Mayo, 1991

SOCIEDAD 'PUIG ADAM' DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Boletín

28

B O L E T Í N de la Sociedad "PUIG ADAN" de Profesores de Matemáticas

Mayo de 1991 nº 28 (1990-91)

- Toda la correspondencia para la Sociedad deberá dirigirse al

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

- La portada de este número ha sido creada por nuestro colaborador don Juan Bosco Romero Márquez.

VEA LOS ACUERDOS ADOPTADOS EN NUESTRAS ASAMBLEAS GENERALES

ÍNDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: *José Vicente García Sestafe*

Vicepresidente por Madrid:
José Manuel Martínez Sánchez
Vicepresidente por Castilla - La Mancha:
Salvador Herrero Pallardo
Vicepresidente por Castilla - León:
Juan Bosco Romero Márquez
Vocal de actividades y concursos:
Juan Ochoa Mélida
Vocal de relaciones institucionales:
Eugenio Roanes Macías
Vocal de gestión de publicaciones:
Carmen García-Miguel Fernández
Vocal de redacción de publicaciones:
Julio Fernández Biarge
Secretario: (encargada provisionalmente)
Carmen García-Miguel Fernández
Vicesecretario:
Enrique Rubiales Camino
Tesorero:
Alberto Aizpún López
Bibliotecario:
Jesús Begoña Aina
Vicepresidencias a extinguir en 1992:
por Cuenca: *Valero Antonio Alías Tuduri*
por Segovia: *Juan Luis Sanz de Andrés*

\- - - - - -

ASAMBLEA GENERAL EXTRAORDINARIA

Como estaba convocada, nuestra Sociedad celebró una **Asamblea General Extraordinaria** el pasado día 27 de abril de 1991, en los locales del Instituto "Isabel la Católica" de Madrid, cuyo Orden de Día tenía como único punto el deliberar, y aprobar, si procedía, una reforma de sus Estatutos.

Se tomó como base de discusión el texto del Proyecto de Estatutos que aparecía en el anterior número de nuestro Boletín, y sobre el mismo se presentaron enmiendas.

Teniendo noticias de la reciente constitución de una Sociedad Extremeña de Profesores de Matemáticas, con la que deseamos mantener cordiales relaciones, se decidió eliminar de dicho Proyecto la extensión de nuetro ámbito preferente de actuación a Extremadura, sin perjuicio de que se puedan organizar actividades en coordinación con la nueva Sociedad citada.

Realizada la oportuna consulta al profesor don Román Riaza que, como siempre, nos ha prestado su entusiasta colaboración, se ha fijado como sede provisional de nuestra Sociedad, el Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería de la E. T. S. de Ingenieros Industriales de Madrid.

Por unanimidad de los asistentes, quedó aprobado, con las modificaciones reseñadas, el texto de nustros nuevos Estatutos, tal como aparece publicado en páginas posteriores, y como será sometido a los oportunos trámites legales.

En consecuencia, queda modificado el nombre de nuestra Sociedad, desapareciendo de ella el calificativo "Castellana", que no correspondía a la realidad actual.

\- - - - - -

ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA

A continuación de la Asamblea Extraordinaria se celebró la Ordinaria de nuestra Sociedad correspondiente a 1991, con arreglo al Orden del Día de la convocatoria.

Leída el acta de la sesión anterior, fué aprobada.

A continuación nuestro Presidente, Sr. García Sestafe se refirió a la labor realizada por nuestra Sociedad a lo largo del año precedente, materializada fundamentalmente en la publicación de nuestro Boletín y en los Concursos de Resolución de Problemas, teniendo unas palabras de gratitud para los que colaboran desinteresadamente en ambas tareas, así como en las relativas a las de secretaría y tesorería de la Sociedad. Hizo pública también la gratitud de la Sociedad a "Coca-Cola España", que se ha ofrecido de nuevo a costear el importe de los premios que serán entregados a los ganadores de nuestro IX Concurso.

Se refirió después al trabajo desarrollado por algunos socios para preparar la reforma de los Estatutos que se acababa de aprobar en la Asamblea Extraordinaria, que esperamos redunde en una mejor organización de la Junta Directiva, con el nuevo reparto de funciones que ha aconsejado la experiencia de los años precedentes.

Sometió después a la Asamblea la idea de estudiar de nuevo la posibilidad de que nuestra Sociedad solicite la incorporación a la *"Federación Estatal de Profesores de Matemáticas"*, cuyos Estatutos fueron publicados en el número 17 de nuestro Boletín (marzo de 1988). A ella se han adherido casi todas las Sociedades de Profesores de Matemáticas existentes. La adhesión tiene el inconveniente de que supone pagar una cuota federativa de 1.500 pesetas por socio, pero da derecho, en cambio, a recibir la revista "SUMA", a la que nos hemos referido diversas veces en el Boletín, a importantes descuentos en las cuotas de inscripción en las Jornadas y otras actividades que organiza la Federación. Para la Sociedad en conjunto, la relación con las demás sociedades de objetivos similares, tiene evidentes ventajas.

Propuso que aunque la Asamblea tiene atribuciones para tomar la decisión de incorporarnos o no, sería conveniente, tras entablar conversaciones con la Federeción, convocar una Asamblea extraordinaria en la que los socios que tuviesen dificultad en asistir pudiesen emitir su voto por correo.

A continuación, el tesorero, Sr. Aizpún, presentó a la Asamblea las cuentas de ingresos y gastos de la Sociedad, que fueron aprobadas por unanimidad. Dió información también sobre las gestiones que está realizando para obtener el N. I. F. preceptivo para poder operar con los bancos.

Se refirió a continuación a la marcha económica de la Sociedad, reflejada por las anteriores cuentas, que se está viendo muy afectada por la continua elevación de los costes de edición y distribución del Boletín. Se discutió la conveniencia de convertirlo en Revista, lo que permitiría insertar publicidad, tener suscriptores y acogerse a tarifas de Correos más reducidas, aunque también exigiría ciertas obligaciones y el cumplimiento de requisitos legales. Se acordó estudiar a fondo esta posibilidad.

El tesorero lamentó el gran número de recibos que son devueltos por los bancos por causas muy diversas, ocasionando importantes gastos de comisiones bancarias. Se trata de localizar por correo a los socios con los que ocurre esto, pidiéndole los datos correctos de su cuenta, pero quedan muchos casos sin resolver. También nos devuelve el servicio de Correos algunos boletines, por haber cambiado el domicilio el destinatario, sin comunicarlo a la Sociedad. Pedimos la colaboración de todos para subsanar estas deficiencias.

Estudiada la situación económica, se llegó a la conclusión de que era necesaria una elevación de las cuotas para el curso 1991-92. Discutida la cuantía de ésta, se acordó fijarla en 3.000 pesetas anuales, tanto para los socios de número como para los benefactores, quedando exentos de cuota los de honor.

Se procedió a continuación a renovar la composición de la Junta Directiva, de acuerdo con los Estatutos que acababan de aprobarse. Dicha Junta quedó nombrada, con el acuerdo unánime de los presentes, en la forma que aparece en la página 2 de este Boletín. No se encontró, en el momento, candidato para el puesto de Secretario, por lo que se acordó que provisionalmente continuase actuando como secretaria doña Carmen García-Miguel, a pesar de haber sido designada vocal de gestión de publicaciones.

La Junta Directiva propuso a la Asamblea el nombramiento de nuestro primer socio de honor, en favor de nuestro querido compañero don José Ramón Pascual Ibarra, que continuando una vida dedicada con entusiasmo a la mejora de la enseñanza de las Matemáticas, fué el primer Presidente de nuestra Sociedad. La propuesta fué aceptada por aclamación.

Tras un breve punto de ruegos y preguntas, se levantó la sesión.

ESTATUTOS

DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Aprobados en la **Asamblea General Extraordinaria** celebrada en Madrid el día 27 de Abril de 1991:

Artº 1º. La *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* tiene por ámbito de actuación preferente las Comunidades Autónomas de Madrid, Castilla-La Mancha y Castilla y León, sin excluir la posibilidad de actuaciones en otras comunidades nacionales o extranjeras.

Se configura como una sociedad científico-cultural, sin ánimo de lucro y se acoge al régimen jurídico de la vigente Ley de Asociaciones.

Artº 2º. La sede de la Sociedad se sitúa provisionalmente en el Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial de la E. T. S. de Ingenieros Industriales, situada en la calle de José Gutiérrez Abascal de Madrid.

Artº 3º. Son fines de la Sociedad:

a) Elevar y actualizar el nivel profesional, científico y pedagógico de los profesores de Matemáticas.

b) Contribuir al avance y difusión de los conocimientos matemáticos.

c) Impulsar el desarrollo y divulgación de las investigaciones en Matemáticas y en su Didáctica, así como preocuparse por su implantación en los centros docentes.

d) Servir de nexo de unión entre los profesores de Matemáticas para el intercambio de experiencias e ideas.

e) Organizar cursos, conferencias, reuniones y concursos, así como la publicación de monografías, revistas y boletines y cuantas medidas contribuyan a la consecución de los fines anteriores.

f) Se excluyen la defensa de intereses económicos y profesionales.

Artº 4º. Habrá tres tipos de socios: de honor, de número y benefactores.

Artº 5º. Los socios de honor serán nombrados por la Asamblea General, a propuesta de la Junta Directiva o de 25 socios de número.

Artº 6º. 1.- Serán socios de número todos los profesores de Matemáticas que lo soliciten.

2.- Serán socios benefactores todas las personas físicas o jurídicas que lo soliciten para contribuir de manera importante a la consecución de los fines de la Sociedad.

3.- Derechos de los Socios:

a) Los socios podrán beneficiarse y participar en cuantas actividades promueva la Sociedad. A este fin, los socios benefactores podrán participar por sí mismos o, en el caso de Entidades o Instituciones, por persona que los represente.

b) Los socios recibirán gratuitamente, o con cuotas de suscripción reducidas, las publicaciones de la Sociedad.

c) Los socios de honor y benefactores tendrán voz, pero no voto en las Asambleas.

d) Los socios de número tendrán voz y voto en las Asambleas.

4.- Deberes de los Socios de número o benefactores:

a) Satisfacer las cuotas fijadas.

b) Asistir a las Asambleas y a las reuniones para las que sean expresamente citados y participar en las comisiones para las que sean elegidos por la Asamblea o por la Junta Directiva (mediante persona que los represente, en el caso de Entidades o Instituciones).

Artº 7º. Los socios causarán baja por alguna de las causas siguientes:

a) Por renuncia voluntaria.

b) Cuando hayan dejado de satisfacer las cuotas correspondientes a un año.

c) Cuando por su conducta, desprestigien a la Sociedad, a juicio de la Asamblea.

Artº 8º. La Asamblea es el órgano soberano de la Sociedad y está formada por todos los socios.

Artº 9º. 1.- La Asamblea se reunirá ordinariamente una vez al año, en el lugar y fecha que acuerde la Junta Directiva, y extraordinariamente cuando lo solicite ésta o un tercio de los socios.

2.- Compete a la Asamblea ordinaria:

a) Elegir los cargos de la Junta Directiva.

b) Aprobar, si procede, la memoria y cuentas reglamentarias, que presente la Junta Directiva.

c) Dar facultad a la Junta Directiva o a las Comisiones nombradas por ésta, para cuantas gestiones sean necesarias para el cumplimiento de los fines de la Sociedad.

d) Fijar las cuotas de socio.

3.- Compete a la Asamblea extraordinaria:

a) La resolución de asuntos urgentes.

b) Adoptar los acuerdos relativos a acciones que expresamente le encomiendan estos Estatutos.

Artº 10º. La Asamblea queda válidamente constituida en primera convocatoria con la presencia de la mitad más uno de los socios, o media hora más tarde, en segunda convocatoria, con los socios presentes.

Artº 11º. Los acuerdos se tomarán con el voto favorable de la mitad más uno de los socios presentes, salvo en los casos en que estos Estatutos exigen expresamente otra cosa.

Artº 12º. La Junta Directiva, nombrada por la Asamblea en la forma que regulan estos Estatutos, estará formada por:

-- Un Presidente
-- Tres Vicepresidentes (uno por cada una de las Comunidades Autónomas de su ámbito de actuación preferente),
-- Un Vocal de actividades y concursos,
-- Un Vocal de relaciones institucionales,
-- Un Vocal de gestión de publicaciones.
-- Un Vocal de redacción de publicaciones.
-- Un Secretario.
-- Un Vicesecretario.
-- Un Tesorero.
-- Un Bibliotecario.

Artº 13º. La Junta Directiva podrá funcionar en pleno o por Comisiones, en cada una de las cuales formarán parte el Presidente, o miembro de la Junta en quien delegue, y el Secretario o Vicesecretario. La Junta Directiva se reunirá al menos tres veces al año.

Artº 14º. Son funciones de la Junta Directiva:

a) Convocar las Asambleas ordinarias o extraordinarias.

b) Fijar el Orden del Día de las Asambleas.

c) Promover cuantas actividades estime convenientes para la consecución de los fines de la Sociedad.

d) Recoger y encauzar las propuestas o sugerencias de los socios.

e) Administrar la Sociedad.

Artº 15º. La Junta Directiva será nombrada por la Asamblea, que en cada sesión ordinaria renovará los cargos que hayan quedado vacantes por renuncia justificada de sus titulares o por haber expirado el plazo para el que fueron nombrados. Los nombramientos se harán para un período de cuatro cursos como máximo. La Asamblea, no obstante, podrá reelegir a miembros cuyo nombramiento haya expirado. A los efectos de este Artículo se entiende por curso el tiempo que transcurre entre dos Asambleas ordinarias anuales consecutivas.

Artº 16º. El Presidente representará a la Sociedad, presidirá las Asambleas, convocará y presidirá las Juntas Directivas, y propondrá la constitución de Comisiones de trabajo, que presidirá por sí o representado por un miembro de la Junta Directiva en quien delegue.

Artº 17º. Los Vicepresidentes auxiliarán al Presidente y representarán a la Sociedad en su Comunidad de residencia. El Vicepresidente que resida en la misma Comunidad que el Presidente, le sustituirá en caso de ausencia, enfermedad o cese.

Artº 18º. Los vocales serán los organizadores y responsables de las acciones, relativas a su cometido especifico, que les encomiende la Junta Directiva, para la consecución de los fines de la Sociedad. Como tareas principales, tendrán a su cargo las siguientes:

El Vocal de actividades y concursos, la organización de Concursos de Problemas, reuniones de profesores, ciclos de conferencias, etc.

El Vocal de relaciones institucionales, llevar a cabo las gestiones con centros, personas o entidades públicas o privadas que sean precisas para la realización de las actividades de la Sociedad encaminadas al cumplimiento de sus fines.

El Vocal de gestión de publicaciones, la programación de las revistas, boletines o monografías que edite la Sociedad, incluidas su impresión, distribución, suscripción, venta o intercambio, captación de publicidad, etc.

El Vocal de redacción de publicaciones, la recogida y selección de originales, confección, montaje y edición de las publicaciones de la Sociedad, y la inclusión en ellas de editoriales, notas o convocatorias a iniciativa de la Junta Directiva.

La posible colisión de competencias será resuelta por decisión del Prsidente.

Artº 19º. El Secretario será el encargado de custodiar y llevar al día la documentación social, informar a los socios y coordinar las actividades. Distribuirá la correspondencia recibida en la Sociedad y organizará y mantendrá actualizado el fichero de socios, registrando las altas y bajas que se produzcan. Levantará acta de las reuniones de la Asamblea y de la Junta Directiva.

El Vicesecretario colaborará con el Secretario en todos sus cometidos y le sustituirá en caso de ausencia, enfermedad o cese.

Artº 20º. El Tesorero será el encargado de recaudar las cuotas y demás ingresos de la Sociedad, de ordenar los pagos, de llevar al día los libros de contabilidad, y de informar del estado económico de la Sociedad al Presidente, a la Junta Directiva y a la Asamblea.

Artº 21º. El Bibiotecario tendrá bajo su costodia los libros, revistas y demás material perteneciente a la Sociedad, y facilitará su utilización por los socios.

Artº 22º. Los socios pagarán una cuota anual, por cursos académicos, cuya cuantía será fijada por la Asamblea en sus reuniones ordinarias. Caso de ésta apruebe una modificación, entrará en vigor al principio del curso académico siguiente.

Artº 23º. La Sociedad se financia con las cuotas de sus socios y con los ingresos que eventualmente produzcan sus publicaciones, cursos u otras actividades acordes con sus fines, así como con las ayudas que reciba de entidades

oficiales o particulares. El límite máximo del presupuesto anual será fijado por la Asamblea y podrá ser modificado por decisión de la misma, sin que ello suponga modificación formal de los Estatutos. La Sociedad carece de patrimonio fundacional.

Artº 24º. Para la modificación de los presentes Estatutos, será necesario que una Asamblea Extraordinaria lo apruebe, al menos con los votos favorables de dos tercios de los socios presentes.

Artº 25º. La Sociedad se disolverá por acuerdo de una Asamblea extraordinaria convocada con ese único motivo, y la decisión de disolverla deberá contar con los votos favorables de dos tercios de los socios presentes. En caso de disolución, el patrimonio de la Sociedad, si lo hubiese, se donará a centros de enseñanza, actuando como comisión liquidadora la última Junta Directiva.

- - - - - - -

Disposición transitoria 1ª:

Esta Sociedad es continuación de la denominada *"Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*.

Disposición transitoria 2ª:

A efectos de aplicación del Artículo 15º en la Asamblea de 1991, los miembros de la Junta Directiva cuyo nombramiento, hecho con arreglo a los Estatutos anteriores, expire en esta Asamblea, cesarán en el cargo (sin perjuicio de que la Asamblea decida su nuevo nombramiento). Los miembros que tengan nombramiento todavía vigente, para cargos que siguen existiendo en la nueva composición de la Junta Directiva, se considerarán nombrados por un periodo de cuatro cursos, pero contado desde la Asamblea en que fueron nombrados por última vez, y los que lo tengan para cargos que desaparecen, podrán continuar formando parte de la Junta Directiva hasta la Asamblea de 1992, en la que se extinguirá el citado cargo. Los nombramientos para los puestos vacantes o de nueva creación se harán unos por dos años y otros por cuatro, con objeto de escalonar las renovaciones futuras.

- - - - - - -

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Número y año		Convocado en el boletín	Crónica y enunciados
I	(1983)	1	2 , pág 11
II	(1984)	3	4 , pág 7
III	(1985)	5	7 , pág 3
IV	(1986)	9	10 , pág 5
V	(1987)	13	15 , pág 3
VI	(1988)	17	19 , pág 17
VII	(1989)	20	22 , pág 9
VIII	(1990)	24	26 , pág 3
IX	(1991)	27	

OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA :

Número y año		Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX	(1984)	- -	3 , pág 77
XXI	(1985)	5 , págs. 8 y 9	5 , págs. 8 y 10
XXII	(1986)	8 , pág 5	9 , págs. 15 y 75
XXIII	(1986-87)	11 , págs. 3 y 87	13 , págs. 9 y 83
XXIV	(1987-88)	16 , págs. 7 y 70	17 , págs. 7 y 71
XXV	(1988-89)	20 , págs. 13 y 79	21 , págs. 7 y 61
XXVI	(1989-90)	24 , págs. 11 y 67	25 , págs. 9 y 73
XXVII	(1990-91)	27 , págs. 11 y 77	28 , págs. y

OLIMPIADA MATEMATICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar			Crónica y enunciados en boletín nº
I	(1986)	Colombia	8 , págs. 11 y 83
II	(1987)	Paraguay	12 , págs. 3 y 75
III	(1988)	Perú	18 , págs. 5 y 73
IV	(1989)	Cuba	21 , págs. 11 y 63
V	(1990)	España (Valladolid)	26 , págs. 13 y 73

OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL :

Número, año y lugar			Crónica y enunciados en boletín nº
XXIV	(1983)	París	2, pág. 15
XXV	(1984)	Praga	4 ,pág. 67
XXVI	(1985)	Helsinki	7 , págs. 9 y 89
XXVII	(1986)	Varsovia	10 , pág. 11 y 11 , pág. 89
XXVIII	(1987)	Cuba	15 , págs. 9 y 37
XXIX	(1988)	Australia	19 , págs. 23 y 77
XXX	(1989)	R. F. A.	22 , págs. 15 y 73
XXXI	(1990)	China	26 , págs. 11 y 71

RECORDAMOS NUESTRO IX CONCURSO DE RESOLUCIóN DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

Convocado por

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras

B A S E S

PRIMERA

Podrán participar los alumnos de B.U.P. y F.P. de los Centros de Albacete, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara, Madrid, Segovia y Toledo. Los de F.P.1 lo harán con los de Primero de B.U.P., los de 1º de F.P.2 con los de Segundo de B.U.P. y los de 2º y 3º de F.P.2, con los de Tercero de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas del Concurso se realizarán en Madrid, en la segunda quincena del mes de junio (posiblemente el sábado, 22 de ese mes) y consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles).

TERCERA

Se concederán diplomas para los mejores de cada nivel, acompañados de los premios correspondientes

CUARTA

Aquellos centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de dos en cada uno de los tres niveles) deberán realizar la preinscripción antes del día 30 de Mayo de 1990, dirigiéndose por carta a esta Sociedad (Apartado de Correos nº 9.479, 28080 - Madrid). En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Envíen las cartas sin certificar.

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar el curso en que estén matriculados en el año académico 1989-90 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

- - - - - - - - - -

Coca-Cola España colabora generosamente en este Concurso, costeando los premios que se entregarán a los ganadores.

SOCIO DE HONOR

En la Asamblea General de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, correspondiente a 1991, se acordó nombrar socio de honor al hasta ahora socio numerario profesor don JOSÉ RAMÓN PASCUAL IBARRA. El acuerdo se adoptó por unanimidad de los restantes asistentes. Este Boletín, al hacerse eco del nombramiento, cree de justicia, respecto al galardonado, y de utilidad para los lectores, espigar en el copioso y admirable *curriculum* del profesor Pascual Ibarra, las efemérides más destacadas que justifican sobradamente el haberlo distinguido como nuestro primer socio de honor.

Don José Ramón Pascual Ibarra nació en Santoña (Santander) el 23 de Febrero de 1911.

Obtuvo el título de Licenciado en Ciencias Exactas, con la calificación de Sobresaliente, y también el título de Profesor Mercantil.

Fué nombrado profesor encargado de curso de Matemáticas, en el Instituto *"Nebrija"* de Madrid en 1933. Tal vez este precoz acceso a la enseñanza, fué uno de los determinantes de la dedicación del profesor Pascual Ibarra a la Didáctica de las Matemáticas, que ha mantenido durante toda su vida profesional, y de la que seguimos obteniendo frutos con sus consejos y ejemplo. Obtuvo, por oposición, la cátedra de Matemáticas del Instituto de Avilés, en 1935, y posteriormente pasó a ocuparla en los Institutos de Santander y Valladolid.

Fué nombrado Inspector numerario, por concurso-oposición en 1956, y en 1959 se reincorporó a la cátedra del Instituto de Valladolid, por excedencia voluntaria en el cuerpo de Inspectores. En 1961 pasó al Instituto *"Cervantes"* de Madrid, en el que siguió de catedrático hasta 1969, volviendo a la Inspeccción, en la que permaneció hasta su jubilación, en 1981. Durante ocho años fué profesor adjunto en la Universidad de Valladolid.

Obtuvo merecidamente la Encomienda con Placa de la Orden de Alfonso X el Sabio.

Fué íntimo colaborador de don Pedro Puig Adam y el más entusiasta y fiel continuador de su obra, en relación con la Didáctica Matemática. El Centro de Orientación Didáctica le envió a Italia y a Suiza, en 1955, para estudiar la Didáctica de las Matemáticas en esos paises. Miembro de la *Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de la Matemática*, fué representante español en diversos congresos celebrados en Francia, Bélgica, Escocia, Suiza, Brasil, Berkeley,...

El conjunto de publicaciones, colaboraciones, conferencias y clases magistrales del profesor Pascual Ibarra es, desde luego, numerable, pero de cardinal muy elevado. Nuestro Boletín reeditará algunas de sus bellas lecciones, en la seguridad de que su lectura será muy grata para todos los socios, y sobre todo, para los de menor edad, que quizás no hayan tenido oportunidad de conocerlas.

La Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas felicita a su Socio de Honor, pero sobre todo, se felicita a sí misma, por tenerlo.

XXVII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

FASE FINAL

Las pruebas de la Segunda Fase de la ***XXVII Olimpiada Matemática Española***, correspondiente al curso 1990-91, han tenido lugar los pasados dias 15 y 16 de Febrero. Como en los años precedentes, esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio.*

A esta **Fase Final** han concurrido un total de 44 aspirantes, seleccionados por los distintos distritos donde se realizó la Primera Fase, con un máximo de tres por cada uno de ellos. En las Islas Canarias solamente fué seleccionado uno, que realizó las pruebas de la Fase Final en su Universidad, mientras que los seleccionados en los restantes distritos, las realizaron en la Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. *"Pablo Montesinos"* de Madrid, todos simultáneamente y con los mismos ejercicios.

Como es tradicional en esta Segunda Fase, las pruebas consitieron en la resolución de seis problemas, tres en cada una de las dos sesiones de cuatro horas, que tuvieron lugar en dias consecutivos. En nuestra sección de **Problemas Propuestos**, en este mismo Boletín, pueden verse sus enunciados.

El Jurado, tras examinar y valorar los ejercicios presentados, se reunió el pasado 28 de Febrero, e hizo públicos los nombres de los aspirantes mejor clasificados. Se asignó a cada participante una puntuación de cero a diez puntos por problema, con lo que había una posibilidad teórica de obtener 60 puntos.

Para que nuestros lectores puedan juzgar sobre la dificultad que ofrecieron los distintos problemas propuestos, damos a continuación una tabla con los valores medios de las puntuaciones alcanzadas en cada uno por todos los participantes y por los siete primeros clasificados. Ninguno de los aspirantes llegó a resolver correctamente los problemas 2º y 3º, aunque algunos lo hicieron parcialmente.

Problema nº	1	2	3	4	5	6
Media para todos	4,0	0,7	2,4	2,0	3,4	1,7
Media 7 primeros	8,1	1,0	4,1	6,9	7,7	5,0

El nivel de preparación de los participantes fué muy desigual, destacando claramente un grupo poco numeroso, del que se escogieron, por sus mejores puntuaciones, los alumnos que recibirán los premios concedidos por el Ministerio de Educación y Ciencia y los que han de representar a España en las competiciones internacionales. Los aspirantes mejor clasificados son los siguientes:

1º **Ignasi MUNDET RIERA**, del I. B. *"Príncipe de Gerona"*, de **Barcelona** ... 39 puntos (1er premio)

2º **Daniel LASAOSA MEDARDE**, de **Pamplona (Navarra)** ... ... 38 puntos

3º **Roger ESPEL LLIMA**, del *Liceo Francés* de **Barcelona** ... ... 36 puntos (2º premio)

4º **Marcos DURANTEZ GAMZUKOFF**, del *Liceo Francés* de **Madrid** ... ... 34 puntos (3er premio)

5º **Ignacio URIARTE TUERO**, del Colegio de *"Nª Sª del Recuerdo"* de **Madrid** .. 32 puntos

6º **Alberto BRAVO DE MANSILLA JIMÉNEZ**, del I. B. *"Alonso Sánchez"* de **Huelva** .27 puntos

7º **Ignacio MARCOS PRIMO**, del I. B. *"Pinar de la Rubia"* de **Valladolid** 24 puntos

Con 23 puntos quedó **Irene Villegas Barranco**, de Granada y empatados a 22, **Manuel Isidro San Juan**, de Santiago de Compostela y **Juan Ricardo Arcos Sánchez**, de Elche (Alicante).

El Sr. LASAOSA ya fué premiado en la XXVI Olimpiada, por lo que los tres premios concedidos por el Ministerio serán entregados a los clasificados en los lugares 1º, 3º y 4º. Su participación en la Olimpiada de este año ha sido con el exclusivo objeto de confirmar su derecho a participar de nuevo en la próxima Olimpiada Iberoamericana, ya que cumple los restantes requisitos exigidos para ello. Debemos recordar que el año pasado quedó también en segundo lugar en la Olimpiada Española y obtuvo medalla de plata en la Iberoamericana.

Salvo contingencias de última hora, el equipo que viajará a Suecia para representar a España en la Olimpiada Matemática Internacional (si no se reduce el número máximo de participantes por país), estará constituido por los seis mejores clasificados citados, excepto Lasaosa, ya que el reglamento de esa Olimpiada lo excluye. A la Olimpiada Iberoamericana, que se celebrará en Septiembre de 1991 en Córdoba (Argentina), irán Lasaosa y los tres que obtengan los mejores resultados en la Iberoamericana.

Debemos recordar que D. Ignacio Uriarte Tuero fué campeón de tercero de B.U.P. en el Concurso de nuestra Sociedad, en el año 1990. Lamentamos el error de transcripción de su segundo apellido, que cometimos al citarlo como primer clasificado en el distrito de Madrid, en la crónica de la Primera Fase de la Olimpiada publicada en nuestro número anterior.

La Primra Fase de la próxima Olimpiada Matemática Española se celebrará probablemente en el mes de Noviembre de este año, para lo que será convocada con la debida antelación.

Damos la enhorabuena a los ganadores y a los Centros que se han esforzado en su preparación y deseamos que tengan una destacada actuación cuando participen representando a España en las próximas Olimpiadas Internacionales.

- - - - - - -

LA DIVISIBILIDAD COMO RELACION DE ORDEN

Por Rafael Rodríguez Vidal
Catedrático de Universidad

ORDENACION DE LOS ENTEROS POSITIVOS

Entre los números enteros conocemos la relación de orden natural, que se expresa por el signo $\leq$ (leido "menor o igual que"), y así se escribe, por ejemplo,

$$a \leq b \quad \text{si y sólo si} \quad a - b \leq 0$$

Ahora observemos que en el conjunto Z^+ de los enteros positivos, la relación de divisibilidad, que se expresa con el signo $|$, (leido "es divisor de") también es una relación de orden, pues los caracteres formales de esta:

1) Reflexivo : $a|a$

2) Antisimétrico: Si es $a|b$ y también $b|a$, entonces $a = b$

3) Transitivo : Si es $a|b$ y también $b|c$, entonces $a|c$

condiciones válidas para todos los elementos a, b, c, de Z^+.

Nótese que la relación $|$ no establece un orden en Z, pues entonces falla la condición de antisimétrico: $3|-3$ y $-3|3$, es compatible con $3 \neq -3$.

Ahora bien, así como entre los elementos de Z^+ la relación $\leq$ establece un orden total, porque no hay elementos incomparables,

4) Totalidad : O es $a \leq b$, o es $b \leq a$,

en cambio, la relación | establece una <u>ordenación parcial</u> (otros autores dicen una <u>semiordenación</u>), porque hay elementos incomparables, como son el 3 y el 5:

$$\text{ni} \quad 3|5, \quad \text{ni} \quad 5|3.$$

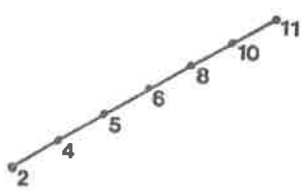
Indiquemos ahora con $\subset$ el símbolo de la relación de orden (según los casos se leerá, "menor o igual", "divisor de", "anterior a", "contenido en",... y otras muchas expresiones análogas, según la relación de que se trate).

Para todo conjunto con una ordenación se puede concebir un diagrama, de la siguiente forma. Los elementos a, b,... se representan por sendos puntos. Si es $a \subset b$ se unen ambos por un segmento que <u>descienda</u> desde a hasta b. De este modo será $a \subset m$ precisamente cuando desde m hasta a se pueda ir por un camino exclusivamente de segmentos descendentes.

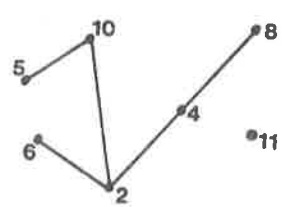
<u>Ejemplo</u>.- La ordenación de los números del conjunto

$$\{2, 4, 6, 8, 5, 10, 11\}$$

según la relación $\leqq$ o según la relación |, proporciona los diagramas de las figuras 1 y 2, respectivamente



<u>Fig.</u> 1.- Orden natural



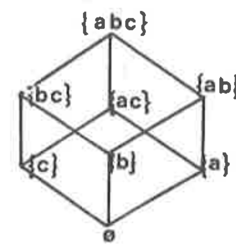
<u>Fig. 2</u>.- Orden de divisibilidad

Ejercicio.- Leer, sobre la figura 2, los pares de elementos que son incomparables.

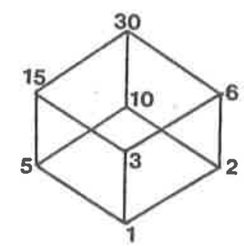
El objeto de esta lección es incluir la teoría de la divisibilidad dentro de la teoría más general de las estructuras de orden, y examinar a que tipo peculiar de éstas puede asignarse.

<u>ESTRUCTURAS ORDENADAS EN RETICULO</u>

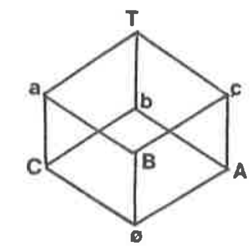
Se observa enseguida que un mismo diagrama se adapta a interpretaciones muy diversas. Así, por ejemplo, el de la Fig. 3 representa el conjunto de las partes del conjunto $E = \{a,b,c\}$ ordenado con la relación de inclusión; en la Fig. 4 está el conjunto de los divisores de 30, ordenado con la relación de divisibilidad; en la Fig. 5 el conjunto de elementos de un triángulo T (de vértices A, B, C y lados a, b, c) ordenados con la relación de incidencia



<u>Fig. 3</u>



<u>Fig. 4</u>



<u>Fig. 5</u>

Resulta, pues, evidente el interés de estudiar por sí mismas las estructuras ordenadas. Los resultados generales obtenidos pueden luego adaptarse a los diversos casos particulares.

Como signo de orden en general adoptaremos el $\subset$ (el cual, en la teoría de conjuntos indica inclusión). Es claro que $a \subset b$ significa lo mismo que $b \supset a$.

A un conjunto ordenado (total o parcialmente) le llamaeremos una <u>ordenación</u>. El conjunto Z^+ con el orden |, se llamará ordenación $\mathcal{Z}$.

$$\mathcal{Z} = \{Z^+, \ |\}$$

Sea S una ordenación. LLamamos <u>cota superior</u> de un subconjunto C de elementos de S a un elemento $k \in S$ que sea superior a todos los elelementos de C:

$$\text{cot. sup. } C = k \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad a \subset k \quad \text{para todo } a \in C$$

En la ordenación $\mathcal{Z}$ el concepto de cota superior coincide con el de múltiplo común.

Claro es que la cota superior puede no existir, y si existe no tiene que ser forzosamente única.

Si entre las cotas superiores del subconjunto C de S hay una que sea mínima, a ésta se le llama supremo de C, o extremo superior de C, o cota superior mínima de C, indicada usualmente con una de las notaciones

sup. C = c.s.m. C

En la ordenación $\mathcal{Z}$ el concepto de supremo coincide con el de mínimo común múltiplo

sup. (a, b, c) = [a, b, c]; sup. (6, 8, 12) = 24

De un modo correlativo se define la cota inferior de un conjunto de elementos de S (que si existe no es forzosamente única) y el extremo inferior (también llamado ínfimo, o cota inferior máxima), que si existe es único.

En la ordenación $\mathcal{Z}$ el concepto de cota inferior coincide con el de divisor común, y el ínfimo es el máximo común divisor:

inf. (a, b, c) = (a, b, c); inf. (60, 105) = 15

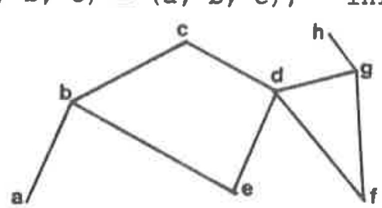


Fig. 6

Ejemplo.- En la ordenación de Fig. 6

sup. (b, c, d) = c, inf. (b, d) = e, sup. (a, g), no existe

Una ordenación S se dice dirigida superiormente cuando cada par de elementos tiene alguna cota superior. Se dice dirigida inferiormente cuando cada dos elementos tienen alguna cota inferior

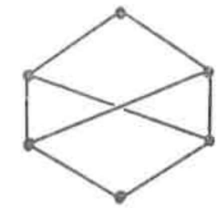


Fig. 7.- Ordenación dirigida superiormente e inferiormente

Un sup-retículo es una ordenación en la que cada par de elementos tiene un supremo. Un inf-retículo es una ordenación en la que cada par de elementos tiene un ínfimo.

Estos son, pues, casos particulares de conjuntos dirigidos, pero no recíprocamente; y así, el diagrama de la Fig. 7 no es ni sup-retículo ni inf-retículo.

Una ordenación en la que cada par de elementos tiene un supremo y también un ínfimo se llama retículo. Un retículo es, pues, simultáneamente sup- e inf-retículo, y viceversa.

El conjunto ordenado $\mathcal{Z}$ es un ejemplo de retículo, si bien este ejemplo, por constar de infinitos elementos no puede representarse en un diagrama.

En cambio, las sub-ordenaciones de $\mathcal{Z}$ constituídas por todos los divisores de un número n son retículos de los que el diagrama se puede construir, o al menos concebir, sin dificultad. He aquí algunos ejemplos:

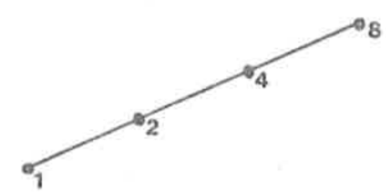
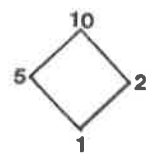


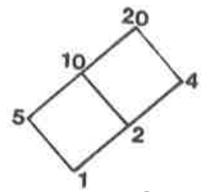
Fig. 8.- Retículo de los divisores de 8

Los divisores de cualquier número primario, p^n, dan un retículo en cadena, análogo al de Fig. 8.



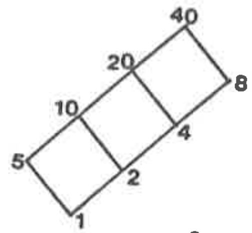
D(10) = D(2.5)

Retículo de los divisores de 10



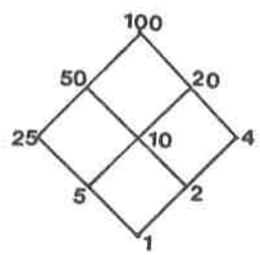
D(20) = D(2^2. 5)

Retículo de los divisores de 20



D(40) = D(2^3. 5)

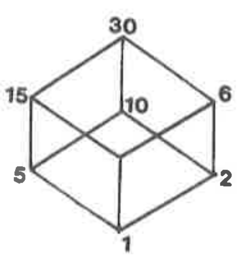
Retículo de los divisores de 40



D(100) = D(2^2. 5^2)

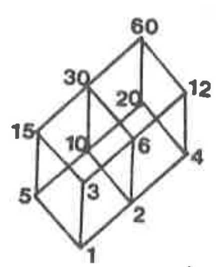
Retículo de los divisores de 100

Fig. 9.- Retículos de números con precisamente dos factores primos



D(30) = D(2.3.5)

Retículo de los divisores de 30



D(60) = D(2^2. 3.5)

Retículo de los divisores de 60

Fig. 10.- Retículos de divisores de números con precisamente tres factores primos

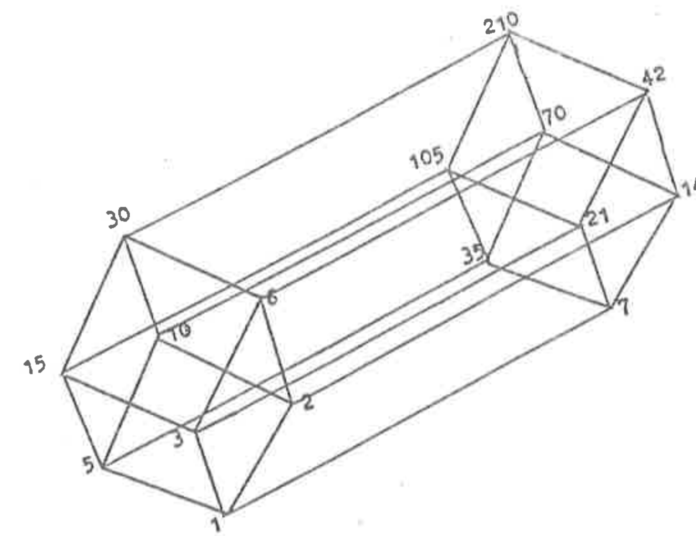


Fig. 11.- Retículo de los divisores de 210, isomorfo con el de los divisores de cualquier n = pqrs (cuatro factores primos distintos)

Resulta evidente que el retículo de los divisores de aquellos números n en los que $\mu(n) \neq 0$ es en cada caso isomorfo con el retículo de partes de un conjunto finito, cuyo número de elementos es precisamente el número de factores primos de n.

DEFINICION ALGEBRAICA DE UN RETICULO

En vez de definir el retículo como un conjunto con una relación de orden que cumple ciertas condiciones, se le puede definir también como un conjunto provisto de dos operaciones que cumplen ciertas condiciones. Veremos luego que estas dos definiciones son equivalentes, por lo que indistintamente podremos referirnos al retículo como ordenación o al retículo como álgebra.

El retículo como álgebra es un conjunto provisto de dos operaciones internas que designaremos con los símbolos

$\cap$, llamado "intersección" o "cap"

$\cup$, llamado "unión" o "cup"

las palabras intersección y unión están inspiradas en la teoría de conjunto, pero las alternativas cap y cup tienen por objeto recordarnos que aquí se trata la operación de un modo abstracto o general. Estas operaciones del retículo deben cumplir las siguientes condiciones:

<u>Asociativas</u> : $A_{\cap}$; $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$, escrito $a \cap b \cap c$

$A_{\cup}$; $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$, escrito $a \cup b \cup c$

<u>Conmutativas</u>: $C_{\cap}$; $a \cap b = b \cap a$

$C_{\cup}$; $a \cup b = b \cup a$

<u>Absorbentes</u> : $A'_{\cap}$; $a \cap (a \cup b) = a$

$A'_{\cup}$; $a \cup (a \cap b) = a$

para todos los a, b, c,... del conjunto.

Por ejemplo, la estructura de los enteros positivos, con las operaciones

$a \cap b = (a, b)$, m.c.d. de a y b

$a \cup b = [a, b]$, m.c.m. de a y b

es un álgebra de retículo.

Dada la ordenación $\subset$ que defina un retículo, se encuentran dos operaciones $\cap$ y $\cup$ que definen el mismo retículo. Estas son:

$a \cap b = \inf. (a, b)$, $a \cup b = \sup. (a, b)$

dadas las operaciones $\cap$, $\cup$ que definan un retícu-

lo, este puede ordenarse, bastando a este propósito definir las siguientes equivalencias:

$a \subset b$ si y solo si $a \cap b = a$

o, lo que es equivalente

$a \subset b$ si y solo si $a \cup b = b$

De este modo, para las estructuras sobre $\{Z^+, |\}$ encontramos

$a|b \Longleftrightarrow (a, b) = a$

o bien

$a|b \Longleftrightarrow [a, b] = b$

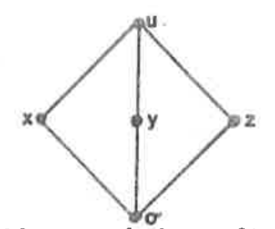
<u>Retículo distributivo</u> es aquel cuyas operaciones cumplen, además de las citadas, la siguiente condición

<u>Distributivas</u>: $D_{\cap}$; $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

$D_{\cup}$; $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

Por ejemplo, el retículo de los divisores de un número es distributivo, pues las operaciones de m.c.d. y de m.c.m. son distributivas una para otra.

Un retículo no distributivo es el de la Fig. 12



$x \cap (y \cup z) = x$
$(x \cap y) \cup (x \cap z) = \sigma$

<u>Fig. 12</u>.- Retículo no distributivo

Un <u>retículo acotado</u> es aquel que tiene dos elementos que son cotas universales; uno, que se representará por e, que es la cota superior y otro, que representaremos por o, que es la cota inferior, definidos por la siguiente condición

Cotas universales: K_e; $a \cap e = a$ (o bien, $a \cup e = e$, o bien, sup $(a, e) = e$)

K_o; $a \cup o = a$ (o bien, $a \cap o = o$, o bien, inf $(a, o) = o$)

para todo a del retículo.

Un retículo complementado es aquel que tiene las dos cotas universales e y o, con esta condición:

Complementación : Para todo elemento x del retículo existe algún otro elemento z tal que

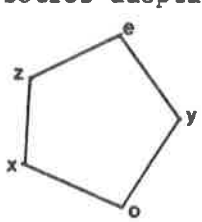
$$x \cup z = e, \quad y \quad x \cap z = o.$$

El elemento complementario de otro, si existe, no es forzosamente único. Así en el retículo de la Fig. 13 el elemento y tiene los complementos x y z.

Las condiciones de distributividad y de complementación son independientes, en el sentido de que un retículo puede tener una de las dos y carecer de la otra. Ahora bien, si un retículo es complementado y distributivo, entonces el complemento de cada elemento es único. Esto es fácil de demostrar, aunque no lo haremos aquí. En este caso el complemento (único) de un elemento x se indica por distintas notaciones,

$$x', \quad \complement x, \quad \neg x, \ldots$$

y otras. Nosotros adoptaremos la notación x'.



y tiene dos complementos
z tiene uno
x tiene uno
o tiene uno

El retículo de los divisores de un número puede ser complementado, como en el caso de los divisores de 30, o no serlo, como en el de los divisores de 60. Como es evidente falta la complementación si en la factorización de n aparece algún primo con exponente mayor que 1, o dicho de otro modo: El retículo de los divisores de un número n es complementado si y solo si es $\mu(n) \neq 0$. (μ indica la función de Moebius).

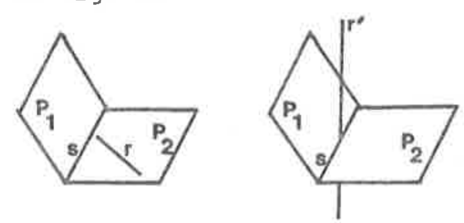
Es interesante aludir a una condición menos fuerte que la distributividad, característica de los llamados retículos modulares. Esta es la condición

Modular : $M_\cap$ si $x \subset z$, entonces $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z$ (adviértase que por hipótesis $x \cup z = z$).

El retículo no distributivo de la Fig. 11, es un retículo modular. El retículo de la Fig. 13 no es modular:

$$x \subset z; \quad x \cup (y \cap z) = x, \neq (x \cup y) \cap z = z$$

Esta condición la cumplen también algunos retículos interesantes, como es el de los subespacios de un espacio lineal ordenados por la relación $\subset$ de "contenido en". Este es el caso que ilustra la Fig. 14



E, espacio
r, s, t,... rectas
$P_1, P_2, P_3, \ldots$ planos
$r \subset P_2 \Longleftrightarrow (r \cup P_2) = P_2$

Fig. 14.- Ejemplo de retículo modular

$$r \subset P_2 \qquad \underbrace{r \cup \underbrace{(P_1 \cap P_2)}_{s}}_{P_2} \overset{?}{=} \underbrace{\underbrace{(r \cup P_1)}_{E} \cap P_2}_{P_2}$$

$$r' \notin P_2 \qquad r' \cup \underbrace{(P_1 \cap P_2)}_{s} \overset{?}{=} \underbrace{(r' \cup P_1)}_{E} \cap \underbrace{(r' \cup P_2)}_{E}$$

ALGEBRA DE BOOLE

Un retículo complementado y distributivo, se llama un álgebra de Boole.

Si lo queremos definir como ordenación, diremos que un retículo de Boole es un conjunto ordenado donde cada par de elementos tiene un supremo y un ínfimo, que tiene dos elementos cotas universales, o, e, y donde para cada elemento x se encuentra otro complementario x' tal que

$$\sup (x, x') = e, \quad \inf (x, x') = o$$

El ejemplo más sencillo de álgebra de Boole consta de sólo dos elementos, los llamaremos 0 y 1, con el siguiente diagrama y tabla de operaciones

x	x'
0	1
1	0

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

Desde luego se advierte la analogía entre las tablas de $\cup$ y $\cap$ y las de + y x en la aritmética de módulo dos (de "pares" e "impares").

El retículo $\mathcal{N}$ de los divisores de n es precisamente un álgebra de Boole cuando $\mu(n) = 0$. Esta álgebra es en el fondo isomorfa con el álgebra o retículo de las partes de un conjunto, E, donde el número 1 pasa a ser el vacío $\emptyset$, y el número n el conjunto referencial E. Así, en los números, si p, q, r,.. son primos, con

$$n = pqrst \quad y \quad x = pqs \quad es \quad x' = rt$$

La importancia del álgebra de Boole viene de que su estructura comprende en particular a la estructura del cálculo de proposiciones (lógica simbólica), y también a la de los circuitos eléctricos, acordes con la aritmética binaria, de donde

nicas. Para nuestro objeto no interesa entrar en estos temas. (Cfr. Birkhoff-MacLane - Algebra Moderna. Edit. Vicens Vives. Barcelona; o, para una introducción más elemental, Bayley. Conjuntos y Lógica. Idem.).

RETICULOS ATOMICOS

Dos elementos a y b distintos, se llaman contiguos en el retículo cuando, siendo $a \subset b$ no existe ningún elemento z estrictamente comprendido entre ambos. Por consiguiente,

$$a \subset z \subset b \implies z = a, \quad ó \quad z = b$$

En un retículo con cota inferior universal, o, se llama átomo a todo elemento contiguo superior de o.

En $\mathbb{Z}$ la cota inferior es 1, y son átomos los números primos. En el retículo $\mathcal{N}$ de los divisores de n, también es 1 cota inferior y los átomos son los factores primos de n.

Hay retículos que no tienen átomos. Por ejemplo, el de los racionales positivos con el orden natural Q^+.

Retículo atómico es aquel en que cualquiera de sus elementos, distinto del ínfimo universal o, tiene un átomo inferior a él:

$$\forall b, \ \exists a \quad \text{tal que} \quad a \subset b \quad y \quad a \text{ es un átomo}$$

Entre los retículos atómicos merecen especial atención los que llamaremos naturales. Un retículo natural es aquel donde para todo elemento b ocurre que el conjunto de elementos inferiores a b es finito:

$$\forall b, \ \{a;\ a \subset b\} \ \text{es finito}$$

No es natural el retículo constituido por 1 como cota inferior absoluta, los números primos como átomos y un elemento

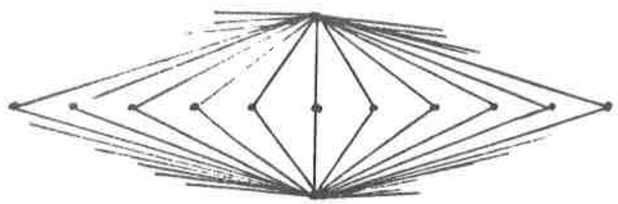


Fig. 15.- Esquema de un retículo no natural

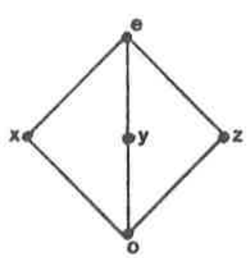
FUNCIONES NUMERICAS EN UN RETICULO NATURAL

Sean $\mathcal{R}$ un retículo natural, y o su elemento mínimo. Para cada elemento a $\in \mathcal{R}$ y cada número natural k, está determinado el valor

$$Q_k(a) = \text{número de conjuntos de k átomos cuya unión es a.}$$

Naturalmente, este valor es 0 a partir de un cierto valor de k.

Ejemplo.- Tabla de valores de $Q_k(a)$ para el retículo de la figura



a \ k	0	1	2	3	4	. . .
e	0	0	3	1	0	
x	0	1	0	0	0	
y	0	1	0	0	0	
z	0	1	0	0	0	
o	0	0	0	0	0	

Con ayuda de esta función Q: $(\mathcal{R}, N) \longrightarrow N$ que acabamos de definir, definiremos ahora una función

$$\mu : \mathcal{R} \to Z$$
$$a \to \mu(a) \in Z$$

por la que a cada elemento a del retículo le corresponde un entero $\mu(a)$ así definido:

$$\mu(a) = 1 \quad \text{si } a = o$$

$$\mu(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Q_k(a) \quad \text{si } a \neq o$$

Ejemplo.- Para el mismo retículo del caso anterior es

$$\mu(e) = 3 - 1 = 2$$

$$\mu(x) = \mu(y) = \mu(z) = -1$$

$$\mu(0) = 1$$

El fácil ver lo que dan estas funciones en el caso particular del retículo $\mathcal{Z}$ de los enteros positivos. Si

$$a = p_1 \, p_2 \cdots p_r$$

siendo $p_1, p_2, \ldots p_r$ primos distintos, entonces

$$Q_k(a) = 1 \quad \text{cuando} \quad k = r$$

y en cualquier otro caso es

$$Q_k(a) = 0$$

En consecuencia, $\mu(a)$ es precisamente la función de Moebius de la Teoría de números. Así, la antes definida es su generalización a la Teoría de retículos.

La función de Moebius generalizada tiene la siguiente propiedad: Para todo elemento a de un retículo es

$$\sum_{b \subset a} \mu(b) \begin{cases} = 1 \text{ si } & a = o \quad \text{(elemento mínimo del retículo)} \\ = 0 \text{ si } & a \neq o \end{cases}$$

Esta propiedad es la generalización de la que tiene la función de Moebius de los números naturales (§,) a saber:

$$\sum_{b \mid a} \mu(b) \begin{cases} = 1 \text{ si } \quad a = o \\ = 0 \text{ si } \quad a \neq o \end{cases}$$

Para demostrarla, sea

p_a = número de átomos del retículo por debajo de a

Llamaremos distinguido (para a) un sistema de k-átomos distintos (k-sistema) por debajo de a (siempre sobreentendemos a $\subset$ a). Por tanto, el número de k-sistemas distinguidos es,

$$\binom{p_a}{k}$$

Por otra parte, diremos que un k-sistema de átomos pertenece a b si la unión de los elementos de dicho sistema es igual a b. Todo k-sistema de átomos distinguidos pertence a un elemento b a, y solo a uno. Así, el número de k-sistemas distinguidos se obtiene también contando todos los k-sistemas de átomos que pertenecen a los elementos b anteriores a a. El número de k-sistemas que pertenecen a un elemento fijo b es $Q_k(b)$, luego el número de los k-sistemas distinguidos para a viene dado por

$$\sum_{b \subset a} Q_k(b) = \binom{p_a}{k}$$

La demostración concluye ahora así

1) Si a es elemento mínimo, la suma $\sum_{b \subset a} \mu(b)$ se reducirá a $\mu(a)$ y por definición es entonces $\mu(a) = 1$.

2) Si a es distinto del elemento mínimo, entonces $p_a \neq 0$ (por ser el retículo atómico) y tenemos

$$\sum_{b \subset a} \mu(b) = \sum_{b \subset a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Q_k(b) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{b \subset a} Q_k(b) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p_a}{k} = (1-1)^{p_a} = 0$$

c.d.q.

IMPORTANCIA Y PAPEL DEL ALGEBRA CONMUTATIVA EN LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA ACTUAL

por Concepción Romo Santos
del Departamento de Algebra de la
Universidad Complutense de Madrid

El Algebra Conmutativa es una de las piedras fundamentales de la moderna Geometría Algebraica. Proporciona los instrumentos para esta rama de las Matemáticas, de forma más o menos análoga a como el Análisis diferencial proporciona los instrumentos para la Geometría Diferencial. El objeto de la conferencia es justificar esta afirmación y con el fin de clarificar las ideas la dividiremos en 4 partes:

1) Concepto del Algebra
2) Simbiosis Algebra Conmutativa-Geometría Algebraica.
3) Desarrollo del Algebra Conmutativa desde finales del siglo XIX.
4) Resolución de singularidades.

1) Concepto del Algebra.-

Voy a referirme brevemente al concepto del Algebra. El Algebra es una ciencia, en un progreso de elaboración constante, y, por consiguiente, como todo lo vital, no puede delimitarse con una definición. Cada conquista amplía sus límites, establece nuevas conexiones con otras ramas de la Matemática, hace por tanto más difusa la línea que las separa, y, como consecuencia, modifica el concepto que de ella puede formarse.

La palabra "álgebra" proviene del nombre de un tratado del matemático y astrónomo Mohammed al-Kharizmi, que vivió en el siglo IX. Su tratado sobre álgebra llevaba por título al-jebr w'almugabala, que significa:"transposición y eliminación". Por transposición se entiende la trasferencia de términos al otro miembro de la ecuación, y por eliminación la cancelación de terminos iguales en ambos miembros.

La palabra árabe al-jebr se convirtió en "álgebra" al transcribirla al latin, mientras que al-mugabala fue desechada, lo cual explica el término moderno "álgebra" para esta disciplina.

El origen de este término responde muy bien al contenido real de la ciencia misma. El Algebra es en esencia la doctrina de las operaciones matemáticas consideradas formalmente desde un punto de vista general, con abstracción, de los números concretos, y sus problemas están relacionados fundamentalmente con las reglas formales para la transformación de expresiones y la resolución de ecuaciones.

Más tarde, Omar Khayyam definió el Algebra como la ciencia de resolver ecuaciones. Esta definición no tuvo su significado hasta finales del siglo XIX, cuando el Algebra, junto con la teoría de ecuaciones, tomó nuevos derroteros, modificando esencialmente su carácter, pero no ese espíritu de generalidad que posee como ciencia de las operaciones formales.

El Algebra contemporanea es el estudio de las operaciones, de las reglas de cálculo. Pero no se circunstribe como el Algebra clásica, al estudio de las propiedades de las operaciones con números, sino que aspira a investigar propiedades de operaciones con elementos de una naturaleza mucho más general. Esta tendencia viene dictada por necesidades de orden práctico. Por ejemplo en Mecánica sumamos fuerzas, velocidades, rotaciones, etc. Si para un conjunto

dado de objetos se definen ciertas operaciones que satisfacen ciertas propiedades, se dice entonces que se ha definido una estructura algebraica. El actual punto de vista sobre el Algebra consiste en considerarla como el estudio de las diferentes estructuras algebraicas. Puede considerarse que la noción de estructura aparece con la definición por Cayley en 1854 del concepto de grupo abstracto y se desarrolla hasta la teoría de categorias actual, desarrollada en los últimos cuarenta años, que proporciona el marco correcto para el desarrollo de técnicas de gran importancia como la homología, que reunen aspectos aislados que habían ido apareciendo al profundizar en problemas de teoría de grupos, anillos, módulos, etc... El primer trabajo en el que se enfoca el Algebra desde el punto de vista de las estructuras es el famoso libro de Van der Waerden: "Modern Algebra", de importancia capital para el desarrollo algebraico posterior.

Hablemos ahora un poco de la influencia del Algebra en otras ramas de la Matemática, y en otras ciencias en general. El Algebra no es una ciencia aplicada en el sentido que tienen estas hoy en día, sino una ciencia pura. Las ciencias aplicadas tienen, en su acepción usual, dos características que las definen, la de resolver problemas concretos del mundo que nos rodea y la de tomar prestado para este fín, un cuerpo de doctrina ya elaborado. El Algebra no depende de nada, salvo de la teoría de conjuntos de la que, en última instancia, depende la Matemática toda, y además es una ciencia pura porque tiene su propia problemática, independiente de los fenómenos de la vida real. Pero el Algebra si es una ciencia que se aplica. Ella presta a otras ramas de la Matemática y a otras ciencias en general, sus estructuras para lograr descripciones formales que las aclaren y potencien nuevos descubrimientos. Bien conocidas por ejemplo, las aplicaciones a la Física de la teoría de grupos y álgebras de Lie.

Y es que en el fondo de todo objeto matemático o colección de objetos, se encuentra la estructura algebraica. Por eso la casi totalidad de las ramas matemáticas usan de los teoremas del Algebra en su propio beneficio. Pero esta dependencia del Algebra no es como la dependencia, por ejemplo, de la Lógica. La Lógica suministra el esquema de razonamiento verdadero pero ahí para su misión. El Algebra en cambio, como ciencia positiva que es, suministra a otras partes de la matemática resultados positivos que ellas usan para sacar sus conclusiones, asimismo positivas.

2) Simbiosis Algebra Conmutativa-Geometría Algebraica

Respecto de otras ramas matemáticas, el Algebra es una fecunda auxiliar de su desarrollo. Hablemos ahora de la relación Algebra Conmutativa-Geometría Algebraica. Tomemos un texto moderno de Algebra Conmutativa; podemos elegir cualquiera entre los dos volúmenes de Zariski-Samuel o uno más moderno como el de Matsumura. Esos textos contienen tópicos dirigidos hacia el estudio de la teoría de números. Pero la inmensa mayoría de los temas tratados en ellos tienen otro objetivo: La Geometría Algebraica. La mayor parte de los teoremas interesantes del Algebra Conmutativa tienen una traducción directa e inmediata a la Geometría Algebraica. Pero hay mucho más, justamente lo más importante: el desarrollo del Algebra Conmutativa ha venido condicionado por la Geometría Algebraica en el sentido de que la problemática de ésta ha sido la que indujo la de aquella. Así es que una gran parte del Algebra Conmutativa tiene como única y exclusiva misión servir de basamento a la Geometría Algebraica. Esto establece la relación en un sentido, veamos el otro. ¿Existe hoy día la

Geometría Algebraica tal como se concebía hace 50 años?. La respuesta es casi radicalmente que no. Solo quedan unos pocos cultivadores esporádicos de la vieja Geometría italiana. Y es que Oscar Zariski primero y Grothendieck después convirtieron a la Geometría italiana en una rama del Algebra. cuando un matemático de hoy piensa en una variedad algebraica piensa automáticamente en un álgebra finitamente generada sobre un cuerpo, su anillo de funciones polinómicas; cuando piensa en una subvariedad de una variedad, piensa en un ideal de este anillo; cuando piensa en un punto simple, piensa en un anillo local regular, etc. Simplificando la cuestión, Zariski hizo que un texto de Algebra Conmutativa y otro de Geometría Algebraica sean prácticamente una misma cosa: estudian los mismos puntos solo que usando palabras diferentes, de las cuales todo especialista tiene "in mente" un diccionario en los dos sentidos.

Evidentemente, es imposible distinguir una linea de separación entre el Algebra Conmutativa y la Geometría Algebraica; sencillamente no existe. Los nombres de Dedekind, Kronecker, Hilbert, E. Nöether, Van der Waerden, Krull, Chevalley, Weil, Zariski, Cohen, Seidenberg, Samuel, Nagata, Nastold, Serre, Grothendieck, Hironaka, van marcando el desarrollo del Algebra Conmutativa y la Geometría Algebraica simultáneamente.

3) Desarrollo del Algebra Conmutativa desde finales del siglo XIX

El Algebra Conmutativa era una rama de la Matemática que tenía por fín el estudio de las curvas algebraicas en el plano proyectivo complejo, usando para ello métodos de geometría proyectiva. Probablemente se había desarrollado con Abel, Jacobi, Weierstrass y Riemann la teoría de "funciones algebraicas" de una variable compleja. Es evidente la importancia de esta teoría en el desarrollo del estudio de curvas algebraicas planas, pero los métodos utilizados para el estudio de funciones algebraicas eran sobre todo de naturaleza trascendente incluso antes de Riemann. Con éste se acentúa más este caracter de trascendencia con la introducción de las superficies de Riemann y de funciones analíticas cualesquiera definidas sobre dichas superficies.

Después de la muerte de Riemann, Roch y Clebsch reconocieron que de los resultados obtenidos por los métodos transcendentes de Riemann se pueden obtener numerosas aplicaciones a la geometría proyectiva de curvas, lo cual incitó a los geómetras de aquella época a hacer demostraciones de aquellos resultados, puramente geométricas. En esta línea siguieron Gordan, Brill y M. Noether. Pero estos razonamientos geométrico-analíticos no reposaban sobre fundamentos ciertos y es esencialmente para dar a la teoría de curvas algebraicas una base sólida, que Dedekind publica en 1882 su gran memoria sobre este tema. La idea principal de su trabajo es la de calcar la teoría de funciones algebraicas de una variable sobre la teoría de números algebraicos tal como acababa de desarrollar Dedekind. Para hacer esto debía primeramente abordar este tema desde el punto de vista afín, diferencia esencial con sus contemporáneos que consideraban invariablemente las curvas algebraicas sumergidas en el espacio proyectivo complejo.

En el mismo año 1882 aparece también la memoria de Kronecker, mucho más ambiciosa que la de Dedekind pero también más vaga y más obscura. Su tema central es el estudio de los ideales de un álgebra finita íntegra sobre los anillos de polinomios $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ y $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$.

Era natural asociar a cada ideal de estos anillos la variedad algebraica formada por los ceros comunes a todos los elementos del ideal. Los estudios realizados en el siglo XIX en las geometrías de dimensión 2 y de dimensión 3 conducen intuitivamente a la idea de que toda variedad es unión de variedades irreducibles en número finito cuyas dimensiones no son necesariamente las mismas. La demostración de este hecho es el fín que se propone Kronecker aunque explícitamente en ninguna parte de su memoria se encuentra la definición de variedad irreducible y de dimensión. Tampoco se sabe si Kronecker tenía el concepto actual de ideal primo.

Es Lasker quien en su memoria define correctamente el concepto de variedad irreducible así como el concepto de dimensión. En las interesantes consideraciones históricas que inserta en su trabajo, Lasker indica que se basa no solamente en la tendencia puramente algebraica de Kronecker y Dedekind sino también en los métodos geométricos de la escuela de Clebsch y M. Noether y sobre todo en el famoso teorema demostrado por éste último en 1873 publicado en Math. Ann. t. VI pag. 351-359, generalizado por Hilbert en 1893 en su célebre "teorema de los ceros". Sin duda, inspirado en este resultado, Lasker introduce en su memoria el concepto de ideal primario en los anillos $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ y $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ y demuestra la existencia de una descomposición primaria para todo ideal de estos anillos. Aunque no se preocupa de la unicidad de esta descomposición. Es muy importante señalar que Lasker en esta memoria extiende los resultados anteriores, al anillo de las series enteras convergentes en el entorno de un punto, apoyándose para ello en el teorema preparatorio de Weierstrass. Es en esta parte de su memoria donde por primera vez se considera este anillo desde un punto de vista algebraico. Y los métodos empleados aquí por Lasker, influyen de una manera decisiva en Krull cuando en 1938 crea la teoría general de anillos locales.

El movimiento de ideas que conducirá al Algebra Conmutativa moderna, comienza a tomar forma en 1910. Aunque la noción general de cuerpo esta totalmente adquirida a principios del siglo XX es chocante que el primer trabajo donde aparece el concepto general de anillo es en uno de Fraenkel de 1914. En esta época se tenían como ejemplos no solamente los anillos íntegros de la teoría de números y de la geometría algebraica, sino también los anillos de series formales o convergentes y también las álgebras sobre un cuerpo base.

Desde el trabajo de Fraenkel mencionado anteriormente, los primeros trabajos importantes en el estudio de anillos conmutativos generales son las dos grandes memorias de E. Noether sobre la teoría de ideales. Con las memorias de E. Noether y los trabajos posteriores de Artin y de Van der Vaerden sobre los divisores definidos en un cuerpo y los de Krull que ligan estos ideales con las valoraciones esenciales, se acaba el estudio de la descomposición de ideales comenzada un siglo antes.

Krull es el creador del concepto de anillo local, Krull estudia a fondo estos anillos y hasta tal punto lo hace, que la técnica expuesta en sus artículos se conserva en muchos libros de texto de nuestros días.

La genialidad matemática de Krull no puede ser puesta en duda hoy día, pues es el padre del algebra conmutativa moderna. En álgebra conmutativa, como en todas las ramas de la Matemática, existen unos teoremas claves, generalmente muy pocos en número, que son los que prueban la riqueza de una estructura, y los que abren inmensas

posibilidades a la teoría. Y en el caso del álgebra conmutativa estos teoremas se deben en su gran mayoria a Krull, aunque no siempre se le reconozca esta paternidad, de una manera completamente arbitraria. El ejemplo más claro de lo que acabamos de decir está en los llamados "Going-up theorem" y "Going-down theorem" de "Cohen-Seidenberg" que se pueden encontrar por primera vez en un artículo de Krull publicado en 1937. Para darse cuenta de la importancia de estos teoremas basta pensar un momento y nos daríamos cuenta de que, sin ellos, el álgebra conmutativa se reduciría a la mitad y la noción de dimensión no pasaría de ser poco más que una definición arbitraria.

Chevalley en 1943 publicó un artículo titulado "On the theory of local rings". En este trabajo se sientan las bases necesarias para el desarrollo de una teoría de la intersección que más tarde publicaría este autor. En él se introduce la noción de multiplicidad de un ideal primario de un anillo local engendrado por un sistema de parámetros. A estas alturas ya eran conocidas las anomalías de la noción de multiplicidad de Van der Waerden, definida en términos de longitudes de ideales, por lo que claramente era necesaria una nueva definición de este concepto. Chevalley introduce una definición correcta de multiplicidad pero solamente en el caso de anillos locales completos (la noción correcta de multiplicidad en el caso de un anillo local cualesquiera sería introducida posteriormente por Pierre Samuel). La obra cumbre de Chevalley es su teoría de la intersección, aparecida en 1945. Este artículo está dividido en tres grandes partes que, respectivamente, están dedicadas a: preliminares algebraicos, teoría de la intersección de variedades algebroides y teoría de la intersección de variedades algebraicas. Este trabajo tiene como contribuciones esenciales las siguientes: topologías y complecciones, teorema de la dimensión de los anillos locales y la noción de multiplicidad. A partir de la aparición de este trabajo comienzan ya a proliferar los artículos sobre Algebra local. Cohen en el año 1946 publica un artículo dedicado al estudio de los teoremas de estructura de los anillos locales completos. Zariski, en el mismo año 1946, publica un trabajo sobre anillos semilocales. Las motivaciones de este trabajo son de índole geométrica. En la introducción, Zariski hace notar que: "...A esta teoría local, donde se estudian las propiedades de una variedad algebraica en el entorno de un punto, pertenecen conceptos analíticos y algebraico-geométricos tales como función holomorfa, rama analítica, punto simple, parámetros uniformizantes locales, multiplicidad de intersección, etc...". Sin embargo la teoría local de una variedad V a lo largo de una subvariedad Γ, hace perder aspectos geométricos del par (V,Γ). Por eso, Zariski desarrolla una teoría semilocal, "que está a mitad de camino entre lo local y lo global".

Y llegamos por fín a otro de los grandes trabajos del Algebra Conmutativa, el trabajo de Samuel sobre la noción de multiplicidad en Algebra y en Geometría Algebraica, publicado en el año 1951. A la vista de la decisiva influencia de este trabajo en la resolución de singularidades hecha por Hironaka, podemos calificarle como el trabajo más importante del Algebra Local hecho jamás. La idea es "...generalizar a las componentes excedentarias y singulares de las intersecciones de variedades algebraicas la teoría de las multiplicidades de intersección debida a C. Chevalley y A. Weil, y relativa a las componentes propias". Para ello se necesita el concepto de multiplicidad de un ideal primario de un anillo local, que se introduce vía función de Hilbert. La genialidad de Pierre

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN (CENTROS)

D. ... ...

como . ...del Centro . ...

.. ..

domiciliado en ... ...

ciudad ... ... Codº Post. ... Telfº.. ... .

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR.

Con esta fecha autorizo al Banco . ...

Sucursal o Agencia ... ... en .. ..

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en mi cuenta . ... nº ... ...

abierta al nombre: ... ...

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1991-92

y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1991

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 3.000 pesetas

Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...

Dirección de ésta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...

Nombre de la cuenta... ... ...

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

D. ... ... Teléf.(...)... ... .

Dirección particular . ...

Ciudad ... ... Codº Postal .. ... .

Centro de trabajo ... ...

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco . ...

Sucursal o Agencia ... ... en .. ..

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en mi cuenta . ... nº ... ...

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1991-92

y siguientes. Fecha ... ... de ... . de 1991

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 3.000 pesetas

Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia... ... ... en ... ...

Dirección de ésta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ... ...

Dirección ... ...

Samuel fue precisamente ésta: la de introducir en el Algebra Local las técnicas de la función de Hilbert y estudiarla tan exhaustivamente mostrando su potencia y utilidad, que desde entonces ha quedado consagrada definitivamente con el nombre de función de Hilbert-Samuel.

Y con este trabajo entramos de lleno en la década de los cincuenta que tiene, desde el punto de vista del Algebra, un carácter muy definido. Si se tratara de adjetivar las distintas épocas del Algebra Conmutativa, a la década 1950-1960 le correspondería por derecho propio el calificativo de edad de oro de los métodos homológicos. Y hay una razón evidente para ello: la aparición del famoso libro de Cartan-Eilenberg "Homological Algebra", que lanzó a una gran cantidad de matemáticos hacia ese tipo de estudios. Bien es verdad que el Cartan-Eilenberg apareció en 1956 pero ya en 1952 circulaban gran cantidad de "preprints" de él. Entre los mejores investigadores de esta época se encuentran Koszul, Auslander, Buchsbaum, Tate, Serre, etc. Uno de los principales avances de esta época fué el estudio de la dimensión homológica de los anillos noetherianos.

Y entramos en la década de los sesenta en que ya la proliferación de trabajos es inmensa. El primer texto aparecido es el de Nagata "Local rings" que vió la luz el 1962, y que para todo estudioso es un libro de uso diario. Contiene, junto a muchos resultados conocidos (pues esa es su misión, servir de texto de anillos locales) otros muchos originales y que se deben a la fructífera pluma de este matemático. Puntos importantes a destacar, entre otros muchos son los dos siguientes:

a) En el capítulo III, que trata de multiplicidades se generaliza la función de Samuel para definir la multiplicidad de un módulo. Este punto de vista será utilizado más tarde por Serre en su teoría de intersección.

b) El capítulo VI es uno de los más notables. Trata de anillos locales geométricos y sus motivaciones, claro es, provienen de la Geometría Algebraica.

Otro libro importantísimo es "Algèbre locale Multiplicités" de Serre, del que, como en el caso anterior, destacamos lo fundamental:

a) El capítulo IV. Dimensión y codimensión homológicas.

b) El capítulo V trata de multiplicidades de módulos, su aspecto geométrico y la fórmula de los Tor.

En este estudio no podemos dejar de citar los siguientes textos:"Nuevos métodos de Algebra Local" de Nastold, tópico pero completísimo; el magnífico tratado de álgebras analíticas de Grauert-Remmert y por su enorme importancia en el estudio de "lo étale" el texto de Raynaud sobre anillos locales henselianos.

Por ultimo haremos referencia a un campo del álgebra conmutativa, el álgebra real que está tomando ultimamente mucho auge sobre todo a raiz de la demostración del teorema de los ceros real de Dubois-Rísler, que ha abierto todo un campo de investigación alrededor de la geometría algebraica real.

4) Resolución de singularidades

Hablaremos ahora un poco de la teoría de esquemas y del importante problema de la resolución de singularidades.

La generalización del concepto de variedad algebraica, lleva a la actual construcción de la Geometría Algebraica, utilizando el

lenguaje de los esquemas.

En esta construcción, el Algebra y la Topología intervienen tan estrechamente unidas, que es con frecuencia dificil deslindar sus campos. La teoría de haces proporciona el lenguaje indispensable para interpretar en términos "geométricos" las nociones esenciales del Algebra Conmutativa, y para "globalizarlas" y desempeña un papel fundamental en la elaboración actual de la Geometría Algebraica. Y en su base, está el concepto de haz, donde aparecen intimamente ligados el aspecto algebraico y el topológico.

La gran importancia del método de la resolución de singularidades está en que una gran parte de los teoremas de la Geometría Algebraica "global" se prueban para variedades lisas, desconociéndose que pasa con ellos en el caso de variedades con puntos singulares. Así, poseyendo un teorema de desingularización, es decir un proceso que permita pasar de una variedad con singularidades a una lisa que sea "muy semejante a la primera" (es decir, birracional equivalente a la primera), se pueden extender los teoremas de variedades lisas a cualquier variedad.

Finalmente pasaremos ya al estudio de la resolución de singularidades de variedades definidas sobre un cuerpo de característica cualquiera. Hironaka resuelve este problema cuando la variedad está definida sobre un cuerpo de característica cero. Sus métodos de trabajo son los de Zariski y su herramienta fundamental la teoría de esquemas elaborada por Grothendieck.

En el proceso de resolución de singularidades de Hironaka hay que separar dos ideas distintas:

i) Proceso de resolución local.

ii) Proceso de inducción y globalización.

El proceso local de Hironaka se basa en un estudio detallado del comportamiento de las bases de ideales por explosiones y la posibilidad de encontrar una base, base standard normalizada, con una cierta estabilidad respecto a dichas explosiones. A la vez se desarrolla un método de control del estado de la singularidad compuesto por dos series de funciones, la función de Hilbert-Samuel y los caracteres υ^{*}. Pero al pasar a la resolución de singularidades en característica positiva este proceso de resolución de Hironaka falla en los puntos infinitamente próximos, es decir en los que se estabiliza la función de Hilbert-Samuel. Este problema nosotros lo superaremos mediante el contacto maximal. Explicaremos muy brevemente nuestra resolución de singularidades de variedades algebroides sobre un cuerpo de característica cualquiera. En este caso el problema de resolución de singularidades, se puede enfocar de la manera siguiente:

Sea X una variedad algebroide, entonces resolver las singularidades de X será lo mismo que conseguir que disminuya su función de Hilbert-Samuel.

X será una variedad algebroide sumergida en K^n cuando $X=\mathrm{Spec}(K[[Z_1,\dots,Z_n]]/I)$ con I radical y K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cualquiera.

De lo dicho anteriormente se desprende que la resolución de singularidades de X nos vendrá dada al demostrar el siguiente teorema.

<u>Teorema 1</u>.- Sea X una variedad algebroide. Existe un número finito de transformaciones monoidales $\pi^{(i)}:X^{(i)}\longrightarrow X^{(i-1)}$ con $X^{(0)}=X$, $0<i\leq p$ tal que $H_{X^{(p)}}<H_X$ donde H_X es la función de Hilbert-Samuel de X.

Analizaremos brevemente los pasos que hemos seguido para la

demostración de este teorema. En primer lugar daremos otra definición de variedad algebroide.

<u>Definición 2</u>.- Llamaremos variedad algebroide intrínseca o simplemente variedad algebroide a $\mathrm{Spec}(\square)$ siendo $\square$ un anillo local noetheriano, completo, equicaracterístico y reducido, de dimensión de inmersión finita y cuerpo de coeficientes algebraicamente cerrado.

Aplicando el teorema de estructura de los anillos locales completos se demuestra que esta definición coincide con la definición de variedad algebroide dada anteriormente.

Definiremos ahora los transformados monoidales y cuadráticos del anillo de coordenadas de una variedad algebroide.

<u>Definición 3</u>.- Sean $\square$ el anillo de coordenadas de una variedad algebroide, M el ideal maximal de $\square$ y P un ideal primo de $\square$. Diremos que una $\square$-álgebra local $\square'$ es un transformado monoidal de $\square$ con centro P si y solo si $\square'=A_N$ donde:

i) $A=\square[P/\varphi_1]$ con $\varphi_1\in P$

ii) N es un ideal primo de A que contiene a MA. Si P=M diremos que $\square'$ es un transformado cuadrático de $\square$.

Se verifica que si $\square$ es el anillo de coordenadas de una variedad algebroide y $\square'$ un transformado monoidal de $\square$, entonces $\square'$ no es el anillo de coordenadas de una variedad algebroide pues no es completo. Debido a ello daremos la definición siguiente:

<u>Definición 4</u>.- Sean $\square$ el anillo de una variedad algebroide, $\square'$ un transformado monoidal de $\square$ con centro P. Llamaremos transformado monoidal formal de $\square$ con centro P a $\hat{\square}'$-compleción de $\square'$ respecto de la topología M'-ádica con M' ideal maximal de $\square'$. En el caso de que P=M con M ideal maximal de $\square$ diremos que $\hat{\square}'$ es un transformado cuadrático formal de $\square$.

Se verifica que si $\square$ es el anillo de coordenadas de una variedad algebroide y $\hat{\square}'$ un transformado monoidal formal de $\square$, entonces $\hat{\square}'$ es también el anillo de una variedad algebroide.

Después de estos preliminares pasamos a un aspecto particular del problema que nos ocupa: la resolución de singularidades en las hipersuperficies algebroides.

Sea $R=K[[Z,W_1,\dots,W_{n-1}]]$, $H=\mathrm{Spec}(R/(\varphi(Z,W_1,\dots,W_{n-1}))R)$ una hipersuperficie algebroide, $\varphi(Z,W_1,\dots,W_{n-1})\in R$.

Después de estudiar con todo detalle la variación del diagrama de Newton de una hipersuperficie mediante una transformación cuadrática formal demostramos los dos teoremas de desingularización en el caso de hipersuperficies.

Teorema 5.- Sea $\varphi(Z,W_1,\dots,W_{n-1})=0$ la ecuación de la hipersuperficie H cuya forma inicial no es la potencia υ-esima de una forma lineal. Se verifica entonces que la multiplicidad de H decrece mediante una transformación cuadrática formal.

Teorema 6.- Sea $\varphi(Z,W_1,\dots,W_{n-1})=0$ la ecuación de la hipersuperficie H cuya forma inicial $\varphi_{\upsilon}(Z,W_1,\dots,W_{n-1})$ sea la potencia υ-ésima de una forma lineal. Se verifica entonces que la multiplicidad de la hipersuperficie H decrece en un número finito de transformaciones cuadráticas formales.

Una vez resuelto el problema, en el caso de las hipersuperficies algebroides, pasamos a considerarlo en el caso general de una variedad algebroide. Para ello, en nuestro orden de ideas, hemos necesitado utilizar el concepto de contacto maximal.

Sea X una variedad algebroide de anillo coordenadas $\square$. Designamos

$$H_x=H_{\square}$$

siendo $H_{\square}$ la función de Hilbert-Samuel del anillo local $\square$. El teorema de Bennett afirma en el caso de ser K algebraicamente cerrado de característica cero que la función de Hilbert-Samuel no crece mediante una transformación monoidal normalmente plana. Hemos generalizado el teorema de Bennett a nuestro caso de ser K algebraicamente cerrado de característica arbitraria. De acuerdo con el teorema de Bennett, H_x es no creciente, por tanto ó se mantiene constante ó decrece. Si decrece, el problema queda resuelto. En el caso de que H_x se mantenga constante, para resolverlo utilizaremos el contacto maximal pues sabemos que si X posee contacto maximal la función de Hilbert-Samuel baja en un número finito de transformaciones monoidales. El problema, en nuestro caso de ser K de característica arbitraria es que el contacto maximal no existe siempre. Para resolver este problema el método que seguiremos será considerar la variedad como una intersección tangencial adecuada de hipersuperficies o lo que es lo mismo trabajar con bases standard normalizadas. Sabemos que si X es una variedad algebroide sumergida en K^n, $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ una base standard normalizada de la variedad, $H_1,\dots,H_p$ las hipersuperficies algebroides de ecuaciones $\varphi_1=0,\dots,\varphi_p=0$. Entonces si las hipersuperficies $H_1,\dots,H_p$ tienen contacto maximal, es posible encontrar una variedad algebroide regular que tenga contacto maximal con la variedad X. Luego el problema del contacto maximal en variedades algebroides y por lo tanto el de resolución de singularidades queda resuelto con el teorema siguiente que hemos demostrado.

Teorema 7.- Sea X una variedad algebroide y $\{\varphi_1,\dots,\varphi_p\}$ una base standard normalizada de la variedad. Supongamos que las hipersuperficies H_i de ecuaciones $\varphi_i=0$, $1\le i\le t$, $t<p$ tienen contacto

maximal y sin embargo las hipersuperficies de ecuaciones $\varphi_i=0$, $t+1\le i\le p$ no lo tienen. En estas condiciones se verifica que existe un número finito de transformaciones cuadráticas formales que transforman la base $\{\varphi_1,\dots,\varphi_p\}$ en $\{\varphi'_1,\dots,\varphi'_p\}$ de manera que todas las hipersuperficies H'_i de ecuaciones $\varphi'_i=0$, $i=1\dots p$ tienen contacto maximal.

UN DIA DIFERENTE

por Juan Miguel Sánchez Sánchez
Saint Louis University Madrid Campus

El contenido de este trabajo es un pequeño sucedido, una simple anécdota resultado de una experiencia personal. Se trata de una historia cotidiana que sucedió en nuestra universidad cuyo único mérito radica en que es real y que pone de relieve la conexión que existe entre las distintas partes de las matemáticas y cómo, aún para el profesional , resulta a veces difícil reconocerla .

Todo sucedió el primer día de otoño de 1989 . A las 08:00 horas en la clase de " Introduction to Linear Algebra " (MT-E315) estábamos comenzando a profundizar en el estudio de las matrices cuadradas de orden n . Ese día los estudiantes proponían ejercicios para resolver en clase . El libro de texto era " A primer on linear algebra " de Herstein & Winter . Uno de los alumnos propuso los ejercicios 19 & 20 de la sección 3.1 (Middle level problems) basados ambos en la misma idea .

" *Si* $A^m = O$ *y* $AB = B$ *probar que* $B = O$ "

(A y B son matrices cuadradas de orden n con elementos en el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ *)* .

La solución más económica de este ejercicio sería la siguiente :

$$A^m = O \Rightarrow A^m B = O \;, \quad \text{pero} \quad A^m B = A^{m-1}(AB) = A^{m-1}B = \\ = A^{m-2}(AB) = A^{m-2}B = \dots = AB = B$$

luego $B = O$. *¡ Muy simple !*

En aquél momento , mis pensamientos no siguieron tan fácil razonamiento . Recordé en voz alta algunas de las propiedades de los endomorfismos nihilpotentes de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E de dimensión finita , entre ellas la existencia de una base B_E de E tal que la matriz de uno cualquiera de esos endomorfismos respecto de B_E es triangular superior con la diagonal principal nula . Sabía , por tanto , que la matriz (A − I) era una matriz invertible y que como consecuencia , la conclusión del enunciado del ejercicio era correcta , pero no podía usar este razonamiento porque se salía claramente del nivel en el que estaban planteados los ejercicios .

Con el enunciado equivalente

" *Si* $A^m = O$, $A - I$ *es invertible* "

al que me había conducido mi forma de abordar el ejercicio , era evidente que para resolverlo debería encontrar una escritura " *agradable* " de la inversa de (A − I) .

Tras unos minutos de infructuosa búsqueda dejé el ejercicio con el consabido " *ya lo pensaré con más calma y os lo contaré en la próxima clase* " .

Ese mismo día , unas horas más tarde en la clase de Calculus I (MT-E143) con el concepto de límite como tema en estudio ,de nuevo los alumnos planteaban ejercicios para resolver en clase . El libro de texto era en este caso , el de Louis Leithold " Calculus with Analytical Geometry " 5th edition .

Uno de los alumnos propuso el ejercicio 41 de la sección 1.2

" *Probar que el límite*

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x+5} = 3$$

aplicando la definición de límite " .

Fijado un $\varepsilon > 0$ deseamos determinar un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < | x - 4 | < \delta \quad \text{entonces} \quad | \sqrt{x+5} - 3 | < \varepsilon$$

Utilicé la igualdad

$$(1) \qquad a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) (\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

para escribir

$$| \sqrt{x+5} - \sqrt{9} | = \frac{| x - 4 |}{\sqrt{x+5} + 3}$$

e impuse a δ *la restricción* $\delta \le 1$ *para probar que si*

$$0 < | x - 4 | < \delta \quad \text{entonces} \quad | \sqrt{x+5} - \sqrt{9} | < \frac{\delta}{\sqrt{8} + 3}$$

de modo que para $\delta < \min (1 , \varepsilon (\sqrt{8} + 3))$

$$| \sqrt{x+5} - \sqrt{9} | < \varepsilon$$

Después de terminar el ejercicio , resalté la importancia de la igualdad (1) y pregunté si alguien podría imaginar una generalización natural de (1) que se pudiera usar para probar que

$$\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{x+5} = \sqrt[3]{9}$$

después de unos instantes de reflexión , les escribí en la pizarra la igualdad

$$(2) \qquad a - b = (a^{1/3} - b^{1/3}) (a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3})$$

caso particular , para n = 1/3 , de la bien conocida expresión de álgebra

$$(3) \qquad a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a\, b^{n-2} + b^{n-1})$$

Fué en ese instante , al acabar de escribir la igualdad (3) en la pizarra , cuando me dí cuenta de la conexión de esa fórmula con el ejercicio de matrices que esa misma mañana había dejado sin resolver .

En efecto , cualesquiera que sean la matriz A y el número entero m

$$(3) \qquad A^m - I^m = (A - I) (A^{m-1} + A^{m-2} + \dots + A + I)$$

de modo que si A es m-nihilpotente $A^m = 0$ *y*

$$(-1)^m I = (A - I) (A^{m-1} + A^{m-2} + \dots + A + I)$$

luego

$$(4) \qquad (A - I)^{-1} = (-1)^m (A^{m-1} + A^{m-2} + \dots + A + I)$$

y esa igualdad (4) define la deseada inversa de la matriz (A-I).

Se me agolparon entonces en la cabeza un montón de pensamientos y sensaciones , la satisfacción por la resolución del ejercicio ,por la belleza de la conexión hallada y por lo insólito de la situación vivida difícilmente repetible, el recuerdo de un artículo famoso de Henri Poincarè sobre la creación matemática y la necesidad de escribir cuanto antes los detalles de la experiencia que en caso contrario hubiera quedado relegada al olvido .

ACOTACIONES ELEMENTALES INTERMEDIAS ENTRE LA MEDIA GEOMETRICA Y ARITMETICA

Juan Bosco Romero Márquez
I.N.B. "Isabel de Castilla". AVILA.

1.- Exponemos en este artículo diversas acotaciones intermedias elementales, entre las medias armónica: $h = \frac{2ab}{a+b}$; media geométrica: $g = \sqrt{ab}$; media aritmética: $a^* = \frac{a+b}{2}$; media cuadrática: $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, etc., donde $0 < a < b$, $a,b \in R^+$.

Las técnicas que emplearemos van desde la comparación por el orden de los números que vamos a definir, a partir, de $a,b \in R^+$, $0 < a < b$, y técnicas de integración elemental.

El valor didáctico de este trabajo es que, se puede ensayar con los alumnos de tercero de B.U.P. y C.O.U., como una experiencia de investigación en matemática elemental.

Ver para ampliación de estas acotaciones la bibliografía citada.

2.- Resultados previos.

Teorema 2.1.- Si $0 < a < b$, $a,b \in R$, entonces

$$a < h < g < a^* < c < b.$$

Demostración.- Es de carácter elemental, y basta para establecer esta cadena de desigualdades, comparарlas mediante resta de dos de ellas, o de sus cuadrados.

Teorema 2.2.- Si $0<a<b$, $a,b \in \overset{+}{R}$, entonces

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} .$$

Demostración.- Se puede hacer por cálculo directo, o bien, como alternativa, partir de la desigualdad, $\frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$; multiplicar, por b-a, da:

$$\frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{2(b-a)}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(b-a)} < \frac{1}{\sqrt{a}} ; \quad \frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{(b-a)(\sqrt{b}+\sqrt{a})} < \frac{1}{\sqrt{a}} ;$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} < \frac{1}{2\sqrt{a}} ; \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b}-\sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} ;$$

$\frac{b-a}{2\sqrt{2b}} < \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2} < \frac{b-a}{2\sqrt{2a}}$; y elevando al cuadrado, se obtiene

$$\frac{(b-a)^2}{8b} < \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2} < \frac{(b-a)^2}{8a} .$$

De aquí,

$$\frac{(b-a)^2}{8b} < \frac{a+2}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(b-a)^2}{8a} ,$$

Como queríamos probar.

Teorema 2.3.- Si $0<a<b$, $a,b\in R$, y si $0 \le \lambda \le 1$, $\lambda \in R$, entonces

$$\sqrt{ab} \le \sqrt{(\lambda a+(1-\lambda)b)(1-\lambda)a+\lambda b)} \le \frac{a+b}{2} .$$

Demostración.- La desigualdad de la izquierda se prueba como sigue:

Sea $\psi(\lambda) = (\lambda a+(1-\lambda)b)((1-\lambda)a+\lambda b) = -\lambda^2(b-a)^2+(b-a)^2+ab$, con $0 \le \lambda \le 1$.

Entonces,

$\psi(\lambda) - ab = -\lambda^2(b-a)^2 + \lambda(b-a)^2 = \lambda(b-a)^2(1-\lambda) \ge 0$, con $0 \le \lambda \le 1$, y

de aquí se obtiene el resultado.

La desigualdad de la derecha se prueba como sigue:

$$\frac{(a+b)^2}{4} - \psi(\lambda) = \frac{(a+b)^2}{4} - (-\lambda^2(b-a)^2+\lambda(b-a)^2+ab) =$$

$$= \lambda^2(b-a)^2 - \lambda(b-a)^2 + \frac{(a+b)^2}{4} - ab = \lambda^2(b-a)^2 - \lambda(b-a)^2 + \frac{(b-a)^2}{4} =$$

$= (b-a)^2(\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}) = (b-a)^2(\lambda-\frac{1}{2})^2 \ge 0$, con $0 \le \lambda \le 1$; y de aquí se obtiene el resultado.

Teorema 2.4.- Si $0 < b < a$, $a,b \in R$, entonces

a) $\sqrt{ab} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+4ab}{6}} \le \frac{a+b}{2}$.

b) $\sqrt{ab} \le \frac{\sqrt{ab}}{2} + \frac{1}{4}\frac{(a+b)^2}{a-b}$ arc sen $\frac{a-b}{a+b} \le \frac{a+b}{2}$, $a \ne b$

c) $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a-b}{La-Lb} \le \frac{a+b}{2}$, donde $L(a,b) = \frac{a-b}{La-Lb}$ (media logarítmica).

Demostración.- a) Sabemos que si $0 < b < a$, $a,b \in R$ y $0 \le \lambda \le 1$, $\lambda \in R$ que

$$ab \le (\lambda a+(1-\lambda)b)((1-\lambda)a+\lambda b) \le (\frac{a+b}{2})^2 .$$

La integración con respecto a λ, en $|0,1|$, en la desigualdad anterior, permite llegar a:

$$ab \le \frac{1}{6}(b-a)^2 + ab \le (\frac{a+b}{2})^2 .$$

Extrayendo, la raíz cuadrada en la última desigualdad, obtenemos a).

b) Sabemos, como antes, que si $0<b<a$, $a,b\in R$, y $0\le\lambda\le 1$, $\lambda\in R$ que

$$\sqrt{ab}\le\sqrt{(\lambda a+(1-\lambda)b)((1-\lambda)a+\lambda b)}\le\frac{a+b}{2}.$$

Que podemos escribirla como

$$\sqrt{ab}\le\sqrt{-\lambda^2(a-b)^2+\lambda(a-b)^2+ab}\le\frac{a+b}{2}.$$

Integrando esta última, desigualdad respecto a λ, en $|0,1|$, y después, de efectuar el cambio de variable $\frac{2(a-b)}{a+b}(\lambda-\frac{1}{2})=u$, llegamos a:

$$\sqrt{ab}\le\frac{(a+b)^2}{4(a-b)}\int_{\frac{b-a}{b+a}}^{\frac{a-b}{a+b}}\sqrt{1-u^2}\,du\le\frac{a+b}{2}$$

Como $\int\sqrt{1-u^2}\,du=\frac{u\sqrt{1-u^2}+\text{arc sen}\,u}{2}$, y haciendo, las operaciones necesarias, se llega al resultado b).

En particular, tenemos el siguiente resultado:

Si $x\ge 1$, $\quad\frac{2(x-1)\sqrt{x}}{(x+1)^2}\le\text{arc sen}\,\frac{x-1}{x+1}\le\frac{2(x-1)}{(x+1)^2}(x+1-\sqrt{x}).$

o

$$\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\le\frac{x+1}{x-1}\,\text{arc sen}\,\frac{x-1}{x+1}\le\frac{2(x+1-\sqrt{x})}{x+1},\quad x>1.$$

c) Como $0<b<a$, a,b R, y $0\le\lambda\le 1$, $\lambda\in R$, tenemos que

$$ab\le(\lambda a+(1-\lambda)b)((1-\lambda)a+\lambda b)\le\frac{(a+b)^2}{4}.$$

Que se puede escribir como:

$$ab\le[\lambda(a-b)+b][\lambda(b-a)+a]\le\frac{(a+b)^2}{4}.$$

Invirtiendo, e integrando respecto a λ, en $|0,1|$, tenemos que

$$\frac{4}{(a+b)^2}\le\frac{1}{a+b}\left[\frac{L[\lambda(a-b)+b]}{a-b}+\frac{L[\lambda(b-a)+a]}{b-a}\right]_0^1\le\frac{1}{ab}.$$

Haciendo, las operaciones de cálculo correspondientes, en esta última desigualdad, obtenemos que

$$\frac{2ab}{a+b}\le\frac{a-b}{La-Lb}\le\frac{a+b}{2},$$

como queríamos probar.

Ejercicio.- a) Si $0<a<b$, entonces $0<a^2<ab<b^2$.

b) Si $\lambda\ge 0$, $\quad a^2\le\frac{a^2+\lambda ab}{\lambda+1}\le ab\le\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}\le\frac{b^2+\lambda ab}{\lambda+1}\le b^2.$

(Se obtiene, por cálculo directo).

c) Integrando respecto a λ, en el intervalo $[0,\lambda]$, $\lambda\ge 0$, se obtiene que,

$$a^2\lambda\le(a^2-ab)L(1+\lambda)+\lambda ab\le ab\lambda\le(a^2+b^2)L(\lambda+2)+ab\lambda-2abL(\lambda+2)\le(b^2-ab)L(1+\lambda)+ab\lambda\le b^2,$$

$$a^2\lambda\le(a^2-ab)L(1+\lambda)+\lambda ab\le ab\lambda\le(b-a)^2L(\lambda+2)+ab\lambda\le(b^2-ab)L(1+\lambda)+ab\lambda\le b^2\lambda.$$

d) Tomando, raíz cuadrada, en las desigualdades b) y c), se obtienen nuevas definiciones de medias, y cotas, para la media geométrica.

e) De $(\lambda+1)(\lambda+2)a^2\le(\lambda+2)(a^2+\lambda ab)\le(\lambda+1)(\lambda+2)ab\le(\lambda+1)(a^2+b^2+\lambda ab)\le$
$\le(\lambda+2)(b^2+\lambda ab)\le b^2(\lambda+1)(\lambda+2)$

$$a^2\int_0^\lambda(\lambda^2+3\lambda+2)d\lambda\le\int_0^\lambda[\lambda^2ab+\lambda(a^2-2ab)+2a^2]d\lambda\le\int_0^\lambda(\lambda^2+3\lambda+2)_{ab}d\lambda\le$$
$$\le\int_0^\lambda(\lambda^2ab+\lambda(a^2+b^2+ab)+a^2+b^2)d\lambda\le\int_0^\lambda(\lambda^2ab+\lambda(b^2+2ab)+2b^2)d\lambda\le\int_0^\lambda b^2(\lambda^2+3\lambda+2)d\lambda$$

$$a^2(\frac{\lambda^3}{3} + \frac{3\lambda^2}{2} + 2\lambda) \leq \frac{ab\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^2}{2}(a^2+2ab)+2a^2\lambda \leq ab(\frac{\lambda^3}{3} + \frac{3\lambda^2}{2} + 2\lambda) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda^3}{3} ab + \frac{\lambda^2}{2}(a^2+b^2+ab)+(a^2+b^2)\lambda \leq \frac{\lambda^3}{3} ab + \frac{\lambda^2}{2}(b^2+2ab)+2b^2\lambda \leq b^2(\frac{\lambda^3}{3}+\frac{3\lambda^2}{2}+2\lambda)$$

En particular, para $\lambda = 1$, tenemos que,

$$\frac{23}{6} a^2 \leq \frac{ab}{3} + \frac{1}{2}(a^2+2ab)+2a^2 \leq \frac{23}{6} ab \leq \frac{1}{3} ab + \frac{1}{2}(a^2+b^2+ab)+(a^2+b^2) \leq$$

$$\leq \frac{ab}{3} + \frac{1}{2}(b^2+2ab) + 2b^2 \leq \frac{23}{6} b^2$$

3.- En esta última sección presentamos una generalización de los resultados, ya obtenidos en el apartado 2.

Teorema 3.1

a) Si $\lambda \in R$, y $\lambda \geq 2$, y a,b R^+_*, $\sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

b) Si $0 \leq \lambda \leq 2$, y $a,b \in R^+_*$, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Demostración.- a) Basta que veamos, que $\sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}} \leq \frac{a+b}{2}$

El miembro de la izquierda, es decir, $\sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}}$, es como sigue:

$$\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2} - ab = \frac{a^2+b^2+\lambda ab-\lambda ab-2ab}{\lambda+2} = \frac{(a-b)^2}{\lambda+2} \geq 0; \text{ esto es,}$$

$ab \leq \frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}$. Extrayendo la raíz cuadrada se obtiene el resultado.

El miembro de la derecha, es decir, $\sqrt{\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}} \leq \frac{a+b}{2}$, es como sigue:

$$\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2} = \frac{(\lambda+2)(a+b)^2 - 4(a^2+b^2+\lambda ab)}{4(\lambda+2)} =$$

$$= \frac{(\lambda+2)(a^2+b^2+2ab)-4(a^2+b^2+\lambda ab)}{4(\lambda+2)} = \frac{\lambda a^2+\lambda b^2+2\lambda ab+2a^2+2b^2+4ab-4a^2-4b^2-4\lambda ab}{4(\lambda+2)} =$$

$$= \frac{a^2(\lambda-2)+b^2(\lambda-2)-2ab(\lambda-2)}{4(\lambda+2)} = \frac{(\lambda-2)}{4(\lambda+2)}(a^2+b^2-2ab) = \frac{(\lambda-2)}{4(\lambda+2)}(a-b)^2 \geq 0, \text{ y}$$

de aquí, $\sqrt{\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}} \leq \frac{a+b}{2}$. Extrayendo la raíz cuadrada se obtiene el resultado. En particular, si $\lambda = 2$, se obtiene en $\sqrt{\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}} = \frac{a+b}{2}$, media aritmética; y para $\lambda = +\infty$, se obtiene en $\sqrt{\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}} = \sqrt{ab}$.

b) Si $0 \leq \lambda \leq 2$, y $a,b \in R^+_*$, entonces, por cálculo directo se tiene que, $\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2} = \frac{\lambda(a-b)^2}{2(\lambda+2)} \geq 0$, es decir,

$\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2} \leq \frac{a^2+b^2}{4}$. Extrayendo la raíz cuadrada se obtiene el resultado. Lo mismo por el cálculo directo obtenemos que,

$$\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4(a^2+b^2+\lambda ab) - (\lambda+2)(a+b)^2}{4(\lambda+2)} = \frac{(a-b)^2(2-\lambda)}{4(\lambda+2)} \geq 0,$$

es decir, $\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}$. Extrayendo la raíz cuadrada se obtiene el resultado.

Teorema 3.2.- Si $a,b \in R^+_*$, y $x > 2$, entonces

$$\sqrt{ab} \leq \sqrt{ab + \frac{(a-b)^2}{x-2} L \frac{x+2}{4}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Demostración.- Si $x \geq 2$, y si $\lambda \geq 2$, entonces

$$ab \leq \frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2} \leq \frac{(a+b)^2}{4}, \quad a,b \in R^+.$$

Integrando, en el intervalo $|2,x|$, la desigualdad anterior, se tiene que,

$$\int_2^x ab\, d\lambda \leq \int_2^x \frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}\, d\lambda \leq \int_2^x \frac{(a+b)^2}{4}\, d\lambda .$$

Después de efectuar, las operaciones llegamos, a

$$(x-2)ab \leq (a-b)^2 L\,\frac{x+2}{4} + ab(x-2) \leq \frac{(a+b)^2}{4}(x-2), \quad \text{si} \quad x \geq 2.$$

Si $x > 2$, obteniendo, la raíz cuadrada en la desigualdad anterior, se obtiene, el resultado propuesto en el teorema.

Ejercicios

1) Si $x \geq 2$, e integrando respecto de λ, en el intervalo $|2,x|$, la desigualdad

$$\frac{4}{(a+b)^2} \leq \frac{\lambda+2}{a^2+b^2+ab} \leq \frac{1}{ab}, \qquad (a,b>0)$$

se obtiene una nueva acotación

2) Si $x \geq 2$, e integrando respecto de λ, en el intervalo $|2,x|$, la desigualdad

$$ab \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+\lambda ab}{\lambda+2}} \leq \frac{a+b}{2},$$

se obtiene una nueva acotación.

3) Plantear los mismos problemas anteriores, para las desigualdades del teorema 3.1. b.

4) Probar la desigualdad de Tung-Po Lin,

$$L(x,y) = \frac{x-y}{Lx-Ly} \leq \left(\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{2}\right)^3 .$$

Otros resultados interesantes y diversas generalizaciones sobre medias, se encuentran en los artículos |6|, |7|, |8|, |9|, |10|, |11|, |12|, |13|, |14|.

5) Si $x,y>0$, $x \neq y$

$$\sqrt{xy} < T(x,y) < L(x,y) < D(x,y) < S(x,y) < \frac{1}{2}(x+y) \qquad x \neq y ,$$

donde $T(x,y) = \left[xy\,\frac{(x+y)}{2}\right]^{1/3}$ (m.Theil, 1973);

$S(x,y) = \frac{1}{3}\left[2(xy)^{1/2} + \frac{1}{2}(x+y)\right]$ (media de Sato; ver teorema 4a.

$D(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x^{1/3}+y^{1/3})\right)^3$ (media de Diewert, 1978).

Con la igualdad entre todas las medias, si $x=y$.

6) Si $x,y>0$, entonces $\sqrt{xy} < \sqrt[4]{\frac{x^3y+xy^3}{2}} < \frac{x+y}{2}$.

Teorema 3.3 (media geométrica y aritmética).- Si $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \geq 0$, $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n = 1$, y $x_i>0$, $i=1,\ldots,n$, son números reales, entonces

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \ldots + \lambda_nx_n \geq x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n} .$$

Demostración.- Sea $f(x) = Lx$ $(x>0)$, es una función dos veces diferenciable, y como $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, equivale, a decir, que f es cóncava en $]0,+\infty[$.

Luego, $L\left(\sum_{i=1}^n \lambda_ix_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_iLx_i = L\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}$; y

como, $f(x) = Lx$ es creciente, se tiene el resultado.

Observación.- Otras demostraciones del teorema de la media geométrica-aritmética, con diversas generalizaciones y refinamientos, se pueden encontrar en |2|, |3|, |4|, |5|.

Teorema 3.4.- a) Si $0 \le \alpha \le 1$, y $x>0$, $y>0$, $x,y \in R$, entonces

$$x+y \ge x^{\alpha}y^{1-\alpha} + x^{1-\alpha}y^{\alpha} \ge 2\sqrt{xy} ,$$

b)
$$\frac{x+y}{2} \ge \frac{x-y}{Lx-Ly} \ge \sqrt{xy}. \qquad (x \ne y).$$

Demostración.- a) Partimos de

$$x+y = (\alpha+(1-\alpha)(x+y) = [\alpha x + (1-\alpha)y] + [(1-\alpha)x + \alpha y] ;$$

por el teorema de la media aritmética y geométrica, aplicada a cada término, se tiene que,

$$x+y \ge x^{\alpha}y^{1-\alpha} + x^{1-\alpha}y^{\alpha} \ge 2\sqrt{x^{\alpha}y^{1-\alpha}x^{1-\alpha}y^{\alpha}} = 2\sqrt{xy} ,$$

por el teorema de la media aritmética-geométrica, con $a = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$ y $b = x^{1-\alpha}y^{\alpha}$.

b) La integración respecto de α en |0,1| de la desigualdad obtenida en a), se obtiene que

$$\int_0^1 (x+y)d\alpha \ge \int_0^1 (x^{\alpha}y^{1-\alpha} + x^{1-\alpha}y^{\alpha})d\alpha \ge 2\int_0^1 \sqrt{xy}\, d\alpha ;$$

efectuando, las operaciones necesarias, se llega, una vez más a,

$$\frac{x+y}{2} \ge \frac{x-y}{Lx-Ly} \ge \sqrt{xy} , \quad x \ne y$$

BIBLIOGRAFIA

|1| O. Shisha: Inequalities, Academic Press, New York, 1967.

|2| G.H. Hardy, J.E. Litlewood, G. Polya: Inequalities, Cambridge University Press, London, 1952.

|3| D.S. Mitrinovic: Analytic Inequalities, Springer, New York, 1970.

|4| E.F. Beckenbach, y R. Bellman: Inequalities, Springer, New York, 1965.

|5| C.L. Siegel: The trace oftotally positive and real algebraic integers, Annals of Math. Vol. 46, 2, 1945.

|6| K.B. Stolarsky: The power and generalizad logarithmic means, Amer. Math. Monthly, 1980.

|7| B.C. Carlson: The logarithmic mean, Amer. Math. Monthly, 79, 1972.

|8| E.B. Leach y M.C. Sholander: Extend mean values, Amer. Math. Monthly, 85, 1978.

|9| Tung-Po Lin: The power mean and the logarithmic mean, Amer. Math. Monthly, 81, 1974.

|10| K.B. Stolarsky: Generalizations of the logarithmic mean, Math. Mag. 48, 1975.

|11| M.D. Tobey: A two-parameter homogeneous mean values, Proc. Amer Math. Soc. 18, 1967.

|12| B.C. Carlson y J.L. Brenner: Homogeneous mean values weights and asymptotics, J. Math. Anal. Applied, 1978.

|13| D.S. Mitronovic: Elementary Inequalities, North-Holland, Holland, 1964.

|14| Y.O. Vartia: Relative changes and index numbers, The Research Institute of the finnish Economy, Helsinki, 1976.

|15| P. Madden: Concavidad y optimización en microeconomía, A.U., Madrid, 1987.

SOCIEDAD MADRILEÑA DE PROFESORES DE MATEMATICAS

El pasado día 14 de Febrero tuvo lugar la Asamblea Fundacional de la nueva **"Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas"**, en la que quedaron aprobados sus estatutos y nombrada su Junta Directiva.

La reunión se celebró en el I. B. "San Isidro" de Madrid, y quedaron expuestos los objetivos de la Sociedad, muy semejantes a los de la nuestra, pero centrados tan sólo en la Comunidad Autónoma de Madrid. Resultaron elegidos su presidente, don Javier Brihuega Nieto, su vicepresidenta, doña María Jesús Luelmo Verdú, su secretaria, doña María Eugenia Jiménez Aleisandre, y otros ocho miembros de su Junta Directiva.

Suscitada por uno de los presentes la existencia de nuestra Sociedad "Puig Adam" con finalidad muy semejante, quedó bien claro que en la creación de la nueva Sociedad no hay ánimo de competencia, pero que el numerosísimo colectivo de profesores de Matemáticas existente en nuestra Comunidad, da base suficiente para una diversidad de asociaciones y la que se estaba creando pretende conseguir la máxima eficacia a través de la restricción de su ámbito a nuestra provincia.

La nueva Sociedad se propone integrarse en la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, lo que deberán aprobar en una Asamblea Extraordinaria, y fijó la cuota anual en 5.000 pesetas, incluida la cuota de la Federación, que da derecho a recibir la revista SUMA.

La Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas desea a la recién creada Sociedad Madrileña los mayores éxitos en su labor, esperando que nuestras relaciones sean de estrecha colaboración.

EVOLUCION DE LOS CONTENIDOS DE MATEMATICAS EN LA ENSEÑANZA PRIMARIA Y SECUNDARIA A LO LARGO DE LOS ULTIMOS AÑOS (1945-1981)

María Ortíz Vallejo
Depto. de Algebra y Geometría
Universidad de Valladolid

Es interesante poder valorar y cuantificar distintos aspectos de la enseñanza de las Matemáticas, como son: importancia que se les otorga, complejidad y dificultad que presentan los contenidos y problemas, la distribución de esta dificultad en el tiempo y la relación con el entorno del individuo. En este trabajo se pretende, a traves de distintas cuantificaciones, conocer como ha sido la evolución de todas estas variables para algunos temas de Matemáticas, en tres generaciones de alumnado.

Efectuamos nuestro estudio mediante el análisis de libros de texto oficiales correspondientes a tres de los planes de estudio del periodo de referencia, seleccionados respectivamente por el número de años en activo, por la introducción de la Matemática Moderna y por estar vigente en estos momentos. El primero denominado "Plan 45" en el que los estudios de Primaria pertenecen a "La ley de educación Primaria de 1945" y los de Secundaria a "La ley de ordenación de la Enseñanza Media de 1953"; el segundo denominado "Plan 70" donde la Primaria, Secundaria y C.O.U. están reguladas por "La ley general de educación de 1970". Finalmente el "Plan 81" que corresponde a "Los programas Renovados de 1981" para la Primaria; el resto de estudios no se han modificado, puesto que los llamados planes de la Reforma para el bachillerato aún no son firmes.

La cuantificación de las magnitudes analizadas se realiza a través de: la importancia (medida por el número de contenidos y problemas), la complejidad de los contenidos (valorada según distintos grados de profundidad, tanto para la E.G.B. como para el B.U.P.), la dificultad de contenidos y problemas (medida a través de taxonomías específicas) y los problemas del entorno (medidos por el número de problemas). Las taxonomías realizadas para cuantificar la dificultad de los contenidos son una adaptación de las de Wood (2) (1968) que emplea una combinación de las elaboradas por Bloon (1) y el modelo presentado por "The International Study of Achievement in Mathematics" (2) (Husén, 1967), dando lugar a tres niveles. *Nivel* A: Información descriptiva. *Nivel* B: Información de técnicas, habilidades, propiedades demostradas con pequeños razonamientos. *Nivel* C: Razonamientos formales o series complejas deductivas. Para la cuantificación de los problemas, hemos adaptado el modelo presentado por James W. Wilson (2), que se basa igualmente en la taxonomía de Bloom (op. cit.) presentando cuatro niveles: Nivel A: *Computación*. Nivel B: *Comprensión*. Nivel C: *Aplicación*. Nivel D: *Análisis*.

El presente trabajo es un resumen de una parte de la tesis doctoral de la autora realizado en la Universidad de Valladolid.

Evolución del Algebra Moderna

Plan 45: Al existir este tema sólo en Preuniversitario, no tenemos datos suficientes para obtener conclusiones válidas.

Plan 70: En E.G.B. se le da una importancia elevada, mientras que en B.U.P. disminuye sensiblemente. La complejidad de los contenidos en E.G.B. es casi un 50% mayor que en el 81. La dificultad es similar al 81 pero repartida de forma muy irregular, observándose grandes oscilaciones. Los contenidos de nivel C no existen prácticamente; esto último indica la carencia de los aspectos más interesantes del Algebra Moderna, que son: capacidad de sistematización y su interés como herramienta de formación. En cuanto a problemas, la dificultad es muy baja frente a la que presentan los contenidos y su distribución es completamente anárquica. No existe relación con el entorno.

La exposición de este tema es absolutamente formal, y en buena parte de los casos, complica la experiencia práctica y los conocimientos intuitivos del alumno con formulismos y definiciones absolutamente innecesarios.

Plan 81: Se reduce en gran manera la importancia dada al tema. Disminuye la complejidad. La dificultad de los contenidos es semejante, pero su distribución en el tiempo es menos oscilante; al igual que en el 70 no existen prácticamente contenidos de nivel C, los niveles A y B presentan un descenso casi continuo a lo largo del periodo comprendido entre los cursos 1^0 y 8^0, lo que nos indica que los pequeños desarrollos acompañan a las definiciones en lugar de sustituirlos progresivamente, configurándose un Algebra de naturaleza descriptiva, defecto común a los dos planes. La dificultad de los problemas es baja respecto a la de los contenidos y su distribución es razonable. Inexistencia de problemas relacionados con el entorno.

La importancia desorbitada de este tema en el plan 70 se ve disminuida en el 81, olvidándose las complicaciones como operaciones no usuales con propiedades extrañas o la consideración de anillos de divisores de cero, etc., que enmascaran y complican procesos absolutamente elementales.

Evolución de la Geometría

Plan 45: Destaca la mayor importancia que se otorga a este tema, que supone el 50% de todos los contenidos matemáticos del plan. Los contenidos de este plan son los más complejos y su distribución razonable (entendemos como razonable aquella que hace concordar la dificultad de los contenidos propuestos con la edad psicológica del alumno) (3). Los problemas en la E.G.B. presentan la mayor dificultad, pero en B.U.P. ésta se asemeja a la del 70. Destaca en este plan la importancia que se concede a los problemas del entorno.

Excesivo nominalismo especialmente en los primeros cursos, así mismo abundan demostraciones formativas, introducidas en su momento adecuado y que resaltan la belleza del razonamiento matemático.

Plan 70: La importancia de este tema se reduce a la mitad respecto del anterior, disminuyendo también la complejidad de sus contenidos. En la E.G.B. son más fáciles y en B.U.P. similares. En cuanto a la distribución de los contenidos es marcadamente irregular. Los problemas en E.G.B. son los más faciles de los tres planes, siendo para B.U.P. similares a los del plan 45. No existen problemas del entorno.

Al no existir prácticamente contenidos de tipo B, se pasa de las definiciones elementales a contenidos conceptualmente más complejos debido a la pérdida de Geometría métrica y del análisis intuitivo de dicha Geometría. El razonamiento ligado a la intuición y observación se sustituye por el Algebra lineal y la Geometría afín, con la consiguiente pérdida de la capacidad de desarrollo del alumno en direcciones que son de interés. En este plan, los problemas son muy numerosos para todos los temas, pero abundando los de nivel A.

Plan 81: Aumenta la importancia de este tema, pero sigue siendo muy inferior al que se le concedía en el 45. Los contenidos de este plan son los menos complejos y difíciles. La presentación de los contenidos la consideramos razonable. Disminuye el número de problemas, lo cual nos puede indicar que la enseñanza de este tema es más teórica. Los problemas se limitan a los de tipos A y C, exceptuando 8^0 de E.G.B. en el que existe un porcentaje apreciable de tipo D.

La Geometría de este plan vuelve a ser métrica, repitiendose algunos resultados clásicos, intentándose aumentar el nivel de precisión en el establecimiento de los conceptos primitivos, de modo, que sin caer en la exageración del plan 70, se mejora considerablemente.

Evolución de las Medidas

Plan 45: La importancia que se otorga a este tema es superior al resto de los planes, siendo sus contenidos también los más complejos y difíciles. La distribución de los mismos es razonable. Los problemas son, respecto a su dificultad, similares al 70 y ligeramente inferior al 81; su distribución es lógica aunque un poco descompensada. Como en casi todos los casos, presenta el mayor procentaje de problemas del entorno. El tema aparece planteado de modo reiterativo para una mejor comprensión del mismo.

Se cae en el nominalismo, describiendose unidades de medida obsoletas o de carácter regional, descripciones que si bien en su momento tenian un

interés unificador, desde nuestro punto de vista actual, el progreso de los medios de comunicación, los vuelve inútiles.

Plan 70: Es el plan que concede menor importancia a este tema, estando muy por debajo de los otros dos, los contenidos se presentan en tres cursos separados entre sí. La complejidad de los mismos es intermedia entre los otros dos planes y la dificultad similar a la del 81 e inferior a la del 45. La dificultad de los problemas es similar a la del 45 e inferior al 81, siendo su distribución irregular. En cuanto a problemas del entorno ocupa el último lugar.

Plan 81: Se vuelve a la linea del 45 en cuanto a la importancia del tema, siendo sus contenidos los menos complejos y su dificultad similar a la del plan 70. Los problemas son los más difíciles de los tres planes, ocupando una posición intermedia en cuanto a su relación con el entorno.

Evolución de la Aritmética

Plan 45: La importancia del tema en E.G.B. es similar al 70 e inferior a la del 81, pero en el B.U.P. esta importancia es superior a la del 70. Los contenidos son los más complejos en E.G.B. aunque se invierte el orden en el B.U.P., la dificultad en E.G.B. es la menor, invirtiéndose ésta en el B.U.P. y la presentación es razonable. Los problemas son los más dificiles de los tres planes y su presentación concuerda con la de los contenidos. Es el plan con mayor porcentaje de problemas.

Al contrario que en la Geometría, la enseñanza de la Aritmética es de naturaleza repetitiva en los primeros años, prestando atención a los aspectos mas mecánicos de las operaciones; se trata de que el niño domine las "cuatro reglas" y sepa efectuar operaciones con números racionales con la máxima fluidez.

Plan 70: La importancia la hemos señalado en el plan 45. Los contenidos de E.G.B. son los más dificiles, disminuyendo ésta en B.U.P. sensiblemente respecto al plan anterior. La distribución presenta bastantes oscilaciones. Los problemas son los más fáciles y su relación con el entorno mínima.

Aparece este tema muy ligado al Algebra Moderna, por lo cual se tiende a darle un carácter más teórico; en cuanto al aprendizaje de las operaciones se omiten los aspectos memorísticos, intentando sustituirlos por el razonamiento, con la consiguiente pérdida de habilidad operativa.

Plan 81: Se le da la mayor importancia de los tres planes. Sus contenidos son los menos complejos y la dificultad es intermedia, siendo su distribución razonable para los de nivel A y B, no existiendo los de nivel C. Los problemas presentan una dificultad intermedia, así como la relación con el entorno. La posición en este tema es intermedia acercándose más a la línea del plan 45.

Evolución del Algebra Clásica

Plan 45: La importancia, que en E.G.B. es superior al resto de los planes, baja considerablemente en B.U.P. . La complejidad de sus contenidos es la menor en E.G.B., sin embargo en B.U.P. pasa a ser la mayor. La dificultad de los contenidos es superior al resto de planes. La distribución de los contenidos es razonable, aunque con claro carácter nominalista. Los problemas presentan una dificultad intermedia en la E.G.B. y supera en B.U.P. al 70. Es el que presenta mayor número de problemas del entorno.

El carácter de este tema, lo mismo que en Aritmética, es marcadamente operativo; de hecho es continuación de aquella en el papel de crear habitos y mecanismos de trabajo.

Plan 70: Ocupa un lugar intermedio en cuanto a importancia de contenidos, siendo los más complejos en E.G.B. e intermedios en B.U.P.; la dificultad es intermedia. La distribución es irregular, con mantenimiento constante de los contenidos A y la no aparición de los C en la E.G.B., alcanzando en B.U.P. un porcentaje apreciable. Los problemas son los más fáciles y los relacionados con el entorno siguen siendo, excepto en E.G.B. que superan al 81, los menos.

Como en Aritmética, se pierde capacidad de operación con monomios y polinomios.

Plan 81: Ultimo lugar en importancia y dificultad de contenidos, que contrasta con la máxima dificultad de sus problemas. Los contenidos de nivel

C son prácticamente inesistente y la distribución del resto razonable. La relación con el entorno es mínima.

Sigue sin recuperar interés por los aspectos operativos.

Evolución del cálculo

Al presentarse sólo en B.U.P., la comparación debe efectuarse entre los planes 45 y 70. La importancia y la complejidad de los contenidos del plan 45 son inferiores al plan 70, aunque la dificultad es similar. No podemos verificar como es la distribución de los contenidos por estar presentes sólo en dos cursos en el plan 45 y tres en el 70. Los problemas del plan 45 son más fáciles y más relacionados con el entorno.

Es el tema probablemente más discutido del plan 45, puesto que en Cálculo los aspectos formales son extremadamente complejos y todas las aproximaciones son malas, sólo se estudia en dos cursos que prácticamente presentan dos veces los mismos contenidos. Pone énfasis en los aspectos operativos pero no puede justificarlos por sus aplicaciones prácticas. En el plan 70, el Cálculo junto con el Algebra Moderna son los dos temas que han desplazado a la Geometría respecto del plan 45. El plan 70, adolece de los defectos del 45, intensificándose el estudio de los aspectos formales y teóricos.

Evolución de la Probabilidad y Estadística

Plan 45: En cuanto a importancia es la menor de los tres planes. En esta época este tema no había adquirido el interés y resonancia que presenta hoy. Sin embargo, los contenidos son los más complejos y difíciles. La distribución es bastante razonable. En cuanto a los problemas, los menos numerosos, son los más fáciles y los más entrocados con la vida real.

Plan 70: Presenta la mayor importancia, sin embargo sus contenidos son los menos complejos y más fáciles en la E.G.B., aumentando en B.U.P. La distribución es bastante coherente. Los problemas presentan fuerte dificultad en el B.U.P. y la relación con el entorno es casi inexistente.

En consonancia con la época se incrementan considerablemente y de forma coherente los contenidos, aunque una elevada parte de ellos corresponden a un desarrollo extremadamente formal de la Combinatoria.

Plan 81: La importancia que se presta al tema es intermedia entre los dos planes. En cuanto a complejidad y dificultad es similar al 45. La distribución no la analizamos por sólo presentarse contenidos en dos cursos. En cuanto a problemas, la dificultad es similar al 70 y su relación con el entorno es superior al 70.

Bibliografía

(1) BLOOM, S.: Taxonomía de los objetivos de la educación. El ateneo. Buenos Aires (1971)

(2) BLOOM, S. et al.: Evaluación del aprendizaje. Vol. 1 y 3. Troquel. Buenos Aires (1975)

(3) ORTIZ VALLEJO, M.: La enseñanza de las Matemáticas en los niveles elemental y medio. Su repercusión en la elección de carrera. Tesis doctoral en la Universidad de Valladolid (1990)

(4) ORTIZ VALLEJO, M.: "Distribución de los contenidos de Matemáticas en la Enseñanza Primaria y Secundaria". Comunicación, I C.I.B.E.M. Sevilla (1990)

(5) Textos oficiales de las editoriales: Dalmau, Edelvives, Magisterio Español, Bruño, Santillana.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA FASE FINAL DE LA XXVII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA CELEBRADA EN FEBRERO DE 1991

PROBLEMA 1º :

En el plano, en el que se ha tomado un sistema de referencia cartesiano (ortonormal), se consideran todos los puntos (m,n), cuyas coordenadas son números enteros. Se suponen trazados todos los segmentos rectilíneos que unen dos cualesquiera de esos puntos y cuya longitud sea un número entero. Probar que no hay dos de esos segmentos que formen un ángulo de 45 grados.

Si se hace lo mismo con los puntos (m,n,k) del espacio, ¿habrá algún par de esos segmentos que formen un ángulo de 45 grados?

- - - - - -

PROBLEMA 2º :

Siendo a y b números enteros, distintos de 0, 1 y -1, se considera la matriz:

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b^2 & a+b^3 & \cdots & a+b^m \\ a^2+b & a^2+b^2 & a^2+b^3 & \cdots & a^2+b^m \\ a^3+b & a^3+b^2 & a^3+b^3 & \cdots & a^3+b^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n+b & a^n+b^2 & a^n+b^3 & \cdots & a^n+b^m \end{pmatrix}$$

Determinar un subconjunto, S, de filas de esa matriz, lo menor posible, tal que cualquier otra fila se pueda expresar como suma de las filas de S multiplicadas por números enteros apropiados (es decir, como combinación lineal con coeficientes enteros de las filas de S). Explicitar dichas combinaciones lineales.

- - - - - -

PROBLEMA 3º :

Sea la ecuación

$$X^3 + pX^2 + qX + r = 0 \qquad (r \neq 0)$$

que se supone admite tres raices reales y positivas: x_1, x_2, x_3 . Determinar la relación que debe ligar a los números p, q y r, a fin de que los tres números x_1, x_2 y x_3 puedan ser longitudes de los lados de un triángulo.

\- - - - - -

PROBLEMA 4º :

Sean A', B' y C' los puntos de tangencia de los lados, BC, CA y AB, de un triángulo, con su circunferencia inscrita. Sea D el punto de intersección de C'A' con la bisectriz del ángulo A. Razonar cuánto mide el ángulo ADC.

\- - - - - -

PROBLEMA 5º :

Dado un número natural n, designamos con s(n) la suma de las cifras del número n, expresado en el sistema binario de numeración (es decir, el número de cifras 1 que tiene). Se pide, determinar, para todo número natural k, el número:

$$\sigma(k) = s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(2^k-1) + s(2^k)$$

\- - - - - -

PROBLEMA 6º :

Calcular la parte entera de

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9999}} + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$

\- - - - - -

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 (Boletín nº 22)

Demuestre que el conjunto {1, 2,..., 1989} puede expresarse como la unión de subconjuntos disjuntos A_i, (i = 1, 2,..., 117) tales que:

i) cada A_i tiene 17 elementos

ii) la suma de los elementos de cada A_i es la misma, para i = 1, 2, ... 117.

Solución

Se escriben los 1989 primeros números naturales

1	2	3	.....	58	59	60	.....	115	116	117
118	119	120	.....	175	176	177	.....	232	233	234
235	236	237	.....	292	293	294	.....	349	350	351
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
820	821	822	.....	877	878	879	.....	934	935	936
937	938	939	.....	994	995	996	.....	1051	1052	1053
1054	1055	1056	.....	1111	1112	1113	.....	1168	1169	1170
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1639	1640	1641	.....	1696	1697	1698	.....	1753	1754	1755
1756	1757	1758	.....	1813	1814	1815	.....	1870	1871	1872
1873	1874	1875	.....	1930	1931	1932	.....	1987	1988	1989

formando una tabla de 17 filas y 117 columnas.

Designando por S la suma de todos los números de la tabla

$$S = \frac{(1989 + 1)}{2} = 995.117.17$$

Como hay 117 conjuntos A_i, la suma de los elementos de cada A_i, debe ser

$$S^1 = S/117 = 995\cdot17 = 995\cdot16 + 995 = 1990\cdot8 + 995$$

Definiendo ΣA_1 como

$$\Sigma A_1 = 1 + 119 + 237 + \dots + 827 + 995 + 1163 + \dots + 1753 + 1871 + 1989 =$$

$$= (1+1989) + (119+1871) + (237+1753) + \dots + (827+1163) + 995 = 1990\cdot8 + 995 = S'$$

Obsérvese que los elementos de A_1 son los subrayados en la tabla.

El conjunto A_2 se puede obtener tomando el elemento siguiente a cada uno de A_1 en las 9 primeras filas (elementos subrayados dos veces), esto es

$$S_2' = 2+120+238+\dots+828 + 996 = 1 + 119 + 237 + \dots + 827 + 995 + 9$$

y a continuación, el anterior en las 7 filas siguientes y el ante-anterior en la última, o sea

$$S_2'' = 1162+\dots+1752 + 1870 + 1987 = (1163-1) + \dots + (1753-1) + (1871-1) +$$

$$+ (1989-2) = 1163 + \dots + 1753 + 1871 + 1989 - 9$$

y por tanto, $S_2' + S_2'' = \Sigma A_2 = \Sigma A_1 + 9 - 9 = S'$.

Reiterando el procedimiento, esto es, a partir de A_k, se obtiene A_{k+1} de la forma siguiente: Se toma de cada una de las 9 primeras filas el siguiente al tomado en A_k; de las filas décima a décimosexta se toma el anterior y de la última fila el que ocupa dos lugares delante, conviniendo en que al agotarse una fila se vuelve a empezar con ella por el extremo opuesto a donde

De esta forma se obtienen 117 conjuntos disjuntos, tales que la suma de sus elementos es en todos S' = 995·17, con lo que queda probado el enunciado.

José V. García Sestafe, (Madrid).

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

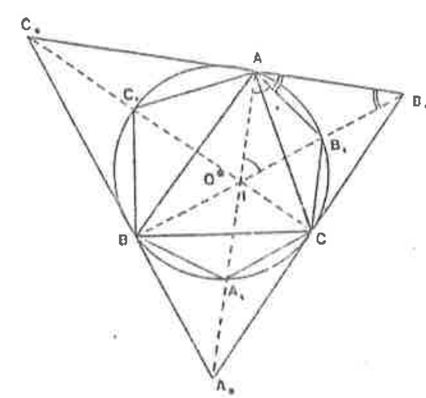
PROBLEMA 2 (Boletín nº 22)

Sea ABC un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo A corta al circuncírculo de ABC en A_1. Se definen los puntos B_1 y C_1 de forma análoga. Sea A_0 el punto de intersección de AA_1 con las bisectrices de los ángulos exteriores en B y C. Se definen B_0 y C_0 de forma análoga. Demuestre que:

a) área del triángulo $A_0B_0C_0$ = 2 × área del hexágono $AC_1BA_1CB_1$,
b) área del triángulo $A_0B_0C_0 \geq$ 4 × área del triángulo ABC.

Solución

Como el valor de un ángulo interior en una circunferencia es la semisuma de los arcos que subtienden sus lados (y sus prolongaciones) se tiene



$$\widehat{AIB_1} = \frac{\widehat{BA_1} + \widehat{AB_1}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$$

$$\widehat{IAB_1} = \frac{\widehat{A_1C} + \widehat{B_1C}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$$

luego, $\widehat{AIB_1}$ es isósceles, $IB_1 = AB_1$.

Por otra parte,

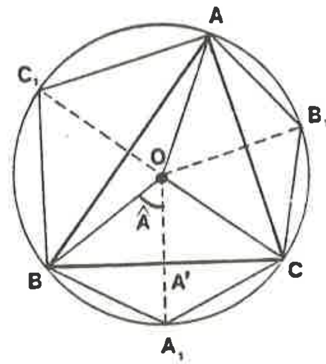
$$\widehat{B_1AB_0} = \frac{\pi}{2} - \widehat{IAB_1} = \frac{\pi - (\hat{A}+\hat{B})}{2} = \frac{\hat{C}}{2}$$

$$\widehat{AB_0I} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AIB} = \frac{\pi}{\;} \; \widehat{A}+\widehat{B} \; \widehat{C}$$

luego $AB_1 = B_1B_0$ y por tanto B_1 es el punto medio de IB_0 y el área del triángulo IB_0A es doble de la del IB_1A. Repetido el razonamiento para los restantes cinco pares de triángulos, resulta

$$S_{A_0B_0C_0} = 2S_{AB_1CA_1BC_1}$$

como se quería probar.



Siendo R el radio del círculo circunscrito a ABC y designando por T al área de dicho triángulo y por E a la del exágono, se tiene que, como $\widehat{BOC} = 2\widehat{A}$,

$$S_{\widehat{OBC}} = \frac{1}{2} R^2 \text{ sen } 2A$$

y por tanto

$$T = \frac{R^2}{2} (\text{sen } 2A + \text{sen } 2B + \text{sen } 2C)$$

Por otra parte

$$S_{OBA_1C} = \frac{1}{2} BC \cdot OA_1 = BA' \cdot OA_1 = (R \cdot \text{sen } A)\ R = R^2 \text{ sen } A$$

luego

$$E = R^2 (\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C)$$

y como, si $A + B + C = \pi$, $\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$, resulta

$$E = 4R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

y también

$$T = 2R^2 \cdot \text{sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C$$

puesto que $\text{sen } 2A + \text{sen } 2B + \text{sen } 2C = 4 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C$.

En todo triángulo se cumple

$$\text{sen } \frac{A}{2} \text{ sen } \frac{B}{2} \text{ sen } \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$$

siendo r el radio del círculo inscrito; el máximo valor de r es R/2 que es el caso del triángulo equiláreo, luego

$$\text{sen } \frac{A}{2} \text{ sen } \frac{B}{2} \text{ sen } \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Multiplicando la desigualdad anterior por $8R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

$$R^2 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C \leq R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

o sea

$$T/2 \leq E/4 \longrightarrow 2T \leq E$$

y como $2E = \text{Sup } A_0B_0C_0$, resulta, en definitiva

$$4T \leq 2E = \text{Sup } A_0B_0C_0$$

o bien

$$\text{Sup } A_0B_0C_0 \geq 4 \text{ Sup } ABC$$

José V. García Sestafe, (Madrid).

- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 4 (Boletín nº 22)

Sea ABCD un cuadrilátero convexo, tal que:

i) los lados AB, AD y BC verifican AB = AD + BC,

ii) existe un punto P en el interior de ABCD a distancia h de la recta CD, tal que AP = h + AD y BP = h + BC.

Demuestre que: $\frac{1}{\ } \geq \frac{1}{\ } + \frac{1}{\ }$

Solución

Se busca el radio de una circunferencia tangente a las circunferencias de centros A y B y a la recta DC (Fig. 1)

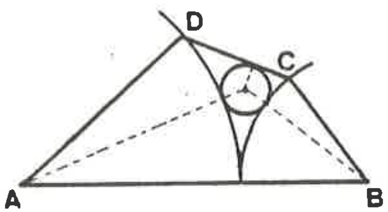


Fig. 1

El máximo de dicho radio se obtiene cuando DC es tangente a ambas circunferencias (Fig. 2)

Haciendo AB = a, BC = b y designando por r al máximo radio, se tiene

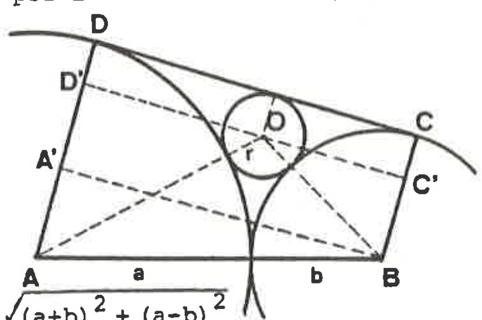


Fig. 2

$$\overline{D'O} + \overline{OC'} = \overline{A'B}$$

pero

$$\overline{D'O} = \sqrt{(a+r)^2 - (a-r)^2}$$

$$\overline{OC'} = \sqrt{(b+r)^2 - (b-r)^2} \quad \text{y} \quad A'B = \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2}$$

o sea

$$\sqrt{ar} + \sqrt{br} = \sqrt{ab} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

y como $h \leq r$, resulta

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

José V. García Sestafe, (Madrid).

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Problema 3 (Boletín nº 23)

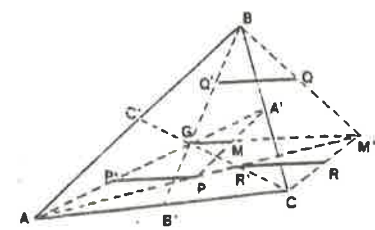
Sean A, B y C los vértices de un triángulo. Sean A', B' y C' los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. A todo punto M del plano del triángulo se le hacen corresponder sus simétricos P,

Q y R con respecto a A', B' y C'. Demostrar que las rectas AP, BQ y CR, se cortan en un punto M'.

Estudiar la correspondencia entre M y M'.

Solución

Sea G el baricentro del triángulo ABC. Los simétricos de A', B' y C' respecto de G son P', Q' y R'. Sea M un punto cualquiera del plano del triángulo; los simétricos respecto de M, de A', B' y C' son P, Q, R.



En el triángulo PP'A' se tiene $PP' \| GM$ y $\overline{P'P} = 2\overline{GM}$. Análogamente, en los triángulos QQ'B' y RR'C', resulta $QQ' \| GM$ y $\overline{QQ'} = 2\overline{GM}$; $RR' \| GM$ y $\overline{RR'} = 2\overline{GM}$.

Sea $GM \cap AP = M'$. Como $GM \| P'P$ los triángulos AP'P y AGM' son semejantes y por tanto $\overline{GM'} = 2\overline{PP'} = 4\overline{GM}$.

Análogamente, sea $GM \cap BQ = M''$ (no representado en la figura). Como $GM \| QQ'$, los triángulos BQQ' y BGM" son semejantes y por tanto

$$\overline{GM''} = 2\overline{Q'Q} = A\overline{GM} \longrightarrow M' \equiv M''$$

El mismo razonamiento conduce a que las rectas AP, BQ y CR son concurrentes en M'.

El punto M' se encuentra alineado con G y M y es tal que

$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{MG}} = -3$$

José V. García Sestafe (Madrid).

Otra solución de J.M.

Problema 4 (Boletín nº 23)

Hallar el lugar geométrico de los puntos de corte de las diagonales de todos los paralelogramos que pueden inscribirse en un cuadrilátero dado

---

Solución

Sea O un punto interior al cuadrilátero ABCD. Si dicho punto es centro de un paralelogramo inscrito en el cuadrilátero, existirán dos puntos X,Y -respectivamente sobre los lados AB y DC- tales que serán simétricos respecto O (fig. 1). De manera similar existirán otros dos puntos Z, T, -sobre los lados AD y BC- también simétricos respecto O. Para que el simétrico del punto X que en el segmento DC, la recta A_1B_1, simétrica de AB respecto a O debe cortar a la recta CD en un punto del segmento CD. Por tanto, la recta A_1B_1 deberá estar contenida en la banda definida por las rectas r' y s' paralelas a AB, respectivamente, por C y D; por tanto, O deberá encontrarse en la banda limitada por las rectas r y s, que distan, respectivamente, de AB la mitad de la distancia de r' y s' a AB: luego r y s serán incidentes, respectivamente, con N y M, puntos medios de las diagonales AC y BD.

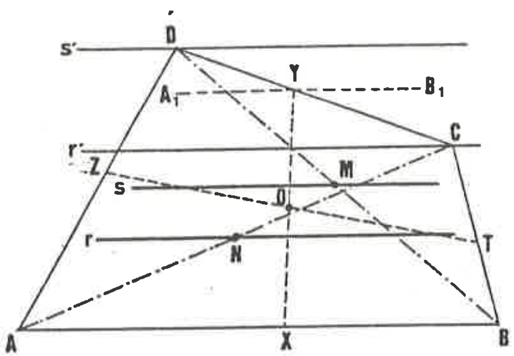


Figura 1

Pero por la misma razón (fig. 2) el punto O deberá pertenecer a la banda delimitada por las rectas p y q, paralelas al lado opuesto CD.

Como es inmediato comprobar, la anchura de la banda paralela al lado CD es h = AD, sen α, donde α es el ángulo formado por las rectas AD y BC; por tanto, para cada par de lados opuestos, la banda de menor amplitud es la paralela al mayor de ambos lados.

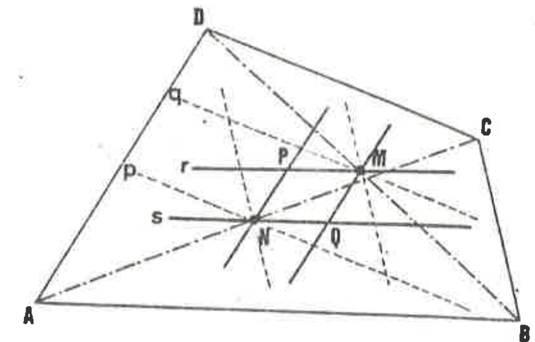


Figura 2

Reiterando el razonamiento para el otro par de lados opuestos, se obtiene que O deberá encontrarse en otras dos bandas. La intersección de las cuatro bandas es el lugar pedido, pero dicha intersección se reduce a la de las dos bandas de menor amplitud (fig. 2).

Por tanto, el lugar pedido es el conjunto de los puntos del paralelogramo MPNQ, que se obtiene trazando por los puntos M y N (puntos medios de las diagonales) sendas paralelas al mayor de cada uno de los pares de los lados opuestos.

José V. García Sestafe (Madrid).

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

propuestos en nº	procedentes de	Números de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números: 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	Obs.
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83-París	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	13-14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2-86	18	19	20	18	19	19					C
	Varios							17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	20-21	20	23	21	-	C
11	OME-f1-86 /	13	14	14	14	14	23	20	15 /	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	C
12	OI-87-Uruguay	16	14	14	17	15	17					C
	OME-f1-Extremdª							15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21					C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	C
20	OME-f1-88	24	26	24	25	24	26	24	26			C
	"Putnam"									26	24	C
21	OME-f2-89 /	24	27	24	27	27	24 /	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	Oposiciones	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	
23	Oposiciones	27	27	28	28	XX	XX	XX	XX	-	-	
24	OME-f1-90	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
25	OME-f2/f1-90	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
26	OMI-90-China /	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OIM-90-Vallad.	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
27	OME-f1-91	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
28	OME-f2-91	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	

CLAVES: XX = Pendientes de publicación . C = Completo.
OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2).
OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OI = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín *(señalar con unas aspas los que interesen)*:

3	4	5	10	13	14	15	16	17	18
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

20	21	22	23	24	25	26	27
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo *(23 pts. por número para Madrid y 33 pts. por número para provincias)*.

Hagan el envío utilizando como dirección la consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8, 9, 11, 12 y 19 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento recorte o copie este cupón y envíelo a la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Apartado 9479 - 28080 - MADRID.*

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *