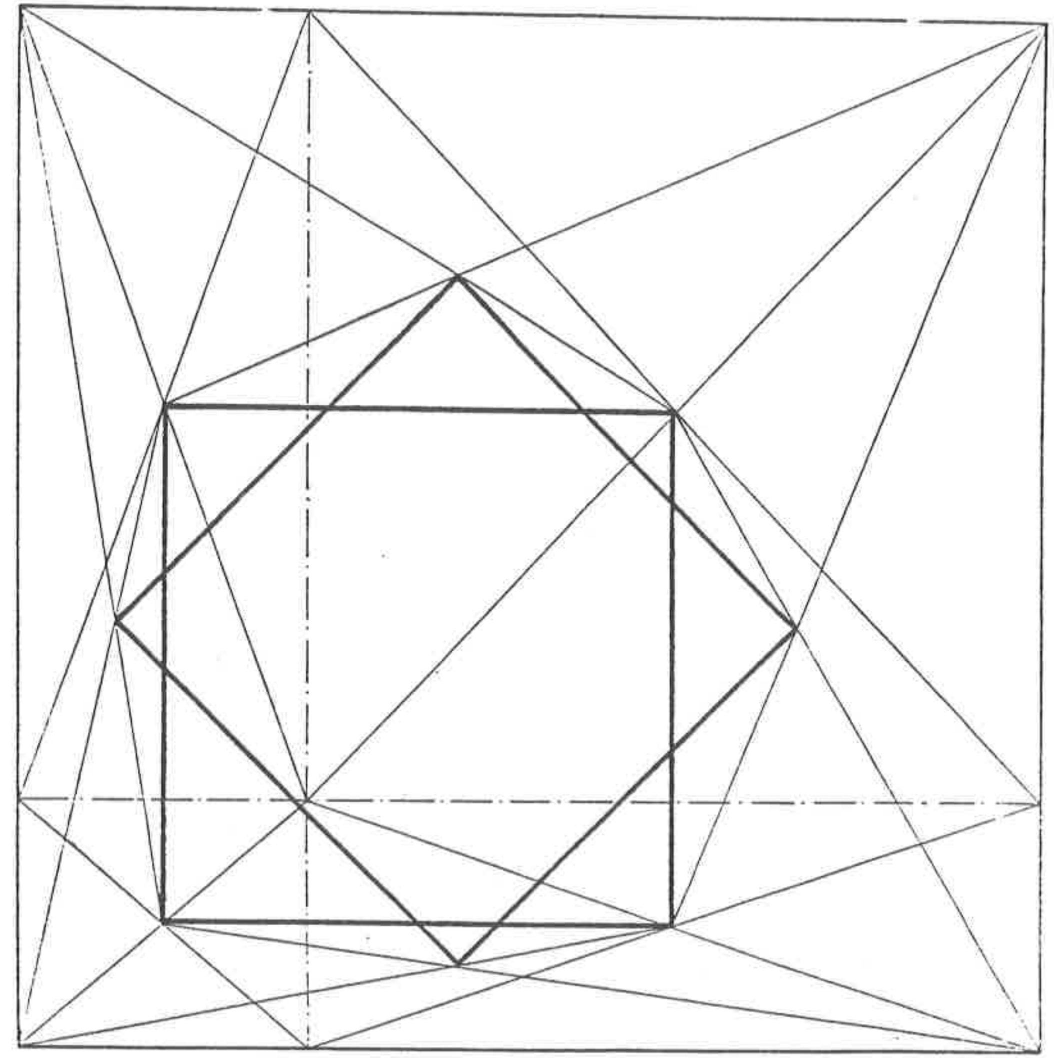


OCTUBRE 1991 **BOLETIN Nº 29**

SOCIEDAD

PUIG ADAM

DE PROFESORES DE MATEMATICAS

B O L E T Í N de la Sociedad "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Octubre de 1991 nº 29 (1990-91)

- Toda la correspondencia para la Sociedad deberá dirigirse al

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

- La portada de este número ha sido creada por nuestro colaborador don Juan Bosco Romero Márquez y sus alumnos del Instituto "Isabel de Castilla" de Avila.

ÍNDICE Pág.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.
NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: *José Vicente García Sestafe*

Vicepresidente por Madrid:
José Manuel Martínez Sánchez
Vicepresidente por Castilla - La Mancha:
Salvador Herrero Pallardo
Vicepresidente por Castilla - León:
Juan Bosco Romero Márquez
Vocal de actividades y concursos:
Juan Ochoa Mélida
Vocal de relaciones institucionales:
Eugenio Roanes Macías
Vocal de gestión de publicaciones:
Carmen García-Miguel Fernández
Vocal de redacción de publicaciones:
Julio Fernández Biarge
Secretario: (encargada provisionalmente)
Carmen García-Miguel Fernández
Vicesecretario:
Enrique Rubiales Camino
Tesorero:
Alberto Aizpún López
Bibliotecario:
Jesús Begoña Aina
Vicepresidencias a extinguir en 1992:
por Cuenca: *Valero Antonio Alías Tuduri*
por Segovia: *Juan Luis Sanz de Andrés*

- - - - - -

«IX CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS»

En la mañana del sábado 22 de Junio se celebró el *IX Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas*, organizado por nuestra Sociedad y por el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, correspondiente al presente año de 1991. Como otros años, el Instituto *"Beatriz Galindo"* cedió amablemente sus locales para la realización de las pruebas.

Como es sabido, los Centros de Bachillerato o Formación Profesional pueden seleccionar hasta dos alumnos por curso de B. U. P. o análogo, para participar en este concurso. En este año, el número de participantes se ha mantenido en el mismo nivel que en el anterior, que debemos considerar bajo, en comparación con el registrado en los años precedentes: 112 en total, de los que 35 concurrían a las pruebas de primer curso, 37 a las de segundo y 40 a las de tercero.

Al final de esta crónica damos los enunciados de los problemas que se propusieron, que fueron cuatro para cada curso, para resolverlos en dos tandas de hora y media cada una.

La entrega de diplomas y premios se realizó en la tarde del mismo dia, en el salón de actos, que también puso a nuestra disposición el Instituto *"Beatriz Galindo"*. En el acto, nuestro Presidente pronunció unas palabras de agradecimiento a los participantes, a los Centros que los han preparado y seleccionado y a los que con su colaboración han hecho posible la organización del Concurso.

En particular hizo público el agradecimiento de los organizadores a la firma *"Coca-Cola" de España* que ha costeado los premios entregados a los ganadores.

Damos a continuación la lista de alumnos premiados, con indicación del Centro que los presentó y de la puntuación alcanzada (la máxima que podía obtenerse teóricamente era de 40 puntos):

PRIMER CURSO:

1º - **DAVID SEVILLA GONZALEZ**, del *I. B. "Luis Buñuel"* de Alcorcón (Madrid) . ... 36 puntos

2º - **IVANA RAOS**, del *Liceo Anglo-Español* . ... 19 puntos

3º - **ALEJANDRO PIÑEIRO MORENO**, del *Colegio JOYFE* . 17 puntos

4º - **CRISTINA MARTÍNEZ DE BARTOLOMÉ IZQUIERDO**, del *I. B. Avenida de los Toreros* de Madrid 15 puntos

5º - **SORAYA HERNANDO PÉREZ**, del *I. B. "Marqués de Lozoya"* de Cuellar (Segovia) ... ... 14 puntos

Con puntuaciones próximas a los premiados quedaron IRENE ARIAS HERRERO (Colº Bérriz), JACINTO BLÁZQUEZ RODRIGUEZ (Cº de F. P. de C. A. S. A.), y MERCEDES PÉREZ MARTÍN (I.B. Torrejón IV).

SEGUNDO CURSO:

1º - **RAFAEL CASAT ASUAR**, del *Colegio Agustiniano* de Madrid . ... 26 puntos

2º - **RAMÓN GORDILLO GUTIERREZ**, del *Colegio San Viator* de Madrid .. .. 20 puntos

3º - **JUAN ENRIQUE PRADAS SIMÓN**, del *Colegio JOYFE* de Madrid ... ... 19 puntos

4º - **ALVARO GÓMEZ-REY ROMERO**, del *I. B. "Gran Capitán"* de Madrid ... ... 19 puntos

5º - **EDUARDO SERANTES HERNANDEZ**, del *I. B. "Guadarrama"* de Guadarrama (Madrid) ... ... 18 puntos

Obtuvieron puntuaciones próximas a los anteriores MIGUEL ANGEL BARBERO SANTAMARÍA (Colº Mirasierra), JORGE GIL GÓMEZ (I.B. Avda. de los Toreros), PEDRO AMADOR LÓPEZ (I.B. Lope de Vega) y JAVIER FERNANDEZ-SANGUINO PÉREZ (Colº Sta. María del Pilar).

Juan Enrique Pradas y Alvaro Gómez-Rey, clasificados en 3º y 4º lugar fueron premiados también en nuestro concurso del pasado año, como alumnos de primer curso, obteniendo entonces los puestos 4º y 1º, respectivamente.

TERCER CURSO

1º - **DANIEL MORENO GARCÍA**, del *I. B. "María Moliner"* de Coslada (Madrid) .. .. 22 puntos

2º - **IGNACIO BARANDALLA TORREGROSA**, del *Colegio Agustiniano* de madrid . ... 20 puntos

3º - **JORGE CASILLAS JORRÍN**, del *Colº Internacional SEK - San Ildefonso* ... ... 20 puntos

4º - **DAVID GIL FRESNILLO**, del *I. B. "Marqués de Lozoya"* de Cuellar (Segovia) ... ... 16 puntos

5º - **FRANCISCO AVELLANO FERNANDEZ**, del *Colegio JOYFE* de Madrid ... ... 15 puntos

Alcanzaron puntuaciones comprendidas entre 12 y 14 puntos CÉSAR ALONSO GALLEGO (I.B. Maria Moliner), ANTONIO SEGURA FONTCUBERTA (Col. Bérriz), EDUARDO MANUEL DÍAZ COMELLAS (Col. Nª Sª del Recuerdo), LUIS FELIPE SANCHEZ MUÑOZ, DIMAS MIURA LARA, IGNACIO REDONDO FERNANDEZ y LUIS ANGEL GIL GÓMEZ.

Señalaremos que Jorge Casillas y David Gil, que se han clasificado en los puestos 3º y 4º, obtuvieron el año pasado, como alumnos de segundo curso, los premios 3º y 2º, que Francisco Avellano, ahora con el 5º premio, quedó a un punto de los premiados en 1990 y que César Alonso, que ahora ha alcanzado 14 puntos, obtuvo el primer premio en 1989 y el segundo en 1990.

Felicitamos cordialmente a los ganadores y a los profesores de Matemáticas que los han formado; debemos destacar que año tras año se repiten, entre los premiados en nuestros concursos, los nombres de varios Centros de Enseñanza, poniendo así de manifiesto que los éxitos obtenidos no son excepcionales, sino fruto de una continuada labor de formación llevada a cabo por su profesorado y del interés de su dirección en fomentar esa actividad formativa. Confiamos en que los ganadores de nuestros concursos sigan siendo cualificados participantes en las olimpiadas matemáticas, tanto nacional como internacionales, de los próximos años.

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en este IX Concurso:

PRIMER CURSO

1º — Calcular razonadamente, todas las ternas de números $C(a,b,c)$. Los tres elementos a, b, c, no tienen que ser necesariamente distintos, y deben cumplir las siguientes condiciones:

1ª: Los elementos a, b, c, en base diez, son dígitos y números primos.

2ª: Todos los números de dos cifras, colocadas en cualquier orden, que pueden ecribirse con las a, b, c, son números primos.

3ª: Todos los números de tres cifras, colocadas en cualquier orden, que pueden escribirse con las a, b, c, son números primos.

NOTA: El número 1 se considera primo.

- - - -

2º — Tres números reales, distintos de cero, están en progresión aritmética y los cuadrados de estos números, en el mismo orden, forman progresión geométrica. Hallar todas las razones posibles de esta progresión.

- - - -

3º — Cuatro vasos, suficientemente grandes, contienen el mismo volumen de liquido. El primer vaso contiene café sólo y los otros tres contienen leche sóla. Se vierte la cuata parte del contenido del primer vaso en el segundo, se hace la mezcla homogénea y, a continuación, se vierte la cuarta parte del contenido del segundo vaso en el tercero. Se hace la mezcla homogénea y se vierte la cuarta parte del contenido e el último vaso. ¿ Cual es la razón entre los volúmenes de café y leche contenidos en el cuarto vaso ?

- - - -

4º — Determinar el resto que se obtiene al dividir N entre cuatro.

$$N = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{1991}$$

- - - -

SEGUNDO CURSO

1º — Cada una de las dos ternas de números: $\log a$, $\log b$, $\log c$ y $\log a - \log 2b$, $\log 2b - \log 3c$, $\log 3c - \log a$, están, en el orden dado, en progresión aritmética. Los números a, b, c, ¿ pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo ? . Razonarlo.

- - - -

2º — Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x = \cos (x - \pi/3)$$

- - - -

3º — Varios amigos deciden hacer un viaje, conviniendo en pagar cada uno el gasto que hiciese, para lo cual alquilan un vehículo por 522 dólares. En el trayecto, uno de los viajeros se puso enfermo y se quedaron con él dos compañeros para cuidarlo. Cuando hicieron cuentas, los que terminaron el viaje tuvieron que pagar 29 dólares más que los que se quedaron ¿ Cuantos amigos eran ?

- - - -

4º — Las longitudes de los lados de un triángulo son a y b , con $a > b$. Hallar la longitud del tercer lado del triángulo, sabiendo que se verifica: $a + h_a \leqslant b + h_b$ y que h_a y h_b son las longitudes de las alturas bajadas sobre los lados correspondientes.

TERCER CURSO

1º — Dado un cuadrado de área igual a 2, se piden:

a) Las ecuaciones de las infinitas elipses inscritas en el cuadrado.

b) La elipse de área máxima.

- - - -

2º — Sean p y q , dos números naturales tales que se verifique

$$2^n + 1 = p.q \qquad n \in \mathbb{N} .$$

Comprobar que los números $p-1$ y $q-1$, en su descomposición en producto de factores primos, contienen al factor 2 con el mismo exponente.

3º — Los puntos *A, B, C, D,* son vértices de un cuadrado de lado igual a uno. Con centros en los citados puntos y radios iguales a uno, se construyen cuatro círculos. La intersección de dichos círculos determina un cuadrilátero curvilíneo cuya área se pide.

\- - - -

4º — La medida de cada uno de los ángulos de la base de un triángulo isósceles es, en radianes, $\pi/6$. La longitud de la altura correspondiente a la base, excede en dos unidades a la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo. Calcular la longitud de la base.

\- - - -

XXXII OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL SIGTUNA - SUECIA - 1991

La *XXXII Olimpiada Matemática Internacional* tuvo lugar en Suecia, los días 17 y 18 de Julio de 1991; se celebró en la ciudad de Sigtuna, aunque el jurado tuvo sus reuniones en Upsala.

Participaron en ella 56 paises, lo que constituye un nuevo record: cinco más que el año pasado, en el que también se sobrepasó la participación de los años anteriores.

Como de costumbre, la prueba consistió en la resolución de **seis** problemas, repartidos en dos sesiones de cuatro horas y media cada una. En cada uno de ellos, se podían obtener hasta **siete puntos**, por lo que la puntuación máxima alcanzable era de 42. Los seis enunciados pueden verse, en este mismo boletín, en la sección de *Problemas Propuestos.*

En esta ocasión, la participación española ha sido digna, ya que no sobresaliente. Destacó Ignasi **MUNDET RIERA**, que logró 20 puntos (con la máxima puntuación en dos problemas) y en consecuencia un Tercer Premio (**medalla de bronce**). Después se clasificaron Marcos **DURANTEZ GANZUKOFF**, con 15 puntos, Roger **ESPEL LLIMA**, con 13, Ignacio **URIARTE TUERO**, con 12, Ignacio **MARCOS PRIMO**, con 4 y Alberto **BRAVO DE MANSILLA JIMÉNEZ**, con 2.

En la clasificación oficiosa por paises (oficialmente, en la IMO tan solo se participa individualmente), España ocupó el lugar 40º.

La URSS ocupó el primer puesto: cuatro de sus alumnos representantes alcanzaron la máxima puntuación posible (42 puntos). Le siguieron China, Rumanía, Alemania, USA, Hungría, Irán, Vietnam, etc.

Las medallas de oro fueron entregadas por el profesor Miguel de Guzmán Ozamiz, en su calidad de Presidente de la Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI).

En la reunión del *I.M.O. Site Committee*, celebrada en los dias anteriores a las pruebas, se acordaron los paises que albergarán la Olimpiada en años sucesivos. Son estos: La Unión Soviética en 1992, Turquía en 1993, Hong Kong en 1994 y Canadá en 1995.

- - - - - -

NOTICIAS

VI OLIMPIADA MATEMATICA IBEROAMERICANA

En los dias en que este número de nuestro Boletín se encuentre en impresión, se estará celebrando en Córdoba (Argentina) la VI Olimpiada Matemática Iberoamericana.

Cada pais puede enviar cuatro alumnos a esta competición; los que han sido seleccionados por España son: Daniel LASAOSA MEDARDE (que ya obtuvo medalla de plata en la Olimpiada Iberoamericana de 1990, pero tiene derecho a participar de nuevo), Ignasi MUNDET RIERA (campeón de la Nacional y medalla de bronce en la Internacional de este año), Ignacio URIARTE TUERO e Ignacio MARCOS PRIMO. Los premiados en la Olimpiada Nacional Marcos Durantez Gamzukoff y Roger Espel Llima, matriculados ahora en el Lycee Luis le Grand de Paris, no han podido formar parte del equipo seleccionado para representarnos en Argentina.

COMPETICIÓN MATEMATICA CONMEMORATIVA DEL V ANIVERSARIO DEL ENCUENTRO DE DOS CULTURAS

En las reuniones preparatorias de la 32ª Olimpiada Matemática Internacional, celebrada en Suecia, el representante de Mexico anunció su intención de invitar a varios paises, entre ellos España, a una Competición Matemática para conmemorar el V Centenario del Encuentro de dos Culturas, que tendría lugar en marzo o abril de 1992.

Esta competición puede resultar muy interesante para preparar la VII Olimpiada Iberoamericana, que ese año organizará Venezuela y cuyas pruebas se realizarán en septiembre del próximo año.

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA EXPERIMENTAL DE LA MATEMATICA EN LA UNIVERSIDAD

Estas *Jornadas* se celebrarán en el Rectorado de la Universidad Politécnica de Madrid, del 10 al 12 de Diciembre de 1991. El comité organizador está presidido por el Mgfco. y Excmo. Sr. Rector de esa Universidad, don Rafael Portaencasa.

Motivan estas Jornadas la preocupación por impartir una docencia de calidad, acorde con la evolución tecnológica, que se sirva de las herramientas más eficaces.

Muchos departamentos universitarios cuentan ya con un laboratorio de Matemáticas o se están planteando su creación, y tratan de incorporar a la docencia las técnicas que se están desarrollando, basadas en el uso de ordenadores y de los últimos avances en Inteligencia Artificial. En este proceso de modernización de los métodos didácticos, puede ser muy beneficioso el intercambio de información entre los profesores interesados en llevarlo a cabo, y para ello se han organizado estas Jornadas.

Los temas que serán tratados son los siguientes:

- Nuevas tecnologías en educación
- El laboratorio de Matemáticas
- Algebra Computacional y Cálculo Simbólico
- Conveniencia de introducir en la Universidad el uso de
  - -- Paquetes estadísticos
  - -- Librerías de Análisis Numérico
  - -- Software científico elaborado

La secretaría de las Jornadas se encuentra en Departamento de Matemática Aplicada (srta. Beatriz Peña)
Escuela Universitaria de Informática
Carretera de Valencia, km. 7 - 28031 - MADRID
Tel.: (91) 336 78 77 Fax : (91) 331 17 67

La cuota de inscripción es de 10.000 pta (5.000 pta para alumnos).

Inaugurará las Jornadas el profesor R. VALLE SANCHEZ disertando sobre *"Nuevas tecnologías en educación"*.

Entre los conferenciantes invitados figuran:
RAFAEL DE LA LLAVE - Universidad de Texas (Austin)
JAVIER CABRERA - Universidad de Rutgers
FREDERIC EYSSETTTE - Universidad de Niza
MIGUEL DE GUZMAN - Universidad Complutense
DANIEL PEÑA - Universidad Carlos III

Los profesores J. M. AMILLO GIL y J. VILLÉN ALTAMIRANO presentarán las experiencias de sus Departamantos.

Los participantes podrán presentar sus ponencias que reflejen estudios, experiencias o estado de sus invetigaciones. Está prevista la publicación de las actas que se enviarán a todos los participantes.

LAS FUNCIONES SIMÉTRICAS GENERALIZADAS Y LA FUNCIÓN PERMANENTE DE UNA MATRIZ

por *Juan Bosco Romero Márquez*
Depto. de Algebra, Geometría y Topología
Universidad de Valladolid

- - -

En este artículo presentamos diversas generalizaciones de las funciones simétricas elementales,asociadas,a una matriz cuadrada- da de orden n con coeficientes reales, desde el punto de vista de la funcion permanente de una matriz.

Despues probaremos, diversas desigualdades entre las funciones simetricas generalizadas que introduciremos en este artículo..

Finalmente, haremos algunos comentarios sobre las diferentes demostraciones, de la que en su dia fue, la celebrada conjetura de Van der Waerden sobre un problema de minimo, de la funcion permanente que es alcanzado sobre el poliedro convexo de las matrices biestocasticas positivas.

1.-Conocimientos basicos.-

1.1.-Conjuntos de sucesiones.- Sean r y n enteros positivos. Definimos como $\Gamma_{r,n}$ el conjunto de todas las sucesiones ordenadas α. $\alpha=(\alpha_1,..\alpha_r)$ en la que cada α_i es un entero que satisface $1\leq \alpha_i \leq n$.

Asi pues, $\Gamma_{r,n}$ es el conjunto de todas las sucesiones de longitud r elegidas de entre los numeros 1,2,....n. El numero de elementos de este conjunto es igual al de las variaciones con repeticion de n elementos tomados de r en r, es decir, n . A continuacion sea $G_{r,n}$ el subconjuntode $\Gamma_{r,n}$ cuyos elementos son aquellas sucesiones α

para las cuales $1\leq\alpha_1\leq\ldots\leq\alpha_r\leq n$. Asi pues, $G_{r,n}$ es el conjunto de las sucesiones crecientes de longitud r elegidas de entre los numeros 1,2...n. El numero de elementos de este conjunto, es igual al numero de combinaciones con repeticion de n elementos tomados de r en r, esto es, $\binom{n+r-1}{r}$. Por ultimo, si $1\leq r\leq n$ entonces $Q_{r,n}$ es el subconjunto de $G_{r,n}$ formado por todas aquellas sucesiones α para las cuales $1\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_r\leq n$. Asi pues, $Q_{r,n}$ es el conjunto de todas las sucesiones estrictamente crecientes de $G_{r,n}$. El numero de estas sucesiones es igual, al numero de combinaciones ordinarias de n elementos, tomadas de r en r, es decir, $\binom{n}{r}$.

1.2 Definicion de submatriz.-Si $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (matrices de orden $m\times n$). Sean $\alpha\in\Gamma_{r,m}$ y $\beta\in\Gamma_{s,n}$. Entonces $A[\alpha|\beta]$ es la matriz de $M_{r,s}(\mathbb{R})$ cuyo elemento generico (i,j) es $a_{\alpha_i\beta_j}$, $i=1,..r$, $j=1,..s$. Si α y β son elementos de $Q_{r,m}$ y $Q_{s,n}$ respectivamente, entonces a $A[\alpha|\beta]$ la llamamos submatriz de A. Al determinante, permanente de una submatriz cuadrada lo llamamos subdeterminante, subpermanente, respectivamente. Para $\alpha\in Q_{r,m}$ y $\beta\in Q_{s,n}$ indiquemos con α' y β' a las sucesiones en $Q_{m-r,m}$ y $Q_{n-s,n}$ respectivamente, cuyos enteros son complementarios de α y β ($1\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_k\leq m$ y $1\leq\alpha'_1<\ldots<\alpha'_{n-k}\leq m$ son conjuntos complementarios de enteros del conjunto $\{1,2,\ldots m\}$), es decir, su union es este conjunto) respectivamente. Entonces definimos a $A(\alpha|\beta)=A[\alpha'|\beta']$, $A[\alpha|\beta)=A[\alpha|\beta']$, $A(\alpha|\beta]=A[\alpha'|\beta]$. Si $m=n$, $r=s$ y $\alpha\in Q_{r,n}$ entonces a $A[\alpha|\alpha]$ la llamamos submatriz principal de la matriz A.

1.3.-Permanente y determinante de una matriz.-Designamos por S_n al conjunto de todas las permutaciones o aplicaciones biyectivas de un conjunto de n elementos en si mismo. Si le dotamos a este conjunto con la ley de composicion interna de aplicaciones se convierte en un grupo no conmutativo, si $n\geq2$, y con $n!$ elementos.

Diagonal, permanente y determinante de una matriz cuadrada.- Sea $A\in M_n(\mathbb{R})$ (conjunto de todas las matrices reales de orden n sobre $\mathbb{R}$) Si $\sigma\in S_n$ entonces la diagonal correspondiente a σ es el sistema ordenado de n numeros $(a_{1\sigma(1)},\ldots a_{n\sigma(n)})$. Un producto diagonal correspondiente a σ es precisamente $\prod_i^n a_{i\sigma(i)}=a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.

Sea χ una aplicacion sobre S_n con valores en $\mathbb{R}$. Entonces, para $A\in M_n(\mathbb{R})$ definimos $d_\chi(A)$ mediante la relacion siguiente:

$$d_\chi(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\chi(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \tag{1}$$

A la funcion d_χ que se obtiene haciendo $\chi(\sigma)=1$, para toda $\sigma\in S_n$ en (1) la llamamos permanente de A y se indica por per A. Asi

$$\text{per } A=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \tag{2}$$

A la funcion d_χ que se obtiene haciendo $\chi(\sigma)=\varepsilon(\sigma)$ (signo de σ. para toda $\sigma\in S_n$ la llamamos determinante de A y se indica con det (A). Asi

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \tag{3}$$

De otra parte, si denotamos con $a_i=(a_{i1},\ldots a_{in})$ $i=1,\ldots n$ los vectores filas de $\mathbb{R}^n$ de la matriz A (lo mismo seria para los vectores columnas), entonces definimos sobre $\mathbb{R}^n$ la aplicacion $d\chi(A)=d\chi(a_1,\ldots\ldots a_n)$. En particular, $\det(a_1,\ldots a_n)=\det(A)$, y $\text{per}(a_1,\ldots a_n)=\text{per}(A)$.

En los siguientes teoremas resumimos las propiedades mas importantes de la funcion permanente y que seran utilizadas en este articulo. Estas propiedades, y las de la funcion permanente, pueden encontrarse las demostraciones de ellas, con todo detalle, en [1] y [2], [3], [17], [18].

Teorema 1.- a) La funcion d_χ es lineal en cada variable vectorial por separado. Es decir, $d\chi$ es una funcion multilineal.

b) Si $\chi: S_n \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de grupos, entonces $d\chi(a_{\phi(1)},\ldots\ldots a_{\phi(n)})=\chi(\phi)d\chi(a_1,\ldots\ldots a_n)$.

Teorema 2. a) La funcion permanente de una matriz es una funcion multilineal de los vectores filas y columnas de esta matriz.

b) Si A es una matriz $n\times n$, y P y Q son matrices permutacion de orden $n\times n$, entonces per (PAQ) = per (A).

c) Si A es una matriz cuadrada de orden $n\times n$, entonces $\text{per}(A^t)=\text{per}(A)$.

d) Desarrollo de Laplace.- Si $A\in M_n(\mathbb{R})$ y $\alpha,\beta\in Q_{r,n}$, entonces

$$\text{Per}(A)=\sum_{\omega\in Q_{r,n}}\text{per}(A[\omega|\beta])\,\text{per}(A(\omega|\beta)), \tag{4}$$

y en particular, para cualquier j, $1 \le j \le n$, tenemos que,

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per}(A(i|j)). \quad \text{(para cualquier } j\text{)}. \qquad (5)$$

1.4. El cono poliedrico de las matrices biestocasticas.- Una matriz $A = (a_{ij})$ con coeficientes reales y de orden $n \times n$ se dice que es biestocastica si sus coeficientes verifican las siguientes propiedades:

a) $a_{ij} \ge 0$ para todos los $i, j = 1, \dots n$.

b) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. para $i = 1, \dots, n$.

c) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, para $j = 1, \dots, n$.

Si se designa por $u = (1, \dots, 1)$ el vector de $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene que: $u \cdot a_i = u \cdot a^j = 1$, donde, los vectores a_i y a^j son respectivamente, lo vectores filas y columnas de la matriz A para $i, j = 1, 2, \dots, n$. Denotamos por Ω_n el semigrupo multiplicativo de todas las matrices biestocàsticas con elementos positivos, entonces se tienen los dos resultados siguientes:

1) Las unicas matrices biestocasticas que tienen inversa son las matrices permutacion. Ver [20].

2) En $\mathbb{R}^{n^2}$, el conjunto Ω_n es un poliedro convexo. Su dimension es $(n-1)^2$ a lo mas.

2.-Funciones simetricas ordinarias y generalizadas via la funcion permanente de una matriz.

Sean $x_1, \dots, x_n$ n variables sobre $\mathbb{R}$. Una funcion $f(x_1, \dots x_n)$ sobre $\mathbb{R}$ es llamada simétrica si $f(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$, para toda σ de S_n.

Los ejemplos mas simples de funciones simetricas son

$$e_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}, \quad r = 1, 2, \dots, n-1 \; ;$$

y $e_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots \dots \dots x_n$, donde la suma se extiende sobre todas las $\binom{n}{r}$ productos posibles de r variables distintas, y son llamadas las funciones simetricas elementales.

Veamos, ahora la relacion que existe entre las funciones simetricas elementales y la funcion permanente de una matriz.

Si r y n son numeros naturales tales que $1 \le r \le n-1$. Dados el vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ de componentes positivas y la matriz $A = (a_{ij})$ de elementos reales positivos a_{ij} y, el vector real positivo $a = (a_1, \dots a_n)$ definimos via la funcion permanente las siguientes funciones simetricas generalizadas:

$e_r(x, a) = \binom{n}{r} \dfrac{\operatorname{per}(x, \overset{r}{\dots}, x, a, \overset{n-r}{\dots}, a)}{n!}$, que al desarrollarla, utilizando el desarrollo de Laplace para la permanente, obtenemos que

$$e_r(x, a) = \sum_{\substack{1 \le i_1 \le \dots \le i_r \le n \text{ y } 1 \le j_1 \le \dots \le j_r \le n \\ \text{(conjuntos complementarios)}}} x_{i_1} \dots x_{i_r} a_{j_1} \dots a_{j_r} \quad \text{con } 1 \le r \le n-1,$$

$$\text{y } e_n(x, a) = \binom{n}{r} \frac{\operatorname{per}(x, \dots x)}{n!} \qquad (6)$$

Siguiendo con las notaciones y resultados expuestos en [2], [6], y [8], [17], [18], tenemos el siguiente resultado con el que se relaciona al permanente como un producto interno de un espacio de Lorentz-Minkowski.

Teorema. 3-(Desigualdad de Alesandrov-Fenchel-Egorychev-Schneider) Sean $a_{ij} \ge 0$ reales para $i, j = 1, 2 \dots n$. Entonces se verifica la siguiente desigualdad

$$\operatorname{per}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)^2 \ge \operatorname{per}(a_1, a_2, \dots a_{n-1}, a_{n-1}) \operatorname{per}(a_1, a_2 \dots a_n, a_n)$$

Si ademas, $a_{ij} > 0$ para $i = 1, 2, \dots n$ y $j = 1, 2, \ n-2$, entonces la igualdad se consigue si y solo si para todo $i = 1, 2, \dots n$ tiene lugar que $a_{n,i} = \lambda\, a_{n-1,i}$, donde λ es real.

Como consecuencia de este teorema y de (6) obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.-Sean $x = (x_1, \dots, x_n) >> 0$, y $1 \le r \le n-1$. Entonces tenemos que

$$\frac{e_r^2(x)}{e_{r+1}(x)\, e_{r-1}(x)} \ge \frac{\binom{n}{r}^2}{\binom{n}{r+1}\binom{n}{r-1}} \ge 1 \,,$$

con la igualdad en la primera desigualdad si y solo si $x = u$.

Demostracion.- Por el teorema 3 tenemos que,

$$per^2(\underbrace{x,..,x}_{r},\underbrace{u,u,..,u}_{n-r}) \geq per(\underbrace{x,x,..,x}_{r+1},\underbrace{u,u,..,u}_{n-(r+1)})\,per(x,x,.,x,u,u,.,u) \qquad (7)$$

con la igualdad, si y solo si x = u.

Sustituyendo la relacion (6) en (7) obtenemos el resultado.

3.- Notas sobre la Conjetura de Van der Waerden y su demostracion.

En 1926 Van der Waerden propuso la siguiente cuestion. ¿cual sera el valor minimo de la funcion permanente sobre el conjunto Ω_n de todas las matrices biestocasticas de orden n ? . Esta conjetura afirmaba lo siguiente:

Si $A \in \Omega_n$, entonces per (A) $\geq \frac{n!}{n^n}$, y con la igualdad, si y solo si. $A = J_n$.

La demostracion de esta conjetura se logro, en 1980, por Falikman Egorichev y Knuth, utilizando para ello, la desigualdad de Aleksandrov- Fenchel-Schneider-Egorychev, antes citada y otros resultados de minimo sobre las matrices biestocasticas debidos a muchos otros investigadores, ver [2],[8],[9],[12],[17],[18],[21],[22],[23],[25]

Esta conjetura aparece, hoy dia, como un topico mas a estudiar dentro de la combinatoria. Para mas detalles, ver [17], [18].

BIBLIOGRAFIA.-

[1] M. Marcus.-Introduccion al Algebra Lineal,Cecsa, Barcelona.

[2] H. Minc.- Permanents Encyclopedia of Mathematics and its Applications 6, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1977.

[3] M. Marcus and H. Minc.-Permanents, The American Mathematical Monthly, June-July, 1965.

[4] L. Garding.-An inequality for Hyperbolic Polynomials.Journal of Mathematics and Mechanics, Vol 8, 6, 1959.

[5] A. Schrjiver.-Bounds on permanents, and the number of 1-factors and 1-factorizations of bipartite graphs,Instituut voor Actuariaat of Econometrie.

[6] R. Schneider.-On A.D.Aleksandrovs's Inequalities for Mixed Discriminants, Journal of Mathematics and Mechanics,Vol 15,1.1981.

[7] K. Leichtweiss.-Zum Beweis eines Eindentegkeitssatzes von A.D. Aleksandrov-Fenchel Inequalities,Mathematisches Institut B, University Sttugart.

[8] J.H. van Lint.-The van der Waerden Conjecture: Two proofs in one year. The Mathematical Intelligencer, vol 4, 2, 1982.Springer Verlag..

[9] D.E. Knuth.-A permanent Inequality. The American Mathematical Monthly,88 (1981), 731-740.

[10] R. P. Stanley.-Two Combinatorial Applications of the Aleksandrov- Fenchel Inequalities.Journal of the Combinatorial theory, serie A, 31, 1, July, 1981.

[11] R.P Stanley.-Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and Geometry, Cambridge Masschusest,1989.

[12] G.P Egorychev.-Solution de Wan der Waerdens's permanent conjecture, preprint 13M of the Kirenski Institute of Physics, Krasnojarsk, 1980.

[13] P. M.Gruber and J.M. Wills.-Covexity and its Applications. Birkhauser Verlag Basel,1983.

[14] J. B. Romero.-Las funciones simetricas elementales como permanentes de matrices,Revista de la Seccion de Matematicas de la Universidad de Valladolid, 1984.

[15] D.S. Mitrinovic.-Analytic Inequalities,pag. 95-98, N.Y. Springer Verlag, 1970.

[16] G.H. Hardy, J.E.Littlewood and G. Polya.-Inequalities, Cambridge University Press, London, 1934.

[17] M. Hall. Jr.- Combinatorial Theory,John Wiley,N.Y.1986.

[18] K. Ribnikov.-Analisis Combinatorio,Ed.Mir, Moscu,1988.

[19] K. Ribnikov.-Analisis Combinatorio.Problemas y Ejercicios. Ed.Mir, Moscu,1989.

[20] C. Berge.-Espaces topologiques,Dunod, Paris, 1966.

[21] D. I. Falikman, A proof of the van der Waerden conjecture on the ermanent of a double stochastic matrix.Russian Mathematiceski Zametki,29,(1981),931-938.

[22] G.P. Egorychev.:Solution of van der Waerden's conjecture, Adv. Math.42 (1981), 299-305.

[23] J.H. van Lint.: Note on Egoritsev's proof of the van der Waerden conjecture,Memorandum, 1980-1981,Dept. of Math, Eindhoven University of Technology, Eindhoven.

[24] H. Minc.:Doubly stochastic matrices with minimal permanents. Pac. J.Math.(1975), 155-157.

[25] D. London.:Some notes on the van der Waerden conjecture, Linear Alg. Appl 4 (1971), 1550160.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín *(señalar con unas aspas los que interesen)*:

3	4	5	10	21	22	23
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

24	25	26	27	28
☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo *(23 pts. por número para Madrid y 33 pts. por número para provincias)*.

Hagan el envío utilizando como dirección la consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento recorte o copie este cupón y envíelo a la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Apartado 9479 - 28080 - MADRID.*

GRAFICACION DE SUPERFICIES POR ORDENADOR

Manuel Avilés Sánchez
I. B. Calderón de la Barca

Paz Lucas Padín
I. B. Calderón de la Barca

El presente trabajo trata de diseñar un programa de ordenador, que permita representar en el monitor del mismo, una superficie dada en la forma $Z=f(x,y)$, desde un determinado punto de vista que sera fijado por las clasicas coordenadas esféricas (θ,φ,r).
El programa lleva tambien incorporado un algoritmo de ocultación de lineas, que sirve para una gran parte de las superficies a representar.
Hay que decir que no existe, hoy por hoy, ningun algoritmo que sirva para toda clase de superficies. Los más completos, llevan implícito un gran tiempo de cálculo. Al movernos en el mundo de los compatibles, hay que tener en cuenta el tiempo de cálculo, a la hora de diseñar el algoritmo, ya que un algoritmo muy eficaz, requiere una gran cantidad de memoria y una CPU rápida, por ejemplo un 386 a por lo menos 20MH con coprocesador matemático. Por lo tanto se tratara de compatibilizar la eficacia con el tiempo que el ordenador tarda en representar una superficie dada en el monitor.
Vamos a esbozar los requisitos matemáticos para la confección del programa.

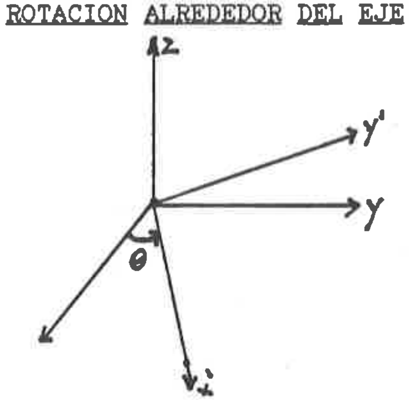
REQUISITOS MATEMATICOS

Para representar en el ordenador un objeto tridimensional, se necesita hacer una transformación que nos pase de las coordenadas del objeto a las de la pantalla. Para esto necesitamos primero movernos con respecto al objeto, para verlo desde la posición y ángulo requeridos y luego proyectar esto sobre la pantalla.
Estas transformaciones pueden ser interpretadas de dos formas distintas.

a) Se mueve el objeto.
b) Se mueven los ejes de manera inversa.

Vamos a escribir las matrices asociadas a rotaciones respecto a los ejes X,Y,Z, en un sistema de refencia ortonormal.

1) ROTACION ALREDEDOR DEL EJE "Z"

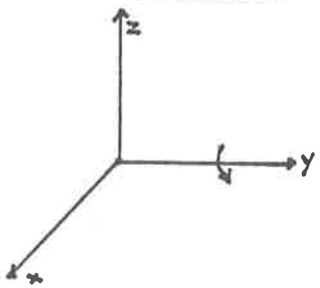


$X' = X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta$
$Y' = X\operatorname{sen}\theta - Y\cos\theta$
$Z' = Z$

Las anteriores ecuaciones son las de rotación alrededor del eje Z.
Las ecuaciones anteriores se pueden escribir bajo forma matricial

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Matriz de la transformación

<u>2) ROTACION ALREDEDOR DEL EJE "Y"</u>



En este caso hay que tener en cuenta que un giro positivo alrededor del eje Y estara dado por la regla del sacacorchos, es decir si vamos de Z a X el sentido sera positivo. Las ecuaciones seran:

$$x' = x\cos\theta + z\,\mathrm{sen}\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = -x\,\mathrm{sen}\theta + z\cos\theta$$

La matriz asociada sera:

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \mathrm{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

<u>ROTACION ALREDEDOR DEL EJE "X"</u>

En este caso las ecuaciones seran:

$$x' = x$$
$$y' = y\cos\theta - z\,\mathrm{sen}\theta$$
$$z' = y\,\mathrm{sen}\theta + z\cos\theta$$

La matriz asociada a la transformacion sera:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

REPRESENTACION DE LA SUPERFICIE EN EL MONITOR

Una vez que hemos visto las matrices asociadas a los giros alrededor de los tres ejes, estamos en condiciones de detallar los

pasos necesarios para obtener las ecuaciones que transforman las coordenadas de un punto (x,y,z) en otras (x_e, y_e, z_e), que es donde esta situado el observador, y desde donde se considera que se esta mirando a la superficie.
En definitiva, para representar un objeto tridimensional, en la pantalla de un ordenador, nos moveremos con respecto al objeto hasta tener una visión adecuada del mismo.
Supongamos que nuestro ojo o camara se encuentra en el punto E y que el objeto esta centrado en el origen y que ademas, estamos suficientemente lejos como para tener una visión de conjunto y evitar deformaciones.
La solución esta en utilizar un sistema de coordenadas de forma que el eje "Z" vaya del ojo a "O", siendo el plano "XY", perpendicular al vector OE.
Finalmente, colocaremos la pantalla del ordenador perpendicular al eje "OE", entre nuestro ojo y el objeto y se procedera a proyectar las coordenadas (x_e, y_e, z_e)sobre la pantalla para así obtener el par (x_p, y_p) que es, el que sera representado en el monitor del ordenador.
Los pasos a seguir seran pues:

a) Hallar la matriz asociada a la transformación , que nos proporcione las coordenadas del objeto respacto a nuestros ejes (ligados al punto E, como aparece en la figura (3)).

b) Ecuaciones de la proyección sobre la pantalla.

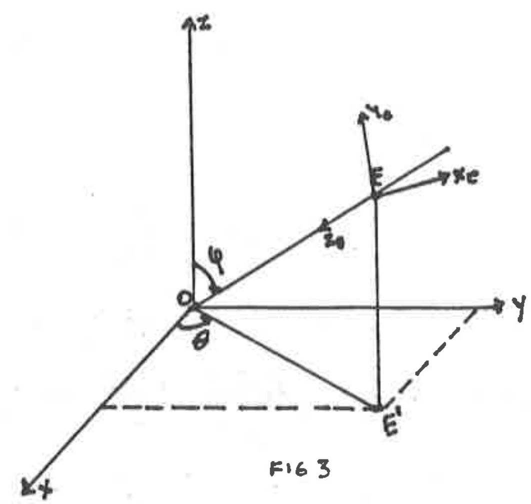
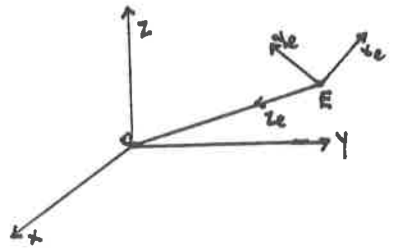


FIG 3

a).-ECUACIONES DE LA TRANSFORMACION



Queremos calcular las coordenadas del punto (x,y,z) pero respecto al sistema sistema de referencia "$X_eY_eZ_e$". La transformación final, sera el resultado de la composición de las siguientes transformaciones, vistas con anterioridad.

a.1) T_1 pasa el origen de coordenadas al punto "E". Sera una traslación cuya matriz asociada sera.

$$T_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -x_E\\ 0 & 1 & 0 & -y_E\\ 0 & 0 & 1 & -z_E\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} x_E=r\cos\varphi\cos\theta\\ y_E=r\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta\\ z_E=r\,\text{sen}\,\varphi\end{array}$$

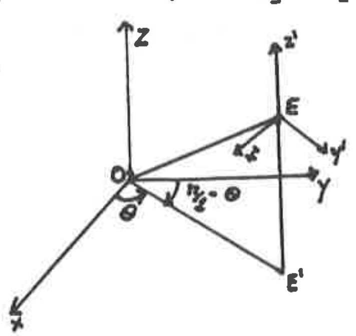
Evidentemente en coordenadas esféricas; con $\begin{cases}0\le\varphi\le\pi\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

Ya que la matriz final, sera producto de las matrices correpondientes a giros y traslaciones, se han elegido coordenadas homogeneas, tanto para las matrices asociadas a una traslación, como para las asociadas a un giro. Siempre que sea posible usaremos matrices 3x3, por comodidad y economia en la escritura, aunque, el producto final de matrices, se haga bajo su forma homogenea osea 4x4.

a.2) R_z sera una rotación de angulo $-(\pi/2-\theta)$ alrededor del eje "Z" de manera que "y'" sea paralelo a "OE'", que esta sobre el plano "XY" y "X'" perpendicular a "OE".

La matriz asociada a la transformación, sera la del giro respecto al eje "Z".

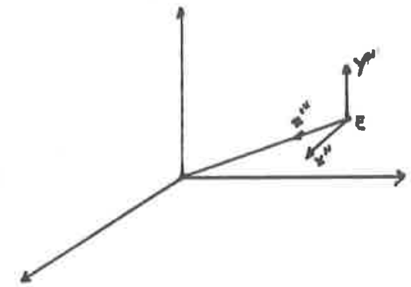
$$R_z=\begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) & -\text{sen}(\frac{\pi}{2}-\theta) & 0\\ \text{sen}(\frac{\pi}{2}-\theta) & \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{sen}\,\theta & -\cos\theta & 0\\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



a.3) Ahora tendremos que rotar un angulo $\pi/2+(\pi/2-\varphi)=\pi-\varphi$ alrededor del eje "X'" de manera que el eje "Z'" pase a ser "Z''" con la dirección "OE".

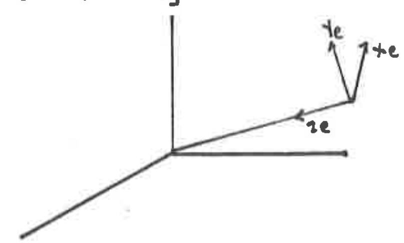
$$R_x=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\pi-\varphi) & \text{sen}(\pi-\varphi)\\ 0 & -\text{sen}(\pi-\varphi) & \cos(\pi-\varphi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\cos\varphi & \text{sen}\,\varphi\\ 0 & -\text{sen}\,\varphi & -\cos\varphi\end{bmatrix}$$

La anterior responde a la matriz de un giro alrededor del eje "X" que vimos en la primera parte del trabajo.



a.4) Se trata en este paso de cambiar la dirección del eje "X''" para que al efectuar la proyección, esta quede en el plano "XY" habitual. la matriz asociada sera:

$$S=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ y el sistema quedara como en la figura adjunta.



Finalmente la matriz asociada a la transformación sera la que corresponde a la composición de las siguientes transformaciones.

$$R=S\circ R_x\circ R_y\circ T_1$$

Para obtener la matriz asociada a R, se multiplicaran las matrices asociadas a S, R_x, R_y y T_1 en coordenadas homogeneas.

Dada una matriz del tipo R_x, R_y o S, el paso a su forma "homogenea" es inmediato, ya que si A es la matriz del tipo anterior, entonces su forma homogenea "A'", sera como sigue:

$$A' = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]:$$

La ecuacion matricial del cambio de sistema de referencia que nos dara las coordenadas de un punto de la superficie, respecto de un sistema ortonormal con origen en "E"sera:

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ -cos\varphi cos\theta & -cos\varphi sen\theta & sen\varphi & 0 \\ -sen\varphi cos\theta & -sen\varphi sen\theta & -cos\varphi & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

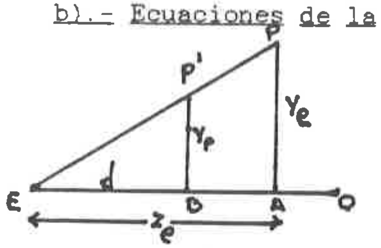
En función de las coordenadas esféricas de "E"

Luego si en el intervalo [XMIN, XMAX], elegimos un número "NPX" de subintervalos y lo mismo hacemos para el intervalo [YMIN, YMAX], con un número "NPY" igual o distinto de "NPX", es evidente que para cada punto sobre el eje "X" que sera de la forma:

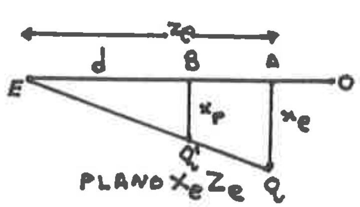
$$x = XMIN + k.\,IPX: \quad \text{con } IPX = \frac{XMAX-XMIN}{NPX} \quad \text{donde } K=0,\dots,NPX$$

Existe otros "NPY+1" puntos de la forma y=YMIN+k.IPY, tal que para cada uno de estos se podra calcular, si existe un Z=f(x,y) que es un punto de la superficie. Conocidas estas coordenadas, se pueden calcular las (x_e, y_e, z_e), correspondientes y pasar a continuación a obtener las coordenadas de pantalla. Este apartado, sera tratado inmediatamente despues.

b).- Ecuaciones de la proyeccion en pantalla.



PLANO $Y_e Z_e$



PLANO $X_e Z_e$

La proyección en perspectiva, hace que los objetos más lejanos, aparezcan más pequeños sobre la pantalla, produciendo imagenes con distorsiones minimas.

En nuestro caso, vamos a suponer que nos colocamos en el punto "E" y que la pantalla es perpendicular al vector "OE"; osea que nos encontramos graficamente en las condiciones de la figura anterior. Por semejanza de tringulos se cumplira lo siguiente:

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y_e}{z_e}\ ; \quad y \text{ tambien } \frac{x_p}{d} = \frac{x_e}{z_e}\ ; \text{ de donde}$$

obtenemos las ecuaciones que nos dan, las coordenadas de pantalla, en función de las coodenadas del "ojo". Estas seran:

$$x_p = d\frac{x_e}{z_e} \quad ; \quad y_p = d\frac{y_e}{z_e} \quad :$$

SISTEMA DE COORDENADAS DE PANTALLA HOMOGENEAS:

Variando, "r" y "d", se puede controlar el tamaño de la imagen en la pantalla del monitor.

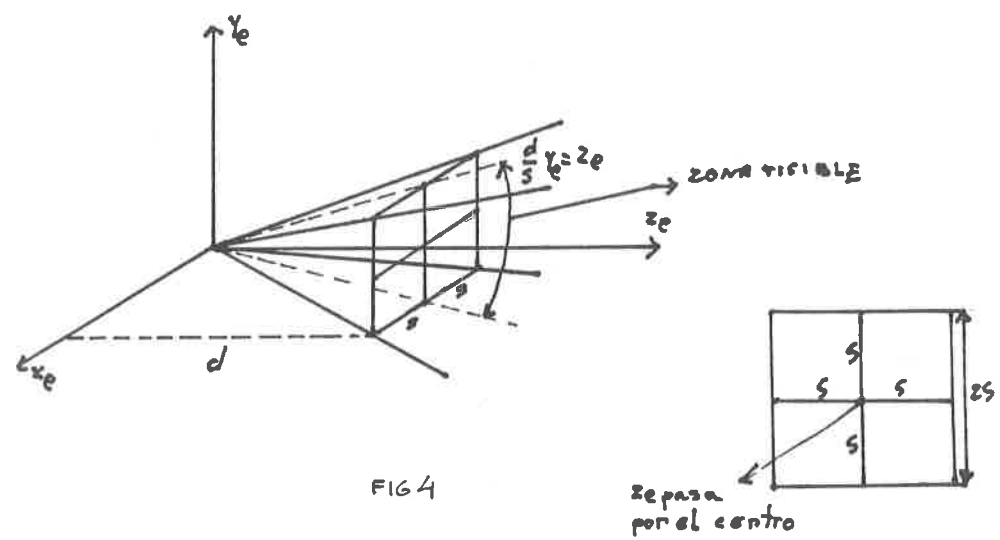


FIG 4

De acuerdo con la última grafica, si consideramos que Z_e pasa por el centro de la pantalla, y que esta tiene las dimensiones que indica la figura anterior, las coordenadas de pantalla seran:

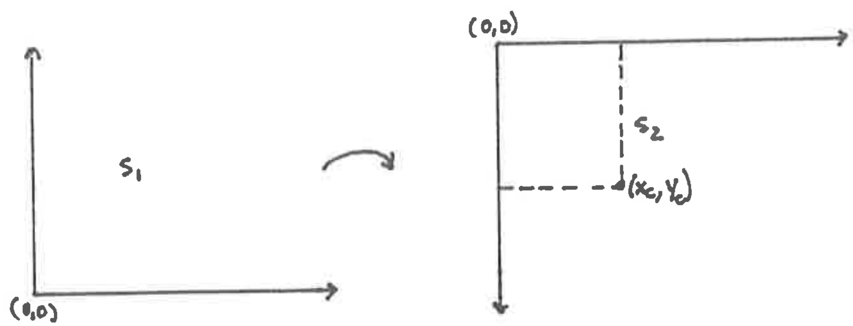
$$x_p = \left[\frac{d}{s}\right]\frac{x_e}{z_e} \quad ; \quad y_p = \left[\frac{d}{s}\right]\frac{y_e}{z_e} \qquad (4)$$

La piramide de visibilidad que hemos dibujado en la figura (4), especifica la región del objeto, que es visible para el observador.

Si elegimos un punto de vista determinado, el cociente $\frac{d}{s}$; controla la imagen proyectada sobre la pantalla. El efecto de este cociente es semejante al de la distancia focal de la lente de una cámara, que como sabemos determina que parte de un objeto esta dentro de la foto y cual no lo esta.
Si el cociente es pequeño, es análogo a usar una lente, de longitud focal pequeña, y por tanto el efecto es el mismo que el producido por un gran angular.
Si la razón es grande, tendriamos el efecto contrario, osea el de un "teleobjetivo"
Es evidente que con esta corrección se verifica:

$$\begin{cases} -1 \le x_p \le 1 \\ -1 \le y_p \le 1 \end{cases}$$

Dado que la que la pantalla de un ordenador, en modo gráfico suele considerar que el origen esta en el vertice superior izquierdo, tendremos todavia que corregir la ecuaciones (4) para que se tenga en cuenta la especial disposición de los ejes en la pantalla de un ordenador. Gráficamente se puede ilustrar como en la figura que aparece más abajo, donde tratamos de pasar del (S_1), al (S_2).



Si consideramos, que el objeto le queremos aproximadamente centrado en el centro del monitor, en el punto de coordenadas (X_c, Y_c) (coordenadas de pantalla), las ecuaciones que aparecen en (4) se transformaran en:

$$x_p = SCF\left[\frac{d}{s}\frac{x_e}{z_e} + X_c\right]$$

$$y_p = -\frac{d}{s}\frac{y_e}{z_e} + Y_c$$

El signo (-), es debido a la diferente orientación de los ejes de ordenadas, en el sistema "XYZ" con respecto al sistema de referencia en pantalla.
"SCF" es un factor, que intenta conseguir que un cuadrado, parezca en realidad un cuadrado en coordenadas de pantalla.
El factor depende de las pulgadas del monitor y de la resolución elegida. y es:

$$SCF = \frac{V}{H} \qquad H = \frac{\text{longi Hori en (mm) de moni}}{\text{maxima reso de punt horizo}} \qquad V = \frac{\text{longi vert en (mm) de moni}}{\text{maxima reso de punt vertic}}$$

TECNICAS DE ELIMINACION DE PARTES OCULTAS

Supongamos que estamos usando una tarjeta EGA, en el modo de maxima resolución, osea 640x350, con 16 colores a la vez.
Inicializamos, las variables dimensionadas YMAX(I), YMIN(I). Estas variables van a ser utilizadas para identificar, si un punto debe ser unido con el anterior, (visible), o no (oculto). Para ello se procede como sigue:

a) Dado un punto en coordenadas de pantalla (x_p, y_p), fijado x_p, se calcula la "y" maxima y minima de pantalla y se almacenan en YMAX(I) e YMIN(I).

b) Se prueba si y_p, esta entre YMAX(x_p) e YMIN(x_p). En caso afirmativo, el punto es considerado como oculto, en caso contrario, es dibujado y unido con el anterior.

Esto es, en sintesis, una de las técnicas de ocultación de superficies. Lo anterior es una extensión del algoritmo de Cohen - Shuterland, que se usa en la graficación bidimensional.
No vale, como técnica de ocultación, para todas las superficies (no existe un algoritmo general de tratamiento de partes ocultas), pero el tiempo de cálculo es corto y la técnica es abordable con un compatible AT (funciona en un (XT)).

DESCRIPCION DEL PROGRAMA

El programa del cual se adjunta un listado, ha sido desarrollado en un Tandom PCA-20, a 8MH, y con GWBASIC versión 3.22. Dicha versión del interprete BASIC, admite la graficacón en modo EGA con resolución de 640x350 y 16 colores. Si no se dispone de monitor compatible EGA, de tarjeta apropiada, y de una versión del BASIC que admita la orden "SCREEN 9", habra que cambiar las siguientes lineas de programa por las que a continuación se detallan:

```
140 cls:screen 2
250 xcp=110:ycp=100:pi=3.141593:coresota=2.4
350 for i=1 to 640:ymax(i)=0:ymin(i)=199:next i
1170 ydib<0 or ydib>199 then estado1%=f%:estado2%=f%
```

Si se quiere observar otra función, se sustituira la linea:

```
410 def fnz(x,y)=...(función a estudiar)
```

El programa esta suficientemente documentado como para entender su funcionamiento leyendo los comentarios incluidos en el mismo. Una descripción somera del mismo podria hacerse como sigue:

1) En las lineas 70 a 131, se introducen los intervalos sobre los ejes, donde va ha ser estudiada la superficie, así como las coordenadas esfericas del punto de vista, y la distancia al plano de proyección. Es conveniente que NPX y NPY, sean números primos, para evitar que la función pase por un punto crítico.

2) En la linea 134, se calculan los pasos correspondientes sobre ambos ejes. La subrutina 230, calcula los valores del marco de visualización, así como, las razones trigonometricas de los ángulos (θ,φ). La razón de incluir este calculo aquí y no en la linea donde se calculan (x_e,y_e,z_e), es que no es necesario hacer este calculo más de una vez.

La subrutina 330, inicializa las variables dimensionadas YMIN(I), YMAX(I) y la rutina 390 calcula las coordenadas (x,y,z) de la superficie.

3) Conocidas estas coordenadas, la rutina 630, calcula las correspondientes coordenadas del "ojo", y la 730 las coordenadas de pantalla.

4) La rutina 890 procede a dibujar la superficie y decidir mediante el algoritmo descrito anteriormente, si el punto, esta o no, oculto para el observador.

Se adjunta un listado del programa, para monitor EGA, GWBASIC v 3.22 y tarjeta compatible.
Se aconseja grabarlo con la opción "a" y ejecutarlo en un BASIC compilado. El programa corre sin modificación alguna en Quick Basic 4.5.

BIBLIOGRAFIA

1)-.FUNDAMENTALS OF INTERACTIVE COMPUTER GRAPHICS
JAMES P. FOLEY — **ADDISON WESLEY**

2)-.MICROCOMPUTER GRAPHICS FOR THE IBM PC
ROY E. MEYERS — **ADDISON WESLEY**

3)-.MATHEMATIQUES ET GRAPHISME SUR IBM PC
MARC DUCAMP-ALAIN REVERCHON — **EYROLLES**

4)-.GEOMETRIC PRINCIPLES AND PROCEDURES FOR COMPUTER GRAPHICS APPLICATIONS
CHASEN — **PRENTICE-HALL**


```
10 '..........GRAFICACION DE SUPERFICIES
15 'ESTADO=F% ES EL PRI DE LA CUR:ESTADO1%=F% EL PUN AC NO SE VE:ESTADO2%=F% EL
PUN ES EL ULTI REFE
20 V% = -1: F% = 0
30 CLS : KEY OFF
50 DIM YMAX(640), YMIN(640)
70 INPUT "ANGULO THETA en grados ", THETA
90 INPUT "ANGULO PHI en grados ", PHI
100 INPUT "RADIO (Si aumenta R dis defor (hay aum D)", R
105 INPUT "DIS PLANO PROYECC (D) (mini 420) D=", DPROXY
115 INPUT "XMIN=", XMIN
120 INPUT "XMAX=", XMAX
123 INPUT "YMIN=", YMIN
126 INPUT "YMAX=", YMAX
129 INPUT "Nº DE PUNTOS SOBRE EL EJE  X (nº menor que 40)", NPX
131 INPUT "Nº DE PUNTOS SOBRE EL EJE  Y (nº menor que 40)", NPY
134 IX = (XMAX - XMIN) / NPX: IY = (YMAX - YMIN) / NPY
140 CLS : SCREEN 9
150 GOSUB 230
170 GOSUB 330
190 GOSUB 390
210 END
230 '.........CALCULO DE LOS VALORES DEL MARCO Y DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS D
E "THETA y PHI"
250 XCP = 110: YCP = 190: PI = 3.141593: CORESOTA = 3.2 '2.4 PARA CGA 640X200
270 S = 2
290 THETA = THETA * PI / 180: PHI = PHI * PI / 180: S1 = SIN(THETA): C1 = COS(TH
ETA): S2 = SIN(PHI): C2 = COS(PHI)
310 RETURN
330 '.........INICIALIZACION DE YMAX(I),YMIN(I)
350 FOR I = 1 TO 640: YMAX(I) = 0: YMIN(I) = 349: NEXT I
370 RETURN
390 '.........CALCULO DE LAS COORDENADAS DEL "MUNDO", "OJO", Y "PANTALLA"
410 DEF FNZ (X, Y) = 10 * SIN(SQR(X ^ 2 + Y ^ 2)) / SQR(X ^ 2 + Y ^ 2)
430 FOR X = XMAX TO XMIN STEP -IX
450 ESTADO% = F%
470 FOR Y = YMIN TO YMAX STEP IY
490 Z = FNZ(X, Y)
510 GOSUB 630
530 GOSUB 730
550 GOSUB 890
570 NEXT Y
590 NEXT X
610 RETURN
630 '.......CAL COOR DEL OJO
650 XPV = -X * S1 + Y * C1
670 YPV = -X * C1 * C2 - Y * S1 * C2 + Z * S2
690 ZPV = -X * S2 * C1 - Y * S2 * S1 - Z * C2 + R
710 RETURN
730 '......CAL COOR PANTA
790 XP = (DPROXY / S) * (XPV / ZPV)
810 YP = (DPROXY / S) * (YPV / ZPV)
830 XP = XP + XCP: XP = CORESOTA * XP
850 YP = -YP + YCP
870 RETURN
890 '.......DIBUJO DE LA SUPERFICIE
910 IF NOT ESTADO% THEN 930 ELSE 990
```

```
930 ESTADO% = V%: ESTADO2% = F%
950 XANT = XP: YANT = YP
970 RETURN
990 DELTAX = XANT - XP: IF DELTAX = 0 THEN DELTAX = 1
1010 DELTAY = YANT - YP
1030 COCIDELT = DELTAY / DELTAX
1050 YDIB = YANT
1070 NUEVOX = INT(XANT) + 1
1090 FOR XDIB = NUEVOX TO XP
1110 ESTADO1% = V%
1130 YDIB = YDIB + COCIDELT
1150 IF XDIB < 0 OR XDIB > 639 THEN ESTADO1% = F%: ESTADO2% = F%: GOTO 1250
1170 IF YDIB < 0 OR YDIB > 349 THEN ESTADO1% = F%: ESTADO2% = F%
1190 IF YDIB <= YMIN(XDIB) THEN 1310
1210 IF YDIB >= YMAX(XDIB) THEN 1410
1230 ESTADO2% = F%
1250 NEXT XDIB
1270 XANT = XP: YANT = YP
1290 RETURN
1310 YMIN(XDIB) = YDIB
1330 IF NOT ESTADO1% THEN 1390
1350 IF NOT ESTADO2% THEN PSET (XDIB, YDIB): ESTADO2% = V%
1370 LINE -(XDIB, YDIB)
1390 IF YDIB < YMAX(XDIB) THEN 1250
1410 YMAX(XDIB) = YDIB
1430 IF NOT ESTADO1% THEN 1250
1450 IF NOT ESTADO2% THEN PSET (XDIB, YDIB): ESTADO2% = V%
1470 LINE -(XDIB, YDIB)
1490 GOTO 1250
```

EJEMPLO DE GRAFICA DE UNA SUPERFICIE

Z=10*SIN(SQR(X^2+Y^2))/SQR(X^2+Y^2)

THETA=30; PHI=80; R=40; D=420

XMIN=-10; XMAX= 10
YMIN=-10; YMAX= 10
NPX=37; NPY=37

SOBRE ANALISIS NO ESTANDAR

Por Manuel Suárez Fernández

CAPITULO IV: UNOS PRINCIPIOS NO ESTANDAR

En este cuarto artículo o capítulo propongo unos principios para el Análisis No Estandar a considerar en este referido cuarto capítulo y en el quinto siguiente. Dichos principios no son los mismos (salvo uno de ellos) que los de la Internal Set Theory (o Teoría Interna de Conjuntos o Análisis No Estándar de Edward Nelson), si bien aquellos (los que aquí propongo) se deducen de éstos (los de la Teoría Interna de Conjuntos).

Además figuran algunos teoremas y también algunas demostraciones y con el fin de diferenciar claramente (lo que llamo) la pre-teoría y demás complementos, de los enunciados de la teoría no estándar en cuestión, éstos (y no aquellos) figuran recuadrados.

En el Capítulo II, en la ZFC (es decir, en la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de elección), consideramos una clase U de cosas que llamamos "conjuntos", una clase $\mathcal{P}$ de cosas que llamamos "propiedades", una clase, que en el Capítulo III notamos ε, de propiedades que llamamos "enunciados", unos signos (letras que llamamos "variables" y lo que entendemos por "propiedad" y por "figurar (libre o ligada) una variable o figurar un conjunto en una propiedad". Sobre lo que significa "figurar", concretando más el lenguaje cediendo protagonismo las propiedades a favor de sus notaciones, a las que llamamos "formulas", solo sirviéndonos de ejemplos e invocando a la intuición para no alargar demasiado la exposición, añadimos ahora que:

- consideramos que intuitivamente entendemos lo que significa que un signo figura en la notación de un conjunto, que figura en una fórmula y si el signo es una variable, entonces que la variable figura libre o que figura ligada en la fórmula,

- en las fórmulas no solo figuran (o pueden figurar) signos tales como, por ejemplo $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$, $\in$, $=$, $\subset$, $\notin$, $\neq$, $\not\subset$, $\mathcal{P}(\ )$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\{\ \}$, $(\ )$, $\times$, $\leq$, $\geq$, $<$ y $>$, sino también signos tales como, por ejemplo, $+$, $-$, $.$, Σ, π, $|\ |$, $\sqrt{\ }$, log, sen, cos, tg, $\lim\limits_{\to}$, d (signo que llamamos "diferencial de") y $\int$.

- decimos que un conjunto A figura en una notación E de un conjunto o en una fórmula α si y solo si una (alguna) notación del conjunto A respectivamente figura en la notación E de un conjunto o en la fórmula α.

Así, por ejemplo, siendo x, y variables consideramos que:

- en la notación $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ de un conjunto figuran los signos N, x y Z,

- no sólo son fórmulas $x \in y$, $x \notin \mathbb{N}$, $\exists x\ \forall y\ (y \notin x)$, $(x \leq 1) \wedge (y \leq 1)$ y $\forall x\ \exists y\ (x \neq y)$, sino que también lo son $y = \text{sen } x$, $x \cup y = \mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$, $\exists x\ \exists y(\text{sen}(x+y) = \cos(x+(-y)))$, $(x \leq y \Rightarrow x + 1 \leq y + 1)$ e $y = x\ .\ x$,

- en la fórmula $x \in y$ figuran libres x, y y figura el signo $\in$,

- en la fórmula $x \notin \mathbb{N}$ figura libre x, figuran los signos $\notin$ y N y figura el conjunto $\mathbb{N}$

- en la fórmula $\exists x\ \forall y(y \notin x)$ figuran ligadas x, y y figuran los signos $\exists$, $\forall$, $(\ )$ y $\notin$

- en la fórmula $(x \leq 1)\ \ (y \leq 1)$ figuran libres x, y, figuran los signos $(\ )$, $\leq$, y 1 y figura el conjunto (y número natural) 1

- en la fórmula $\forall x\ \exists y(x \neq y)$ figuran ligadas x, y y figuran los signos $\forall$, $\exists$, $(\ )$ y $\neq$

- en la fórmula $y = \text{sen } x$ figuran libres x, y y figuran los signos $=$ y sen

- en la fórmula $x \cup y = \mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$ figuran libres x, y, figuran los signos $\cup$, $=$, $\mathcal{P}(\ )$, $\mathbb{Q}$, $\times$ y $\mathbb{R}$ y figuran los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$

- en la fórmula $\exists x\ \exists y\ (\text{sen }(x+y) = \cos(x+(-y))$ figuran ligadas x, y y figuran los signos $\exists$, $(\ )$, sen, $+$, $=$, cos y $-$

- en la fórmula $(x \leq y\ \Rightarrow x+1 \leq y+1)$ figuran libres x, y, figuran los signos $(\ )$, $\leq$, $\Rightarrow$, $+$ y 1 y figura el conjunto (y número natural) 1

- en la fórmula $y = x.x$ figuran libres x, y y figuran los signos $=$ y .

- en la notación $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ de un conjunto figuran los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$

En el Capítulo III básicamente consideramos que si bien el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un conjunto de la clase U tal que (Principio de recurrencia) si E es un conjunto de la clase U contenido en $\mathbb{N}$, 0 es elemento de E y S(n) es elemento de E siempre que n sea elemento de E entonces $E = \mathbb{N}$, ello no significa que no exista un conjunto $\underline{\mathbb{N}}$ no de la clase U, propiamente contenido en $\mathbb{N}$ y tal que 0 sea elemento de $\underline{\mathbb{N}}$ y S(n) sea elemento de $\mathbb{N}$ siempre que n sea elemento de $\mathbb{N}$ (y que los números naturales con notación propia (0, 1, 2, etc.) y nombre propio (cero, uno, dos, etc.) del sistema de numeración decimal, sean elementos de $\mathbb{N}$).

Lo que se persigue con lo referido en el Capítulo III, es, pues, que la intuición del lector acepte la compatilidad o no contradicción de la ZFC (y más concretamente) de los Axiomas de Peano y, en particular, del Principio de recurrencia) con (la existencia de) un tal conjunto $\mathbb{N}$.

Pues bien, ahora en el Capítulo IV, en el Análisis No Estándar, admitimos la teoría clásica de conjuntos (es decir, la ZFC) y (la existencia de) un tal conjunto $\underline{\mathbb{N}}$ que por no ser de la clase U, le llamamos "un conjunto externo" (a la clase U). A los conjuntos de la clase U, a las propiedades de la clase P y, en particular, a los enunciados de la clase ε, respectivamente les llamamos "conjuntos internos" (a la clase U), "propiedades internas" (a la clase P) y "enunciados internos" (a la clase ε). A los elementos de $\mathbb{N}$ les llamamos "números naturales estándar" y a los elementos de $\mathbb{N}$ que no son de $\mathbb{N}$, "números naturales no estándar".

Así pues, en el Análisis No Estándar consideramos la ZFC y en consecuencia, las clase U, P y ε de cosas que ahora respectivamente llamamos "conjuntos internos", "propiedades internas" y "enunciados internos", y los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ a cuyos elementos respectivamente internos llamamos "números naturales", "números enteros", "números racionales", "números reales" y "números complejos", bien entendido que unas y otros son los mismos de la teoría clásica (es decir, los mismos de siempre).

Lo que ocurre es que en el Análisis No Estándar además distinguimos unos números naturales que llamamos "estándar", de otros que llamamos "no estándar". Ello significa

que (en el Análisis No Estándar) admitimos existe una propiedad, que si ξ es una variable o ξ es un conjunto entonces notamos "ξ estándar" y llamamos "ξ estandar" o "ξ es estándar" (o "ξ es un conjunto estándar"), que no es de la clase P, por lo que decimos "es una propiedad externa" (a la clase P)(1).

Lo referido en el Capítulo II sobre conjuntos internos, propiedades internas y enunciados internos (es decir, sobre cosas de la clase U, cosas de la clase P y cosas de la clase ε), lo prolongamos ahora a conjuntos internos o externos, propiedades internas o externas y enunciados internos o externos. Así resultan, por ejemplo, el conjunto $\underline{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}$, la propiedad (x estándar) ∧ (x ∈ Q) y el enunciado (5 estándar). Notamos U^* a la clase de los conjuntos internos o externos y llamamos "conjuntos" a unos y otros, notamos P^* a la clase de las propiedades internas o externas y llamamos "propiedades" a unas y otras, notamos ε^* a la clase de los enunciados internos o externos y llamamos "enunciados" a unos y otros, llamamos teoría T a la teoría de Análisis No Estándar que pretendemos construir y comenzamos la teoría T de la siguiente manera:

Admitimos la ZFC y a las cosas de la clase U las llamamos "conjuntos internos", a las cosas de la clase P las llamamos "propiedades internas" y a las cosas de la clase ε las llamamos "enunciados internos".

---

(1) Edward Nelson, en su libro titulado "Radically Elementary Probability Theory (citado en la Bibliografía), dice: "El uso de este nuevo predicado "estandar" es similar al color en la TV: La imagen es la misma, pero (con el color) apreciamos diferencias que antes no podíamos apreciar.

Admitimos que existe una clase, que notamos U^*, de cosas que llamamos "conjuntos", que existe una clase, que notamos P^*, de cosas que llamamos "propiedades" y que existe una clase, que notamos ε^* de cosas que llamamos "enunciados".

Admitimos que si E es un conjunto interno, α es una propiedad interna y p es un enunciado interno, entonces E es un conjunto, α es una propiedad y p es un enunciado (es decir, admitimos que si E es una cosa de U, α es una cosa de P y p es una cosa de ε, entonces E es una cosa de U^*, α es una cosa de P^* y p es una cosa de ε^*).

Si E es un conjunto, α es una propiedad y p es un enunciado, entonces decimos que,

- "E es un conjunto externo" si y solo si E no es un conjunto interno"

- "α es una propiedad externa" si y solo si α no es una propiedad interna"

- "p es un enunciado externo" si y solo si p no es un enunciado interno"

Admitimos que si ξ es una variable o ξ es un conjunto, entonces existe una propiedad externa que notamos "ξ estándar" y llamamos "ξ estándar" o "ξ es estándar" y a la propiedad $\rceil$ (ξ estándar) la notamos y llamamos "ξ noestándar". Admitimos (Principio de existencia) que existe un (algún) número natural (que es un conjunto) noestándar.

Admitimos que lo referido (en el Capítulo II) para cosas de la clase U, cosas de la clase P y cosas de la clase ε, se verifica respectivamente para cosas de la

clase U^*, cosas de la clase P^* y cosas de la clase ε^* (es decir, lo referido en el Capítulo II sobre cosas de la clase U, cosas de la clase P y cosas de la clase ε, que allí respectivamente llamamos "conjuntos", "propiedades" y "enunciados" y aquí, en el Capítulo IV, respectivamente llamamos "conjuntos internos", "propiedades internas" y "enunciados internos", lo prolongamos respectivamente a cosas de la clase U^*, cosas de la clase * y cosas de la clase ε^* qu aquí respectivamente llamamos "conjuntos", "propiedades" y "enunciados").

Admitimos que si α es una propiedad y en α figura el signo "estándar" o el signo "noestándar", entonces α es una propiedad externa. Convenimos que:

- Si E es un conjunto interno, entonces la expresión $\mathcal{P}$(E) es notación del conjunto (interno) de los conjuntos internos contenidos en E.

- Si x es una variable y α es una propiedad (interna o externa) tal qu en α figura libre x, entonces,

  - a la expresión $\exists x\alpha$ la leemos "existe x tal que (se verifica) α" y significa "existe un (algún) conjunto interno x tal que se verifica α"

  - a la expresión $\forall x\alpha$ la leemos "para todo x (se verifica) α" y significa "para todo conjunto interno x se verifica α"

  - a la propiedad $\exists x$ (x estándar) $\wedge$ α) la notamos $\exists^{st} x\alpha$ y la llamamos "existe x estándar tal que (se verifica) α"

- a la propiedad x ((x estándar) $\Longrightarrow \alpha$) la notamos $\forall^{st}x\alpha$ y la llamamos "para todo x estándar (se verifica) α".

Luego convenimos en que si E es un conjunto interno y α es una fórmula interna en la que figura libre una variable x, entonces las expresiones $\mathcal{P}(E)$, $\exists x\alpha$ y $\forall x\alpha$ significan lo mismo que en la clásica ZFC:

También podríamos convenir en que, en la teoría T,

- si E es un conjunto (interno o externo), entonces, por ejemplo, la expresión $P^*(E)$ es notación del conjunto (interno o externos) contenidos en E,

- si x es una variable y α es una propiedad (interna o externa) tal que en α figura libre x, entonces, por ejemplo,

  - a la expresión $\exists^* x\alpha$ la leemos "existe x interno o externo tal que (se verifica) α" y significa "existe un (algún) conjunto (interno o externo) x tal que se verifica α",

  - a la expresión $\forall^* x\alpha$ la leemos "para todo x interno o externo (se verifica) α" y significa "para todo conjunto (interno o externo) x se verifica α",

pero ello no es necesario para las cuestiones que consideraremos.

También en la teoría T concretamos más el lenguaje cediendo protagonismo las propiedades a favor de sus notaciones, para lo que,

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN DE INSCRIPCIÓN

D. ... ... Teléf.(...)... ... .

Dirección particular . ...

Ciudad ... ... Codº Postal .. ... .

Centro de trabajo ... ...

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco . ...

Sucursal o Agencia ... ... en .. ..

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en mi cuenta . ... nº ... ...

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1991-92

y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1991

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 3.000 pesetas

Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...

Dirección de ésta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...

Dirección ... ...

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN DE INSCRIPCIÓN (CENTROS)

D. ... ...

como . ...del Centro . ...

.. ..

domiciliado en ... ...

ciudad ... ... Codº Post. ... Telfº.. ... .

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR.

Con esta fecha autorizo al Banco . ...

Sucursal o Agencia ... ... en .. ..

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en mi cuenta . ... nº ... ...

abierta al nombre: ... ...

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1991-92

y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1991

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 3.000 pesetas

Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...

Dirección de ésta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...

Nombre de la cuenta... ... ...

Llamamos "fórmulas" a las notaciones de las propiedades, "fórmulas internas" a las notaciones de las propiedades internas, "fórmulas externas" a las notaciones de las propiedades externas, "formulas verdaderas" a las fórmulas de los enunciados verdaderos", "fórmulas falsas" a las fórmulas de los enunciados falsos", notamos $\mathcal{F}$ a la clase de las fórmulas internas y si α es una fórmula, entonces decimos que se verifica α si y solo si α es verdadera.

Así pues, conjuntos internos (o de la clase U), fórmulas internas (o de la clase $\mathcal{F}$), propiedades internas (o de la clase $\mathcal{P}$) y, en particular, enunciados internos (o de la clase ε), son respectivamente los conjuntos, las fórmulas, las propiedades y, en particular, los enunciados de la ZFC, lo cual, como ya referimos, es como decir que son "los mismos de siempre", "los de nuestra teoría de siempre".

Ahora queremos definir "conjuntos estándar" y "fórmulas estándar" (definir "propiedades estándar") y, en particular, "enunciados estándar" no es necesario para las cuestiones que consideraremos), de manera que respectivamente sean los conjuntos internos y las fórmulas internas "más familiares" (de "más familiar" representación y uso) para nosotros.

Pensando en que los principios o axiomas que consideremos sirvan para dar forma a las ideas referidas, continuamos la teoría T (es decir, la teoría de Análisis No Estándar que pretendemos construir) de la siguiente manera:

Si α es una fórmula, entonces decimos que "α es una fórmula estándar" si y solo si α es una fórmula interna tal que en α no figura conjunto noestándar alguno.

Admitimos (Principio de transferencia) que,

- si x es una variable, P(x) es una propiedad estándar tal que en P(x) figura libre x y no figura libre variable alguna distinta de x, entonces se verifica la fórmula externa

$$\forall^{st} x\ P(x) \Longrightarrow \forall x\ P(x)$$

- si x, $x_1, \ldots x_n$ son variables y $P(x, x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula estándar tal que en $P(x, x_1, \ldots, x_n)$ figuran libres x, $x_1, \ldots, x_n$ y no figura libre variable alguna distinta de x, $x_1, \ldots, x_n$, entonces se verifica la fórmula externa

$$\forall^{st}x_1 \ldots \forall^{st}x_n\ (\forall^{st}xP(x,x1,\ldots,x_n) \rightarrow \forall x\ P(x,x_1,\ldots.x_n))$$

Se demuestra que:

- si x es una variable y P(x) es una fórmula estandar tal que en P(x) figura libre x y no figura libre variable alguna distinta de x, entonces se verifica la fórmula externa $\exists x\ P(x) \Longrightarrow \exists^{st}x\ P(x)$

- si x, $x_1, \ldots, x_n$ son variables y $P(x, x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula estandar tal que en $P(x, x_1, \ldots, x_n)$ figuran libres x, $x_1, \ldots, x_n$ y no figura libre variable alguna distinta de x, $x_1, \ldots, x_n$, entonces se verifica la fórmula externa

$$\forall^{st}\ x_1 \ldots \forall^{st}\ x_n (\exists x\ P(x,x_1,\ldots.x_n) \rightarrow \exists^{st}\ x\ P(x,x_1,\ldots.x_n)$$

En efecto,

- si x es una variable y α es una fórmula estandar tal que en α figura libre x y no figura libre variable alguna distinta de x, entonces se verifican las fórmulas

$$\exists x\ \alpha \Longrightarrow \exists x\ \neg\neg\alpha$$

$$\exists x\ \neg\neg\alpha \Longrightarrow \neg\ \forall x\ \neg\alpha$$

$$\forall^{st}\ x\ \neg\alpha \Longrightarrow \forall x\ \neg\alpha \text{ (Principio de transferencia)}$$

$$(\forall^{st}\ x\ \neg\alpha \Longrightarrow \forall x\ \neg\alpha) \Longrightarrow (\neg\ \forall x\ \neg\alpha \Longrightarrow \neg\ \forall^{st}\ x\ \neg\alpha)$$

$$\neg\ \forall^{st}\ x\ \neg\alpha \Longrightarrow \exists^{st}\ x\ \neg\neg\alpha$$

$$\exists^{st}\ x\ \neg\neg\alpha \Longrightarrow \exists^{st}\ x\ \alpha$$

Luego entonces se verifica la fórmula externa $x\alpha \Longrightarrow \exists^{st}x\alpha$.

- considerando lo referido, es trivial que se verifica la fórmula externa $\forall^{st}\ x_1 \ldots \forall^{st}\ x_n\ (\ x\ P(x,x_1,\ldots,x_n) \Longrightarrow \exists^{st}\ x\ P(x, x_1,\ldots, x_n))$.

Se demuestra fácilmente que admitir se verifican estas últimas fórmulas, es equivalente al Principio de transferencia y, en consecuencia, podemos considerarlas como otra formulación del referido principio.

Observemos que si bien en la pre-teoría hemos admitido que 0 es un número natural estandar y que si n es un número natural estandar entonces s(n) es un número natural estandar, tales cosas no las hemos admitido en la teoría T. Ello ha sido así porque (tales cosas) se pueden demostrar a partir de lo referido sobre la teoría T y, en particular, del Principio de transferencia, lo que hacemos a continuación (entendiendo que el conjunto N de los números naturales es el conjunto ω considerado en el axioma del infinito, en el Capítulo II, y, en consecuencia, que 0 es ϕ, 1 es el $\{\phi\}$ y, en general, si n es un número natural, entonces s(n) es el $n \cup \{n\}$ y que se verifican los enunciados P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 llamados "Axiomas de Peano").

Se demuestra que ϕ es un conjunto estandar y, en consecuencia, que 0 es un número natural estandar.

En efecto, si x, y son variables, entonces $\forall y\ (y \notin x)$ es una fórmula estandar en la que figura libre x y no figura libre variable alguna distinta de x. Luego entonces se verifica la fórmula externa $\exists x\ (\forall y (y \notin x) \rightarrow \exists^{st} x\ (\forall y (y \notin x))$.

Entonces (es decir, si x, y son variables, entonces) se verifica la fórmula estandar $\forall y (y \notin \phi)$. Luego entonces se verifica la fórmula estandar $\exists x\ \forall y\ (y \notin x)$.

Luego entonces se verifica la fórmula externa $\exists^{st} x\ \forall y\ (y \notin x)$. Luego ϕ (conjunto vacío) es un conjunto estandar y, en consecuencia, 0 es un número natural estandar.

Se demuestra que si n es un conjunto estandar, entonces el $n \cup \{n\}$ es un conjunto estandar y, en consecuencia, que si n es un número natural estandar, entonces s(n) es un número natural estandar.

En efecto, si x, y son variables, entonces $y = x \cup \{x\}$ es una fórmula estandar en la que figuran libres x, y y no figura libre variable alguna distinta de x, y. Luego entonces se verifica la fórmula externa $\forall^{st} x (\exists y\ (y = x\ \cup \{x\}) \rightarrow \exists^{st} y (y = x \cup \{x\}))$. Luego entonces se verifica la fórmula externa $\forall^{st} x\ \exists y (y = x \cup \{x\}) \rightarrow \forall^{st} x\ \exists^{st} y (y = x \cup \{x\})$. Entonces se verifica la fórmula externa $\forall^{st} x\ \exists y (y = x \cup \{x\})$. Luego entonces se verifica la fórmula externa $\forall^{st} x \exists^{st} y\ (y = x \cup \{x\})$.

Luego, si n es un conjunto estandar, entonces el $n \cup \{n\}$ es un conjunto estandar y, en consecuencia, si n es un número natual estandar, entonces s(n) es un número natural estandar.

Así pues, (en la teoría T), 1 = s(0) es un número natural estandar, 2 = s(1) es un número natural estandar, 3 = s(2) es un número natural estandar, etc.

En general, si E es un conjunto tal que si x es una variable entonces existe una fórmula estandar P(x) tal que en P(x) figura libre x, no figura libre variable alguna distinta de x y E y solo E verifica P(x), entonces E es un conjunto estandar(2).

En efecto, entonces se verifica la fórmula estandar $\exists x\ P(x)$. Luego entonces, considerando que se verifica la fórmula externa $\exists x\ P(x) \rightarrow \exists^{st} x\ P(x)$, se verifica la fórmula externa $\exists^{st} x\ P(x)$. Luego entonces E es un conjunto standar. Asçí rsulta que todos los conjuntos internos a los que tradicionalmente (en la matemática estandar o clásica) asignamos notación propia o nombre propio, como por ejemplo $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, e, π, i(3), son conjuntos estandar (por ejemplo, para $\mathbb{N} = \omega$, tal fórmula x P(x) es la del Axioma del infinito).

(2) Si n es un número natural estandar, entonces una tal fórmula para s(n) es decir, una tal fórmula que s(n) y solo s(n) verifica) es $x = s(n)$.

(3) $e = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$, $\pi = 3'1415$, $i^2 = -1$

Luego continuamos la teoría T de la siguiente manera:

> Se demuestra que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, e, π, i, son conjuntos estandar.

Si $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N}\ \{0\}$ (es decir, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, E es un conjunto y F es un conjunto, entonces una sucesión a_1, a_2, a_3, ..., de elementos de F, es una aplicación (o función) f entre $\mathbb{N}^+$ y F (tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ...) y una aplicación entre E y F es un subconjunto del ExF. Considerando lo referido, entendamos que "sucesión estandar" significa "sucesión que es una aplicación estandar" y que "aplicación estandar" significa "aplicación que es un conjunto estandar".

Se demuestra que si E es un conjunto, E es un conjunto y f es una aplicación estandar entre E y F,

- E es un conjunto estandar

- Si $x \in E$ y x estandar, entonces f(x) estandar.

En efecto,

- Si x, y, t son variables y P(t) es la fórmula

$$\forall x(x \in t \Leftrightarrow y(y = f(x)))$$

entonces P(t) es una fórmula estandar en la que figura libre t y no figura libre variable alguna distinta de t. Luego entonces se verifica la fórmula externa $\exists t\ P(t) \rightarrow \exists^{st} \exists t\ P(t)$. Entonces se verifica la fórmula estandar $\exists t\ P(t)$. Luego entonces se verifica la fórmula externa $\exists^{st}\ t\ P(t)$. Luego entonces E es un conjunto estandar.

- Si x, y son variables y q(x,y) es la fórmula $(x \in E \rightarrow y = f(x))$, entonces q(x,y) es una fórmula estandar en la que figuran libres x, y y no figura libre variable alguna distinta de x, y. Luego entonces se verifica la fórmula externa $\forall^{st} x\ (\exists y\ q(x,y) \rightarrow \exists^{st} x\ y\ q(x,y))$. Luego entonces se verifica la fórmula estandar $\forall^{st}\ x\ \exists y\ q(x,y)$ $\forall^{st}\ x\ .\ \exists^{st}\ y\ q(x,y)$.Entonces se verifica la fórmula estandar $\forall x\ \exists y\ q(x,y)$. Luego entonces se verifica la fórmula externa $\forall^{st} x\ \exists y.\ q(x,y)$. Luego entonces se verifica la fórmula externa $\forall^{st} x\ \exists^{st}\ y\ q(x,y)$. Luego entonces, si $x \in E$ y x estandar, entonces f(x) estandar.

Luego, si r_1, r_2, r_3, ..., es una sucesión estandar de números reales, entonces se verifica que si n es un número natural estandar mayor que 0, entonces r_n es un número real estandar.

Respetando esta condición, continuamos la teoría T de la siguiente manera:

> Admitimos (Principio de la sucesión) que si r_1, r_2, r_3, ..., es una sucesión (interna o externa) de números reales tal que si n es un número natural estandar, entonces existe una sucesión estandar de números reales rl, r2, r_3, ..., tal que si n es un número natural estandar mayor que 0 entonces $r_n = r_n$.

Considerando lo referido sobre la teoría T (o teoría de análisis No Estandar que pretendemos construir) y en particular el Principio de transferencia y el Principio de la sucesión, continuaremos en el próximo artículo o capítulo estableciendo definiciones no estandar de conceptos básicos del Análisis Infinitesimal y comparándolas con las correspondientes definiciones estandar o clásicas.

APENDICE

Los axiomas de la IST (es decir, de la Teoría Interna de Conjuntos, de Edward Nelson) son los de la ZFC junto con los tres axiomas que llamamos "Principio de transferencia", "Principio de idealización" y "Principio de estandarización". El Principio de transferencia ya lo hemos enunciado y conviniendo en que si ξ es una variable y α es una fórmula en la que figura libre ξ, entonces la expresión " $\forall^{st\ fini}\ \xi\ \alpha$" significa " $\forall^{st}\ \xi\ (\xi$ finito $\Rightarrow \alpha)$" (y, en consecuencia, significa " $\forall \xi\ ((\xi$ estandar$)\ \wedge\ (\xi$ finito$)\ \Rightarrow \alpha)$"), podemos enunciar los dos principios restantes de la manera siguiente:

Principio de idealización: Si x, y, z son variables y B(x, y) es una fórmula interna (estandar o noestandar) en la que figuran libres x, y y no figura libre variable alguna distinta de x, y (sin descartar que en B(x, y) figuren conjuntos estandar o noestandar, con tal que sean internos), entonces se verifica la fórmula externa $\forall^{st\ fini}\ z\ \exists x\ \forall y\ (y \in z \Rightarrow B(x, y)) \Leftrightarrow \exists x\ \forall^{st}\ y\ B(x, y)$.

Principio de estandarización: Si x, y, z son variables y F(x) es una fórmula (interna o externa) en la que figura libre x y no figura libre variable alguna distinta de x (sin descartar que en F(x) figuren conjuntos internos o externos), entonces se verifica la fórmula externa $\forall^{st}\ x\ \exists^{st}\ y\ \forall^{st}\ z\ (z \in y \Leftrightarrow (z \in x) \wedge F(z))$

A partir de los principios de transferencia e idealización se demuestra que se verifica el enunciado que nosotros llamamos "Principio de existencia" y a partir de los principios de transferencia y estandarización se demuestra que se verifica el enunciado que nosotros llamamos "Principio de la sucesión".

BIBLIOGRAFIA

Diener, Francine. "Cours d'analyse non standard". Université d'Oran. Départment de Mathématiques. 1983.

Nelson, Edward. "Internal Set Theory: A new approach to nonstandard analysis". Bulletin of the Amer. Math. Soc. Vol. 83. Num. 6. Pags. 1116-1198. Noviembre, 1977.

_______ "Radically Elementary Probability Theory". Princenton University Press, 1987.

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.
- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.
- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.
- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.
- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

INTRODUCCION DE COORDENADAS EN UN PLANO

Fidel Higuera Garrido

La introducción de coordenadas en un plano, o en el espacio de cualquier dimensión, es un problema que ha interesado a gran parte de los investigadores matemáticos desde *Descartes* hasta nuestro días.

Ello es debido a que tal introducción y la asignación a las rectas de ecuaciones lineales con coeficientes en un dominio, ha permitido dotar de una gran potencia al desarrollo de la Geometría, que se encontraría *"coja sin el álgebra"*, según conocida frase de *Fraenkel*.

Autores como *E. Artin* y *R. Bäer* han estudiado esta cuestión y se recomienda una lectura atenta de los trabajos de los mismos que se citan en la Bibliografía.

Sin embargo la introducción de las coordenadas que aquí se efectúa tiene ciertas novedades respecto al trabajo de ambos autores. En efecto la axiomática que se va a proponer es ciertamente distinta de la de los autores mencionados, por un lado, y , por otro, la obtención de coordenadas de un dominio tiene una gran simplicidad. Cabe destacar finalmente el hecho de que el dominio de coordenadas, si bien es un grupo respecto de la adición, con respecto a la multiplicación tiene unas propiedades que le hacen muy poco manejable, ya que ni siquiera es asociativo.

Pues bien, la axiomática que se propone es la que se contiene en el artículo publicado en el Boletín de la Sociedad "Puig Adam" correspondiente al mes de Marzo de 1990, referida a un conjunto de *"puntos"* y *"rectas"* que son los términos indefinidos de nuestro plano.

Supongamos que X e Y son dos puntos distintos y que O no es un punto de $X + Y$. Denotamos por F el sistema de los puntos de $O + Y$. Los elementos de F nos servirán como coordenadas e introduciremos más tarde una adición y una multiplicación de los mismos.

Si c es un elemento de F (ver fig. 1) entonces existe una única recta paralela a $O + X$ que pasa por c, por razones que se apreciarán posteriormente la denominaremos $(y = c)$.

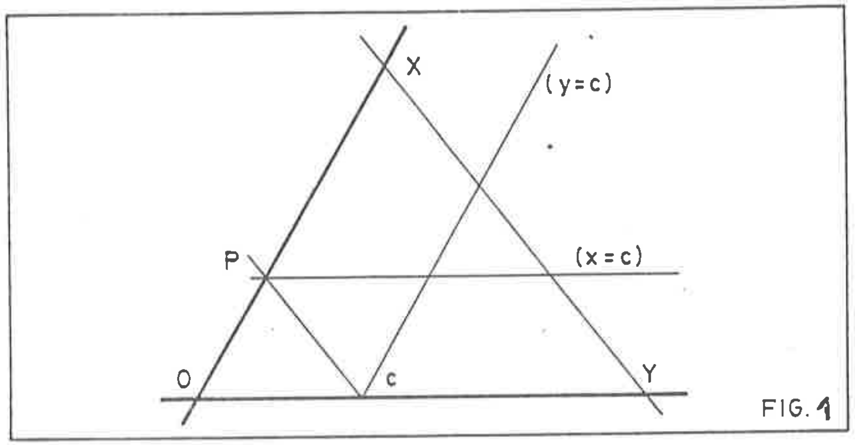


FIG. 1

Si c es un elemento de F entonces existe una única recta paralela a $X + Y$ que pasa por c y no es paralela a $O + X$, pues si lo fuera existirían dos paralelas por X a esta recta cuya existencia se afirma; entonces se encuentran en un punto P por el que pasa una única recta paralela a $O + Y$ que denotaremos por $(x = c)$.

Por la unicidad del paralelismo se sigue inmediatamente que $(y = c) = (y = d)$ si, y sólo si, $c = d$ y, asimismo, $(x = c) = (x = d)$ si, y sólo si, $c = d$.

Si c y d son elementos de F entonces $(x = c)$ e $(y = d)$ son rectas distintas que se cortan en un punto, pues ambas son paralelas a $O + Y$ y $O + X$, respectivamente, y denotamos este punto por (c,d). De $(c,d)=(x = c)(y = d)$ y del último parágrafo se sigue inmediatamente que (c,d) y (c',d') son iguales si, y sólo si, $c = c'$ y $d = d'$.

Supongamos inversamente un punto P del plano (ver fig. 2). Entonces, la única recta paralela por P a $O + X$ cortará a $O + Y$ en un punto bien determinado d, y asimismo, la recta paralela por P a $O + Y$ cortará a $O + X$ en un punto Q, por el que pasará una única recta paralela a $X + Y$, que cortará, a su vez, a $O + Y$ en un punto bien determinado c , y se verificará que $P = (c,d)$ por la propia construcción.

Por tanto, los puntos del plano están en correspondencia biyectiva con los pares (c,d) de elementos de F.

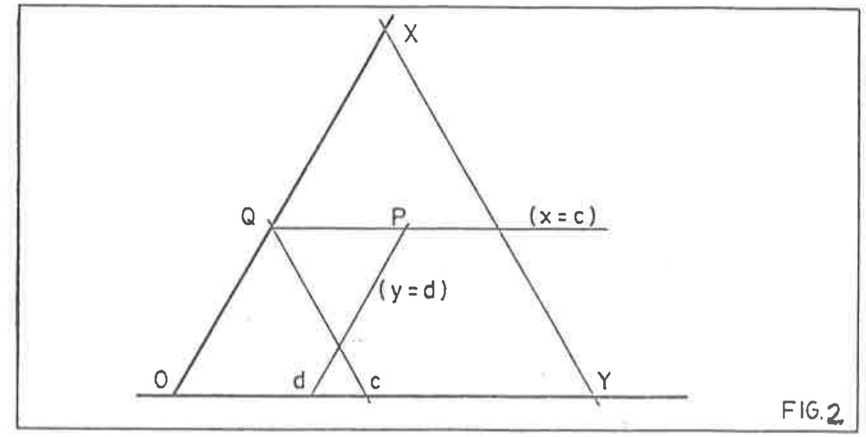


FIG. 2

Si existe una traslación $t = t_c$ para todo c de F, tal que $c = O^{t_c}$, trataremos de introducir la adición en F de la forma siguiente:

$$c + d = O^{t_c t_d}$$

Y es claro que esta operación define un isomorfismo mediante la traslación t de O en el elemento O^t en F. Luego el sistema aditivo $F = F_+$ es un grupo (por serlo las traslaciones).

Sea t una traslación de dirección igual a la de la recta $O + Y$, entonces $(x = c)^t = (x = c)$, entendiendo aquí que $(x = c)$ es una recta fija no de puntos fijos, puesto que $(x = c)$ es paralela a $O + Y$. Si c es un elemento de F, entonces $c = O^{t_c}$ y encontramos que $(y = c)^t = (y = (O)^{t_c})^t$, pues por definición $c = (O)^{t_c}$ y además, puesto que $(y = c)$ es paralela a la recta $O + X$, $(y = (O)^{t_c})^t$ también será la recta de la forma $(y = k)$ donde k es el trasladado de c por t, entonces $(y = (O)^{t_c})^t = (y = (O)^{t_c t}) = (y = c + O^t)$ por la definición de suma. Por tanto, si P es un punto del plano tal que $P = (c,d)$ para ciertos c y d de F, encontramos que $P = (c, d + O^t)$.

Si p es un elemento de F, entonces (o,p) y (p,o) determinan una recta que es paralela a $X + Y$ por construcción. Si q es otro elemento de F, entonces $(o,p)^{t_q} = (o, p + q)$, $(p,o)^{t_q} = (p,q)$, ya que $(p)^{t_q} = (O)^{t_p t_q} = p + q$, y análogamente para la segunda igualdad, además estos puntos $(o, p + q)$, (p,q)

determinan una recta paralela a la determinada por (o,p), (p,o), y por tanto, paralela a $X + Y$, y esto muestra que las rectas paralelas a $X + Y$ están caracterizadas por la ecuación

$$x + y = c \quad \text{o} \quad y = -x + c$$

En orden a posibilitar la caracterización de todas las rectas en forma de ecuacionbes necesitamos una cierta definición de multiplicación en F; y para hacer ésto tenemos que dar preferencia a algún elemento distinto de O que servirá como unidad por la izquierda de esta multiplicación.

Este elemento puede ser elegido de todas formas al azar; en consecuencia, diferentes elecciones llevan a diferentes definiciones de multiplicación.

Sea pues 1 un elemento de F distinto de o. Si r y s son elementos de F, entonces $(x = r)$ y $O + (1,s)$ son dos rectas distintas que se cortan en un punto,(ver fig. 3).

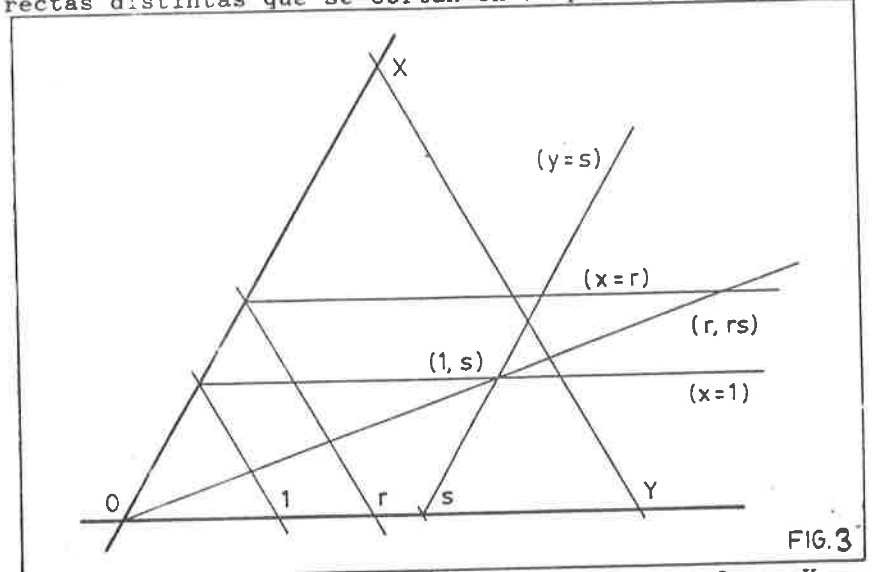


FIG.3

En efecto, $(x = r)$ es paralela a $O + Y$ por construcción, y $O \in O + Y$ y $(1,s) \notin O + Y$, pues $1 \neq o$. Por tanto podemos definir el producto rs como el elemento unívocamente derterminado de F que satisface

$$(r,rs) = (x = r)\ (O + (1,s))$$

Si p es una recta no paralela a $O + Y$ -no es de la forma $(x = c)$- entonces p corta a $O + Y$ en un punto (o,m) para un cierto m de F, puesto que la recta $O + Y$ es tal que sus puntos son del tipo (o,m); y $p^{t_{-m}}$ es una recta paralela a p que pasa por O, puesto que como $(o,m) \in p$,

entonces $(o,m)^{t_{-m}} = (o,\ m + O^{t_{-m}}) = (o,\ m-m) = (o,o) = O$.

La recta $p^{t_{-m}}$ corta a $(x = 1)$ en un punto $(1,s)$ para cierto s de F, y es consecuencia inmediata de nuestra definición de multiplicación que

$$p^{t_{-m}} = O + (1,s) = (y = xs)$$

En efecto, si $(o,o) \in p^{t_{-m}}$ veamos si también pertenece a $(y = xs)$. Si $x = o$ entonces

$$(o,os) = (x = o)\ (O + (1,s)) = (o,o)$$

pues es el único punto de intersección de $(x = o)$ y $O + (1,s)$, luego $o.s = o$.

Por tanto, $p = (O + (1,s))^{t_m} = (O)^{t_m} + (1,s)^{t_m} = (O,m) + (1,s + m) = (y = xs + m)$.

Las rectas $(y = xs + m)$ e $(y = xt + n)$ son paralelas si y sólo si $s = t$. En efecto :

Si $s = t$, aplicando a la primera recta la traslación t_{-m} queda transformada en la recta $(y = xs)$ que será paralela a $(y = xs + m)$. Aplicando a $(y = xs)$ la traslación t_n entonces se transformará en $(y = xs + n)$, que será paralela a $(y = xs)$, y en consecuencia paralela a $(y = xs + m)$.

Si $s \neq t$, efectuando un razonamiento análogo, como resulta que las rectas $(y = xs)$ e $(y = xt)$ son distintas y ambas pasan por (o,o), no son paralelas y sus transformadas $(y = xs + m)$ por t_m e $(y = xt + n)$ por t_n serán distintas y se cortarán también en un punto.

Por tanto, notemos que no solamente ocurre que toda recta determina una ecuación, si no que las rectas recorren exhaustivamente todas las ecuaciones admisibles, y dos rectas serán iguales si, y sólo si, sus ecuaciones son idénticas.

Puesto que $(o,o) = O = (x = o)(O + (1,s)) = (o,os)$, por la definición de producto, y puesto que $(r,ro) = (x = r)(O + (1,o)) = (x = r)(y = o) = (r,o)$, se sigue que $r.o = o = o.s$.

Puesto que $(1,1s) = (x = 1)(O + (1,s)) = (1,s)$ se deduce que $1s = s$.

Puesto que $(y = x.(-1)) = (O + (1,-1)) = (y = -x)$, pues (o,o) y $(1,-1)$ pertenecen a $(y = x.(-1))$ y a $(y=-x)$, se deduce que $-x = x.(-1)$.

Puesto que las rectas $(y = xr)$ e $(y = xs + t)$ para $s \neq r$ no son paralelas, se encuentran en uno, y sólo un punto, se sigue que para tres elementos dados de F, r, s y t tales que $r \neq s$, existe uno, y sólo un, elemento de F que satisface $-xs + xr = t$.

Puesto que los puntos (r,o) y (s,t) para $r \neq s$ determinan una y sólo una recta del tipo $(y = xm + n)$ donde los elementos m y n de F satisfacen las ecuaciones $o = rm + n$ ó $n = -rm$ y $t = sm + n = sm - rm$, se sigue que para tres elementos dados r, s y t de F tales que $r \neq s$, existe uno y sólo un elemento x de F que satisface la ecuación $sx - rx = t$.

De esto se deduce que si $r=o$, $s \neq o$, $t=o$ y existe un único x tal que $-xs+xr=t$, $-xs-xo=o \Rightarrow x=o$, y F es un Dominio de Integridad.

Para una enunciación conveniente de nuestros resultados introduciremos algunos términos. Un sistema cartesiano de números es un conjunto F de elementos con una doble composición, adición $m + n$ y multiplicación mn, sujetas a las siguientes reglas:

(1) F es un grupo respecto a la adición

(2) El producto mn de elementos m y n (en este orden es un elemento unívocamente determinado de F

(3) $om = mo = o$ para todo m de F

(4) Existe un elemento $1 \neq o$ de F tal que $1m = m$, $m(-1) = -m$ para todo m de F

(5) Si r, s y t son elementos de F tales que $r \neq s$, entonces existe uno y sólo un elemento x, y uno y sólo un elemento y de F tal que
$$-xr + xs = t \qquad sy - ry = t$$

Si F es un sistema cartesiano de números entonces notemos por $A(F)$ el sistema de todos los pares (p,q) para p y q de F. Para derivar de este sistema $A(F)$ de puntos un plano afín basta con establecer qué conjuntos de puntos son los conjuntos de todos los puntos de una recta dada.

a) La recta $(x = c)$ consiste en todos los pares (c,y).

b) La recta $(y = xr + s)$ consiste en todos los pares $(x, xr + s)$.

El conjunto $A(F)$ junto con esta definición de rectas constituye un plano afín en el sentido contenido en el artículo publicado por el autor en el Boletín de Marzo del 90 de la Sociedad.

Si c es un elemento de F, entonces una aplicación biyectiva t entre los puntos del plano afín sobre F, definida por $(x,y)^t = (x, y + c)$ deja invariante la recta $(x = d)$ y envía la recta $(y = xr + s)$ sobre la recta $(y = xr + s + c)$ es una traslación en el plano.

Resumiendo todos los resultados obtenemos el siguiente:

<u>*TEOREMA 1*</u>

Si O, A, B son tres puntos no alineados del plano, entonces los siguientes resultados son equivalentes:

(i) Si X es un punto de $O + A$, entonces existe una traslación que transforma O en X.

(ii) Existe un sistema cartesiano numérico F y una aplicación biyectiva f que relaciona los puntos del plano con el conjunto de los pares (x,y) de números de F que cumple los siguientes requisitos:

(ii)' $f(O) = (o,o)$, $f(A) = (o,1)$, $f(B) = (1,o)$

(ii)'' Las rectas paralelas a $O + A$ son enviadas sobre los conjuntos en los que $x = cte.$ y las otras son enviadas por f sobre los lugares que satisfacen $y=xr+s$

Esta última condición contiene una descripción de un plano afín al que nos referiremos como el plano afín sobre F.

Por otra parte, si existe en el plano afín sobre F una traslación que envía el punto (o,o) sobre (a,b), entonces esta traslación puede ser descrita por las siguientes fórmulas de transformación:

$$x' = x + a \qquad y' = y + b$$

Obtendremos a continuación una serie de resultados en los que se muestran las equivalencias entre propiedades geométricas de nuestro plano y propiedades algebraicas de F.

<u>*Lema 1*</u>

El grupo de las traslaciones del plano sobre F es simplemente transitivo si y sólo si

(1) $(u + v)\,w = uv + vw$ para u, v y w pertenecientes a F

Demostración

Si se satisface (1) por F, entonces se ve rápidamente que las fórmulas

$$x' = x + a, \quad y' = y + b \quad \text{con } a \neq o \text{ ó } b \neq o$$

definen una traslación t en el plano sobre F distinta de la identidad.

En efecto, la aplicación es biyectiva por ser F_+ un grupo.

Si $P = (x_1, y_1)$, $P^t = (x_1', y_1')$, $Q = (x_2, y_2)$, $Q^t = (x_2', y_2')$ sean $P + P^t \equiv (y = xr + s)$ y $Q + Q^t \equiv (y = xt + v)$.

De la primera recta resulta

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 r + s \\ y_1' &= x_1' r + s \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 + b = (x_1 + a)r + s \Rightarrow y_1 + b = x_1 r + ar + s$$

y por ser F grupo

$$y_1 = x_1 r + ar + s - b = x_1 r + s \Rightarrow ar + s - b = s$$

Por análoga discusión para $Q + Q^t$ resulta $at + v - b = v$, entonces, sustituyendo adecuadamente

$$\begin{aligned} ar + s &= s - v + at + v = s - v - (-(at + v)) = \\ &= s - v - (-v - at) = s + v(-1) + (-v - at)(-1) = \\ &= s + (v - v - at)(-1) = s + (-at)(-1) = s + at \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ar &= s + at - s = s - (-(at - s)) = s - (s - at) = \\ &= -(-s) - (s - at) = (-s)(-1) + (s - at)(-1) = \\ &= (-s + s - at)(-1) = (-at)(-1) = at \end{aligned}$$

Veamos que $r = t$. Si $r \neq t$, existe un elemento de F y uno sólo, x tal que $-xr + xt = o$, pero entonces $x = o$. Luego $a = o$, y esto no puede ocurrir pues si $a = o$, como $at - v + b = v$, resultaría que b también sería igual a o, contra lo supuesto.

Entonces $P + P^t$ y $Q + Q^t$ son paralelas según se vio en el desarrollo de la demostración del teorema 1.

La demostración sería totalmente análoga para $P + Q$ y $P^t + Q^t$.

En cuanto a que el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo se demuestra de la siguiente manera:

Dados dos puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ existe la traslación que tiene por fórmulas de transformación

$$x' = x + (-p_1 + q_1), \qquad y' = y + (-p_2 + q_2)$$

y transforma P en Q.

Supongamos ahora que el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo, entonces este grupo es conmutativo como se ha señalado anteriormente. Si u es un elemento de F, entonces existe una traslación que envía (o,o) sobre $(-u,o)$ y se verifica que las fórmulas de transformación de esta traslación son

$$x' = x - u \qquad y' = y$$

De este hecho y de la conmutatividad del grupo de las traslaciones, deducimos la conmutatividad de la adición en F. En efecto, si aplicamos la traslación de ecuación

$$x'' = x' + a, \qquad y'' = y' + b$$

resulta en virtud de la conmutatividad de las traslaciones que

$x'' = x - u + a$ y $x'' = x + a - u$, es decir, $-u + a = a - u$

La primera traslación envía la recta $(y = xr)$ sobre la recta $(y = (x + u)r)$ que tiene que ser de la forma $(y = xr + s)$. Sustituyendo $x = o$ encontramos que $s = ur$, de donde se sigue que

$$(x + u)\, r = xr + ur$$

como queríamos demostrar.

Lema 2

Si el sistema cartesiano de números F satisface la ley distributiva (1), entonces las propiedades siguientes son equivalentes:

(2) $1 + 1 \neq o$

(iii) Las diagonales de un paralelogramo no son paralelas en el plano sobre F

(e) Existe una alineación en el plano sobre F

Demostración

(2) $\Rightarrow$ (e)

Si $1 + 1 \neq o$ entonces $1 \neq -1$. Se verifica que una alineación r con centro en el origen está definida por las fórmulas $x' = -x$, $y' = -y$.

En efecto, esta aplicación es biyectiva por ser F un grupo, además $r^2 = 1$, $r \neq 1$ y $(o,o)^r = (o,o)$ y es el único punto fijo. Veamos que si P y Q son dos puntos distintos, $P + Q = (y = xt + s)$ es paralela a $P^r + Q^r = (-y = -xt + s)$ y, por tanto, si M, P, Q están alineados, M^r, P^r y Q^r también lo están y, que para todo X del plano $(o,o) \in X + X^r$.

Si $s = o$, entonces $P + Q = P^r + Q^r$.

Si $s \neq o$, puesto que se verifica (1), F_+ es conmutativo, luego, $-y = -xt + s \Rightarrow y = xt - s$, de donde para que $P + Q$ y $P^r + Q^r$ tengan un punto común $xt+s=xt-s$, de donde se deduce que $s + s = -xt + xt = (-x + x)t = ot = o$, es decir, $s + s = o$, ó lo que es lo mismo, $(1 + 1)s = o$ y, por ser F un dominio de integridad, resulta que $s = o$ contra lo supuesto.

(e) $\Rightarrow$ (2)

Inversamente, si existe una alineación r se sigue del teorema 1, lema 1 y del corolario 6 y el teorema 4 del artículo "Una axiomática para el plano" de la Bibliografía que existe una alineación en el origen, pues bastaría con trasladar el centro de la alineación a dicho punto.

Esta alineación r manda el punto $(1,o)$ sobre el punto (r,o) (en la recta $(y = o)$), donde r es distinto de o y 1, ya que si es o, entonces $(1,o)^r = (o,o)$ y el centro no sería punto fijo; y si fuera 1, entonces $(1,0)^r = (1,o)$, con lo que otro punto fijo sería el $(1,o)$.

Entonces r envía la recta $(x = 1)$ sobre la recta $(x = r)$. Como el punto $(1,c)$ está en la recta $(y = xc)$ que es enviada sobre sí misma por r ya que contiene al centro de la alineación, tenemos que $(1,c)^r = (r, rc)$.

Por tanto, en particular, $(1,-1)$ es enviado sobre $(r,-r)$ y en consecuencia, la recta $(y = -1)$ es enviada sobre la recta $(y = -r)$ paralela a $(y = -1)$ que pasa por el punto $(r,-r)$. Pero el punto $(1,-r)$ es enviado sobre el punto $(r, r(-r))$ y las rectas $(y = -1)$ e $(y = -r)$ son intercambiadas por r, de aquí $r(-r) = -1$ y como, por hipótesis, $r \neq 1$ y $(-1 + 1)1 = 0$ implica $-1.1 + 1 = o$, y $(-1)1 = -1$, entonces $r = -1$. Por tanto, si $1 + 1 = o$ entonces $r(-r) + r(-r) = o$ implicaría que $r(-r) = -(r(-r))$ es decir, $r(-r) = 1$, lo que no es.

(iii) $\Rightarrow$ (2)

Si (iii) es cierto, entonces consideramos el paralelogramo determinado por los puntos (o,o), $(o,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Sus diagonales son las rectas $(y = x1)$ e $(y = -x + 1)$ que no son paralelas, lo que prueba que $1 \neq -1$.

(2) $\Rightarrow$ (iii)

Supongamos finalmente que se satisface (2) y los puntos A, B, C y D determinan un paralelogramo. Es consecuencia del teorema 1 y del corolario 5 del artículo que se cita anteriormente que existe un sistema cartesiano de números F' tal que nuestro plano puede ser considerado un plano sobre F' y tal que en este sistema de coordenadas los puntos A, B, C y D son los puntos (o,o), $(o,1)$, $(1,1)$ y $(1,o)$ respectivamente. Por tanto, si se verifica (2) por F se sigue del resultado del primer parágrafo de la demostración, que existen alineaciones. Si (1) es satisfecho por F se sigue del lema 1 que el grupo de las traslaciones es transitivo. De aquí se sigue por el mismo lema que (1) es satisfecho por F' y, por tanto, podemos aplicar el resultado del segundo parágrafo de la demostración a F', lo que muestra que (2) es satisfecho por F' también.

Que las diagonales del paralelogramo $ABCD$ se encuentran, se verifica por cálculo directo, ya que si $(y = x1)$ e $(y = x(-1) + 1)$ son las diagonales, resulta la ecuación $x1 = x(-1) + 1$, es decir, $-x(-1) + x1 = 1$ y por (5) de F' existe un solo valor de x que lo cumple.

<u>*TEOREMA 2*</u>

Existe para todo par de puntos distintos alineados una alineación que los intercambia si, y solamente si, el plano es el plano sobre un sistema cartesiano de números que satisface (1) y (2), esto es, F es distributivo por la derecha y de característica distinta de 2.

<u>Demostración</u>

Si existe para todo par de puntos alineados una alineación que los intercambia, entonces existen alineaciones y, por el corolario 6 del artículo previamente citado, el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo.

Supongamos que los puntos A, B, C y D del plano forman un paralelogramo. Como consecuencia del teorema 1 existe un sistema cartesiano de números F tal que nuestro plano puede ser considerado un plano sobre F y tal que los puntos A, B, C y D son los puntos (o,o), $(o,1)$, $(1,1)$ y $(1,o)$, respectivamente. Entonces por el lema 1 como el grupo de las traslaciones es transitivo sobre el plano considerado como plano sobre F se cumple que F es distributivo por la derecha. Además, como existe una alineación por hipótesis, en dicho plano y, por tanto en el plano sobre F, por el lema 2 se cumple que $1 + 1 \neq o$, es decir, F es de característica distinta de 2.

Supongamos inversamente que el plano es el plano sobre un sistema cartesiano de números F que es distributivo por la derecha y de característica distinta de 2.

Sean P y Q dos puntos cualesquiera del plano, y A, B y C los puntos (o,o), $(o,1)$ y $(1,0)$ respectivamente. Si $P = (p_1,p_2)$ y $Q = (q_1,q_2)$, entonces $D=(q_1,p_2)$ y $E=(p_1,q_2)$ son tales que $PEQD$ es un paralelogramo. Por el lema 2, las diagonales de dicho paralelogramo se cortan en un punto R y es inmediato demostrar que R es el centro de la alineación que intercambia P y Q, según se deduce del corolario 3 del artículo de la Bibliografía.

Madrid, 1990

BIBLIOGRAFIA

ARTIN, E. "Geometric Algebra". Intersciencie Publishers, Inc. New York (1966).

BAER, R. "The fundamental theorems of elementary Geometry". Transanctions of the American Mathematical Society. Vol. 56 (1944).

DESCARTES, R. "La geometrie". L'Arefppi. Nantes.(1984).

HIGUERA, F. "Construcción axiomática con base en las alineaciones". Ed. Universidad Complutense de Madrid. (1990).

HIGUERA, F. "Una axiomática para el plano". Boletín de la Sociedad Castellana de Profesores de Matemáticas "Puig Adam". Marzo 1990.

HILBERT, D. "Grundlangen der Geometrie" 7th. ed. Leipzig and Berlin (1930).

LOBACHEWSKY "La teoría de las paralelas"(1866)

PEANO, G. "I principi di geometria logicamente esposti". (1889).

RESEÑAS DE LIBROS

HISTORIA DE MADRID A TRAVES DE LAS MATEMATICAS, por María Paz Bujanda Jáuregui y María Concepción Romo Santos. Publicado por el Servicio de Educación del Ayuntamiento de Madrid (c/.Mejía Lequerica, 21. 28004 Madrid. Telf.: 447 54 50). Madrid, 1991. 36 páginas.

Las autoras comparten sus tareas profesionales en el Departamento de Algebra de la Universidad Complutense con su gran preocupación por los problemas de la Educación Matemática. Ambas han colaborado en este Boletín (veanse números 18, 23 y 26).

En el caso de estas dos autoras, es aplicable lo que dijo un gran matemático de otro, con ocasión del Acto de Investidura como Doctor Honoris Causa: << contrariamente a lo que suele ser la generalidad, sus actividades en el campo de la Educación Matemática se han desarrollado "además de" su producción matemática, y no "en lugar de" >>.

Entre los planteamientos de la Educación Matemática actual cabe destacar la conveniencia de vincular la Matemática con la realidad circundante, tratando así de introducir recursos motivadores de su enseñanza. Esta publicación es una excelente muestra de ello.

En el libreto se proponen una serie de actividades a modo de adivinanzas de índole matemática, enmarcadas en la Historia de la Villa y Corte. El lector es agradablemente conducido a tratar de resolver las cuestiones propuestas, al tiempo que a leer con gran atención las narraciones previas, para poder responder a aquellas cuestiones.

Consta de ocho capítulos, de sugestivos títulos:

- Fundación de Madrid
- ¿Qué ciudades existían en España cuando se fundó Madrid?
- ¿Cómo era el Madrid Medieval?
- Un dia en la Medina
- Los habitantes del Madrid Antiguo
- ¿Cómo vivían los madrileños de los siglos XIII al VX?
- Los viajes del agua
- Algunos personajes del viejo Madrid

concluyendo con un solucionario de las adivinanzas en él propuestas.

Aunque pensado para hacer agradable a los pequeños el aprendizaje de la Matemática, su lectura, sin duda, puede deleitar a los mayores, por lo que cabría también encuadrar esta publicación en la denominada Matemática Recreativa. Eso ha sido para mí.

Una esmerada edición a todo color, prologada por el anterior alcalde Agustín Rodríguez Sahagún, contribuye a realzar aún más la calidad de esta publicación.

E. R. M.

<u>CURSO DE CALCULO INFINITESIMAL, por Julio Fernández Biarge y Fernando Robledo de Miguel. Ed. Dossat, S.A. Madrid, 1991. 548 páginas.</u>

El profesor Fernández Biarge, asiduo colaborador de este Boletín, es bien conocido por nuetros socios. Ha desempeñado durante 29 años la cátedra de Matemática Aplicada en la E. T. S. de Ingenieros Navales de la Universidad Politécnica de Madrid, teniendo a su cargo la enseñanza del Cálculo Infinitesimal en el Primer Curso de ese Centro. Con objeto de auxiliar la labor de sus alumnos, redactó unos apuntes, que fué perfeccionando a lo largo de los años.

Nombrado, tras su jubilación, Profesor Emérito de dicha Universidad, ha creido de interés general publicar un libro que recoja, mejorado y enriquecido, lo que esos apuntes tenían de interesante, y lo ha hecho conjuntamente con el joven profesor Robledo, colaborador suyo durante años y que ahora le ha sucedido en la dirección del Departamento en que realizó su labor.

El libro que aquí se presenta puede ser calificado como una obra puente entre la Enseñanza Secundaria y la Matemática más avanzada que constituye el entramado de la tecnología. Aunque en el mundo abundan textos con análoga función, creemos que éste puede situarse en un lugar destacadísimo dentro de los de su género.

Como los autores manifiestan en la Introducción, la formación de los futuros ingenieros o científicos, debe cimentarse en un sólido fundamento matemático; de otra manera, éstos no quedarían en condiciones de comprender, asimilar y aplicar las nuevas tecnologías que irán apareciendo en sus respectivos campos de trabajo. La formación matemática de esos estudiantes no puede consistir ya en el aporte de unos instrumentos acabados en forma de reglas prácticas.

De ahí que el objetivo perseguido por los autores sea fundamentalmente el de habituar a los alumnos al peculiar lenguaje de las Matemáticas, al manejo de las construcciones abstractas que son propias de ellas y a la correcta utilización del razonamiento deductivo. Conseguido ese hábito, el ingeniero estará en condiciones de aprender a utilizar los instrumentos matemáticos que precise en cada momento, y que posiblemente sean todavía desconocidos en la actualidad. Pero, por otra parte, los autores no olvidan el caracter instrumental que las Matemáticas han de tener para los alumnos de las Escuelas Técnicas; por ello, aunque a veces, en el libro, se alcance cierto grado de abstracción, se muestra en el mismo cómo descender de él, hasta llegar a las aplicaciones prácticas.

Entre las características más destacables de este libro podemos citar su brevedad, en relación con el alcance y la solidez de la teoría expuesta; esto lo hace adecuado para ser desarrollado en un curso académico, sin menoscabo de la potencia de los intrumentos matemáticos que suministra y sin que su lectura resulte excesivamente dura para los alumnos. Este buen rendimiento lo han conseguido los autores por tres vias: Mediante la supresión de temas no esenciales, que la tradición mantiene innecesariamente en muchos textos (como son algunas técnicas de obtención de

primitivas); partiendo de unos conceptos fundamentales sólidamente establecidos, que evitan continuos retoques posteriores (como la definición general de direcciones y elementos límites); por último, mediante la introducción de métodos de cálculo potentes que sustituyen a prolijas casuísticas tradicionales (como ocurre con las equivalencias por cociente y en orden).

Teniendo en cuenta que el profesor Fernández Biarge ha estado trabajando con ordenadores, desde que éstos hicieron su aparición en España, hace treinta años, y precisamente en el desarrollo de sus aplicaciones a la ingeniería en los veinte últimos, no sorprende que el libro esté escrito todo él con mentalidad orientada a la utilización informática de sus resultados, aun cuando tan sólo en sus últimos capítulos se hace referencia explícita a los algoritmos y a su papel en la aplicación práctica de los resultados, a través de los ordenadores.

Todas las materias van ilustradas con profusión de ejemplos, cuyo estudio sirve de ejercicio para que el lector asimile debidamente los conceptos fundamentales. En cambio, el libro no incluye ejercicios, ya que estos se han recogido en un volumen independiente titulado *"Problemas Resueltos de Cálculo Infinitesimal"*.

Creemos firmemente que este libro, tan diferente a otros muchos del género, va a cumplir con creces su misión de "obra-puente", objetivo básico de su concepción.

A. M. T.

PROBLEMAS RESUELTOS DE CALCULO INFINITESIMAL, por Fernando Robledo de Miguel y Julio Fernández Biarge. Ed. Dossat, S.A., 1991.

Esta obra está concebida como un complemento al *"Curso de Cálculo Infinitesimal"* de los mismos autores. Puede ser utilizada, no obstante, como auxiliar de otros textos, ya que, al principio de cada capítulo, incluye un breve resumen de la teoría empleada en él, con objeto de aclarar el significado exacto de los términos y símbolos utilizados.

Se trata de una colección de problemas resueltos, cuyos enunciados fueron propuestos a los alumnos de la E. T. S. de Ingenieros Navales de la Universidad Politécnica de Madrid en pruebas de la asignatura de Cálculo Infinitesimal de Primer Curso, durante los últimos años.

Los autores señalan que estos enunciados están pensados para ayudar a los alumnos a alcanzar los objetivos generales del curso, entre los que destaca el de iniciarlesen el uso del lenguaje matemático, del razonamiento deductivo y de del manejo de las construcciones abstractas que son propias de las Matemáticas, y a la vez, para conseguir una beneficiosa función evaluadora.

Pero para que un sistema de evaluación sea recomendable, no basta con que constituya un buen elemento de medida del grado de formación del alumno, sino que ha de inducir, en los que saben que han de estar sometidos a él,

una actividad de preparación que sea justamente la que conduce a alcanzar los objetivos propuestos para el curso.

Según explican los autores, en la asignatura de Cálculo Infinitesimal del primer curso de la citada Escuela, todas las evaluaciones parciales o finales consisten exclusivamente en la resolución de varios ejercicios o problemas, con el auxilio de apuntes o libros de texto. Se exigen soluciones bien razonadas, y al final del examen se entregan las soluciones resumidas, para que el alumno pueda confirmar sus razonamientos o corregir sus errores.

Dada la ausencia de pruebas teóricas tradicionales, se comprende que los problemas de esta colección vayan directamente encaminados a comprobar la correcta asimilación por los alumnos de los conceptos fundamentales y la eficaz adquisición de las técnicas de cálculo estudiadas.

Eso explica la ausencia de problemas en los que se trate de poner a prueba el ingenio o la inspiración del alumno, cuando no la posesión de "trucos" ensayados. En muchos enunciados, las preguntas sucesivas van marcando al alumno los pasos sucesivos que debe dar para completar la solución. Los autores advierten que en muchos casos han sacrificado la belleza de los problemas a su finalidad didáctica.

En muchas ocasiones, la simple lectura atenta del enunciado, hasta comprender la situación matemática presentada en él, es un excelente ejercicio para el alumno. La redacción correcta de las respuestas, a que se ve obligado, es otro.

Resulta así un libro de problemas resueltos muy diferente, en líneas generales, de lo que es frecuente encontrar en los muchos de los que se han publicado.

Las soluciones ofrecidas en el libro están expuestas con claridad, pero se presentan bastante resumidas, de manera que el lector tenga que efectuar algún esfuerzo personal para seguirlas, ya que la lectura de una solución muy detallada y explicada, sin un previo trabajo sobre el problema, suele ser esteril desde el punto de vista formativo.

Los problemas están clasificados en ocho grandes grupos de materias y cada uno lleva un título y un comentario, que ayudan a encontrar los que ilustran una determinada parte de la teoría.

Creemos que este libro será de una gran utilidad para profesores y alumnos de la asignatura de Cálculo Infinitesimal.

A. M. T

ECUACIONES DIFERENCIALES. METODOS DE INTEGRACION Y CALCULO NUMERICO, por V. Fraile. Ed. Tebar Flores. segunda edición, corregida y ampliada, 328 pág. Madrid, 1991.

Cuando un libro de ecuaciones diferenciales alcanza la segunda edición, siendo el autor un profesor jubilado hace años, es señal de que el libro es, como mínimo, útil y, como consecuencia, inteligible.

En esta excelente obra, los conceptos y propiedades que son base de los métodos de integración de ecuaciones están tan claramente expuestos que queda garantizada la satisfacción del lector. Se nota, además, que el autor es un escritor nato (hace años publicaba artículos de colaboración muy buenos en un importante diario madrileño).

El capítulo 1 podrá aparecer a algún lector que está fuera de lugar porque, aparentemente, su estructura se separa de la del resto de la obra. Puede que su sitio más idóneo fuera el de un apéndice. Sin embargo, tiene mucho que ver con las ecuaciones diferenciales, puesto que estudia la posibilidad de que algunas de ellas tengan soluciones irregulares como, por ejemplo, poligonales; y esto es muy importante. Por añadidura, este capítulo (reorganizado y ampliado en la segunda edición) es, justamente, un estudio muy valioso del cálculo diferencial de las gráficas con picos y saltos, consideradas como unidades, y no troceadas. El rigor y la altura científica de dicho estudio confiere un enorme valor de investigación a este aspecto del análisis matemático.

Hay que destacar también el capítulo 5 añadido en esta segunda edición. Por lo que llevo leido en obras editadas en castellano desde hace unos años hasta hoy, la integración numérica de ecuaciones diferenciales está explicada

con mucha mayor extensión en la obra que comento. Aparte su introducción, que es notable, se exponen con minuciosidad los métodos mono y multipaso más importantes; y en el método de Euler sobresale el estudio de la acotación de los errores. Hay, además, un par de ejemplos-guía. El Apéndice del libro está ampliado y mejor expuesto que en la edición anterior.

Sobre la primera edición hay mejoras evidentes en los demás capítulos. Pero hay partes no reformadas porque no lo necesitan. Entre ellas citaré aquí el teorema de existencia y unicidad. Bien sabemos qu la demostración de este teorema es difícil, sobre todo si se atiende al rigor sin afán didáctico. En la obra de Fraile el rigor es absoluto, pero está condimentado con la mejor pedagogía. La preparación de esta demostración empieza con los espacios métricos y acaba en el teorema de Banach del punto fijo. Es un ejercicio de destreza didáctica admirable.

En el capítulo dedicado a la transformación de Laplace, estos niveles didácticos alcanzan cotas máximas. Al tratar de la transformación inversa, el autor soslaya el empleo de una fórmula general de inversión pretextando que en el libro no se incluyen, como repaso, funciones de variable compleja. A mi juicio, deben darse por sabidas, mereciendo la pena hallar transformadas con dicha fórmula mediante el cálculo de residuos.

Vicente Fraile ha tenido la colaboración de tres hijos. Ante ésto no resisto a la tentación de evocar aquellos años en que él y yo éramos estudiantes y amigos entrañables. La casa de sus padres era también la mía. En ella se respiraba un culto humanismo liberal y una sencillez y generosidad permanentes. Su hermano Arturo (a quien está dedicada esta obra) tenía 27 años cuando murió, y había publicado un trabajo sorprendente en la "Revista Matemática Hispano-Americana" sobre geometría analítica de poligonales, que im-

presionó a los más eminentes matemáticos españoles de entonces. A su muerte, le dedicaron artículos Rey Pastor, Puig Adam, Gallego Díaz y Barinaga. Estoy orgulloso de haber intercambiado ideas con aquel joven y amigo excepcional. Pero todo esto no me ha impedido hacer aquí una pequeña crítica desapasionada del libro de Vicente Fraile, en su segunda edición.

José García Fraile.

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

pro-pues-tos en nº	procedentes de	Números de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números: 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	Obs.
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83-París	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	13-14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2-86	18	19	20	18	19	19					C
	Varios							17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	20-21	20	23	21	-	C
11	OME-f1-86 /	13	14	14	14	14	23	20	15 /	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	C
12	OI-87-Uruguay	16	14	14	17	15	17					C
	OME-f1-Extremdª							15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21					C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	C
20	OME-f1-88	24	26	24	25	24	26	24	26			C
	"Putnam"									26	24	C
21	OME-f2-89 /	24	27	24	27	27	24 /	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	XX /	XX	XX	XX	XX	
	Oposiciones	XX	XX	29	-	-	-	-	-	-	-	
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	XX	XX	XX	-	-	
24	OME-f1-90	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
25	OME-f2/f1-90	XX	XX	29	29	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
26	OMI-90-China /	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OIM-90-Vallad.	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
27	OME-f1-91	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
28	OME-f2-91	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
29	OMI-91-Suecia	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	

CLAVES: XX = Pendientes de publicación . C = Completo.
OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2).
OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OI = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA 32ª OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL CELEBRADA EN SUECIA EN JULIO DE 1991

PROBLEMA 1º :

Sea I el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC. Las bisectrices interiores de los ángulos $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle BCA$ intersecan los lados opuestos en A', B' y C' respectivamente. Demuestre que

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

\- - - - - -

PROBLEMA 2º :

Sea n un entero mayor que 6 y sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ todos los números naturales menores que n y relativamente primos con n. Si

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0$$

demuestre que n es un número primo o una potencia entera de 2.

\- - - - - -

PROBLEMA 3º :

Sea $S = \{1,2,3,\ldots,280\}$. Hallar el menor número natural n tal que en cualquier subconjunto de S con n elementos hay 5 números que son primos entre sí dos a dos.

\- - - - - -

PROBLEMA 4º :

Sea G un grafo conexo con k aristas. Demuestre que es posible numerar las aristas de G de 1 a k de tal manera que para cada vértice de G que pertenece a dos o más aristas, el máximo común divisor de los números asignados a esas aristas es 1.

[Un *grafo* es un conjunto de puntos llamados *vértices* y un conjunto de *aristas* que unen pares de vértices distintos. Cada par de vértices distintos x, y tiene a lo más una arista que los une. El grafo G es *conexo* si para cada par x, y de vértices distintos existe una sucesión de vértices $x = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m = y$, tal que cada par v_i, v_{i+1}, $0 \leq i < m$, esta unido por una arista de G.]

- - - - - -

PROBLEMA 5º :

Sea ABC un triángulo y P un punto interior al triángulo. Demuestre que al menos uno de los ángulos $\sphericalangle PAB$, $\sphericalangle PBC$ o $\sphericalangle PCA$ es menor o igual que 30°.

- - - - - -

PROBLEMA 6º :

Una sucesión infinita $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de números reales es *acotada* si existe una constante C tal que $|x_i| \leq C$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Dado cualquier número real a mayor que 1, construir una sucesión infinita y acotada $x_0, x_1, x_2, \ldots$ tal que se cumpla

$$|x_i - x_j||i - j|^a \geq 1, \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots \quad (i \neq j).$$

- - - - - -

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 5 (Boletín nº 22)

Demuestre que para cada entero estrictamente positivo n existen n enteros estrictamente positivos y consecutivos tales que ninguno de ellos es potencia entera de un número primo.

Solución

Hay infinitas soluciones para cada n. En efecto, para el entero $m \geq 2$, se forma el producto

$$p_m = [(1 + n)!]^m$$

Entonces los números

$$p_m + 2,\ p_m + 3, \ldots,\ p_m + k, \ldots,\ p_m + n + 1$$

son naturales y consecutivos, tales que ninguno es una potencia entera de un primo; en efecto $p_m + k$ es divisible por k, pero no por k^2

$$[1.2.3\ldots k\ldots(n+1)]^m + k = k[2^m.3^m\ldots k^{m-1}\ldots(n+1)^m + 1]$$

luego es el producto de k por un número que no contiene el factor k y por tanto, no es una potencia entera de ningún número.

José V. García Sestafe (Madrid)

* * * * *

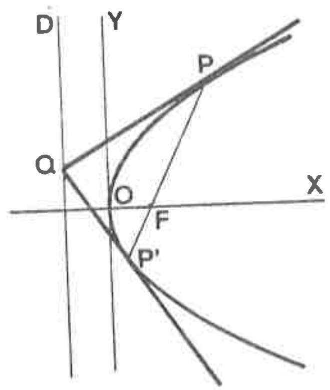
PROBLEMA 13 (Boletín nº 22)

Se considera la parábola $y^2 = 4ax$ y se trazan las tangentes a la misma por los extremos de una cuerda cualquiera que pase por el foco.

a) Demostrar que las tangentes forman un ángulo recto (entre sí).

b) Estudiar la veracidad del recíproco (si las tangentes son perpendiculares, la cuerda que une sus puntos de contacto pasa por el foco.

Solución



Sea P un punto genérico $P(at^2, 2at)$. La cuerda PP', incidente con el foco tiene por ecuación

$$y = \frac{t^2}{t^2 - 1}(x - a)$$

Su intersección con $y^2 = 4ax$ proporciona

$$y = \frac{2t}{t^2 - 1}\left(\frac{y^2}{4a} - a\right) \rightarrow 2ty^2 - 4a(t^2 - 1)y - 8a^2t = 0$$

y como se anula para $y = 2at$, la otra raiz es

$$y_1 = -\frac{8a^2t}{2t} : 2at = -\frac{2a}{t}$$

Por otra parte, como $2yy' = 4a \rightarrow y' = \frac{2a}{y}$, las pendientes de las tangentes en P y P' son, respectivamente

$$\text{en P: } m = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t} ; \qquad \text{en P': } m' = \frac{2a}{-2\frac{a}{t}} = -t$$

luego ambas tangentes son perpendiculares, con lo que queda probada la primera parte.

Sea $Q(\alpha,\beta)$ un punto exterior a la parábola, tal que las tangentes trazadas por él a la parábola sean mutuamente perpendiculares. Una recta genérica incidente con Q en

$$y - \beta = \lambda(x-\alpha)$$

cuya intersección con $y^2 = 4ax$, proporciona

$$y-\beta = \lambda\left(\frac{y^2}{4a} - \alpha\right) \rightarrow \lambda y^2 - 4ay + 4a\beta - 4\lambda a\alpha = 0$$

y como debe ser tangente, su discriminante debe ser nulo

$$4a^2 - \lambda(4a\beta - 4\lambda a\alpha) = 0 \rightarrow \alpha\lambda^2 - \beta\lambda + a = 0$$

y como ambas tangentes deben ser perpendiculares, el producto de las dos raíces λ_1 y λ_2 debe ser -1, o sea

$$\frac{a}{\alpha} = -1, \quad \text{osea} \quad \alpha = -a$$

luego el lugar geométrico de los puntos (α,β) desde donde se pueden trazar tangentes perpendiculares a la parábola $y^2 = 4ax$, es la recta de ecuación $x = -a$, esto es, la directriz de dicha parábola. Por otra parte, como la directriz es la polar del foco, todos los pares de tangentes, trazadas desde cualquier punto de dicha directriz, serán tales que la cuerda que subtienden sus puntos de contacto es incidente con el foco, con lo que queda probada la segunda parte del problema.

OBSERVACION: La ecuación

$$y = \frac{2t}{t^2-1}\,(x-a)$$

no está definida para $t = \pm 1$, pero la cuerda de ecuación $x = a$, corta a la parábola en $y = \pm 2a$. Las pendientes de las tangentes en los respectivos puntos son $m_1 = 1$ y $m_2 = -1$.

José V. García Sestafe (Madrid)

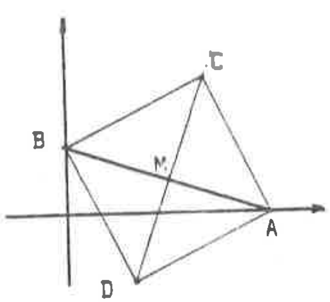
Otra solución de: Amparo Ortega.

* * * * *

PROBLEMA 5 (Boletín nº 23)

Se dan los puntos A(a,0) y B(0,b), tales que $a+b = 2d$ (siendo d constante). Sobre AB como diagonal, se construye un cuadrado, cuyos otros dos vértices son C y D. Probar que, al variar a y b, uno de estos vértices se mantenien fijo y hallar el lugar geométrico determinado por el otro.

Solución



Sea el punto medio de AB, $M(a/2,\ b/2)$ como $|AB|^2 = a^2 + b^2$, se tiene que

$$|CM| = |DM| = |AB|/2 = \sqrt{a^2+b^2}/2$$

luego si (x,y) son las coordenadas de cualquiera de los dos vértices se tiene:

$$(x-a/2)^2 + (y-b/2)^2 = (a^2+b^2)/4$$

Por otra parte, por ser puntos de la mediatriz de AB:

$$b(y-b/2) - a(x-a/2) = 0$$

Así, reduciendo y de estas dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$(x-a/2)^2 = b^2/4$$

entonces, si

$$x-a/2 = b/2 \Rightarrow x = (a+b)/2 = d \quad \text{e} \quad y = a/2 + b/2 = d$$

punto fijo de coordenadas (d,d)

y si

$$x-a/2 = -b/2 \Rightarrow x = (a-b)/2 = a-d \quad \text{e} \quad y = -a/2 + b/2 = -a+d$$

ecuaciones paramétricas de la recta $x + y = 0$.

Miguel E. Serrano Caballero

Otras soluciones de:
- J.M. Celorio, Laseca (Soria),
- J.P. Sánchez Mielgo (Segovia) y
- J.V. García Sestafe (Madrid)

* * * * *

PROBLEMA 3 (Boletín 25)

Se llama parte entera de un número real a y se representa por [a] al mayor entero menor o igual que a. Demostrar que la parte entera de $(4 + \sqrt{11})^n$, donde n es un número natural, es un número impar.

Solución

La suma $S = (4 + \sqrt{11})^n + (4 - \sqrt{11})^n$ es un número natural par, puesto que

$$S = \{4^n + \binom{n}{1} 4^{n-1}.11^{1/2} + \binom{n}{2} 4^{n-2}.11 + \binom{n}{3} 4^{n-3}.11^{3/2} + \ldots + \binom{n}{n-1}.4.11^{(n-1)/2} + 11^{n/2}\} + \{4^n - \binom{n}{1} 4^{n-1}.11^{1/2} + \binom{n}{2} 4^{n-2}.11 - \binom{n}{n-3} 4^{n-3}.11^{3/2} + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1}.4.11^{(n-1)/2} + (-1)^n .11^{n/2}\} = 2\{4^n + \binom{n}{2} 4^{n-2}.11 + \binom{n}{4} 4^{n-4}.11^2 + \ldots\} = 2$$

Por otra parte, como $(4 - \sqrt{11}) < 1$, también

$$(4 - \sqrt{11})^n < 1$$

y, por tanto

$$[(4 + \sqrt{11})^n] = [2 - (4-\sqrt{11})^n] = \text{impar}$$

ya que

$$2 - (4 - \sqrt{11})^n$$

es un entero par disminuído en un número positivo menor que la unidad, luego su parte entera es impar.

José V. García Sestafe (Madrid)

Otra solución de:
- Rodolfo Esteve Arolas (Valencia)

* * * * *

PROBLEMA 4 (Boletín nº 25)

Demostrar que la suma

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}$$

para todo valor real de $a \geq -3/4$, es independiente del valor de a y hallar el valor de dicha suma.

Solución

Sea S la suma propuesta que la escribimos

$$S = \sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y}$$

$$S^3 = x + y + x - y + 3\sqrt[3]{(x+y)^2 (x-y)} + 3\sqrt[3]{(x+y)(x-y)^2} =$$

$$= 2x + 3\sqrt[3]{(x+y)(x-y)}\left[\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{(x-y)}\right]$$

$$S^3 = 2x + 3\sqrt[3]{x^2 - y^2} . S$$

Pero

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+3}{6}\right)^2 \cdot \frac{4a+3}{3} = \frac{-a^3}{27}$$

luego: $S^3 = a + 1 - aS$, es decir: $S^3 + aS - (a+1) = 0$, ecuación cuya única solución real es $S = 1$ para todo a.

Rodolfo Esteve Arolas (Valencia)

Otras soluciones de:

- J. Miguel Celorrio Laseca (Soria), y
- J.V. García Sestafe (Madrid).

* * * * *