo y Juan Ochoa Mélida**, con motivo de su reciente jubilación; para ello proponemos reunirnos a comer con ellos, al concluir las Asambleas que se convocan aquí, en algún establecimiento cercano. No dudamos de que serán muchos los que desearán adherirse al acto, o aportar alguna sugerencia; conviene que todos ellos se pongan en contacto con nuestro Presidente, J. V. García Sestafe, llamando al teléfono (91) 5839367 (por la mañana) con alguna antelación, para poder reservar el local adecuado según el número de asistentes previsto.

X CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Convocado por:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras

BASES

PRIMERA:

Podrán participar los alumnos de B.U.P. y F.P. de los centros de las Comunidades Autónomas de Madrid, Castilla-La Mancha y Castilla y León. Los de F.P. 1 lo harán con los de Primero de B.U.P. y los de 2º y 3º de F.P. 2, con los de Tercero de B.U.P.

SEGUNDA:

Las pruebas del Concurso se realizarán en Madrid, en la segunda quincena del mes de Junio (posiblemente el sábado, 20 de ese mes) y consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles).

TERCERA:

Se concederán diplomas para los mejores de cada nivel, acompañados de los premios correspondientes.

CUARTA:

Aquellos centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de dos en cada uno de los tres niveles) deberán realizar la preinscripción antes del dia 24 de Mayo de 1992, dirigiéndose por carta sin certificar a esta Sociedad (Apartado de Correos nº 9.479, 28080-MADRID). En esta preincripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados

QUINTA:

Se comunicará directamente a los centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales, en las que se haga constar el curso en el que están matriculados en el año académico 1991-92, y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

SOBRE LA POSIBLE INTEGRACIÓN EN LA FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMATICAS

A la vista de las consultas u observaciones efectuadas por numerosos consocios acerca de si en nuestra Sociedad había algún proyecto respecto a su posible integración en la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, nuestra Junta Directiva ha acordado convocar una Asamblea General Extraordinaria para someter a votación la decisión de si procede, o no, solicitar dicha integración.

Dada la gran importancia de la decisión anterior, exhortamos a nuestros socios a asistir a esa Asamblea, para influir en ella, con su voto.

El texto de los Estatutos de la citada Federación (tomado de su anteproyecto), puede consultarse en las páginas 19 a 26 de nuestro Boletín nº 17 (Marzo de 1988). Como se recordará, esta posible integración fué tratada ya en la Asamblea General de 1989, cuya reseña puede verse en el número 21 del Boletín; la decisión fué suspendida hasta otra Asamblea, no alcanzándose los votos necesarios para aprobarla, por desconocerse en esos momentos las implicaciones económicas que la integración tendría para nuestra Sociedad y también debido a una serie de malentendidos que se reflejan en las cartas reproducidas en la página 16 del Boletín últimamente citado.

En estos momentos, la mayor parte de las Sociedades de Profesores de Matemáticas de ámbito regional están integradas en la Federación mencionada y, entre ellas, la Madrileña recientemente constituida.

La integración tiene indudables ventajas de participación en actividades que las distintas Sociedades no pueden acometer por sí mismas, y también la de que nuestros socios recibirían la revista **"SUMA"** que edita la Federación.

Presenta, en cambio, el inconveniente, de que la cuota federativa que tendría que abonar nuestra Sociedad, que en estos momentos está fijada en 1.500 pesetas anuales por socio, obligaría a elevar nuestras cuotas, para años sucesivos, en la cantidad que se acordase en el punto 4 de la Asamblea General Ordinaria.

\- - - - - -

COMPONENTES DE LA JUNTA DIRECTIVA

En el punto 5 de la anunciada Asamblea General, debe fijarse la constitución de nuestra Junta Directiva hasta que se celebre la de 1993.

Como en la Asamblea anterior no pudo nombrarse un Secretario, quedando encargada la Junta Directiva de encontrar la persona adecuada para este cargo, esta Asamblea habrá de ratificar, si lo estima oportuno, el nombramiento que propuso dicha Junta a favor de don Francisco González Redondo, especificando la duración de su mandato.

De acuerdo con la Disposición Transitoria 2ª de nuestros Estatutos, la Asamblea declarará extinguidas las vicepresidencias por Cuenca y por Segovia.

Ninguno de los restantes componentes de la Junta Directiva termina su mandato en este año, por lo que, de no haberse anunciado alguna baja, no procederá la renovación de otros cargos en esta Asamblea.

\- - - - - -

CARTA A NUESTROS SOCIOS

Estimados compañeros: Esperamos que el número 29 de nuestro Boletín haya llegado a vuestras manos. Lamentamos el retraso que se produjo en su distribución, pese a nuestros desvelos para realizarla.

La entrega de los Boletines en las Oficinas de Correos de Madrid, siempre había sido una tarea algo molesta, pero que algún miembro de nuestra Junta Directiva podía realizar personalmente, con su coche, en una mañana; la última "reorganización" de los servicios de Correos, han convertido esa gestión en algo que dificilmente puede llevarse a cabo sin operarios dedicados a ello. Es muy posible que nuestros socios tengan noticias de esta absurda situación a través de varias "cartas al Director", publicadas en algunos periódicos, en las que personas que trataban de distribuir revistas de corta tirada, semejantes a la nuestra, protestaban por los cambios introducidos por Correos en la recogida de publicaciones en Madrid.

Al final hubo que ir enviando los Boletines, recorriendo cada dia varias estafetas y entregando unos pocos en cada ocasión, ya que no admiten mayores cantidades de una vez, y ello, tras haber completado los franqueos hasta la tarifa de impresos ordinarios.

Confiamos en que las gestiones que estamos llevando a cabo nos permitan distribuir el presente número del Boletín con normalidad, aunque ello sea a costa de un considerable aumento en los gastos, y rogamos nos disculpeis por lo ocurrido con el número anterior.

Recibid un afectuoso saludo de

LA JUNTA DIRECTIVA

C. D. L.
CURSOS DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

El Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias sigue organizando sus bien conocidos *Cursos de Formación del Profesorado*, con seminarios sobre diversas disciplinas.

En el pasado mes de Noviembre impartió un cursillo de Estadística orientado a facilitar a los profesores de distintas disciplinas, la profundización en los conocimientos estdísticos necesarios para resolver algunas de las cuestiones de esa naturaleza que se presentan en la actualidad. Como se esperaba, las profesiones y los conocimientos previos de los asistentes eran de lo más variado; la experiencia resultó muy positiva y fué preciso ampliar el horario y el número de dias previstos inicialmente.

El curso fué impartido por nuestro Presidente, José Vicente García Sestafe y coordinado por Victor Manuel Sánchez. El último dia actuó el calculista mental Jaime García Serrano, considerado como el más rápido del mundo, que dejó asombrados a todos los concurrentes.

En el primer trimestre de este año, se desarrollará también un Seminario titulado *"Medios para la clase de Matemáticas"*, en el que participarán, entre otros, Javier Peralta Coronado, Eugenio Roanes Macías, Eugenio Roanes Lozano, José Vicente García Sestafe y José Ramón Vizmanos Buelta. Tendrá lugar en el I. B. de Avenida de los Toreros, 57.

Puede obtenerse información sobre estos cursos en el Colegio de Doctores y Licenciados, Pza. de Santa Bárbara, 10, de 10 a 14 y de 16 a 18, de lunes a viernes. El teléfono es (91) 319 27 12.

NUEVO SECRETARIO DE NUESTRA SOCIEDAD

En nuestra Asamblea General de Abril de 1991, no fué posible el nombramiento de Secretario, por lo que se rogó a nuestra anterior secretaria, Carmen García-Miguel que siguiese ejerciendo provisionalmente las funciones propias de este cargo, a pesar de haber sido designada vocal de gestión de publicaciones; se facultó a la Junta Directiva para que, a la mayor brevedad, cubriese esa acante con el nombramiento de un nuevo secretario, que sería ratificado en la Asamblea General siguiente.

Haciendo uso de esas atribuciones, ha sido designado Secretario de la Sociedad, nuestro consocio don **Francisco González Redondo**, profesor ayudante de la sección departamental de Algebra de la Escuela Universitaria *"Pablo Montesinos"*, perteneciente a la Universidad Complutense de Madrid.

Agradecemos al nuevo secretario su desinteresada aceptación de este cargo, que lleva consigo la realización de penosos trabajos, tan sólo compensados por la seguridad de que se realizan en provecho de todos nuestros socios.

\- - - - - -

CORRIGENDA

Lamentamos el error que se deslizó en la página 77 de nuestro Boletín nº 29 : El firmante de la reseña del libro de V. Fraile es **José García Cañas**, y no, como se transcribió con error, José García Fraile.

JORNADAS SOBRE LA ENSEÑANZA EXPERIMENTAL DE LA MATEMATICA EN LA UNIVERSIDAD

Como anunciábamos en nuestro número anterior, en los dias 10 al 12 de Diciembre pasados, se celebraron las *"II Jornadas sobre la Enseñanza Experimental de las Matemáticas"*. Sus sesiones tuvieron lugar en el Rectorado de la Universidad Politécnica de Madrid, con la participación de numerosos asistentes procedentes de todas las regiones españolas.

En una de las conferencias, Miguel de Guzmán habló sobre los peligros para la Enseñanza del uso indebido o del abuso del ordenador, moderando así, saludablemente, el encendido entusiasmo que dominaba entre los participantes.

Los profesores Rafael de la Llave y Javier Cabrera, que llevan largo tiempo enseñando en las Universidades americanas de Texas (Austin) y Rutgers, mostraron cómo se hace uso de los ordenadores en esas Universidades, como auxilio de la enseñanza de las Matemáticas en general y de la Estadística en particular.

En otras conferencias, los profesores R. Valle, D. Peña, R. Guadalupe, J. Villén, R. Moriyón y A. Pérez de Vargas, trataron temas monográficos de gran interés. El profesor F. Eysette, de la U. de Niza, no pudo pronunciar su conferencia, por enfermedad, pero su texto aparecerá en las Actas de las Jornadas, que serán publicadas en breve.

Se presentaron diez y ocho comunicaciones, en las que se dieron a conocer interesantes experiencias docentes relacionadas con la enseñanza experimental de las Matemáticas, con auxilios informáticos.

\- - - - - -

ICME-7

VII CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMATICA

El próximo ICME - 7 se celebrará en la Universidad Laval de Qubec (Canadá) del 17 al 23 de Agosto de 1992. La *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas*, y en su nombre la *Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, se han ocupado de preparar la participación española en ese congreso.

La importancia de este Congreso Mundial, que orientará la enseñanza de las Matemáticas en los próximos años, está acrecentada para España por el hecho de que el siguiente, el ICME - 8, tendrá lugar en Sevilla en 1996, por acuerdo unánime de la ICMI (Comisión Internacional sobre Instrucción Matemática). Por ello, en Quebec, habrá un quiosco publicitario del ICME - 8, y se ha organizado un servicio informativo y auxiliar para los participantes españoles.

La inscripción para este Congreso, conviene efectuarla antes del 15 de junio, para poder hacer uso de las ventajosas ofertas de viajes y alojamientos preparadas por la Federación y por la Sociedad "Thales". Se puede encontrar información completa en el número 8 de la revista **SUMA**.

\- - - - - -

SOCIEDAD MADRILEÑA DE
PROFESORES DE MATEMATICAS

Recientemente hemos recibido el número cero del Boletín de esta Sociedad, correspondiente a Octubre-Noviembre de 1991. Tiene tan solo ocho páginas, pero parecen rebosantes de ilusión y entusiasmo.

Tienen un recuerdo para nuestro maestro don Pedro Puig Adam, y entre otras actividades, nos anuncian unas "Jornadas de Vídeo de Matemáticas", de dos dias de duración.

\- - - - - -

XII JORNADAS DE LA S. C. "ISAAC NEWTON"

Estas Jornadas organizadas por la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, habrán tenido lugar del 6 al 9 de Febrero en Adeje (Tenerife).

\- - - - - -

VI JAEM

Se ha comenzado la organización de la VI JAEM, que se celebrará en Extremadura en Septiembre de 1993.

\- - - - - -

44th INTERNATIONAL MEETING OF THE ICSIMT
44ième RECONTRE INTERNATIONALLE DE LA CIAEM

La *International Commision for the Study and Improvement of Mathematics Taeching* organiza el ICSIM44 o CIAEM44, que se celebrará en Chicago del 27 de Julio al 1º de Agosto de 1992.

VI OLIMPIADA IBEROAMERICANA
DE MATEMATICA
Córdoba (ARGENTINA), 1991

La **VI Olimpiada Iberoamericana de Matemática** se ha celebrado este año en la ciudad de Córdoba de la República Argentina, entre los dias 22 y 30 de Septiembre de 1991.

En esta Olimpiada han participado 14 paises, con un total de 53 alumnos seleccionados. Esto supone la más alta participación, si se excluye la registrada en la anterior, celebrada en Valladolid, que fué ligeramente superior.

Como de costumbre, la competición constó de dos pruebas, cada una de las cuales tuvo cuatro horas y media de duración y consistía en la resolución de tres problemas; cada solución fué calificada de 0 a 10 puntos, por lo que teóricamente se podían obtener hasta 60 puntos. No obstante, parece que este año los problemas fueron más difíciles que en los anteriores y en consecuencia, las puntuaciones más bajas, en general.

Los enunciados de los problemas citados pueden verse en la sección de **PROBLEMAS PROPUESTOS** de este mismo Boletín. La dificultad relativa de cada uno de ellos puede juzgarse a partir de las medias de las calificaciones obtenidas por los 53 participantes, y de los números de ellos que alcanzaron 5 puntos o más en ese problema, que fueron los siguientes:

Problema:	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Media:	5.98	1.64	2.89	7.75	3.72	1.53
Nº (> 5)	34	3	15	46	20	4

La máxima puntuación la alcanzó el chileno Christian VILLOUTA, que con 50 puntos, obtuvo la primera de las cinco medallas de oro que se concedieron.

Los cuatro alumnos que formaban la representación española tuvieron una destacada participación, ya que reunieron 130 puntos; tan solo los chilenos consiguieron superarles, con 163. Los resultados individuales fueron los siguientes:

	PUNTOS	MEDALLA	PUESTO
Daniel LASAOSA MEDARDE,	40	plata	7º
Ignasi MUNDET RIERA,	38	plata	9º
Ignacio URIARTE TUERO,	31	plata	13º
Ignacio MARCOS PRIMO,	21	bronce	27º

Recordaremos que Daniel LASAOSA también obtuvo medalla de plata en la anterior Olimpiada Iberoamericana celebrada en Valladolid, pero cumplía las condiciones para repetir su participación en ésta, y que en la Internacional de 1990 (China) consiguió una medalla de bronce. Ignasi Mundet también obtuvo el bronce en la XXXII Olimpiada Matemática Internacional celebrada este año en Suecia. Ignacio Uriarte Tuero, fué campeón de 3º de BUP en el Concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad de 1990. Nuestra más cordial felicitación a todos ellos.

La *"Copa Puerto Rico"*, para el pais que más haya progresado en su actuación respecto a años anteriores, fué esta vez para Costa Rica. España quedó en tercer lugar para esta Copa. Como el año anterior, también hubo un concurso extraoficial de Resolución de Problemas con Ordenador, del que daremos noticias en otra ocasión.

En la Tabla siguiente se recogen diversos datos sobre los resultados obtenidos por los paises participantes. Los significados de los encabezamientos son:

Relativos a la VI Olimpiada Iberoamericana (1991):
N = número de alumnos presentados por el país.
ME = media de las edades de los mismos (años.meses).
PUN = total de puntos obtenidos por ellos.
O P B = números de medallas de oro, de plata, de bronce.
ORD = puesto en que ha quedado clasificado el país.
Relativos a Olimpiadas de años anteriores:
NV = número de veces en que ha participado anteriormente.
OA, PA, BA = números totales de medallas de oro, plata o bronce conseguidos por el país en olimpiadas anteriores

PAIS	N	ME	PUN	O	P	B	ORD	NV	OA	PA	BA
ARGENTINA	4	18.02	129	0	3	1	3º	5	1	5	3
BRASIL	4	18.01	112	1	1	0	5-6º	5	8	5	2
CHILE	4	17.11	163	2	1	1	1º	2	0	0	0
COLOMBIA	4	15.04	97	0	0	3	7º	5	3	5	10
COSTA RICA	4	17.10	79	0	1	1	9º	2	0	0	1
ESPAÑA	**4**	**18.06**	**130**	**0**	**3**	**1**	**2º**	**5**	**4**	**6**	**8**
HONDURAS	2	17.06	20	0	0	0	13º	2	0	0	0
MEXICO	4	17.08	112	1	0	2	5-6º	2	0	5	2
PANAMA	4	17.04	13	0	0	0	14º	0	0	0	0
PERÚ	4	16.06	125	1	1	1	4º	5	2	8	3
PTO. RICO	4	17.10	52	0	0	0	12º	4	0	0	3
R.DOMINIC.	3	16.09	54	0	0	1	11º	1	0	0	0
URUGUAY	4	18.02	72	0	0	1	10º	5	1	4	8
VENEZUELA	4	17.07	88	0	0	2	8º	2	0	0	3
Totales:											
14 PAISES	**53**	**17.06**	**1246**	**5**	**10**	**14**	**—**	**45**	**19**	**38**	**43**

(Nótese la mayor media de edades de los equipos mejor clasificados).

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA :

OLIMPIADA MATEMATICA IBERO-AMERICANA :

OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL :

XXVIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PRIMERA FASE

Las pruebas de la Primera Fase de la *"XXVIII Olimpiada Matemática Española"* correspondientes al curso 1991-92 se han celebrado en el disrito de Madrid los dias 22 y 23 de Noviembre de 1991.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española*, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*. A ella pueden concurrir los alumnos de C.O.U., los del último curso de la F. P. de segundo grado y los de 2º curso del 2º ciclo del Bachillerato Experimental.

La Primera fase se desarrolla en los respectivos distritos, en dos sesiones de cuatro horas, en cada una de las cuales se proponen cuatro problemas; este año, en la mayor parte de los distritos, estas pruebas se han realizado simultáneamente y con los mismos enunciados. Nuestos socios pueden ver estos enunciados en la sección de PROBLEMAS PROPUESTOS de este Boletín.

A los tres primeros clasificados de cada distrito, se les da opción a una beca para cursar la licenciatura de Matemáticas y además la posibilidad de participar en la **Fase Final**, en la que se proclaman los ganadores de la Olimpiada, que reciben diplomas y premios. Los mejores clasificados en esta fase final, suelen ser seleccionados para representar a España en la *Olimpiada Matemática Internacional* y en la *Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*.

En el distrito de Madrid, las pruebas se realizaron en locales de la Universidad Complutense, con la asistencia de 92 participantes, número que puede considerse normal y que confirma el caracter excepcional de la exigua concurrencia registrada el año anterior.

El jurado calificador emitió sus propuestas el dia 18 de Diciembre. El nivel medio de los participantes ha sido bastante bajo, pero un pequeño número de ellos ha destacado muy claramente sobre ese nivel.

Los tres ganadores del distrito de Madrid, propuestos para pasar a la Fase Final y obtener las becas, han sido:

1º - D. **José GARCíA JUANINO**, del Instituto de Bachillerato "Conde de Orgaz" de Madrid, con 36 **puntos**

2º - D. **José Miguel ATIENZA RIERA**, del Colegio JOYFE de Madrid, con 31 **puntos**

3º - D. **F. Javier AVELLANO FERNANDEZ**, del Colegio JOYFE de Madrid, con 30 **puntos**

Con puntuaciones cercanas a las de éstos, han quedado los siguientes:

4º - D. **Daniel MORENO GARCíA**, del I. B. "María Moliner" de Coslada (Madrid), con 27 puntos

5º - **Dña. Esther REVILLA AGUILAR**, del Colegio GOYFE, de Madrid, con 25 puntos

6º - D. **Jorge Nemesio CASILLAS JORRíN**, del Cº Internacional S. E. K. de San Ildefonso, con 22 puntos

7º - **D César ALONSO GALLEGO**, del I. B. "María Moliner" de Coslada (Madrid), con 21 puntos

8º - D. **Luis Angel GIL GóMEZ**, del del I. B. "Avenida de los Toreros" de Madrid, con 21 puntos

Los restantes obtuvieron puntuaciones inferiores a 17 puntos.

Teniendo en cuenta que había posibilidad teórica de obtener hasta 80 puntos (10 por cada problema), podemos concluir que los problemas propuestos han resultado bastante difíciles, además de ser bastante bajo el nivel medio de preparación mostrado por los alumnos. De los 92 participantes, 73 no llegaron a obtener 8 puntos. En la tabla siguiente damos las puntuaciones medias alcanzadas en cada problema por los 92 concursantes, po. los 8 mejor clasificados, citados antes, y por los tres ganadores:

Problema:	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Medias de los								
92 presntds.	0.6	0.7	0.7	0.9	0.5	0.6	0.7	0.4
8 mejores	3.5	3.4	3.8	5.6	2.0	1.0	3.6	3.6
3 mejores	5.0	5.7	1.3	8.7	2.0	0.0	4.0	5.7

Nos complace señalar que varios de los clasificados en esta Olimpiada fueron galardonados en años anteriores en los Concursos de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad. Así, el tercer clasificado, D. F.J. **AVELLANO FERNANDEZ**, quedó en 5º lugar como alumno de tercero de B.U.P. en 1991 y en 6º lugar como alumno de segundo en 1990; el cuarto, D. **Daniel MORENO GARCíA**, fué 1º como alumno de tercero de B.U.P. en 1991; el sexto, D. **Jorge CASILLAS JORRíN** fué 3º de tercero de B.U.P. en 1991 y también 3º de segundo en 1990; el séptimo, D. **César ALONSO GALLEGO**, fué 6º en tercero en 1991, 2º en segundo en 1990 y 1º en primero en 1989 y D. **Luis A. GIL GóMEZ**, participó con buen resultado en 1991. Ello demuestra que nuestros Concursos juegan un excelente papel como medio de entrenamiento, estímulo y aliento en la formación de los futuros olímpicos.

Tanto en nuestros Concursos, como en las pruebas de las Olimpiadas correspondientes a los distritos del ámbito de nuestra Sociedad, entre los ganadores, se repiten con insistencia los nombres de unos pocos centros de enseñanza, lo que prueba que los brillantes resultados son fruto de una esmerada labor de preparación, llevada a cabo, sin duda, por profesores dotados de gran entusiasmo y con alumnos muy motivados por esa labor. Se observa, en cambio, que un gran número de estudiantes participa sin preparación alguna y con evidente desconocimiento de lo que son las Olimpiadas Matemáticas.

La **Segunda Fase** de esta Olimpiada se celebrará simultáneamente en Madrid y La Laguna, los próximos dias 14 y 15 de Febrero de 1992.

EN TORNO AL LOGOTIPO DE LA XXVIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

por Julio Fernández Biarge

Las olimpiadas matemáticas internacionales suelen adoptar ingeniosos logotipos, algunos de los cuales hemos reproducido en Boletines anteriores. La Real Sociedad Matemática Española, ha ideado, para su XXVIII O. M. E., uno muy bello, que además, sugiere al matemático multitud de problemas interesantes. Consta este logotipo de 13 circunferencias, dispuestas en la forma en que puede verse en la figura que sirve de motivo ornamental para la portada de este número. En tres de los círculos, se distribuye el texto con el nombre de la Olimpiada y de la Sociedad organizadora, tal como puede verse en la pequeña figura que ilustra nuestra crónica de esa Olimpiada.

El que haya leido el delicioso libro de *Miguel de Guzmán* "AVENTURAS MATEMATICAS" (ver reseña en nuestro Boletín nº 12 de Febrero del 87), quizás se acuerde de haber visto en él una figura parecida; en efecto, la encontramos en la pág 70, precisamente con el mismo número de circunferencias, a propósito de unas divertidas aplicaciones de la inversión.

Al matemático que contempla esta figura, aunque no haya tenido ocasión de haber disfrutado con la lectura del libro mencionado, le asalta inevitablemente un torrente de preguntas. Pero como matemático, sabe que antes de formular preguntas, debe tener muy claramente definido el objeto de su estudio, esto es, debe saber exactamente de qué está hablando. Tratemos de seguir sus reacciones ante el mencionado logotipo.

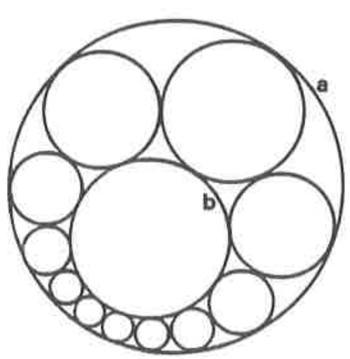
Comenzará, sin duda, por considerar una familia de figuras, sugeridas por la que está contemplando, a las que, por ejemplo, denominará *"11-logotipos"*, declararando que un *11-logotipo* es:

"una figura plana formada por 13 circunferencias, dos de las cuales (situada una en el interior de la otra) son tangentes a las 11 restantes, y cada una de éstas once, es tangente a otras dos de ellas, y exterior a las otras ocho".

El matemático ha tenido cuidado de incluir el número 11 en la denominación, pues sabe que después de estudiar este concepto no podrá resistir a la tentación de generalizarlo a otros números de circunferencias, llegando así al concepto más general de n-logotipo.

En la familia de los n-logotipos, cabe destacar unos especiales, con $n+2$ circunferencias, en los que las dos primeras circunferencias son concéntricas y las n restantes, iguales entre sí. Denominará a éstos, " n-logotipos *con centro*".

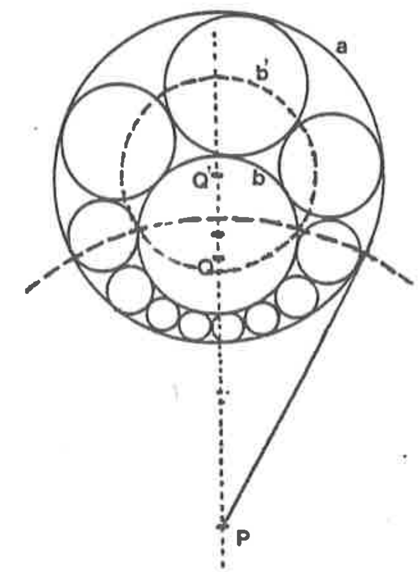
Quizás la primera pregunta que se formule sea: **¿ cómo ha sido dibujado este 11-logotipo ?**



Ciertamente que cualquier delineante aficionado será capaz de presentar uno limpiamente dibujado, tras unos pocos tanteos; pero el matemático quiere algo más: **¿ Es teóricamente posible su construcción exacta con la regla y el compás ? ¿ Y si se tratase de un 10-logotipo o de un 12-logotipo ?**

Tratando de responder a estas preguntas, supongamos el problema resuelto y busquemos una inversión que convierta el logotipo en otro con centro.

El haz de circunferencias definido por a y b posee dos puntos límites (circunferencias de radio nulo) P y Q. Es sabido que las circunferencias que pasan por P y Q son ortogonales a las del haz. En consecuencia, una inversión de polo en P, transformará esta últimas en un haz de rectas que pasarán por Q', inverso de Q , y las circunferencias del primer haz, entre ellas a y b , en circunferencias ortogonales a esas rectas, y por tanto, concéntricas. (Es ésta la inversión utilizada por M. de Guzmán en le libro citado antes).



Podemos elegir la potencia de inversión igual a la potencia de P respecto a a , con lo que a se transformará en sí misma y b en b' . Llamaremos Π a la inversión así definida. Las 11 (6 10 6 12) circunferencias restantes quedarán transformadas por Π en otras inscritas en la corona circular resultante, y serán, por tanto, iguales, siendo sus centros los vértices de un polígono regular convexo.

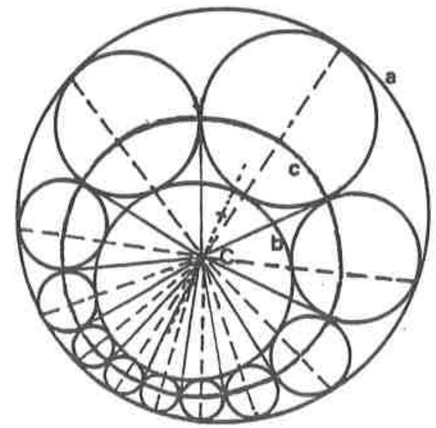
Como es fácil construir, con regla y compás, un 10-logotipo o un 12-logotipo con centro (comenzando por construir un polígono regular convexo de 10 6 12 lados), utilizando la inversión Π , se puede construir un 10-logotipo o un 12-

logotipo que no tengan centro. La imposibilidad de construir con regla y compás el polígono de 11 lados, lleva consigo la imposibilidad de dibujar así un 11-logotipo. Esta imposibilidad desaparece si se dispone de un polígono regular de 11 lados dibujado en el mismo plano.

Otras preguntas surgen inmediatamente: **Las circunferencias** a **y** b **¿ determinan las posiciones de las 11 que completan el 11-logotipo ?** Con auxilio de la inversión Π definida antes, podemos contestar negativamente. Con las mismas circunferencias a y b, hay una infinidad de posibilidades para las otras 11 circunferencias; a partir de una de ellas, basta aplicar la inversión Π, dar un giro arbitrario a la corona circular obtenida (en torno a su centro) y volver a aplicar Π. Es esta curiosa propiedad la explicada en el libro de M. de Guzmán.

El matemático se preguntará ahora: **¿ Podemos enunciar alguna propiedad geométrica importante, común a todos los 11-logotipos ?** La inversión Π considerada antes, nos proporciona algunas. En el 11-logotipo con centro es evidente que hay una circunferencia que corta ortogonalmente a las 11 iguales, precisamente en los puntos de tangencia entre ellas. La inversión Π nos permite afirmar que en cualquier 11-logotipo hay una circunferencia, que llamaremos c, perteneciente al haz definido por a y b, que corta ortogonalmente a las otras 11 en los puntos en que estas son tangentes. De ahí que estos puntos son concíclicos y las rectas tangentes en ellos, concurrentes.

El centro C de c, donde concurren las mencionadas tangentes comunes, tiene la misma potencia respecto a las 11 circunferencias, y en consecuencia, es centro de una inversión Π', que las transforma en sí mismas (c es la circunferencia



de puntos dobles de Π'). Esa inversión, transforma a en b y b en a, y en consecuencia, transforma en sí mismo el 11-logotipo, que resulta ser analagmático. El punto C, como centro de inversión que transforma a en b, es también el centro de la homotecia de razón negativa que transforma a en b, y, por tanto, muy fácil de determinar.

De la inversión Π' se deduce que las cuerdas que unen los puntos de tangencia de cada una de las 11 circunferencias con a y b, también concurren en C. El otro centro de homotecia de a y b, también es centro de una inversión (de potencia negativa) que convierte el 11-logotipo en *otro* 11-logotipo, pero no en el mismo.

La curiosidad del matemático no para ahí: **Fijada la circunferencia** a **¿ podemos escoger arbitrariamente la circunferencia** b **?** No, claro está; la relación de los radios β' y α de las circunferencias concéntricas b' y a, como es fácil deducir, ha de ser precisamente

$$\beta'/\alpha = (1 - \operatorname{sen} \pi/11)/(1 + \operatorname{sen} \pi/11) \qquad [1]$$

lo que no tendrá lugar, con una elección arbitraria de b en el interior de a. Lo que sí puede ser escogido libremente, dada a, es el punto límite Q (interior a a) del haz definido por a y b; con él queda determinado el otro punto límite, y por tanto, la inversión Π; en consecuencia, b' *(según [1]) y finalmente,* b.

Si dada la circunferencia a , la b no se puede fijar arbitrariamente, de modo que existan las 11 circunferencias en la forma exigida por el 11-logotipo ¿ Cual será la relación entre los radios α y β de a y de b y la distancia d que debe haber entre sus centros ? Es fácil de obtener: Si llamamos p a la distancia entre P y el centro de a , la potencia de la inversión Π es $\rho^2 = p^2 - \alpha^2$; designando con μ el valor del segundo miembro de [1], será $\beta' = \mu\alpha$, y la definición de la inversión Π nos da:

$[p - (d+\beta)](p+\beta') = \rho^2$; $[p - (d-\beta)](p-\beta') = \rho^2$;

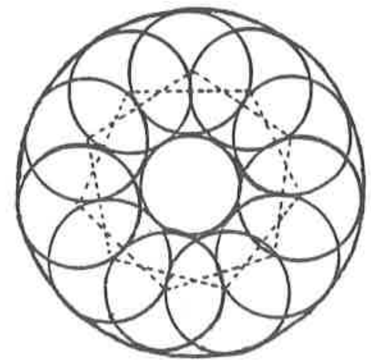
unos sencillos cálculos nos permiten eliminar p y ρ , resultando:

$$(\alpha - \mu\beta)(\mu\alpha - \beta) = \mu d^2 \quad . \qquad [2]$$

Además, esto nos dice que (siendo $\beta < \alpha$) la máxima longitud que puede tener el radio β es $\mu\alpha$. (Cuando $\beta = \mu\alpha$, $d = 0$ y a y b han de ser concéntricas). El matemático sonríe al comprobar la simetría observable en [2], ya que, al no haber introducido explícitamente cual era la circunferencia a y cual la b , [2] *tenía* que quedar inalterada al intercambiar α y β y sustituir μ por $1/\mu$.

El matemático vuelve sobre la definición que dió para los 11-logotipos: ¿ No es antiestética y quizás supérflua la precisión "y exterior a las otras ocho" ? . En modo alguno; recordemos que hay cuatro tipos de polígonos regulares estrellados de 11 lados. Las circunferencias con centros en sus vértices y radios iguales a la mitad de sus lados, son tangentes cada una a dos de las restantes, y todas se pueden inscribir en una corona circular, que luego se puede transformar mediante una inversión. Resulta una bonita figura, pero el matemático no deseaba incluirla en la familia de los

11-logotipos. Si un dia quisiese considerar estas figuras, las llamaría acaso 11-logotipos-estrellados



Para ellos, casi todo lo anterior serviría, pero el valor de μ considerado, habría que cambiarlo por

$\mu = (1 - \operatorname{sen} m\pi/11)/(1 + \operatorname{sen} m\pi/11)$

donde m es 2, 3, 4 ó 5 según el tipo de polígono estrellado. Presentamos el dibujo de un 11-logotipo-estrellado con centro, correspondiente a $m = 2$.

Si el matemático hubiese olvidado la advertencia "(situada una en el interior de la otra)" en su definición, tendría que admitir entre los n-logotipos, antiestéticas figuras, que pueden obtenerse transformando un 11-logotipo con centro en una inversión cuyo polo esté situado en el interior de su corona circular.

Pero lo normal será que, para hacer las figuras, olvidando la regla y el compás, el matemático se siente ante el ordenador y haga que un programa adecuado se encargue de estos dibujos. El obtenerlo es tedioso, pero simple. Cualquiera que sea el lenguaje empleado y el dispositivo en que haya de obtenerse la figura, dispondrá, sin duda de una rutina para dibujar una circunferencia, dándole las coordenadas de su centro y el valor de su radio.

Supongamos que en nuestro programa queremos introducir como datos el número N de circunferencias tangentes a a y b , las coordenadas XA , YA del centro de la circunferencia a , y su radio, RA , así como las coordenadas XP, YP, del rulo de la inversión Π (Si los datos de partida fuesen las coordenadas del punto Q empleado antes, sería fácil obtener las de P a partir de los otros datos). Un nuevo dato FI servirá para fijar la solución, entre las infinitas posibles.

Con esos datos se calcularía S = sen(π/N) , y después los radios de c, b' y de las n circunferencias iguales tangentes a estas dos: RC = RA/(1+S), RB = RC*(1-S), RN = RC*S . La potencia POT de la inversión Π , se calcularía mediante:

X = XA -XP , Y = YA - YP , POT = X*X + Y*Y - RA*RA .

La circunferencia a se puede dibujar directamente con la rutina que hemos supuesto disponible. Convendría construir una rutina que, usando también esa, dibuje la circunferencia inversa en la inversión Π , de la de centro A , B y radio R . Mediante ella, se terminaría el problema con solo hacer un ciclo para I = 1, 2, ..., N , y para cada valor de I , poner ANG = FI+I*(2π)/N , A = XA+RC*cos(ANG) , B = YA+RC*sen(ANG) , y llamar a la rutina construida antes. Por último, se llamaría a la misma, con A = XA , B = YA , R = RB , para dibujar b .

La mencionada rutina de dibujar la inversa en Π de la circunferencia de centro en A , B y radio R , consiste simplemente en calcular el vector XV = A - XP , YV = B - YP , hacerlo unitario mediante D2 = XV*XV + YV*YV , D = SQRT(D2)

XU = XV/D , YU = YV/D ,

y calcular el factor FAC = POT/(D2 - R*R) , con el que se expresan fácilmente el radio de la transformada , RI = FAC*R y las coordenadas de su centro,

XI = XP + XU*FAC*D , YI = YP + YU*FAC*D ,

con lo que ésta puede dibujarse, como se deseaba.

Siguiendo estas pautas, se completa el programa en cualquier lenguaje, añadiendo la necesaria lectura de datos y tomando, por supuesto, las debidas medidas para prevenir los datos inadecuados o los denominadores nulos.

SIMULACION INFORMATICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA ESTRUCTURA OPERATORIA DE LA RAIZ CUADRADA ENTERA (METODO HEURISTICO DEL PROF. PUIG ADAM)

E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano
Sección Departamental de Algebra
Esc. Univ. Pablo Montesino
Univ. Complutense de Madrid
c/. Santísima Trinidad, 37 MADRID-28010

El fundamento de la estructura operatoria de la raíz cuadrada fue ya conocido en las culturas matemáticas antíguas. Aunque el algoritmo de la raíz cuadrada entera es fácil de aplicar, la demostración de su validez, si no difícil, si es penosa de exponer. Ello posiblemente indujo a D. Pedro Puig Adam a ocuparse de ello y escribir su famoso artículo didáctico sobre este tema. La única dificultad que se detecta al introducir la raíz cuadrada por el método heurístico propugnado por Puig Adam, proviene de la incomodidad de manejo del material didáctico a utilizar. Ello nos ha inducido a sustituir la utilización de dicho material por una simulación informática apropiada al efecto.

Definición.-

Dado un número natural n, el natural k, tal que $k^2 \leq n < (k+1)^2$, se denomina raíz entera de n y la diferencia $n-k^2$ es el resto de la raiz.

Regla operatoria de la raíz cuadrada.-

La regla usual para calcular la raíz entera (que la calculadora está haciendo olvidar) es bien conocida. Por ejemplo, para n = 2345, se tiene:

√2 3 4 5	4 8
-1 6	4x4=16
7 4 5	88x8=704
-7 0 4	
4 1	

Para justificar la regla observemos que, para el caso de este ejemplo, se trata de determinar el entero k, tal que $k^2\le 2345<(k+1)^2$, es decir, el número

$$k = \text{máx}\{x\in\mathbb{N} : x^2\le 2345\}$$

pero, siendo $2345<100^2$, habrá de ser $k<100$, es decir, de la forma $k=a_1 10+a_2$ (donde a_1 y a_2 son dígitos en base decimal). Se trata pues de determinar a_1 y a_2, lo mayores posibles y tales que $(a_1 10+a_2)^2\le 2345$, es decir,

$$a_1^2 10^2 + 2a_1 10a_2 + a_2^2 \le 23\bullet 10^2 + 45$$

lo que implica que el número a_1 de decenas de k, haya de verificar $a_1\le 23$, luego $a_1=4$, siendo el primer resto parcial $r_1 = 23-a_1^2 = 23-16 = 7$. Ahora, el número a_2, de unidades de k, ha de ser el máximo número natural tal que

$$2a_1 10a_2 + a_2^2 \le (23-a_1^2)10^2 + 45 = r_1 100 + 45 = 745$$

es decir, tal que $(80+a_2)a_2 \le 745$, luego $a_2 = 8$, siendo el segundo resto $r_2=745-(80+a_2)a_2=745-88\bullet 8=41$. Por tanto, la raíz entera es $k=a_1 10+a_2=48$ y el resto $r_2=41$.

Fundamentación del algoritmo de cálculo usual de raices cuadradas.-

De acuerdo con lo indicado anteriormente, por ser $n = 2345 = 23\bullet 100 + 45$, denotando $a_1=\text{máx}\{x\in\mathbb{N}:x^2\le 23\}=4$ y $r_1=23-a_1^2=7$, se tiene

$$n = 2345 = 23\bullet 100 + 45 = (a_1 10)^2 + r_1 100 + 45 = (a_1 10)^2 + 745$$

y denotando $a_2=\text{máx}\{y\in\mathbb{N}:(2a_1 10+y)y\le 745\}=8$ y $r_2=745-(2a_1 10+a_2)a_2=41$, resulta

$$n = (a_1 10)^2+(2a_1 10+a_2)a_2+r_2 = [(a_1 10)^2+2a_1 10a_2+a_2^2]+r_2 = k^2+r_2$$

siendo esencial en este proceso la siguiente igualdad

$$k^2 = (a_1 10+a_2)^2 = (a_1 10)^2+2a_1 10a_2+a_2^2 = (a_1 10)^2+(2a_1 10+a_2)a_2$$

la cual, denotando $M=a_1 10$ y $N=a_2$, se escribe en la forma

$$\boxed{(M + N)^2 = M^2 + (2M + N)N} \qquad (1)$$

en que ya no aparece la base decimal del sistema de numeración. Por tanto, esta igualdad (que se obtiene directamente del desarrollo del cuadrado del binomio M+N) es el fundamento de la regla operatoria de la raíz de un número de cuatro cifras.

Análogamente, para el número de seis cifras $n = 234567 = 23\bullet 10000 + 4567$, denotando $a_1=\text{máx}\{x\in\mathbb{N}:x^2\le 23\}=4$ y $r_1=23-a_1^2=7$, se tiene

$$n = (a_1 100)^2+r_1 10000+4567 = (a_1 100)^2+74567 = (a_1 100)^2+745\bullet 100+67$$

denotando ahora $a_2=\text{máx}\{y\in\mathbb{N}:(2a_1 10+y)y\le 745\}=8$ y $r_2=745-(2a_1 10+a_2)a_2=41$, se obtiene

$$n = (a_1 100)^2+[(2a_1 10+a_2)a_2+r_2]100+67 = (a_1 100)^2+(2a_1 10+a_2)a_2 10^2+r_2 100+67$$

$$= (a_1 100)^2+(2a_1 10+a_2)a_2 10^2+4167$$

y si finalmente convenimos en denotar $a_3=\text{máx}\{z\in\mathbb{N}:[(2a_1 100+a_2 10)+z]z\le 4167\}=4$ y $r_3=4167-[2(a_1 100+a_2 10)+a_3]a_3=311$, resulta:

$$n = (a_1 100)^2 + (2a_1 10+a_2)a_2 10^2 + [2(a_1 100+a_2 10)+a_3]a_3 + r_3 =$$

$$= (a_1 100)^2 + 2a_1 100+a_2 10 + a_2^2 10^2 + 2(a_1 100+a_2 10)a_3 + a_3^2 + r_3 =$$

$$= (a_1 100+a_2 10)^2 + 2(a_1 100+a_2 10)a_3 + a_3^2 + r_3 =$$

$$= [(a_1 100+a_2 10)+a_3]^2 + r_3 = (a_1 100+a_2 10+a_3)^2 + r_3 = k^2 + r_3$$

siendo pues la raíz entera del número natural 234567 igual al número natural $k=a_1 100+a_2 10+a_3=484$ y el resto $r_3=311$. Todo ello justifica la (más cómoda) disposición habitual del cálculo:

```
√2 3 4 5 6 7 | 4 8 4
-1 6         | 4x4=16
  7 4 5      | 88x8=704
 -7 0 4      |
    4 1 6 7  | 964x4=3856
   -3 8 5 6  |
      3 1 1  |
```

En el cálculo anterior (para n=234567) es esencial la igualdad

$$k^2 = (a_1 100 + a_2 10 + a_3)^2 = [(a_1 100 + a_2 10) + a_3]^2 =$$

$$= (a_1 100 + a_2 10)^2 + 2(a_1 100 + a_2 10)a_3 + a_3^2 =$$

$$= (a_1 100)^2 + (2a_1 100+a_2 10)a_2 10 + [2(a_1 100+a_2 10)+a_3]a_3$$

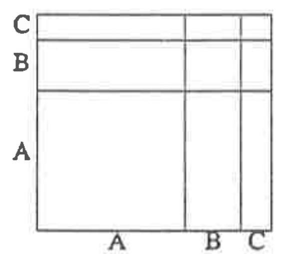
la cual, denotando $A=a_1 100$, $B=a_2 10$ y $C=a_3$, se escribe en la forma

$$\boxed{(A+B+C)^2 = A^2 + (2A+B)B + [2(A+B)+C]C} \qquad (2)$$

en que ya no aparece la base decimal del sistema de numeración. Esta última igualdad (que se obtiene directamente del desarrollo del cuadrado del trinomio A+B+C, o también de la igualdad (1) para M = A y N = B+C) es el fundamento del algoritmo de la raíz cuadrada.

Antecedentes históricos de este algoritmo.-

El matemático griego **Teón de Alejandría** (siglo IV) ya describe la igualdad (2) como fundamento del cálculo de la raíz cuadrada de un número, y la demuestra a la usanza griega, "via geométrica", según sugiere la figura:



Pero también la cultura clásica china llegó a la misma igualdad (2) como fundamento de la raíz cuadrada, y así, en una de las nueve secciones del tratado **Jiuzhang Suanshu** [5], se describe una disposición original de cálculos para la determinación de la raíz cuadrada, la cual no se llega a demostrar, en el sentido que nosotros entendemos por demostración (ya que para los matemáticos orientales, demostrar era reducir a evidencia directa).

Descubrimiento de la estructura operatoria propugnada por Puig Adam.-

Aunque el algoritmo de la raíz cuadrada entera es fácil de aplicar, la demostración de su validez, si no difícil, si es penosa de exponer. Ello posiblemente indujo a D. Pedro Puig Adam a ocuparse de ello, ideando, ensayando con sus alumnos y describiendo magistralmente en su célebre artículo didáctico sobre "estructura operatoria de la raíz cuadrada" (vease [4] o [3]).

Como refiere el autor, no se pretende dar una demostración en el sentido usual, sino más bien "reducir a evidencia directa" (al modo de los matemáticos orientales). El procedimiento consiste esencialmente en representar las unidades por *broches* sueltos, las decenas por *tiras* de diez broches, las centenas por *placas* de diez tiras de broches, etc, en cantidad apropiada para representar un conjunto de cardinal el número n dado, y tratar de formar con esas piezas un cuadrado cuyo lado sea lo mayor posible, admitiendo la posibilidad de intercambiar piezas equivalentes (cada placa-centena por diez tiras-decenas, etc).

Suponemos que el profesor Puig Adam debía estar bastante satisfecho de su estructura operatoria de la raíz cuadrada, ya que eligío este tema (de entre sus numerosos trabajos didácticos valiosos) para su célebre ponencia en la reunión, promovida por la Unesco, para el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática, celebrada en Ginebra en julio de 1956.

Los autores de este artículo, modestamente damos fé de haber ensayado con rotundo éxito este método heurístico para el descubrimiento de la estructura operatoria de la raíz cuadrada, propuesto por Puig Adam. Con el mismo éxito, hemos extendido el método a la *raíz cúbica*, utilizando como material manipulable los bloques multibase de Dienes-Golding. Los alumnos no tienen dificultad en "evidenciar" la mecánica de la completación del cuadrado (o del cubo, en caso de raíz cúbica) y posteriormente de inferir la regla operatoria de la raíz cuadrada (o cúbica, respectivamente).

Nuestra simulación informática.-

La única dificultad que se detecta al introducir la raíz cuadrada por el método propugnado por Puig Adam, proviene de la incomodidad material del manejo de los bloques multibase (aún siendo estos más prácticos que los broches utilizados en su época).

Ello nos indujo a proponer a nuestros alumnos el desarrollo de una simulación del referido proceso (en una asignatura optativa de Informática y Matemática).

El programa elaborado pide elegir un número natural n (de hasta cuatro cifras), para ir realizando, a partir de él, la simulación siguiente:

a) representar un conjunto de unidades, tiras, cuadrados y rectángulos, cuyo cardinal sea n

b) cambiar cada rectángulo por diez cuadrados

c) con los cuadrados iniciales y los resultantes del cambio anterior, completar un cuadrado de lado lo mayor posible

d) cambiar los cuadrados sobrantes por tiras

e) con las tiras iniciales y las resultantes del cambio anterior, ampliar lo más posible el lado del cuadrado en construcción

f) cambiar las tiras sobrantes por unidades

g) con las unidades iniciales y las resultantes del cambio anterior, completar el cuadrado en construcción

h) confirmar la raíz (lado del cuadrado construido) y el resto (expresión numérica de las piezas sobrantes)

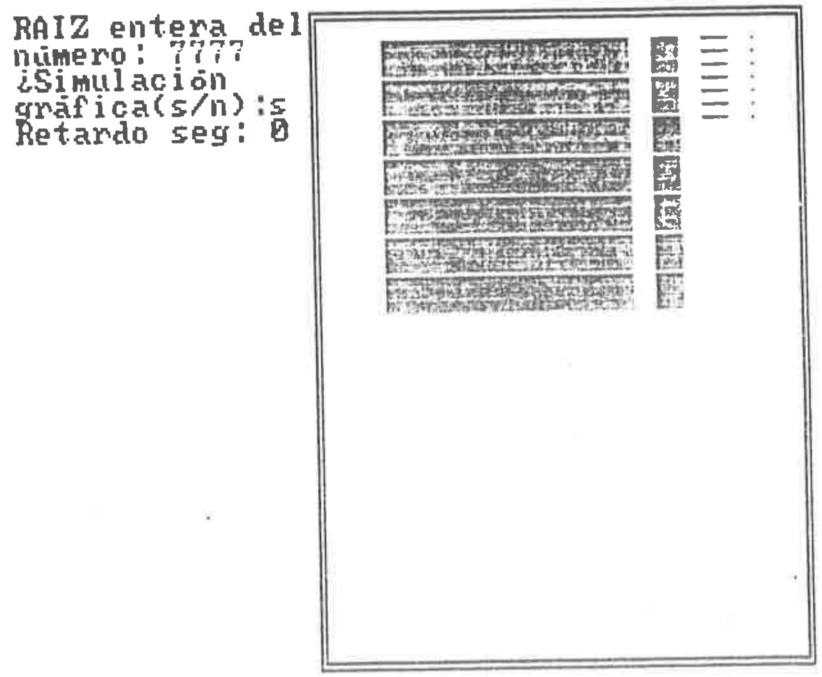
El programa puede utilizarse en distintos niveles de dificultad, pudiendo el alumno usuario prever resultados de las sucesivas fases del proceso (por ejemplo, prever el número de tiras sobrantes que conviene cambiar por unidades), que el programa le confirmará al irlo ejecutando.

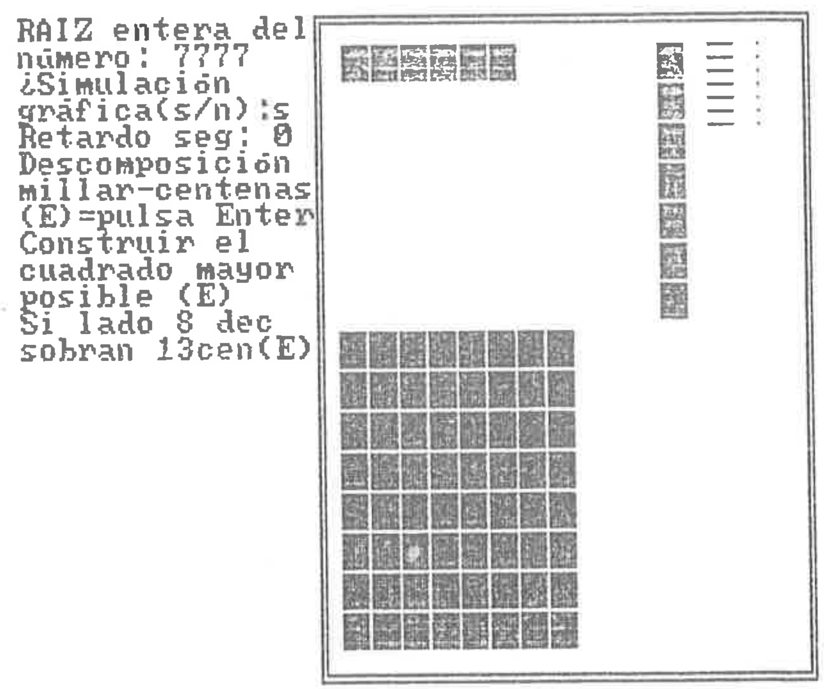
La simulación gráfica sólo se ha desarrollado para números de una a cuatro cifras. En un futuro, cuando se aumente la resolución de las tarjetas gráficas usuales, no habrá dificultad en extender a números de hasta seis cifras la simulación gráfica. No obstante, con números de hasta cuatro cifras se capta, en general, el fundamento del algoritmo de cálculo de la raíz cuadrada.

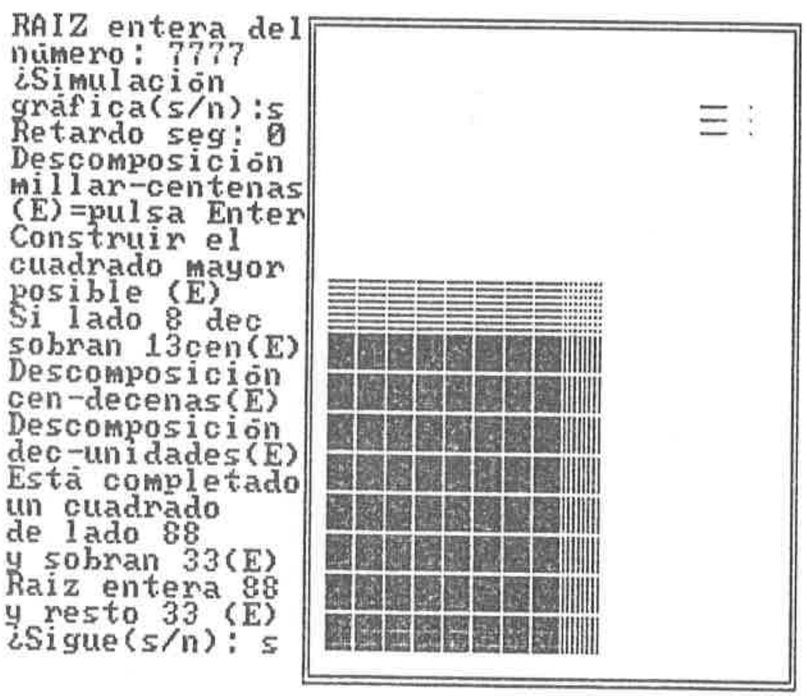
Aunque la implementación fue realizada inicialmente por nuestros alumnos en lenguaje Logo, posteriormente nosotros la hemos refinado e implementado en Turbo Pascal.

<u>Ejemplo de ejecución</u>.-

A continuación se representan algunas de las pantallas observables en la ejecución de programa, al tratar de desarrollar la estructura operatoria de la raíz cuadrada entera para el número 7777:







Notemos finalmente que el programa usa un color para el conjunto de piezas representativas del número dado y otro color distinto para las piezas del cuadrado que se va completando.

Bibliografía.-

[1] **Boyer:** *A History of Mathematics*; Wiley, 1968.

[2] **Martzloff:** *Histoire des Mathematiques Chinoises*; Masson, 1987.

[3] **Puig Adam:** *Matemática Elemental, núm. 2*; J.A.E., 1932

[4] **Puig Adam:** *La Matemática y su enseñanza actual*; Publicaciones del Ministerio de Educación, 1959

[5] **Yan-Shiran:** *Chinesse Mathematics*; Oxford Sci. Pub., 1987.

[6] - : *Manuales de Turbo Pascal 6.0*; Borland, 1991.

LIBROS DE MATEMATICAS EN LA EXPOSICIÓN "LAS EDADES DEL HOMBRE"

por Concepción Romo Santos
del Departamento de Algebra
de la Universidad Complutense de Madrid

La exposición *"Libros y Documentos de la Iglesia de Castilla y León"* fué la segunda etapa del proyecto *"Las Edades del Hombre"*, emprendido por las once diócesis de la región. Esta muestra se inició cuando apenas se habían apagado los ecos que suscitó la Exposición Iconográfica abierta durante seis meses en la Catedral de Valladolid.

En 1990, fueron los claustros de la catedral de Burgos los que acogieron los libros y documentos seleccionados. Se presentaron allí quinientas obras, reflejo de la pericia humana, intelectual y religiosa de nuestro pueblo y de nuestra tierra.

En el apartado Aritmética, Algebra y Geometría - en el que se mostraron varios ejemplares impresos, uno de ellos incunable - se encontraban libros dedicados a los comentarios y a la crítica a la obra del gran matemático y geómetra clásico **Euclides** (315-225 a. de J.C.), debidos a **Cristóbal Clovio** (Roma, 1574), **Luis Carducho** (Alcalá, 1637) y **Francisco Maurolio** (Venecia, 1575), los dos primeros procedentes de la biblioteca del Seminario Mayor de Valladolid y el último de la Catedral de Palencia, así como la reimpresión, todavía en el siglo XVIII, del *"Algebra"* del gran enciclopedista medieval **Raimundo Lulio** (Maguncia, 1723), también del Seminario vallisoletano.

También se mostraban diversos tratados de matemáticas prácticas, que evidentemente aportaron novedades, como en el caso de la *"Summa de Aritmética"* de **Luca Paccioli** (Venecia, 1494) y su sistema de contabilidad por partida doble, o el de **Benito Bails**, introductor en España del Cálculo Infinitesimal y de la Geometría Analítica (Madrid, 1790, Seminario Mayor de Valladolid), o en la obra de **Francois Callet** sobre *"Tablas partitivas de logaritmos"* (París, 1795, Biblioteca Diocesana de Zamora).

De absoluto practicismo matemático son los trabajos de **Miguel de Santa Cruz** *"Aritmética especulativa y práctica"* (Madrid, 1724) y de **José García Caballero** *"Breve cotejo y balance de pesas y medidas"*, obra de evidente carácter metodológico, así como el estudio de **Diego Navarro** sobre *"Aritmética pura y comercial"* (Madrid, 1790), conservados en el Seminario vallisoletano, los dos primeros, y en la Biblioteca Diocesana de Zamora el último.

Abundantes grabados en madera con figuras geométricas, láminas desplegables y tablas diversas, ilustran y enriquecen aún más este conjunto de libros matemático-geométricos.

En las páginas siguientes, comentaremos brevemente algunos de los libros seleccionados en esa muestra y que fueron expuestos en los claustros de la Catedral de Burgos.

- - - - - -

Baltasar Manuel Bovo

De Sphera Mundi libri tres

Valentiae. 1533. Impr. Ioannemm Mery

Libro impreso

145x105x10 mm.

Archivo de la Catedral. Palencia.

Este libro de caracter sintético está escrito de una manera clara y concisa. En él el autor revela un profundo conocimiento de los autores que escribieron sobre la Esfera recopilando al final del libro una serie de tablas sobre la situación de los astros en relación con la latitud de Valencia.

El autor dedica su obra a D. Juan Quintana, caballero de la Orden de Santiago y con la finalidad de aclarar algunos puntos oscuros acerca de la Esfera que se le habían planteado tras la lectura de la obra de Juan de Sacro Bosco sobre el tema.

Pedro Amíano y Rainiero Gemma Frísio

Cosmographía

Amberes 1564

Libro impreso

Archivo de la Catedral. Palencia.

Los hombres del siglo XVI estudiaron con gran interés las técnicas cartográficas, la medición de las distancias y en general todos los temas de astronomía y cosmografía. Uno de los más famosos tratadistas de la materia durante esta época es el alemán Pedro Amíano, autor de una Cosmographía muy difundida y que fué especialmente protegido por el emperador Carlos V, quien, además de un premio en metálico, llegó a costearle la primera edición.

La Cosmographía conoció varias ediciones durante el siglo XVI, una de ellas debida a un profesor de Lovaina llamado Rainiero Gemma Frisio es la que se conserva en el Archivo de la Catedral de Palencia. Esta edición está enriquecida con la adición de un tratado para la construcción de mapas.

Cristobal Clavio

Euclides elementorum libri XV

Roma, 1574. Vicentium Accoltum

Libro impreso

Seminario Mayor Diocesano. Valladolid.

Cristobal Clavio (Bamberg 1537, Roma 1612) fué un jesuita alemán que se dedicó con entusiasmo al estudio de las matemáticas. Amigo de Kepler, algunos historiadores le atribuyen el uso del punto para separar la parte entera de la decimal de un número.

En la biblioteca del Seminario Mayor de Valladolid se conserva la primera edición de 1574, de los Elementos de Euclides, en 15 libros, comentada por Clavio. Después aparecieron numerosas ediciones corregidas y aumentadas. Históricamente, esta obra es digna de estudio porque los comentarios de Clavio contienen gran parte de los conocimientos geométricos del siglo XVI.

Francesco Maurolyco

Opuscula Mathematica-Arithmetica libri duo

Venecia 1575

Libro impreso

Archivo de la Catedral. Palencia.

Francesco Maurolico (Mesina 1494-1575) fué traductor de Euclides, Arquímedes y Apolonio. Nos ha dejado varias obras manuscritas e impresas, entre las que destacan especialmente las dos que fueron encuadernadas en este libro de la Biblioteca Capitular palentina. En su Arithmeticorum libri duo, terminado de componer en 1557 y no impreso hasta 1575, el año de su muerte, además de un crítica de Euclides y otros geómetras de la Antigüedad por no estudiar en profundidad los números poligonales y poliédricos, enuncia y aplica el principio de la Inducción Matemática. La más famosa, sin embargo, es la titulada Opuscula mathematica, en la que trata con precisión y claridad temas varios como la esfera, la medición de las horas, los instrumentos astronómicos o la música, advirtiendose en ella todavía un fuerte influjo de la obra de San

Luis Carduchi

Elementos geométricos de Euclides

Alcalá de Henares 1637

Libro impreso

Seminario Mayor Diocesano. Valladolid.

Luis Carduchi era hijo de padres italianos y sobrino de los pintores Bartolomé y Vicente Carduchi. Fué matemático y arquitecto militar. Escribió varios libros sobre matemáticas y diseñó una serie de planos para hacer navegable el río Tajo.

Los elementos geométricos de Euclides, comentados por Carduchi y editados en 1637 en Alcalá, es una de las primeras traducciones al castellano de la obra de Euclides, después de la de Rodrigo Zamorano de 1576. El libro está dedicado al Conde Duque de Olivares.

Raimundo Lulio

Praecursor Introductoriae in Algebram Speciosam

Universalem vel Artem Magnam Universalem

Maguncia 1723. Impr. Häfner

Libro impreso

Seminario Mayor Diocesano. Valladolid

Raimundo LLull nació en Palma de Mallorca en 1233 y murió en Bugía (Argelia) en 1315. De origen noble, LLull tuvo una vida disoluta hasta el momento de su repentina conversión en 1265, a consecuencia de la cual decidió consagrar su vida a la conversión de los infieles, Conocedor de la cultura y filosofía árabes escribió sus obras conciliando la cultura islámica y la tradicción de la Summa contra gentiles de Santo Tomás de Aquino.

Dejó varios tratados sobre Astronomía y Astrología, en los que se trata de la influencia y la significación de las conjunciones de los planetas con los signos del Zodiaco, siguiendo la idea medieval.

La influencia del pensamiento luliano fue enorme en épocas posteriores a la suya y rebasó la Edad Media, pasando al Renacimiento. Es de destacar la influencia del pensamiento de Llul en Felipe II que poseía varios libros suyos y en su arquitecto escurialense Juan de Herrera que compuso su Discurso sobre la figura cúbica basandose en la teoría filosófica y geométrica del mallorquín. En el siglo XVIII renace una corriente de defensa hacia la obra de Llul en su tierra natal de Palma de Mallorca, como reacción a los ataques de Feijóo. Esta simpatía se apoya en el alemán Ivon Salzinger que encabezó en Düsseldorf y Maguncia un brote de interés hacia el lulismo. Fruto de ello es la edición de Maguncia de sus obras completas (entre 1721 y 1737) y de algunos textos como éste de Algebra que comentamos. Desde entonces la bibliografía sobre Llul es muy numerosa, como para que la podamos condensar aquí.

Es preciso aclarar que para Llul, la geometría estudia la cantidad de materia inmóvil; la astronomía, la cantidad continua móvil junto con la influencia de los astros, y la aritmética, los números y sus operaciones. Dentro de la aritmética, se sitúa el algebra, cuyo tratado comentamos y que explica en función de su naturaleza vital. Sus propiedades son las del hombre y su destino ante Dios. Llul explica esto con un didactismo muy sintético, en cuadros en donde se relacionan las artes algebraicas con las potencias del hombre. La memoria, la inteligencia y la voluntad, son así parte del misterio geométrico y matemático que Dios ha impuesto a la propia naturaleza y al hombre, sobrepasando así la mística y la filosofía escolástica, pero lejos aún de la revolución científica renacentista.

Jorge Juan y Antonio de Ulloa
Observaciones astronómicas y phísicas
Madrid 1748, Por Juan de Zuñiga
Libro impreso
Agustinos Filipinos. Valladolid.

Las "Observaciones astrónomicas" deben su parte matemática a Jorge Juan, donde este demuestra que conoce el análisis diferencial que no sería introducido en España hasta un cuarto de siglo más tarde por obra de Benito Bails. Jorge Juan estableció además una fórmula

para dar la razón de los semiejes del meridiano terrestre en función de los tamaños de los arcos de un minuto, medidos en distinta latitud, gracias a la expedición científica que llevó a cabo con Antonio de Ulloa al Perú.

A pesar del interés de la obra de estos españoles chocó con la indiferencia oficial, hasta que el marqués de la Ensenada apoyó la publicación. Pero no terminaron ahí las dificultades, pues el caracter copernicano de las Observaciones le trajo problemas a Jorge Juan con la Inquisición. Los inquisidores exigían añadir a las teorías de Newton y Huygens la observación de que estaban condenadas por la Iglesia. Aunque a Jorge Juan le apoyaron ilustres científicos - uno de ellos el jesuita Marcos Burriel - tuvo que añadir forzadamente la coletilla "aunque esta hipótesis sea falsa". Años después el propio Jorge Juan escribió un magnífico alegato en favor del copernicanismo y la ciencia de Newton titulado "Estado de la Astronomía en Europa" que apareció publicada, una vez muerto Jorge Juan, en la segunda edición de 1773 de las Observaciones.

Aparte de lo expuesto sobre la medida del meridiano, para lo que se ideó un instrumento a propósito, el libro contiene una serie de interesantes experiencias físicas, dilatación de cuerpos, medidas barométricas, determinación de la velocidad del sonido y cálculo del péndulo, realizados en altitudes elevadas, como permitían las montañas del Perú. Jorge Juan y Antonio Ulloa también aprovecharon para hacer experimentos de navegación durante la travesía del Atlántico.

Benito Bails
Elementos de matemática. Arquitectura hidráulica
Madrid 1790. Impr. Viuda de Joaquín Ibarra
Libro impreso
Seminario Mayor Diocesano. Valladolid

Benito Bails nació en 1730 en San Adrián de Besos (Barcelona) y murió en Madrid en 1797. Fué académico de número de las Reales Academias Españolas, de Historia y de Ciencias Naturales y Artes de

Barcelona. Se caracterizó por su defensa del copernicanismo junto con Jorge Juan, Feijóo, Celestino Mutis y José Mendoza y Rios. Aunque el motivo no está aclarado, es posible que esto influyera en su destierro a Granada al final de su vida, aunque luego fué indultado.

Bails introdujo didácticamente en España el cálculo infinitesimal, junto con la geometría analítica. Sus elementos de Matemática fué una obra de gran importancia que sirvió de texto en numerosos centros y fué estudiada por casi todos los matemáticos españoles de fines del siglo XVIII.

El tomo IX de esta obra es la Arquitectura Hidráulica, en ella habla de la navegación interior en España y elogia al Canal Imperial de Aragón y a su impulsor Pignatelli.

Teodoro de Almeida

Cartas físico-matemáticas de Teodosio a Eugenio.

Madrid 1792. Impr. Real

Libro impreso

Biblioteca diocesana. Zamora.

Teodoro de Almeida (1722-1803), fué un clérigo portugués, fundador de la Academia Real de Ciencias de Lisboa, miembro de la Royal Society de Londres y ante todo profesor en diversos lugares, en Francia durante dieciocho años.

La intención del P. Almeida en sus Cartas físico-matemáticas es dar a conocer los rudimentos de Geometría necesarios para comprender la Física Experimental, pues sin dominarlos dificilmente podría estudiarse. Su método consiste en no comenzar ofreciendo el teorema para luego demostrarlo, sino lanzar las diferentes ideas y demostraciones que llevan hacia él, logrando así, a su entender, que la persona capte más facilmente el secreto de lo explicado.

Miguel Jerónimo de Sta. Cruz

Dorado contador. Aritmética especulativa y práctica

Madrid 1794. Impr. Benito Cano

Libro impreso

Seminario Mayor Diocesano. Valladolid

El libro contiene las operaciones elementales de aritmética, los quebrados, las progresiones aritméticas y geométricas, así como la forma de extraer raices cuadradas y cúbicas, todo ello expuesto de una forma sencilla, al alcance de la cultura de los contadores a que va destinada la obra.

François Callet

Tables portatives de logarithmes

Paris 1795. Impr. chez Firmin Didor

Libro impreso

Biblioteca Diocesana. Zamora.

La edición realizada por François Callet de las tablas de logaritmos pretendió ser en su época un importante avance respecto a todas aquellas que habían sido publicadas desde su invención a comienzos del siglo XVII por Neper. Y ello por la exactitud de sus datos, que deberían estar exentos de los importantes errores tipográficos de las existentes, así como por la amplitud de los mismos. Se daban logaritmos hasta el 108.000 y la conversión de logaritmos hiperbólicos en logaritmos vulgares.

SEMEJANZA BARICENTRICA ENTRE DOS TRIANGULOS HOMOTETICOS.

Por Juan Bosco Romero Márquez.
Departamento de Algebra, Geometría y Topología.
Universidad de Valladolid.

Presentamos en este artículo un teorema elemental sobre la semejanza de dos triángulos homotéticos, introduciendo para ello, el concepto de triángulo baricéntrico o medio (es decir, de Varignon), de los dos triángulos dados.

1.- Comenzamos con el enunciado del teorema que queremos demostrar.

Teorema.-

a) Sean dos triángulos ABC y $A'B'C'$, directamente semejantes en posición de Thales (es decir, con lados paralelos, esto es, homotéticos).
Si definimos los puntos $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = AC' \cap A'C$, y $C'' = AB' \cap A'B$, como intersección de los pares de rectas indicadas (ver fig.1) . Entonces, el triángulo formado por los puntos $A''B''C''$, es inversamente semejante, homotéticamente, a los dos triángulos dados.

b) Recíprocamente, dados los dos triángulos ABC y $A''B''C''$, por ejemplo, en posición de Thales (es decir, homotéticos), (fig 1) y, si $A' = BC''\cap B''C$, $B' = AC''\cap A''C$, y $C' = BA''\cap AB''$, son puntos definidos por la intersección de los pares de rectas que se indican. Entonces, el triángulo formado al unir los puntos $A'B'C'$, es directamente semejante, a unos de los dos triángulos dados, e inversamente semejante al otro triángulo.

c) Además, en ambos casos, si G, G' y G'' son los centros de gravedad o baricentros de los triángulos ABC, $A'B'C'$ y $A''B''C''$, respectivamente, entonces, los puntos G, G' y G'' son colineales, es decir, están en la misma recta.

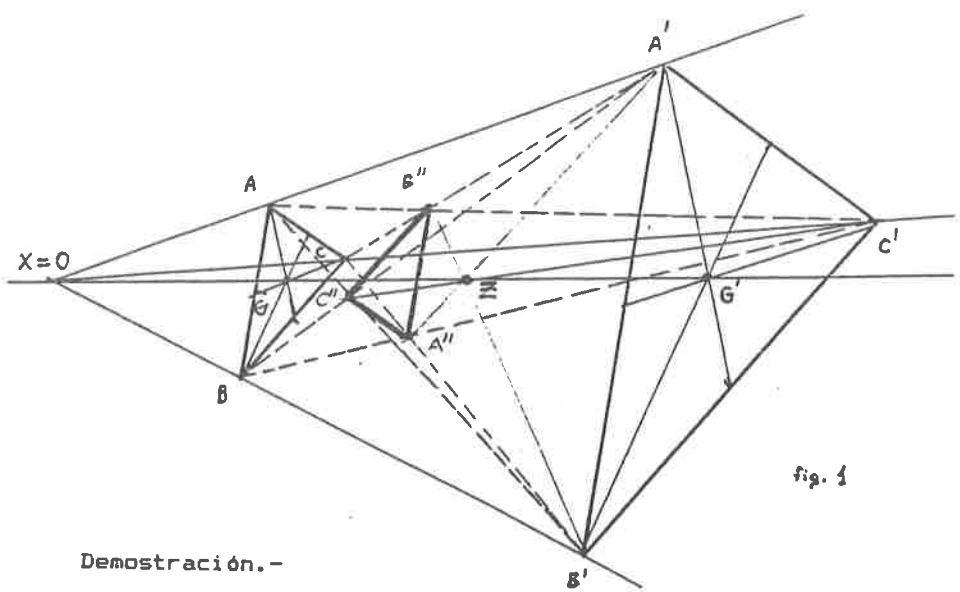


fig. 1

Demostración.-

a) Como los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, es decir, homotéticos y con razón t (real), y si designamos los vértices de dichos triángulos, con respecto a un origen (que puede ser en particular el

centro de la homotecia), por los vectores de posición $A \leftrightarrow a$, $B \leftrightarrow b$, $C \leftrightarrow c$, respectivamente, $A' \leftrightarrow a'$, $B' \leftrightarrow b'$ y $C' \leftrightarrow c'$ sabemos, por hipótesis, que:

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{t\, AB}$, esto es, $b' - a' = t\,(b - a)$, y que, puede ser escrita :

$t\,a + b' = t\,b + a'$, y si, $t \neq -1$, como:

$$(t\,a + b')/(1 + t) = (t\,b + a')/(1 + t).$$

Llamando c'' al vector definido por la última relación, tenemos que:

$$c'' = (t\,a + b')/(1 + t) = (t\,b + a')/(1 + t) = \tag{1}$$

$$= (t/(1+t))\,a + (1/(1+t))\,b' = (t/(1+t))\,b + (1/(1+t))\,a'$$

Es decir, por lo anterior, tenemos que, si C'', es el punto definido en el enunciado del teorema, es claro, que si manejamos las ecuaciones baricéntricas, de las rectas que lo definen, es fácil ver que el vector asociado al punto C'', no es otro, que el vector c'' obtenido antes. De la misma forma y por simetria se tiene que:

$A'' \leftrightarrow a'' = (t\,b + c')/(1+t) = (t\,c + b')/(1+t)$, (2).

$B'' \leftrightarrow b'' = (t\,a + c')/(1+t) = (t\,c + a')/(1+t)$, (3).

Veamos, ahora que el triángulo construido con los puntos A'', B'' y C'', es inversamente semejante a los triángulos ABC y A'B'C'. En efecto:

$$\overrightarrow{A''B''} = b''-a'' = (t/(1+t))\ \overrightarrow{BA}\ ;\ y,$$

$$\overrightarrow{A''B''} = b''-a'' = (1/(1+t))\ \overrightarrow{B'A'}.$$

obtenidas al sustituir los valores de b'' y a'', y hacer las operaciones correspondientes.

De la misma forma se obtienen las expresiones siguientes:

$$\overrightarrow{A''C''} = c''-a''= (t/(1+t))\ \overrightarrow{CA} = (1/(1+t))\overrightarrow{C'A'},\ y$$

$$\overrightarrow{B''C''} = c''-b'' = (t/(1+t))\overrightarrow{CB} = (1/(1+t))\ \overrightarrow{C'B'}.$$

Y, de todas las relaciones anteriores es claro que el triángulo A''B''C'', es inversamente semejante a cada uno de los triángulos ABC y A'B'C'.

b) Es claro, que las relaciones (1), (2) y (3) establecidas antes, prueban que, dadas los pares ternas de vectores a,b,c y a'',b'' y c'', o, las ternas a',b' y c' y a'',b'' y c'' determinan, de forma única, la terna a',b' y c', respectivamente, a,b, y c, consideradas como en el caso de la figura 1.

De otra parte si $G \leftrightarrow g$, $G' \leftrightarrow g'$ y $G'' \leftrightarrow g''$, son respectivamente, los centro de gravedad de los triángulos ABC, A'B'C' y A''B''C''.Entonces se tiene que:

$$g'' = (\ a''+b''+c'')/3 = (t/(1+t))\ g + (1/(1+t))\ g'.$$

Es decir, que los baricentros de los triángulos antes citados están en una recta. El teorema queda completamente demostrado.

Observaciones y problemas.-

1) El teorema anterior, nos dice que el triángulo A"B"C" obtenido mediante la reinterpretación de la semejanza (homotecia) en términos de baricentros de los puntos de intersección que los definen puede ser llamado triángulo baricéntrico o medio de Varignon de los triángulos ABC y A'B'C'.

2) Este teorema tiene una construcción y enunciado similar para el caso de dos cuadriláteros homotéticos. En este caso , ver figura 2. se obtiene siempre un paralelogramo que llamaremos, paralelogramo medio o baricentrico o de Varignon de los dos paralelogramos de Varignon construidos con los puntos medios de los cuadriláteros dados. Este teorema es válido para los casos de cuadriláteros convexos, cóncavos y cruzados.

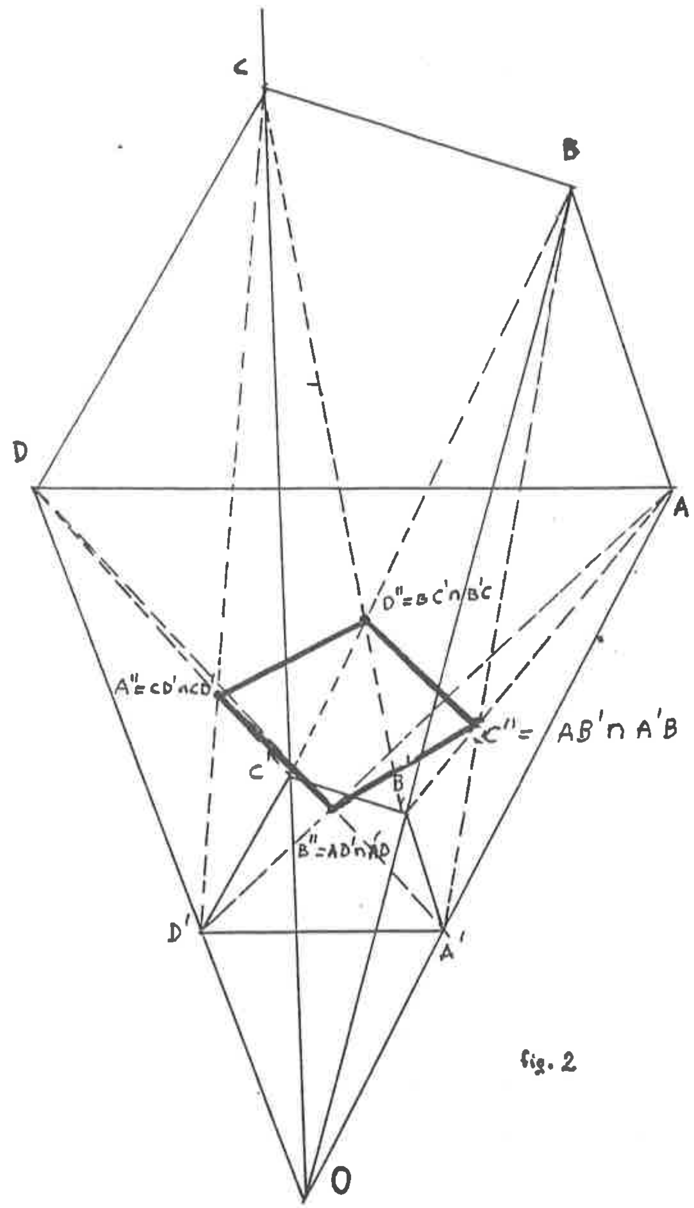


fig. 2

En la posición límite o coincidente de los dos cuadriláteros dados el paralelogramo obtenido tiende al paralelogramo de Varignon del cuadrilátero.

Un caso interesante particular de este teorema es la versión del mismo para dos polígonos regulares homotéticos.

3) Problema: En todos los casos obtener el área, el perímetro y otras propiedades del triángulo, paralelogramo y polígono de Varignon de dos triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares homotéticos, respectivamente.

4) Intentar encontrar demostraciones de este teorema dentro de la geometría sintética, de transformaciones, de complejos, etc.

5) Intertar encontrar generalizaciones de este teorema para dos figuras geométricas cualesquiera, de un espacio afín de dimensión n > 2.

Agradecimientos:

Este artículo ha sido posible gracias a la inspiración en los trabajos del gran geómetra Prof. H.S.M. Coxeter, de la Universidad de Toronto, Canadá, (The Geometric Vein- The Coxeter Fetschrift), y , a la inestimable ayuda por carta del Prof. Emeritus. Dan Pedoe. de la Universidad de Mineapolis, U.S.A, y , a los ánimos y

charlas de mi amigo y maestro, Prof.J.M.Aroca, de la Universidad de Valladolid. A ellos, les dedico esta pequeña investigación con afecto y agradecimiento.

BIBLIOGRAFIA:

(1) H.S.M. Coxeter y S.L. Greitzer: Geometry Revisited. Randon House. New York, 1967.

(2) I.M. Yaglom.:Geometric Transformations, I,II,III. Randon House. New York 1967.

(3) H.S.M. Coxeter: Introduction to Geometry. Wiley. New York, 1969.

(4) D. Pedoe: A course of Geometric for colleges and universities. University Press. Cambridge, 1970.

(5) C. Davis y B. Grümbaum y F.A. Scherk (editors): The Geometric Vein: The Coxeter Fetschrift.Springer,1982.

SOBRE LA REGLA DE TRES

por Salvador Herrero Pallardo
Catedrático de Matemáticas. Ciudad Real

La *Regla de Tres* tiene por objeto determinar la cuarta proporcional X de tres números a , b , c , de modo que se verifique $a/b = c/X$. Se suele plantear con cualquiera de las notaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ es a } b \\ \quad\text{como} \\ c \text{ es a } X \end{array}\right\} ; \text{ (a es a b) como (c es a X) } ; \ a:b::c:X \ ; \ a/b = c/X$$

La conmutatividad de los términos medios de esta proporción permite obtener $X = b.(c/a) = c.(b/a) = (bc)/a$.

De lo anterior se desprende que en la Regla de Tres existen dos transformaciones, que son dos homotecias:

H ($\longrightarrow$, de razón $h = b/a$) y H' ($\twoheadrightarrow$, de razón $h' = c/a$)

cuyo diagrama sería:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "H(\times b/a)"] \arrow[d, twoheadrightarrow, "H'(\times c/a)"'] & b \arrow[d, twoheadrightarrow] \\ c \arrow[r] & X \end{tikzcd} \qquad X = H'.H(a) = c/a.b/a.a = (bc)/a$$

Esta composición de transformaciones es conmutativa:

$$H'.H(a) = H.H'(a) = (b.c)/a \Longrightarrow H'.H = H.H' .$$

Ejemplo: Si 10 m de paño valen 1980 pta ¿ Cuanto valdrán 12 m ?

$$\begin{tikzcd} 10 \arrow[r, "H"] \arrow[d, twoheadrightarrow, "H'"'] & 1980 \arrow[d, twoheadrightarrow] \\ 12 \arrow[r] & X \end{tikzcd} \qquad H = 1980/10 \ ; \ H' = 12/10$$

$$X = H'.H(10) = 12/10.(1980/10).10 = 12.198 = 2376 \text{ pta}$$

Si la proporcionalidad fuese inversa, se dice que la Regla de Tres es inversa; entonces la segunda homotecia sería la inversa, o sea $(H')^{-1}$.

Ejemplo: Si cuatro obreros construyen un muro en 12 dias, seis obreros ¿ En cuantos dias efectuarán una obra análoga ?

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, "H"] \arrow[d, two heads, "H'"'] & 12 \arrow[d, two heads] \\ 6 \arrow[r] & X \end{tikzcd} \qquad H = 12/4 \ ; \ (H')^{-1} = 4/6$$

$$X = (H')^{-1}.H(4) = 4/6 \ . \ 12/4 \ . \ 4 = 8 \text{ dias}$$

En el caso de que las transformaciones que intervienen en la Regla de Tres, no fueran multiplicativas (productos), sino aditivas (adición o sustracción) y además, las operaciones de dichas transformaciones fueran también aditivas, obtendríamos otra Regla de Tres, que es también conmutativa.

Consideremos las transformaciones:

H ($\longrightarrow$, agregar o disminuir h) y

H'($\twoheadrightarrow$, agregar o disminuir k) .

El nuevo diagrama sería

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "H(\,+h\,)"] \arrow[d, two heads, "H'(\,+k\,)"'] & a+h = b \arrow[d, two heads] \\ a+k = c \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

$$X = H'+H\ (a) = H+H'\ (a) = k+h+a = b+c-a$$

Ejemplo:

En el diagrama en que H($\longrightarrow$, agregar 5), H'($\twoheadrightarrow$, disminuir 3), sería:

$$\begin{tikzcd} 7 \arrow[r, "H(\,+5\,)"] \arrow[d, two heads, "H'(\,-3\,)"'] & 7+5 = 12 \arrow[d, two heads] \\ 7-3 = 4 \arrow[r] & X \end{tikzcd} \quad ;$$

$$X = H'+H\ (7) = H+H'\ (7) = -3+5+7 = 9 = 12+4-7$$

En un tercer caso en que las transformaciones fueran una aditiva y otra multiplicativa:

H($\longrightarrow$, agregar h) ; H'($\twoheadrightarrow$, multiplicar por p),

el nuevo diagrama sería

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "H(\,+5\,)"] \arrow[d, two heads, "H'(Xp)"'] & b \\ c & X \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} H'.H\ (a) = H'(a+h) = p(a+h) \\ H.H'\ (a) = H(pa) = pa+h \ , \end{array}$$

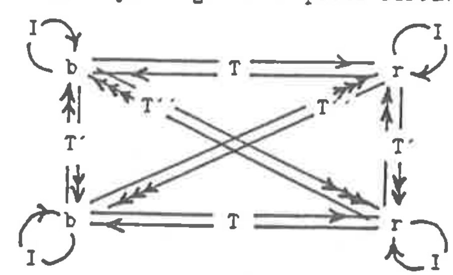
o sea $H'.H \neq H.H'$, es decir, H y H' no conmutan.

Al no haber un diagrama conmutativo, no existe Regla de Tres en este caso.

Un caso particular de Regla de Tres distinto de los anteriores es aquel en que los elementos que se consideran pertenecen al conjunto: { Cc(b), círculo blanco ; Cc(r), círculo rojo ; Cd(b), cuadrado blanco ; Cd(r), cuadrado rojo }, siendo sus transformaciones: I (idéntica); T($\longrightarrow$,cambio de color) ; T′($\twoheadrightarrow$,cambio de forma) ; T′′(cambio de forma y color) . El diagrama sería:

$$\begin{tikzcd} Cc(b) \arrow[r, "T"] \arrow[d, two heads, "T'"'] & Cc(r) \arrow[d, two heads] \\ Cd(b) \arrow[r] & Cd(r) \end{tikzcd} \qquad T'.T(Cc(b)) = T.T''(Cc(b)) = Cd(r).$$

Estos cuatro elementos y dichas transformaciuones forman un Grupo de Klein, cuyo diagrama completo sería:



Si existen más de dos pares de cantidades correlativas (directa o inversamente proporcionales), se presenta la denominada Regla de Tres Compuesta; para hallar una cantidad desconocida, cuando se dan valores correlativos a las restantes, se plantea (considerando sólo tres pares de valores), el esquema siguiente:

a	b	c
a′	b′	X

y la Regla de Tres Compuesta se resuelve descompo- niéndola en varias Reglas de Tres simples y estableciendo conexiones entre éstas, para obtener el valor de la incógnita deseada. El proceso de resolución se expresa en el esquema siguiente; manteniendo constantes algunos pares de valores se pueden obtener Reglas de Tres simples

a	b	c
a′	b	X′
a′	b′	X

Con los elementos de la primera y segunda linea se obtiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "H_1'"'] & c \arrow[d] \\ a' \arrow[r] & X' \end{tikzcd} \qquad X' = H_1'.H_1\ (a) = a'.c/a\ ,$$

mientras que con los elementos de la segunda y tercera líneas se obtiene:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "H_2"] \arrow[d, "H_2'"'] & X' = a'.c/a \arrow[d] \\ b' \arrow[r] & X \end{tikzcd} \qquad X = H_2'.H_2\ (b) = (a'.b'.c)/(a.b)\ .$$

Ejemplo: Se sabe que 18 obreros construyen 3 zanjas de 6 metros en 27 dias ¿ Cuantos dias serán necesarios para que 20 obreros construyan 8 zanjas de 5 metros ?

El esquema de resolución es el siguiente:

18	3	6	27
20	3	6	X′
20	8	6	X′′
20	8	5	X

Considerando las lineas primera y segunda del esquema anterior se obtiene el siguiente diagrama de Regla de Tres simple, que en este caso es inversa (en los demás casos, son directas):

$$\begin{tikzcd} 18 \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "H_1'"'] & 27 \arrow[d] \\ 20 \arrow[r] & X' \end{tikzcd} \qquad X' = (H_1')^{-1}..H_1\ (18) = 243/10$$

Considerando las lineas segunda y tercera, se obtiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "H_2"] \arrow[d, "H_2'"'] & X' = 243/10 \arrow[d] \\ 8 \arrow[r] & X'' \end{tikzcd} \qquad X'' = H_2'.H_2\ (8) = 324/5$$

Considerando las lineas tercera y cuarta del esquema citado,

$$\begin{tikzcd} 6 \arrow[r, "H_3"] \arrow[d, "H_3'"'] & X'' = 324/5 \arrow[d] \\ 5 \arrow[r] & X \end{tikzcd} \qquad X = H_3'.H_3\ (6) = 54 \text{ dias.}$$

\- - - - - -

NUEVA SECCION DE NUESTRO BOLETíN

PROBLEMAS PROPUESTOS POR NUESTROS SOCIOS

Nuestra habitual sección de PROBLEMAS PROPUESTOS recoge normalmente enunciados procedentes de las distintas Olimpiadas Matemáticas o de algunas oposiciones a cuerpos del Estado. Nos proponemos abrir ahora una nueva sección destinada a recoger enunciados originales, que nos sean enviados por nuestros socios, para su inclusión en ella, con indicación de su procedencia.

Invitamos, por tanto, a los lectores de este Boletín a que nos remitan aquellos enunciados de problemas que hayan ideado, y que crean que pueden servir de desafío a los aficionados que abundan entre nuestros socios. No es preciso que estos problemas se mantengan dentro del repertorio de materias propio de las Olimpiadas. Los que deseen colaborar en esta nueva Sección, deberán enviarnos sus enunciados acompañados de la solución resumida.

Con posterioridad a la publicación de los mencionados enunciados, invitamos a todos a que nos envíen sus soluciones, que serán publicadas en números posteriores.

\- - - - - -

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

pro-pues-tos en nº	procedentes de	Números de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números: 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	Obs.
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83-París	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	13-14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2-86	18	19	20	18	19	19					C
	Varios							17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	20-21	20	23	21	-	C
11	OME-f1-86 /	13	14	14	14	14	23	20	15 /	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	C
12	OI-87-Uruguay	16	14	14	17	15	17					C
	OME-f1-Extremdª							15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21					C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	C
20	OME-f1-88	24	26	24	25	24	26	24	26			C
	"Putnam"									26	24	C
21	OME-f2-89 /	24	27	24	27	27	24 /	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30 /	30	30	30	XX	
	Oposiciones	XX	30	29	-	-	-	-	-	-	-	
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	XX	XX	30	-	-	
24	OME-f1-90	30	XX	XX	30	XX	30	30	XX	-	-	
25	OME-f2/f1-90	XX	XX	29	29	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
26	OMI-90-China /	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OIM-90-Vallad.	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
27	OME-f1-91	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
28	OME-f2-91	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
29	OMI-91-Suecia	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OME-f1-91	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	

CLAVES: XX = Pendientes de publicación . C = Completo.
OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2).
OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OI = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA VI OLIMPIADA IBERO-AMERICANA DE MATEMATICAS CELEBRADA EN ARGENTINA EN 1991:

PROBLEMA Nº 1 :

A cada vértice de un cubo se asigna el valor +1 ó −1, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. ¿ Qué valores puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos ?

- - - - - -

PROBLEMA Nº 2 :

Dos rectas perpendiculares dividen un cuadrado en cuatro partes, tres de las cuales tienen cada una un área igual a 1. Demostrar que el área del cuadrado es cuatro.

- - - - - -

PROBLEMA Nº 3 :

Sea F una función creciente definida para todo número real r, $0 \leq r \leq 1$, tal que

a) $F(0) = 0$

b) $F(x/3) = F(x)/2$

c) $F(1-x) = 1 - F(x)$.

Encontrar $F(18/1991)$.

- - - - - -

PROBLEMA Nº 4 :

Encontrar un número N de cinco cifras diferentes y no nulas, que sea igual a la suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con las cinco cifras de N .

- - - - - -

PROBLEMA Nº 5 :

Sea P(X,Y) = 2X² - 6XY + 5Y² . Diremos que un número entero A es un valor de P si existen números enteros B y C tales que A = P(B,C) .

i) Determinar cuántos elementos de

{ 1 , 2 , 3 , ... , 100 }

son valores de P .

ii) Probar que el producto de valores de P es un valor de P .

- - - - - -

PROBLEMA Nº 6 :

Dados 3 puntos no alineados M , N y P , sabemos que M y N son puntos medios de dos lados de un triángulo y que P es el punto de intersección de las alturas de dicho triángulo. Construir el triángulo.

- - - - - -

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS
EN LA PRIMERA FASE DE LA
XXVIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PROBLEMA Nº 7 :

Sea z un número complejo. Demostrar que:

$$\operatorname{tg}(\arg(z)) > \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(z^2) < \operatorname{Im}(z^2) \Rightarrow \operatorname{cotg}(\arg(z)) < 1 + \sqrt{2}.$$

¿Es cierto el recíproco?

Nota: para un número complejo z, $\operatorname{Re}(z)$,$\operatorname{Im}(z)$ y $\arg(z)$ significan respectivamente, parte real, parte imaginaria y argumento de z.

- - - - - -

PROBLEMA Nº 8 :

Sea S el conjunto de rectas que unen un punto del conjunto

$$A = \left\{(0, \frac{1}{a}); a \in \mathbb{N}\right\}$$

y un punto del conjunto

$$B = \{(b+1, 0); b \in \mathbb{N}\}.$$

Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que el número natural m sea compuesto es que el punto $M = (m, -1)$ pertenezca a una recta de S. Determinar el número de rectas de S a las que pertenece el punto M.

- - - - - -

PROBLEMA Nº 9 :

La abscisa de un punto que se mueve en la parte positiva del eje de las x está dada por:

$$x(t) = 5(t+1)^2 + \frac{a}{(t+1)^5}$$

siendo a una constante positiva. ¿Cual es el menor valor de a tal que $x(t) \geq 24$ para todo $t \geq 0$?

- - - - - -

PROBLEMA Nº 10 :

Se tienen dos semicircunferencias iguales y tangentes S_1 y S_2 de modo que sus diámetros se encuentran en una misma recta. Trazamos una tangente común a ambas r y dibujamos una circunferencia C_1 tangente a r, S_1 y S_2, luego trazamos otra circunferencia C_2 tangente a C_1, S_1 y S_2. Así sucesivamente obtenemos una familia de circunferencias $C_1, C_2, \ldots, C_n \ldots$

a) Calcular el radio r_n de la circunferencia C_n en función de n y el radio R de S_1 y S_2.

b) Utilizar la construcción del problema para comprobar que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

tiende a 1 cuando n tiende a infinito.

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 11 :

Para cada número natural n escribimos

$$(1+\sqrt{2})^{2n+1}=a_n+b_n\sqrt{2}$$

definiéndose así las sucesiones de enteros $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

a) Demostrar que a_n y b_n son impares para todo n.

b) Demostrar que b_n es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos

$$\frac{a_n+(-1)^n}{2} \text{ y } \frac{a_n-(-1)^n}{2}$$

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 12 :

Se han experimentado dos fármacos A y B en dos hospitales. En ambos se obtuvo mejor resultado con el fármaco A que con el B, pero al juntar los resultados de ambos hospitales se comprobó con estupor que el fármaco B obtenía mejores resultados que el A. ¿Es esto posible o se debe con certeza a un error de cálculo?

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 13 :

Sea m un número natural. Pruébese que si 2^m+1 es primo y mayor que tres entonces m es par necesariamente.

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 14 :

Sea ABC un triángulo cualquiera. Exteriormente a él se construyen dos cuadrados $BAEP$ y $ACRD$ de lados AC y AB respectivamente. Sean M y N respectivamente los puntos medios de BC y ED. Demostrar que AM es perpendicular a ED y que AN es perpendicular a BC.

\- - - - - -

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 6 (Boletín nº 22)

Una permutación $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ del conjunto $\{1,2,\ldots,2n\}$, con n entero positivo, tiene la propiedad P si $|x_i - x_{i+1}| = n$ para al menos un i en $\{1,2,\ldots,2n-1\}$. Demuestre que para cada n, hay más permutaciones con la propiedad P que sin ella.

Solución:

Se designa por A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ el conjunto de todas las permutaciones que tienen consecutivos los números i e $i+n$ (o bien $i+n$ e i). El número de permutaciones que tienen la propiedad P será el cardinal del conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, que, según es sabido, se puede escribir:

$$c(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$
$$= [c(A_1)+c(A_2)+\ldots+c(A_n)] - [c(A_1\cap A_2)+c(A_1\cap A_3)+\ldots+c(A_{n-1}\cap A_n)] +$$
$$+ [c(A_1\cap A_2\cap A_3)+\ldots+c(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}c(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n),$$

donde el primer corchete tiene n sumandos, el segundo $\binom{n}{2}$, el tercero $\binom{n}{3}$, etc.

El número de elementos de A_i resulta ser $2.(2n-1)!$, puesto que el par $(i, i+n)$ se puede escribir de dos formas distintas y dicho par, con los $2n-2$ elementos restantes, se puede permutar de $(2n-2+1)! = (2n-1)!$ formas. De manera similar, el cardinal de $A_i \cap A_j$ resulta ser $2^2.(2n-2)!$, ya que los pares $(i, i+n)$ y $(j, j+n)$ se pueden escribir de 2.2 formas y dichos pares, con los $2n-4$ elementos restantes, se pueden permutar de $(2n-4+2)! =$ $= (2n-2)!$ formas. En general, razonando de manera análoga, el cardinal del conjunto $A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m$, formado por h subconjuntos, será $2^h.(2n-2h+h)! = 2^h.(2n-h)!$.

Por tanto, $c(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = n.2.(2n-1)! - \binom{n}{2}.2^2.(2n-2)! + \ldots$
$\ldots + (-1)^{h+1}.\binom{n}{h}.2^h.(2n-h)! + \ldots + (-1)^{n+1}.2^n.n!$.
Es fçacil observar que cada sumando que figura en el segundo miembro es, en valor absoluto, menor que el precedente. En efecto,

$$\frac{S_{h+1}}{S_h} = \frac{\binom{n}{h+1}.2^{h+1}.(2n-h-1)!}{\binom{n}{h}.2^h.(2n-h)!} = \frac{2(n-h)}{(2n-h)(h+1)}$$

es evidentemente menor que la unidad para todo valor de h. Luego, para $n \geq 2$,

$$c(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \geq 2n.(2n-1)! - 2^2.\binom{n}{1}.(2n-2)! ,$$

ya que si $n > 2$, el primer sumando despreciado es positivo y si $n = 2$, se cumple el signo igual. El caso $n = 1$ es trivial. Luego

$$c(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \geq 2n.(2n-1)! - 2^2.\binom{n}{2}.(2n-2)! =$$
$$= (2n-2)!(4n^2-2n-2n^2+2n) = 2n^2(2n-2)! = n.2n.(2n-2)! >$$
$$> n.(2n-1).(2n-2)! = 2n.(2n-1).(2n-2)!/2 = (2n)!/2 ,$$

o sea:

$$c(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) > (2n)!/2 ,$$

esto es, más de la mitad de las $(2n)!$ permutaciones goza de la propiedad P, luego hay más permutaciones con la citada propiedad que sin ella.

José V. García Sestafe (Madrid)

- - - - - -

PROBLEMA 7 (Boletín nº 22)

Si E es el punto medio del lado CA de un triángulo cualquiera ABC, y si S es el área de dicho triángulo, probar:

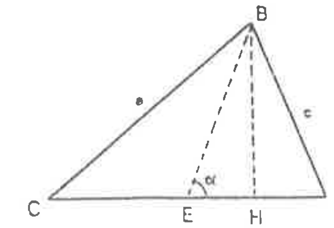
$$\text{cotg } \widehat{AEB} = (BC^2 - BA^2)/(4S).$$

Solución:

Sea $\widehat{AEB} = \alpha$ y $\overline{EB} = m$; por el teorema del coseno,

$c^2 = m^2 + b^2/4 - bm.\cos\alpha$; $a^2 = m^2 + b^2/4 + bm.\cos\alpha$,

de donde $a^2 - c^2 = 2bm.\cos\alpha$ [I]



Como la superficie S del triángulo ABC es el doble de la del triángulo AEB, se tiene

$$S = 2.(1/2).(b/2).m.\text{sen }\alpha ,$$
$$2S = bm.\text{sen}\alpha . \qquad [II]$$

Dividiendo [I] por [II],

$$(a^2 - c^2)/(4S) = \text{cotg } \alpha$$

como deseábamos probar.

José V. Garc a Sestafe (Madrid)

- - - - - -

PROBLEMA 8 (Boletín nº 22)

Hallar los números de seis cifras que sean el cuadrado del número formado por sus tres últimas cifras.

Solución :

Se tiene, a partir del enunciado, $1000y + x = x^2$, que se puede escribir

$$x(x-1) = 1000y = 8p.125q ,$$

siendo $p.q = y$; como x y $x-1$ son primos entre sí, $\{ x = 8p , x-1 = 125q \}$ o bien $\{ x = 125p , x-1 = 8q \}$.

Del primer sistema resulta la ecuación diofántica $8p - 125q = 1$, que da: $p = 47 - 125t$, $q = 3 - 8t$, que sólo proporciona la solución (admisible) $p = 47$, $q = 3$, de donde $x = 8.47 = 376$, $y = 47.3 = 141$, verificándose

$$\boxed{376^2 = 141376}$$

Del segundo sistema se obtiene $125p - 8q = 1$, que da

$$p = -3 - 8t , \quad q = -47 - 125t ,$$

que sólo proporciona $p = 5$, $q = 78$, de donde $x = 125.5 = 625$, $y = 5.78 = 390$. En efecto:

$$\boxed{625^2 = 390625}$$

Observación: Otro método, totalmente aritmético, se expuso en el Problema 2 del Boletín nº 3 , cuya solución se publicó en la pág. 82 del Boletín nº 19.

José V. García Sestafe (Madrid)

Otra solución de Amparo Ortega (Valencia)

- - - - - -

PROBLEMA 9 (Boletín nº 22)

Estudiar el crecimiento y los extremos relativos (basta determinar sus abscisas) de la función:

$$f(x) = \int_0^{(x-1)^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t}\, dt$$

Solución:

$f(x) = F((x-1)^2) - F(0)$, siendo $F'(t) = (t^2-5t+4)/(2+e^t)$.
Su derivada es $f'(x) = 2(x-1).F'((x-1)^2)$, y sustituyendo:

$$f'(x) = 2(x-1).[(x-1)^4-5(x-1)^2+4]/[2+\exp((x-1)^2)] .$$

Esta derivada se anula cuando $x-1 = 0$, o sea para $\boxed{x = 1}$, o cuando $(x-1)^4-5(x-1)^2+4 = 0$, o sea cuando $(x-1)^2 = (5 \quad 3)/2$, lo que da $x-1 = \quad 2$, o $x-1 = \quad 1$, es decir,

$$\boxed{x = 3 , \quad x = -1 , \quad x = 2 , \quad x = 0} .$$

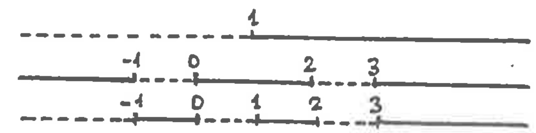
Como $f'(x)$ no tiene puntos de discontinuidad, pues $2 + e^t$ no se anula para ningún valor de t , el cambio de signo se realizará en los ceros mencionados. Como $2 + e^t > 0$, sólo influye el signo de $(x-1)$ y el de $(x-1)^4-5(x-1)^2+4$; así tenemos (representando con

——— las partes en que se hace positiva y con ----- aquellas en que se hace negativa):

signo de $(x-1)$

signo de $(x-1)^4-5(x-1)^2+4$

signo de $f'(x)$



luego en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$ hay mínimos relativos y en $x = 0$ y en $x = 2$ hay máximos relativos.

Amparo Ortega (Valencia)

Otra solución de José V. García Sestafe (Madrid)

- - - - - -

PROBLEMA 12 (Boletín nº 22)

Disponemos de dos urnas A y B . A contiene los n primeros números impares y B los n primeros pares (a partir del 2). Se extrae simultáneamente una bola de cada urna y, sin devolución, repetimos esta operación hasta vaciar las urnas.

a) Hallar la probabilidad de que en ninguna extracción los números sean consecutivos.

b) Hallar el límite de esa probabilidad al aumentar n indefinidamente.

Solución:

Después de extraidas las parejas, se pueden ordenar éstas según el número impar obtenido en cada extracción:

Lugar:	1	2	3	...	i	...	n
Número impar:	1	3	5	...	$2i-1$	...	$2n-1$
Número par:	p_1	p_2	p_3	...	p_i	...	p_n

Por tanto, el número de parejas posibles es $n!$, tantas como ordenaciones existen para $p_1, p_2, \ldots , p_n$.

Se designa por:

P_1 : "el número par 2 ocupa la posición 1 (ha salido con el 1)"

P_2 : "el número par 4 ocupa la posición 2 (ha salido con el 2)"

. . . .

P_n : "el número par 2n ocupa la posición n (ha salido con el 2n-1)"

y por:

P'_1 : "el número par 2 ocupa la posición 2 (ha salido con el 3)"

P'_2 : "el número par 4 ocupa la posición 3 (ha salido con el 5)"

. . . .

P'_{n-1} : "el número par 2n-2 ocupa la posición n (ha salido con 2n-1)"

Una permutación de las $n!$ tiene la propiedad P_i (o P'_i) si en ella se verifica P_i (o P'_i). Ordenadas las propiedades:

$$P_1 \quad P'_1 \quad P_2 \quad P'_2 \quad \ldots \quad P_{n-1} \quad P'_{n-1} \quad P_n \quad , \qquad [I]$$

se busca el número de permutaciones que satisfacen k de esas propiedades (supuestas compatibles), esto es, fijados k números pares, los restantes $n-k$ se pueden escribir de $(n-k)!$ formas distintas. Pero para que las propiedades sean compatibles, basta que en [I] no se tomen dos propiedades consecutivas. Pero, por otra parte, se sabe que el número de formas de elegir, entre m elementos situados en línea, h elementos, de forma que no haya dos cualesquiera consecutivos, es

$$C^{h}_{m-h+1} = \binom{m-h+1}{h}$$

que es el primer lema de Kaplansky.

Usando la fórmula de inclusiones y exclusiones (también llamada fórmula de cribado), se tiene que el número de casos favorables N_n es

$$N_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

después de hacer $m = 2n-1$ y $h = k$ en la fórmula de Kaplansky.

La probabilidad pedida, será, por tanto

$$p_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n-k}{k} (n-k)!}{n!}$$

que se puede escribir:

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(2n-k)(2n-k-1)(2n-k-2)\ldots(2n-2k+1)}{k!\,.\,n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left(2-\frac{k-1}{n-1}\right)\left(2-\frac{k-2}{n-2}\right)\ldots\ldots\left(2-\frac{k-(k-1)}{n-(k-1)}\right)$$

La sucesión p_n , para $n > 3$, es monótona creciente, puesto que los sumandos de p_{n+1} son mayores que los correspondientes de p_n y, además p_{n+1} tiene un sumando más, y como

$$p_n < 1 - \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^n}{n!}$$

resulta que p_n tiene límite finito p :

$$p = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \left(2-\frac{k}{n}\right)\ldots\left(2-\frac{1}{n-k+1}\right) \right] =$$

$$= 1 - \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^n}{n!} + \ldots = e^{-2}$$

luego el límite pedido es

$$p = 1/e^2 = 0{,}135335\ldots$$

José V. García Sestafe (Madrid)

\- - - - - -

PROBLEMA 8 (Boletín nº 23)

Determinar la función f de tal manera que la transformación puntual de ecuaciones

$$u = (x+y) \quad f(x^2-y^2)$$

$$v = y - x$$

conserve las áreas de los recintos.

Solución

El determinante jacobiano de la transformación, debe ser -en valor absoluto- igual a la unidad. Haciendo $x^2 - y^2 = z$

$$\begin{vmatrix} f + 2x(x+y) & f'_z & f - 2y(x+y) & f'_z \\ -1 & & 1 & \end{vmatrix} = \pm 1$$

de donde

$$2f + 2z\, f'_z = \pm 1 \rightarrow \frac{2f'}{\pm 1 - 2f} = \frac{1}{z}$$

e integrando $-\ln(-2f\pm 1) = \ln z \rightarrow f = \frac{1}{2z} \pm \frac{1}{2}$

$$f(x^2 - y^2) = -\frac{1}{2(x^2-y^2)} \pm \frac{1}{2}$$

José V. García Sestafe (Madrid)

* * * * *

PROBLEMA 1 (Boletín nº 24)

Sin resolver la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ expresa la suma de los cubos de sus raíces en función de los coeficientes a, b y c.

Solución

Sean, x, y, t las 3 raíces de la ecuación cúbica. Puesto que $x^3 = -ax^2 - bx - c$ resulta que:

$$(x^3 + y^3 + z^3) = -a(x2 + y^2 + z^2) - b(z + y + z) - 3c \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta las fórmulas de Cardano:

$$\begin{cases} x + y + z = -a \\ xy + xz + yz = b \end{cases} \qquad (2)$$

y la relación $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2 + 2(xy+xz+yz)$, resulta que

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2b \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) obtenemos

$$x^3 + y^3 + z^3 = -_a{}^3 + 3ab - 3c$$

que es la expresión buscada.

José P. Sánchez Mielgo (Segovia)

* * * * *

PROBLEMA 4 (Boletín nº 24)

Determinar el conjunto de números n tales que $7^n.n + 4.n + 1$ sea divisible por 8.

Solución:

Es evidente que n debe ser impar. Sea $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$; debemos tener $7^{2k+1}(2k+1) + 8k + 5 = \dot{8}$, o sea $7^{2k+1}(2k+1) + 5 = \dot{8}$. Así pues, $7^{2k+1}(2k+1) \equiv 3 \ (mod\ 8)$, pero como $7^{2k+1} \equiv 7 \ (mod\ 8)$, debe ser $2k+1 \equiv 5 \ (mod\ 8)$. Por lo tanto,

$$n = 8k + 5 \ (\text{con } k \in \mathbb{N}) \ .$$

José P. Sánchez Mielgo (Segovia)
otra solución de Miguel A. Cabezón Ochoa

\- - - - - -

PROBLEMA 6 (Boletín nº 24)

En una circunferencia se consideran n puntos $P_1, \ldots, P_n$, que la dividen en n arcos iguales: P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}P_n$, P_nP_1. Fijado un número natural r, $r < n$, y partiendo de P_1, se trazan cuerdas: P_1P_{1+r}, $P_{1+r}P_{1+2r}$, $P_{1+2r}P_{1+3r}$, ... (donde $P_{j+n} = P_j$ para cualquier número natural j). Razonar cual será el número de cuerdas que han de ser trazadas para volver al punto P_1, por primera vez. Después, calcularlo para $n = 360$ y $r = 42$.

Solución:

Sean r, n, fijos, con $r < n$; la sucesión de cuerdas será:

$$P_1P_{1+r},\ P_{1+r}P_{1+2r},\ P_{1+2r}P_{1+3r},\ \ldots,\ P_{1+(k-1)r}P_{1+kr}$$

siendo k el número de cuerdas. Terminamos cuando $P_{1+kr} = P_1$, es decir, si $kr \equiv 0 \ mod(n)$ o sea si y sólo si

$k \equiv 0 \ mod(\ n/m.c.d(n,r)\ )$, o sea $k = [n/m.c.d(n,r)].t$;

de todas las soluciones, la menor es: $k = n/m.c.d(n,r)$.

En particular, para $n = 360$, $r = 42$, es $m.c.d(360,42) = 6$ y en consecuencia, $k = 360/6 = 60$ cuerdas.

Miguel Angel Cabezón Ochoa
Otra solución de J.P. Sánchez Mielgo (Segovia)

PROBLEMA 7 (Boletín nº 24)

Hallar tres números naurales en progresión aritmética de razón 2, tales que que la suma de sus cuadrados sea un número de cuatro cifras iguales.

Solución:

Sean $x - 2$, x, $x + 2$, los números buscados:

$$N = (x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 3x^2 + 8$$

tiene las cuatro cifras iguales y, en consecuencia, es divisible por 1111:

$$N = a.1111 \quad \text{con} \quad 1 \leqslant a \leqslant 9 \ .$$

Será $3x^2 + 8 = a.1111$, o sea $1111a - 8 \equiv 0$ (mód 3), es decir, $a - 2 \equiv 0$ (mód 3), lo que da $a = 2 + 3t$.

Como $1 \leqslant a \leqslant 9$, las únicas soluciones posibles para a son 2, 5, 8.

-- Si $a = 2$, $x^2 = (2222 - 8)/3 = 738$, que no es cuadrado perfecto, ya que acaba en 8.

-- Si $a = 5$, $x^2 = (5555 - 8)/3 = 1849$, que proporciona $x = 43$.

-- Si $a = 8$, $x^2 = (8888 - 8)/3 = 2960$, que no es cuadrado perfecto, ya que acaba en un solo cero.

La única solución está formada por los números 41, 43 y 45:

$$41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555 \ .$$

Miguel Angel Cabezón Ochoa
Otras soluciónes de José V. García Sestafe
y de José P. Sánchez Mielgo

\- - - - - - -

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín *(señalar con unas aspas los que interesen)*:

3	4	5	21	22	23	24
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

25	26	27	28	29
☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo *(60 pts. por número para Madrid y 90 pts. por número para provincias)*.

Hagan el envío utilizando como dirección la consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento recorte o copie este cupón y envíelo a la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Apartado 9479 - 28080 - MADRID.*