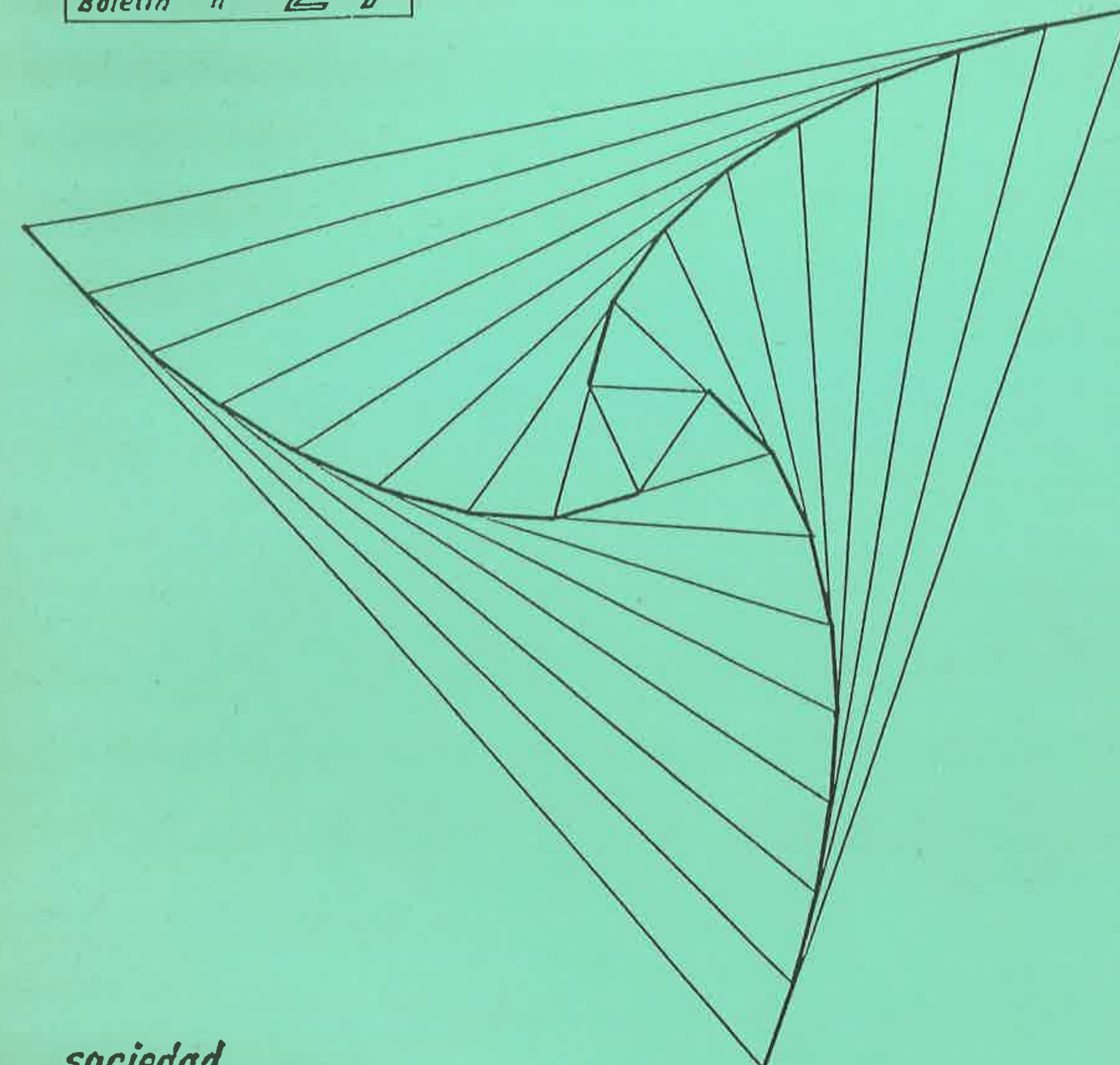
Boletín nº 27



sociedad

castellana

Puig Adam

de profesores

de matemáticas

Febrero 1991

BOLETíN de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Febrero de 1991 nº 27 (1990-91)

- Toda la correspondencia para la Sociedad deberá dirigirse al

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

- La portada de este número ha sido creada por nuestro colaborador don Juan Bosco Romero Márquez.

¡ VEA LA CONVOCATORIA DE NUESTRAS ASAMBLEAS GENERALES !

INDICE Pág.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: *José Vicente García Sestafe*

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez	(Madrid)
Amador Domingo Escribano	(Toledo)
Salvador Herrero Pallardo	(Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri	(Cuenca)
Angel María Alcalá del Olmo Pérez	(Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés	(Segovia)

Secretaria: *Carmen García-Miguel Fernández*

Vicesecretario *Enrique Rubiales Camino*

Tesorero: *Alberto Aizpún López*

Bibliotecario: *Jesús Begoña Aina*

\- - - - - -

CONVOCATORIAS

ASAMBLEA GENERAL EXTRAORDINARIA

Se convoca una **Asamblea General Extraordinaria** de la **Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas** para el **sábado, 27 de Abril** del presente año, a las 11 h , en primera convocatoria y a las 11 h 30 m en segunda, en el Instituto *"Isabel la Católica"* de Madrid (Alfonso XII, s/n - Retiro), con el siguiente

ORDEN DEL DIA

PUNTO ÚNICO: Deliberación sobre la propuesta de modificación de los estatutos de la Sociedad, presentada por la Junta Directiva y aprobación, si procede, de los **nuevos estatutos**, para lo que se requerirán al menos los votos favorables de dos tercios de los asistentes (Artº 24 de los estatutos vigentes).

El proyecto sometido a deliberación puede verse en este mismo número del Boletín.

\- - - - - -

ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE 1991

Se convoca esta Asamblea a continuación de la anterior, en el mismo lugar, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la Asamblea anterior.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

3. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

4. Informe del Tesorero sobre adecuación de las cuotas en relación a los costes de edición del Boletín, y posible revisión de aquellas.

5. Elección de nuevos cargos directivos.

6. Ruegos y preguntas.

¡ ESPERAMOS TU ASISTENCIA !

IX CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

Convocado por:

Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matematicas y Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras.

B A S E S

PRIMERA

Podrán participar los alumnos de B.U.P. y F.P. de los Centros de **Albacete, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara, Madrid, Segovia y Toledo.** Los de F.P.1 lo harán con los de Primero de B.U.P., los de 1º de F.P.2 con los de Segundo de B.U.P. y los de 2º y 3º de F.P.2, con los de Tercero de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas del Concurso se realizarán en Madrid, en la segunda quincena del mes de junio (posiblemente el sábado, 22 de ese mes) y consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles).

TERCERA

Se concederán diplomas para los mejores de cada nivel, acompañados de los premios correspondientes

CUARTA

Aquellos centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de dos en cada uno de los tres niveles) deberán realizar la preinscripción antes del día **30 de Mayo de 1990**, dirigiéndose por carta a esta Sociedad (Apartado de Correos nº 9.479, 28080 - Madrid). En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Envíen las cartas sin certificar.

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos centros entregarán a los alumnos que envíen, **credenciales individuales** en las que se haga constar el curso en que estén matriculados en el año académico 1989-90 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

- - - - - - - - -

XXVII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PRIMERA FASE

En el distrito de Madrid, las pruebas de la **Primera Fase** de la *"XXVII Olimpiada Matemática Española"*, correspondiente al curso 1990-91, se ha celebrado los pasados dias 18 y 19 de Enero.

Como es sabido, esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española*, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*. A ella podían concurrir los alumnos de C.O.U., los del último curso de la F.P. de segundo grado y los de 2º curso de del 2º ciclo del Bachillerato Experimental.

A los tres primeros clasificados de cada distrito, se les da opción a una beca para cursar la licenciatura de Matemáticas, y además pueden participar en la **Fase Final**, en la que se proclaman los ganadores, a los que se hace entrega de diplomas y premios. Los mejores clasificados en esta fase final suelen ser seleccionados para representar a España en la *Olimpiada Matemática Internacional* y en la *Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*.

Las pruebas correspondientes al distrito de Madrid para la primera fase de la Olimpiada se celebraron en la *Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. "Pablo Montesinos"* (c/ Santísima Trinidad, 37), el viernes, 18, por la tarde y el sábado, 19, por la mañana. En cada una de las dos sesiones se propusieron cuatro problemas, y se concedieron cuatro horas para trabajar en su resolución. Los enunciados de estos problemas pueden verse en nuestra sección de **Problemas Propuestos**.

El número de participantes se ha reducido esta vez a 36, de los que solo 32 llegaron a presentar alguna hoja de soluciones; a la segunda sesión ya solo volvieron 26. Es llamativa esta exigua concurrencia, ya que en los seis últimos años, hubo 147, 144, 101, 88, 80 y 110 alumnos participantes. Indudablemente, hubo algún fallo en la difusión de la convocatoria.

Los mejores clasificados en esta Primera Fase del distrito de Madrid han sido (con expresión de la puntuación alcanzada, de un máximo posible de 80 puntos):

1º - D. **Ignacio URIARTE TURIERO**, del Colº de *Nª Sª del Recuerdo* de Madrid ... ... 54 puntos

2º - D. **Marcos DURANTEZ GAMZUKOFF**, del *Liceo Francés* de Madrid .. .. 52 puntos

3º - D. **Tiziano CIUDAD MORA**, del I.B. *Rafael Alberti* de Coslada (Madrid) . ... 47 puntos

4º - D. Fernando QUIRÓS ABAJO, del I.B. *Rafael Alberti* de Coslada (Madrid) . ... 41 puntos

5º - D. Juan CESPEDES PRIETO, del I.B. *Rey Pastor* de Madrid ... ... 37 puntos

6º - D. Javier MARTÍN FABIANI, del I.B. *Retamar* de Somosaguas - Pozuelo de Alarcón .. 26 puntos

Los restantes han obtenido puntuaciones inferiores a 24.

Sobre la dificultad de los problemas, podrán juzgar personalmente nuestros socios; cada solución se valoró con un máximo de **10 puntos**. En la tabla que damos a continuación figuran las puntuaciones medias conseguidas en cada problema

por los 32 que participaron realmente y por los seis mejores clasificados:

Problema:	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Medias de los 32 presentados:	3.9	2.4	1.3	1.4	1.4	1.0	0.8	4.1
6 mejores:	8.8	6.3	5.2	4.8	3.7	4.0	2.7	7.3

Nos congratulamos de que el mejor clasificado, D. **Ignacio URIARTE TUERO**, fué el campeón de tercero de B.U.P. en el último *Concurso de Resolución de Problemas* de nuetra Sociedad. D. **Tiziano CIUDAD MORA** y D. **Fernando QUIRÓS ABAJO**, también fueron premiados (en lugares 4º y 2º) en nuestro *Concurso* de 1989, como alumnos de segundo de B.U.P.

La Segunda Fase de esta Olimpiada se celebrará simultáneamente en Madrid y en La Laguna, los próximos dias 15 y 16 de Febrero, por lo que esperamos incluir la crónica correspondiente en el próximo número de este Boletín.

- - - - - -

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Número y año		Convocado en el boletín	Crónica y enunciados
I	(1983)	1	2 , pág 11
II	(1984)	3	4 , pág 7
III	(1985)	5	7 , pág 3
IV	(1986)	9	10 , pág 5
V	(1987)	13	15 , pág 3
VI	(1988)	17	19 , pág 17
VII	(1989)	20	22 , pág 9
VIII	(1990)	24	26 , pág 3
IX	(1991)	27	

OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA :

Número y año		Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX	(1984)	- -	3 , pág 77
XXI	(1985)	5 , págs. 8 y 9	5 , págs. 8 y 10
XXII	(1986)	8 , pág 5	9 , págs. 15 y 75
XXIII	(1986-87)	11 , págs. 3 y 87	13 , págs. 9 y 83
XXIV	(1987-88)	16 , págs. 7 y 70	17 , págs. 7 y 71
XXV	(1988-89)	20 , págs. 13 y 79	21 , págs. 7 y 61
XXVI	(1989-90)	24 , págs. 11 y 67	25 , págs. 9 y 73
XXVII	(1990-91)	27 , págs. 11 y	

OLIMPIADA MATEMÁTICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar			Crónica y enunciados en boletín nº
I	(1986)	Colombia	8 , págs. 11 y 83
II	(1987)	Paraguay	12 , págs. 3 y 75
III	(1988)	Perú	18 , págs. 5 y 73
IV	(1989)	Cuba	21 , págs. 11 y 63
V	(1990)	España (Valladolid)	26 , págs. 13 y 73

OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL :

Número, año y lugar			Crónica y enunciados en boletín nº
XXIV	(1983)	París	2, pág. 15
XXV	(1984)	Praga	4 , pág. 67
XXVI	(1985)	Helsinski	7 , págs. 9 y 89
XXVII	(1986)	Varsovia	10 , pág. 11 y 11 , pág. 89
XXVIII	(1987)	Cuba	15 , págs. 9 y 37
XXIX	(1988)	Australia	19 , págs. 23 y 77
XXX	(1989)	R. F. A.	22 , págs. 15 y 73
XXXI	(1990)	China	26 , págs. 11 y 71

CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ORDENADOR

VALLADOLID, 1990

Como ya decíamos en la crónica de la **V Olimpiada Iberoamericana de Matemática**, celebrada en **Valladolid** en el pasado mes de Septiembre, coincidiendo con ella, en forma extraoficial, se convocó un *Concurso de Resolución de Problemas con Ordenador*, a la que podían concurrir, por parejas y en forma voluntaria, los participantes en la citada Olimpiada.

A pesar de la falta de precedentes, el Concurso tuvo gran aceptación, y resultó ganadora del mismo una pareja de estudiantes argentinos. También fueron premiadas las dos parejas de españoles que participaron en él.

Damos a continuación los enunciados de los cuatro problemas propuestos, que suponemos de gran interés para nuestros socios.

- - - - - -

CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ORDENADOR

Enunciados de los problemas.

Problema nº1:

a) Escribir un programa que calcule los números racionales que satisfacen la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

donde $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$.

b) Aplicar el programa a la ecuación

$$60 x^9 - 752 x^8 + 609 x^7 - 2828 x^6 + 1656 x^5 - 1536 x^4 + 1107 x^3 + 540 x^2 = 0.$$

Problema nº2:

Se distribuyen *n* bolas blancas y *m* bolas negras en dos urnas de forma que haya al menos una bola de cada color en cada urna.

a) Calcular, para cada distribución posible, la probabilidad de que al extraer al azar una bola de cada urna al menos una de ellas sea negra.

b) Escribir un programa que determine todas las distribuciones en las cuales la probabilidad anterior es máxima.

c) Aplicar el programa al caso concreto de que se tengan 10 bolas blancas y 7 bolas negras.

Problema nº3:

Se dice que un polígono es convexo si cualquier segmento que une dos puntos del polígono está totalmente contenido en él.

Dados un número natural $n \geq 3$ y n puntos del plano; $P_1, P_2, \ldots, P_n$, distintos dos a dos, se considera la línea poligonal formada por los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, $\ldots$, $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$.

Escribir un programa que determine si la línea poligonal construida anteriormente define un polígono convexo y, en caso afirmativo, que calcule su área.

Problema nº4:

Escribir un programa que pida un número real positivo R y que calcule:

a) Los puntos de coordenadas enteras que están en el interior de la circunferencia centrada en el origen y de radio R.

b) El número de cuadrados con lados paralelos a los ejes cuyos vértices sean puntos de los calculados en el apartado anterior.

COLEGIO DE DOCTORES Y LICENCIADOS

CURSOS DE FORMACION DEL PROFESORADO

El *Colegio de Doctores y Licenciados* está desarrollando un nutrido programa de cursos de formación del profesorado, durante todo el primer trimestre del presente año. Entre ellos, destacamos, por su interés para nuestros socios, el

Seminario de Matemáticas

Este curso tendrá lugar los días 4, 6, 8, 11 y 12 de Marzo, en el I.B. de la Avenida de los Toreros de Madrid, con el siguiente programa:

LUNES, 4 : *"Recursos para la clase de Matemáticas"* , por don José María Galdón Canavese.

MIERCOLES, 6 : *"El comentario de textos y problemas matemáticos"*, por doña María Dolores de Prada Vicente.

VIERNES, 8 : *"Algunos problemas abiertos y conjeturas"*, por don Fernando Chamizo Lorente.

"Información sobre las Olimpiadas Matemáticas", por doña María Gaspar Alonso-Vega, don Carlos Ueno Jacue, don Francisco Ogando Serrano y don Marco Castrillón López.

LUNES, 11 : *"Proporcionalidad, el número de oro y otras curiosidades"*, por doña Adela Salvador Alcaide.

MARTES, 12 : *"¿ La didáctica al servicio de la Matemática... o la Matemática al srvicio de la didáctica ?"*, por don José Enrique Fernández del Campo.

Coordina el curso don Victor Manuel Sánchez González.

Nuestro consocio don **Joaquín S. Cano S. Serrano**, ha tenido la amabilidad de facilitarnos la información que publicamos a continuación acerca de la I.C.M.E. y del reciente nombramiento para su presidencia, de nuestro colega y colaborador, el profesor don **Miguel de Guzmán**. Gustosamente nos unimos a su felicitación.

MIGUEL DE GUZMÁN PRIMER PRESIDENTE ESPAÑOL DEL I.C.M.E.

La *International Mathematical Union* (I.M.U.) es el organismo encargado de coordinar las acciones comunes en el campo de las matemáticas de, en la actualidad, cincuenta y dos países de todo el mundo. La actividad matemática, tanto en el campo de la investigación, como en el de la educación y formación, se estructura a través de este organismo.

La *Asamblea General* de la I.M.U., que se celebra cada cuatro años, generalmente aprovechando cada CONGRESO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS, está compuesta por representantes de cada uno de los países miembros. Son estos representantes los encargados de elegir los componentes del *Comité Ejecutivo*, órgano rector y responsable de todas las acciones y actividades de la I.M.U.

Todas estas actividades están estructuradas por comisiones y, entre ellas, la *Comisión Internacional de Educación Matemática* (I.C.M.I.), cuyos miembros también son elegidos en la *Asamblea General*, es la encargada de coordinar las actividades en el campo de la educación matemática, en todos y cada uno de los diferentes niveles de la educación propiamente académica, así como en aquellas acciones encaminadas a la interacción de las matemáticas con la sociedad.

El I.C.M.I. fue fundado en 1.908, a partir de la idea, la iniciativa y el esfuerzo del matemático americano David Eugene SMITH. Su primer presidente fue el matemático alemán Félix KLEIN, y su órgano oficial de comunicación y difusión fue, la que en poco tiempo se convertiría en la prestigiosa revista, *L'Enseignenment Mathématique*, editada en Suiza. Otros prestigiosos Presidentes fueron, por períodos, en general de cuatro años, sucesivamente: SMITH (Estados Unidos), HADAMARD (Francia), BEHNKE (Alemania), STONE (Estados Unidos), LICHNEROWICZ (Francia), FREUDENTHAL (Holanda), LIGHTHILL (Gran Bretaña), IYANAGA (Japón), WHITNEY (Estados Unidos), KAHANE (Francia).

Dentro de la responsabilidad fundamental de encargarse de todo lo relacionado con la educación de las Matemáticas, una de las actividades más importantes del I.C.M.I. es la supervisión de los INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICAL EDUCATION (I.C.M.E.) que se celebran cada cuatro años. Haciendo un poco de memoria histórica, los últimos congresos de este tipo se han celebrado en: Adelaide (Australia, 1.984), Budapest (Hungría, 1.988) y el próximo por celebrar, en Quebec (Canadá, 1.992). Para este último se espera que asistan entre 3.500 y 4.000 matemáticos de todo el mundo, especialistas en la educación matemática de los diferentes niveles, quienes tratarán de examinar los problemas que, desde los diferentes puntos de vista, la enseñanza matemática propone a la comunidad de matemáticos y a la sociedad. Es casi seguro que el I.C.M.I. decida celebrar su congreso en 1.996 en algún lugar de **España**.

Por otra parte el I.C.M.I. supervisa también la organización de reuniones más restringidas para el estudio de problemas más específicos de la educación matemática. Han sido temas propuestos y abordados con empeño y entusiasmo:

- *Influencia de la informática sobre la matemática y su enseñanza* (Strasbourg, 1.985)
- *La enseñanza de la matemática en los 90* (Kuwait, 1986)
- *Cognición y educación matemática* (juntamente con el grupo Psychology and Mathematical Education)
- *Matemática como ciencia auxiliar* (Udine, Italia, 1.987)
- *Popularización de la matemática* (Leeds, Gran Bretaña, 1.989)

Está pendiente de abordarse el tema: *Evaluación de la enseñanza matemática* (Costa Brava, 1.991).

Los estudios y las comunicaciones derivados de estas reuniones son publicados por Cambridge University Press. Algunos han sido traducidos y publicados por la Editorial Mestral, Valencia.

El Comité Ejecutivo del I.C.M.I., elegido en el Congreso Internacional de Kyoto (agosto, 1.990) por la Asamblea General de la I.M.U., para el período de 1.991-1.994, fue el siguiente:

Presidente:	**Miguel DE GUZMÁN OZOMIZ** (España)
Vice-Presidentes:	**J.KILPATRICK** (Estados Unidos)
	Lee PENG-YEE (Vietnam)
Secretario:	**M. NISS** (Dinamarca)
Miembros:	**Yu. L. ERSHOV** (URSS)
	E.LUNA (República Dominicana)
	A. SIERPINSKA (Polonia)

Ex-oficio: J.L. LIONS (Francia)

J. PALIS Jr. (Brasil)

J.H. VAN LINT (Holanda)

J.P. KAHANE (Francia)

¡ENHORABUENA, MIGUEL!. Muchos ánimos y cuenta con la colaboración de todos los matemáticos españoles.

PROYECTO DE ESTATUTOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Texto que será debatido y sometido a votación en la ***Asamblea General Extraordinaria*** *del día 27 de Abril de 1991: Si algún socio desea aportar alguna sugerencia, deberá hacerlo en forma de enmienda, presentada por escrito en el propio acto de la Asamblea, para su debate y votación en la misma.*

- - - - - - -

Artº 1º. La *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* tiene por ámbito de actuación preferente las Comunidades Autónomas de Madrid, Castilla-La Mancha, Castilla-León y Extremadura, sin excluir la posibilidad de actuaciones en otras comunidades nacionales o extranjeras.

Se configura como una sociedad científico-cultural, sin ánimo de lucro y se acoge al régimen jurídico de la vigente Ley de Asociaciones.

Artº 2º. La sede de la Sociedad se sitúa provisionalmente en ....de Madrid.

Artº 3º. Son fines de la Sociedad:

a) Elevar y actualizar el nivel profesional, científico y pedagógico de los profesores de Matemáticas.

b) Contribuir al avance y difusión de los conocimientos matemáticos.

c) Impulsar el desarrollo y divulgación de las investigaciones en Matemáticas y en su Didáctica, así como preocuparse por su implantación en los centros docentes.

d) Servir de nexo de unión entre los profesores de Matemáticas para el intercambio de experiencias e ideas.

e) Organizar cursos, conferencias, reuniones y concursos, así como la publicación de monografías, revistas y boletines y cuantas medidas contribuyan a la consecución de los fines anteriores.

f) Se excluyen la defensa de intereses económicos y profesionales.

Artº 4º. Habrá tres tipos de socios: de honor, de número y benefactores.

Artº 5º. Los socios de honor serán nombrados por la Asamblea General, a propuesta de la Junta Directiva o de 25 socios de número.

Artº 6º. 1.- Serán socios de número todos los profesores de Matemáticas que lo soliciten.

2.- Serán socios benefactores todas las personas físicas o jurídicas que lo soliciten para contribuir de manera importante a la consecución de los fines de la Sociedad.

3.- Derechos de los Socios:

a) Los socios podrán beneficiarse y participar en cuantas actividades promueva la Sociedad. A este fín, los socios benefactores podrán participar por sí mismos o, en el caso de Entidades o Instituciones, por persona que los represente.
b) Los socios recibirán gratuitamente, o con cuotas de suscripción reducidas, las publicaciones de la Sociedad.
c) Los socios de honor y benefactores tendrán voz, pero no voto en las Asambleas.
d) Los socios de número tendrán voz y voto en las Asambleas.

4.- Deberes de los Socios de número o benefactores:

a) Satisfacer las cuotas fijadas.
b) Asistir a las Asambleas y a las reuniones para las que sean expresamente citados y participar en las comisiones para las que sean elegidos por la Asamblea o por la Junta Directiva (mediante persona que los represente, en el caso de Entidades o Instituciones).

Artº 7º. Los socios causarán baja por alguna de las causas siguientes:
a) Por renuncia voluntaria.
b) Cuando hayan dejado de satisfacer las cuotas correspondientes a un año.
c) Cuando por su conducta, desprestigien a la Sociedad, a juicio de la Asamblea.

Artº 8º. La Asamblea es el órgano soberano de la Sociedad y está formada por todos los socios.

Artº 9º. 1.- La Asamblea se reunirá ordinariamente una vez al año, en el lugar y fecha que acuerde la Junta Directiva, y extraordinariamente cuando lo solicite ésta o un tercio de los socios.

2.- Compete a la Asamblea ordinaria:

a) Elegir los cargos de la Junta Directiva.
b) Aprobar, si procede, la memoria y cuentas reglamentarias, que presente la Junta Directiva.
c) Dar facultad a la Junta Directiva o a las Comisiones nombradas por ésta, para cuantas gestiones sean necesarias para el cumplimiento de los fines de la Sociedad.
d) Fijar las cuotas de socio.

3.- Compete a la Asamblea extraordinaria:

a) La resolución de asuntos urgentes.
b) Adoptar los acuerdos relativos a acciones que expresamente le encomiendan estos Estatutos.

Artº 10º. La Asamblea queda válidamente constituida en primera convocatoria con la presencia de la mitad más uno de los socios, o media hora más tarde, en segunda convocatoria, con los socios presentes.

Artº 11º. Los acuerdos se tomarán con el voto favorable de la mitad más uno de los socios presentes, salvo en los casos en que estos Estatutos exigen expresamente otra cosa.

Artº 12º. La Junta Directiva, nombrada por la Asamblea en la forma que regulan estos Estatutos, estará formada por:
-- Un Presidente
-- Cuatro Vicepresidentes (uno por cada de las Comunidades Autónomas de su ámbito de actuación preferente),
-- Un Vocal de actividades y concursos,
-- Un Vocal de relaciones institucionales,
-- Un Vocal de gestión de publicaciones.
-- Un Vocal de redacción de publicaciones.
-- Un Secretario.
-- Un Vicesecretario.
-- Un Tesorero.
-- Un Bibliotecario.

Artº 13º. La Junta Directiva podrá funcionar en pleno o por Comisiones, en cada una de las cuales formarán parte el Presidente, o miembro de la Junta en quien delegue, y el Secretario o Vicesecretario. La Junta Directiva se reunirá al menos tres veces al año.

Artº 14º. Son funciones de la Junta Directiva:
a) Convocar las Asambleas ordinarias o extraordinarias.
b) Fijar el Orden del Día de las Asambleas.
c) Promover cuantas actividades estime convenientes para la consecución de los fines de la Sociedad.
d) Recoger y encauzar las propuestas o sugerencias de los socios.
e) Administrar la Sociedad.

Artº 15º. La Junta Directiva será nombrada por la Asamblea, que en cada sesión ordinaria renovará los cargos que hayan quedado vacantes por renuncia justificada de sus titulares o por haber expirado el plazo para el que fueron nombrados. Los nombramientos se harán para un periodo de cuatro cursos como máximo. La Asamblea, no obstante, podrá reelegir a miembros cuyo nombramiento haya expirado. A los efectos de este Artículo se entiende por curso el tiempo que transcurre entre dos Asambleas ordinarias consecutivas.

Artº 16º. El Presidente representará a la Sociedad, presidirá las Asambleas, convocará y presidirá las Juntas Directivas, y propondrá la constitución de Comisiones de trabajo, que presidirá por sí o representado por un miembro de la Junta Directiva en quien delegue.

Artº 17º. Los Vicepresidentes auxiliaran al Presidente y representarán a la Sociedad en su Comunidad de residencia. El Vicepresidente que resida en la misma Comunidad que el Presidente, le sustituirá en caso de ausencia, enfermedad o cese.

Artº 18º. Los vocales serán los organizadores y responsables de las acciones, relativas a su cometido específico, que les encomiende la Junta Directiva, para la consecución de los fines de la Sociedad. Como tareas principales, tendrán a su cargo las siguientes:

El Vocal de actividades y concursos, la organización de Concursos de Problemas, reuniones de profesores, ciclos de conferencias, etc.

El Vocal de relaciones institucionales, llevar a cabo las gestiones con centros, personas o entidades públicas o privadas que sean precisas para la realización de las actividades de la Sociedad encaminadas al cumplimiento de sus fines.

El Vocal de gestión de publicaciones, la programación de las revistas, boletines o monografías que edite la Sociedad, incluidas su impresión, distribución, suscripción, venta o intercambio, captación de publicidad, etc.

El Vocal de redacción de publicaciones, la recogida y selección de originales, confección, montaje y edición de las publicaciones de la Sociedad, y la inclusión en ellas de editoriales, notas o convocatorias a iniciativa de la Junta Directiva.

La posible colisión de competencias será resuelta por decisión del Prsidente.

Artº 19º. El Secretario será el encargado de custodiar y llevar al día la documentación social, informar a los socios y coordinar las actividades. Distribuirá la correspondencia recibida en la Sociedad y organizará y mantendrá actualizado el fichero de socios, registrando las altas y bajas que se produzcan. Levantará acta de las reuniones de la Asamblea y de la Junta Directiva.

El Vicesecretario colaborará con el Secretario en todos sus cometidos y le sustituirá en caso de ausencia, enfermedad o cese.

Artº 20º. El Tesorero será el encargado de recaudar las cuotas y demás ingresos de la Sociedad, de ordenar los pagos, de llevar al día los libros de contabilidad, y de informar del estado económico de la Sociedad al Presidente, a la Junta Directiva y a la Asamblea.

Artº 21º. El Bibiotecario tendrá bajo su costodia los libros, revistas y demás material perteneciente a la Sociedad, y facilitará su utilización por los socios.

Artº 22º. Los socios pagarán una cuota anual, por cursos académicos, cuya cuantía será fijada por la Asamblea en sus reuniones ordinarias. Caso de ésta apruebe una modificación, causará efecto al principio del curso académico siguiente.

Artº 23º. La Sociedad se financia con las cuotas de sus socios y con los ingresos que eventualmente produzcan sus publicaciones, cursos u otras actividades acordes con sus fines, así como con las ayudas que reciba de entidades

oficiales o particulares. El límite máximo del presupuesto anual será fijado por la Asamblea y podrá ser modificado por decisión de la misma, sin que ello suponga modificación formal de los Estatutos. La Sociedad carece de patrimonio fundacional.

Artº 24º. Para la modificación de los presentes Estatutos, será necesario que una Asamblea Extraordinaria lo apruebe, al menos con los votos favorables de dos tercios de los socios presentes.

Artº 25º. La Sociedad se disolverá por acuerdo de una Asamblea extraordinaria convocada con ese único motivo, y la decisión de disolverla deberá contar con los votos favorables de dos tercios de los socios presentes. En caso de disolución, el patrimonio de la Sociedad, si lo hubiese, se donará a centros de enseñanza, actuando como comisión liquidadora la última Junta Directiva.

\- - - - - - -

Disposición transitoria. A efectos de aplicación del Artículo 15º en la Asamblea de 1991, los miembros de la Junta Directiva cuyo nombramiento, hecho con arreglo a los Estatutos anteriores, expire en esta Asamblea, cesarán en el cargo (sin perjuicio de que la Asamblea decida su nuevo nombramiento). Los miembros que tengan nombramiento todavía vigente, para cargos que siguen existiendo en la nueva composición de la Junta Directiva, se considerarán nombrados por un periodo de cuatro cursos, pero contado desde la Asamblea en que fueron nombrados por última vez, y los que lo tengan para cargos que desaparecen, podrán continuar formando parte de la Junta Directiva hasta la Asamblea de 1992, en la que se extinguirá el citado cargo. Los nombramientos para los puestos vacantes o de nueva creación se harán unos por dos años y otros por cuatro, con objeto de escalonar las renovaciones futuras.

\- - - - - - -

Debe notarse que el presenta Proyecto de Estatutos incluye, entre otras novedades, el cambio de nombre de nuestra Sociedad, desapareciendo de él el calificativo "Castellana", que hoy día resultaba de difícil interpretación.

Como socio de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín *(señalar con unas aspas los que interesen)*:

3	4	5	9	10	11	13	14	15	16
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo *(23 pts. por número para Madrid y 33 pts. por número para provincias)*.

Hagan el envío utilizando como dirección la consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8 y 12 están agotados. De los números 9 y 19 quedan sólo unos pocos ejemplares.

Si desea acogerse a este ofrecimiento recorte o copie este cupón y envíelo a la *Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Apartado 9479 - 28080 - MADRID.*

EL PERMANENTE DE UNA MATRIZ

por José V. García Sestafe

1. INTRODUCCION

El concepto de permanente ha alcanzado en los últimos tiempos gran difusión en los manuales de Combinatoria; sin embargo, su origen se remonta a principios del siglo pasado. Binet y Cauchy, simultánea pero independientemente, llegaron a dicha noción a través del estudio de funciones simétricas de los elementos de una matriz. La denominación de permanente aparece por primera vez, cincuenta años más tarde, en los trabajos del inglés Muir, que al igual que su compatriota Mac-Mahon investigó las relaciones entre permanentes y determinantes.

Entre sus aplicaciones más divulgadas cabe citar la relativa a la obtención del número de representantes de un conjunto y su utilización para el cálculo de permutaciones con posiciones prohibidas.

2. DEFINICIONES

Sea la matriz rectangular

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1,2,\dots,m; \; j = 1,2,\dots, n; \; m \le n$$

con coeficientes, en general, en un anillo conmutativo $\mathcal{A}$. El permanente de A -que se escribe per (A)- se define

$$\text{per}\,(A) = \sum_{J} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdots a_{mj_m}, \quad j_1 j_2 \cdots j_m \in J$$

donde J representa el conjunto de todas las variaciones sin repetición de los índices 1,2,...,n de las columnas, tomados m a m.

EJEMPLO

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$

Formadas las variaciones de los índices de columna 1,2,3,4, tomados 2 a 2, se obtiene

12 13 14 21 23 24 31 32 34 41 42 43

luego

$$\text{per }(A) = a_{11}\,a_{22} + a_{11}\,a_{23} + a_{11}\,a_{24} + a_{12}\,a_{21} + a_{12}\,a_{23} + a_{12}\,a_{24} + a_{13}\,a_{21} + a_{13}\,a_{22} + a_{13}\,a_{24} + a_{14}\,a_{21} + a_{14}\,a_{22} + a_{14}\,a_{23}$$

Un m-tuplo de elementos de la matriz A de m filas y n columnas, $m \leq n$

$$(a_{1j_1}\,,\ a_{2j_2}\,,\ \ldots,\ a_{mj_m})$$

tal que dos elementos no se encuentran en la misma columna se denomina transversal de la matriz A.

Mediante la noción de transversal, se puede definir, de forma operativa, el permanente de una matriz, en la siguiente forma:

Formadas todas las posibles transversales de la matriz A, se calcula el producto de los elementos de cada una de ellas; per (A) es igual a la suma de todos los productos hallados.

3. PROPIEDADES DEL PERMANENTE DE UNA MATRIZ

I. Es evidente que per (A) es invariante con respecto a cualquier permutación que se efectúe con las filas o con las columnas de A; recuérdese que los elementos de A pertenecen a un anillo conmutativo $\mathcal{A}$.

II. Si se multiplican todos los elementos de una fila por un mismo elemento c de $\mathcal{A}$, el permanente queda multiplicado por c; lo cual resulta obvio, ya que en cada transversal entra un elemento de cada fila y sólo uno.

III. Si A y B son dos matrices multiplicables

$$A.B = C$$

en general NO SE VERIFICA

$$\text{per }(A.B) = \text{Per }(A).\ \text{Per }(B)$$

como se puede poner de manifiesto con un contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad A.B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{per }(A) = 1.1 + 3.0 = 1$$

$$\text{per }(B) = 3.2 + 1.0 + 3.1 + 2.0 + 1.1 + 2.2 = 14$$

$$\text{per }(AB) = 3.2 + 7.0 + 3.1 + 0.5 + 7.1 + 2.5 = 26$$

$$26 \neq 1.14$$

IV. Sean $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}$ los elementos de la fila i-ésima de la matriz A. Como en cada transversal existe un elemento -y sólo uno- de cada fila, separando factor común los elementos de la fila i, en la expresión de per (A), se obtendrá

$$\text{per }(A) = a_{i1}\,S_{i1} + a_{i2}\,S_{i2} + \ldots + a_{in}\,S_{in}$$

Pero las sumas S_{ij}, $(j = 1,2,..,n)$ no son otra cosa que los permanentes de las submatrices A_{ij}, obtenidas a partir de la matriz A, por supresión de la fila i y de la columna j; o sea

$$\text{per }(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ .\ \text{per }(A_{ij}) \qquad [I]$$

Obsérvese que el segundo miembro de [I] no tiene términos repetidos; por otra parte, el número de términos existentes en dicho segundo miembro es

$$n.V_{n-1,m-1} = n.\ \frac{(n-1)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

que coincide con el número de términos que aparecen en el per (A).

V. De manera análoga se obtiene la siguiente generalización. Dada la matriz A, de m filas y n columnas, se eligen h filas, $i_1, i_2, .., i_h$ $(1<h<m-1)$ y se forman las $C_{n,h} = t$

submatrices de h columnas que se pueden obtener con los elementos de esas h filas; se designa, en lo que sigue, a dichas submatrices

$$A_{HK_l} \ , \ l = 0,1,2,..,t$$

donde H representa el conjunto de los índices de las h filas elegidas y K_l es el conjunto formado por los índices de las columnas tomadas en la submatriz l-ésima.

Suprimiendo en la matriz A las h filas elegidas y las h columnas de cada submatriz se obtiene otra submatriz

$$A_{H',K'_l}$$

donde H' y K'_l son los conjuntos complementarios, respectivamente, de los H y K_l.

Entonces se verifica

$$\text{per } (A) = \sum_l \text{per } (A_{HK_l}) \cdot \text{per } (A_{H'K'_l}) \qquad [II]$$

Basta observar que cada transversal de A será el producto de una transversal de A_{HK_l} por una transversal de $A_{H'K'_l}$; es obvio que en el segundo miembro de [II] no puede haber términos repetidos.

Por otra parte, en el segundo miembro de [II] están todos los términos de per (A); en efecto, el número de términos de per (A_{HK_l}) es $V_{h,h} = h!$ y el de per $(A_{H'K'_l})$ es

$$V_{n-h,m-h} = \frac{(n-h)!}{(n-m)!}$$

luego el número de términos que figura en el segundo miembro es

$$\binom{n}{h} \cdot h! \frac{(n-h)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{h!(n-h)!} \ h! \ \frac{(n-h)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

que coincide con el número de términos de per (A).

VI. En el caso de matrices cuadradas es evidente que

per (A') = per (A)

donde A' representa la matriz traspuesta de A.

Como corolario inmediato -en el caso de matrices cuadradas- resultan ser válidas para las columnas, las propiedades anteriormente enunciadas para las filas.

VII. Para matrices cuadradas per (A) consta de los mismos sumandos que det (A), con la salvedad, claro está, del signo de cada sumando

Obsérvese que las propiedades IV y V en matrices cuadradas recuerdan los desarrollos de determinantes, respectivamente, por elementos de una línea y por menores complementarios (regla de Laplace).

VIII. En el caso de una matriz cuadrada booleana B, el per (B) resulta ser igual al número de términos no nulos del desarrollo de det (B).

4. CALCULO DEL PERMANENTE DE UNA MATRIZ. TEOREMA DE RYSER.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz mxn, $m \leq n$. Se forman las combinaciones r-arias sin repetición de las n columnas

$$r_1, r_2, \ldots, r_t, \ t = C_{n,r}$$

A partir de la matriz A se forma la matriz A_{r_h}, sustituyendo en aquélla las columnas

$$j_{h_1}, j_{h_2}, \ldots, j_{h_r}$$

correspondientes a la combinación r_h, por columnas de ceros y se representa por

$$S(A_{r_h})$$

al producto de las sumas de los elementos de las filas de A_{r_h}.

Por otra parte se forman las variaciones con repetición de los n elementos 1,2,..,n, tomados m a m; el conjunto de dichas variaciones se designa por M.

Se conviene en asignar a la variación

$$k_1,\ k_2,\dots,k_m \in M \qquad\qquad (III)$$

el peso o ponderación

$$a_{1k_1}\cdot a_{2k_2}\cdot \dots \cdot a_{mk_m}$$

Sea P_i la propiedad de que la variación (III) no contenga al número i. La suma de los pesos de las variaciones pertenecientes a M que poseen las r propiedades P_i, $i = j_{h_1}, j_{h_2},\dots,j_{h_r}$, o dicho de otra forma, que no contienen a los referidos elementos, es precisamente $S(A_{r_h})$.

EJEMPLO

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

Se consideran las propiedades P_1 y P_3. Las combinaciones de las cuatro columnas tomadas dos a dos son

12 13 14 23 24 y 34

La matriz A_{13} se obtiene de la A sustituyendo las columnas 1 y 3 (correspondientes a las propiedades P_1 y P_3) por ceros

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \end{bmatrix}$$

Las variaciones binarias con repetición de los números 1,2,3,4, descontando aquéllas en que entran los números 1 y 3 son

22 24 42 44

cuya suma de pesos sería

$$a_{12}a_{22} + a_{12}a_{24} + a_{14}a_{22} + a_{14}a_{24} = a_{12}(a_{22}+a_{24}) + a_{14}(a_{22}+a_{24}) = (a_{12}+a_{14})(a_{22}+a_{24}) = S(A_{13})$$

El per (A) es igual a la suma de los pesos de los elementos de M que satisfacen exactamente n-m propiedades de las $P_1, P_2,\dots,P_n$. Por tanto, usando la fórmula de inclusión y exclusión generalizada, teniendo en cuenta que $p(r) = S(A_r)$, donde $S(A_r)$ es la suma de todos los $S(A_{r_h})$ para $h = 1,2,\dots,t$, resulta

$$\text{per }(A) = P(n-m) = S(A_{n-m}) - C_{n-m+1,1}\cdot S(A_{n-m+1}) + C_{n-m+2,2}\cdot S(A_{n-m+2}) - C_{n-m+3,3}\cdot S(A_{n-m+3}) + \dots + (-1)^{m-1}\cdot C_{n-1,m-1}\cdot S(A_{n-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i\, C_{n-m+i,i}\cdot S(A_{n-m+i}) \qquad [IV]$$

EJEMPLO

Sea calcular per (A) siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hay que obtener P(n-m) = P(5-3).

per (A) = P(2) = $S(A_2) - 3\,S(A_3) + 6\,S(A_4)$

Para obtener $S(A_2)$ se forman las $C_{5,2} = 10$ matrices obtenidas de A por sustitución de dos columnas de ceros; a continuación se suman los elementos de cada fila y se multiplican las sumas obtenidas.

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ \hline & & & & & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline & & & & & 18 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ \hline & & & & & -28 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0&3&4&-2&0&5\\ 0&-1&2&4&0&5\\ 0&0&-3&1&0&-2\\ \cline{6-6} &&&&&-50\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&-2&0&-1\\ 5&0&0&4&3&12\\ 2&0&0&1&2&5\\ \cline{6-6} &&&&&-60\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1&0&4&0&0&5\\ 5&0&2&0&3&10\\ 2&0&-3&0&2&-1\\ \cline{6-6} &&&&&-50\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1&0&4&-2&0&3\\ 5&0&2&4&0&11\\ 2&0&-3&1&0&0\\ \cline{6-6} &&&&&0\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1&3&0&0&0&4\\ 5&-1&0&0&3&7\\ 2&0&0&0&2&4\\ \cline{6-6} &&&&&112\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1&3&0&-2&0&2\\ 5&-1&0&4&0&8\\ 2&0&0&1&0&3\\ \cline{6-6} &&&&&48\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1&3&4&0&0&8\\ 5&-1&2&0&0&6\\ 2&0&-3&0&0&-1\\ \cline{6-6} &&&&&-48\end{array}$$

Entonces

$$S(A_2) = \sum_{i=1}^{10} (A_{2_i}) = 0 + 18 + (-28) + (-50) + (-60) + (-50) + + 0 + 112 + 48 + (-48) = -58$$

Para el cálculo de $S(A_3)$ se procede de manera análoga

$$\begin{array}{ccccc|c} 0&0&0&-2&0&-2\\ 0&0&0&4&3&7\\ 0&0&0&1&2&3\\ \cline{6-6} &&&&&-42\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0&0&4&0&0&4\\ 0&0&2&0&3&5\\ 0&0&-3&0&2&-1\\ \cline{6-6} &&&&&-20\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0&0&4&-2&0&2\\ 0&0&2&4&0&6\\ 0&0&-3&1&0&-2\\ \cline{6-6} &&&&&-24\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0&3&0&0&0&3\\ 0&-1&0&0&3&2\\ 0&0&0&0&2&2\\ \cline{6-6} &&&&&12\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0&3&0&-2&0&1\\ 0&-1&0&4&0&3\\ 0&0&0&1&0&1\\ \cline{6-6} &&&&&3\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0&3&4&0&0&7\\ 0&-1&2&0&0&1\\ 0&0&-3&0&0&-3\\ \cline{6-6} &&&&&-21\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&1\\ 5&0&0&0&3&8\\ 2&0&0&0&2&4\\ \cline{6-6} &&&&&32\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&-2&0&-1\\ 5&0&0&4&0&9\\ 2&0&0&1&0&3\\ \cline{6-6} &&&&&-27\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1&0&4&0&0&5\\ 5&0&2&0&0&7\\ 2&0&-3&0&0&-1\\ \cline{6-6} &&&&&-35\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1&3&0&0&0&4\\ 5&-1&0&0&0&4\\ 2&0&0&0&0&2\\ \cline{6-6} &&&&&32\end{array}$$

$$S(A_3) = \sum_{i=1}^{10} S(A_{3_i}) = -42 - 20 - 24 + 12 + 3 - 21 + 32 - 27 - - 35 + 32 = -90$$

Finalmente se obtienen las A_{4_i}

$$\begin{array}{ccccc|c} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&3\\ 0&0&0&0&2&2\\ \cline{6-6} &&&&&0\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0&3&0&0&0&3\\ 0&-1&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0\\ \cline{6-6} &&&&&0\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0&0&4&0&0&4\\ 0&0&2&0&0&2\\ 0&0&-3&0&0&-3\\ \cline{6-6} &&&&&-24\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&1\\ 5&0&0&0&0&5\\ 2&0&0&0&0&2\\ \cline{6-6} &&&&&10\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0&0&0&-2&0&-2\\ 0&0&0&4&0&4\\ 0&0&0&1&0&1\\ \cline{6-6} &&&&&-8\end{array}$$

$$S(A_4) = \sum_{i=1}^{5} (A_{4_i}) = 0 + 0 - 24 + 10 - 8 = -22$$

Luego

$$\text{per }(A) = S(A_2) - 3\, S(A_3) + 6\, S(A_4) = -58 - 3 \,.\, (-90) + 6 \,.\, .\, (-22) = 80$$

En el caso de una matriz cuadrada, como $n = m$, resulta

$$\text{per }(A) = S(A_0) - S(A_1) + S(A_2) - .. + (-1)^{m-1} \,.\, S(A_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \,.\, S(A_i)$$

5. ALGUNAS APLICACIONES DEL PERMANENTE DE UNA MATRIZ

A continuación se exponen algunas aplicaciones del permanente de una matriz.

5.1. SISTEMAS DE REPRESENTANTES DISTINTOS

Sea A un conjunto de n elementos y $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de sus partes y sean
$\beta = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \subset A$ y $B = \{A_1, A_2, .., A_m\} \subset \mathcal{P}(A)$
siendo $m \leq n$.

Si al conjunto B se le puede poner en correspondencia - no necesariamente unívoca - con el β, de forma que los elementos de β sean distintos y que $a_i \in A_i$ $(i=1,2,..,m)$ se dice que el elemento a_i representa al conjunto A_i; entonces β recibe el nombre de sistema de representantes distintos (srd) de B.

Se remarca que necesariamente se tiene que verificar $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, aún en el caso de que $A_i = A_j$; esto es, si un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ aparece varias veces, debe tener cada vez un representante distinto.

Para un $B \subset \mathcal{P}(A)$, no necesariamente tiene que existir un srd; el primer problema que se presenta es averiguar, bajo que condiciones existe srd, y caso de que se cumplan las referidas condiciones, determinar el número de los diferentes srd.

Es evidente que para un B tal que si $A_i \subset B$ y $A_j \subset B$, $(i,j=1,2,..,m; i \neq j)$ se cumplen $A_i \cap A_j = \emptyset$, existe al menos un srd.

Ejemplo

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ y $B = \{A_1, A_2, A_3\}$ siendo

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3\},\ A_2 = \{a_4, a_5\} \text{ y } A_3 = \{a_6\}$$

Entonces se comprueba que
$\{a_1, a_4, a_6\}$, $\{a_1, a_5, a_6\}$, $\{a_2, a_4, a_6\}$, $\{a_2, a_5, a_6\}$, $\{a_3, a_4, a_6\}$, $\{a_3, a_5, a_6\}$
son diferentes srd.

La condición necesaria para la existencia de al menos un srd, fue enunciada por Hall: los subconjuntos $A_1, A_2, .., A_n$ tienen al menos un srd sí y sólo sí,

$$\text{card } [U(A_{i_1}, A_{i_2}, .., A_{i_k})] \geq k$$

estando extendida la unión a todas las combinaciones k-arias de m elementos.

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$
y $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ siendo
$B_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B_2 = \{a_1, a_5, a_6\}$, $B_3 = \{a_1, a_3\}$ y $B_4 = \{a_1, a_4\}$

La unión de cualesquiera tres subconjuntos tiene al menos tres elementos:

$$\text{card } \{B_1 \cup B_2 \cup B_3\} = 6; \text{ card } \{B_1 \cup B_2 \cup B_4\} = 5;$$
$$\text{card } \{B_1 \cup B_3 \cup B_4\} = 4; \text{ card } \{B_2 \cup B_3 \cup B_4\} = 5;$$

luego para $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ existe al menos un srd, por ejemplo

$$\{a_2, a_5, a_1, a_4\}, \{a_1, a_5, a_3, a_4\}, \text{ etc.}$$

Sin embargo para los subconjuntos
$C_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $C_2 = \{a_1, a_2, a_4\}$, $C_3 = \{a_5, a_6\}$,
$C_4 = \{a_5, a_6\}$, $C_5 = \{a_5, a_6\}$
la unión de los tres subconjuntos A_3, A_4 y A_5 es tal que

$$\text{card } \{C_3 \cup C_4 \cup C_5\} = 2$$

luego $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ carece de srd

El teorema de Hall proporciona la condición necesaria para la existencia de al menos un srd, pero nada dice del número de posibles srd. Una acotación de este número se consigue mediante la siguiente regla:

Si se cumple la condición necesaria de Hall y cada B_i, $i = 1,2,..,m$, contiene al menos h elementos, se tiene

si $h \leq m$, B tiene al menos $h!$ srd

si $h > m$, B tiene al menos $h!/(h-m)!$

Para los subconjuntos B_1, B_2, B_3 y B_4, del segundo ejemplo, que cumplen la condición necesaria, como card $(B_i) \geq 2 = h$, $(i = 1,2,3,4)$ y $h \leq m$, resulta que B tiene al menos $2! = 2$ srd

Pero para obtener el número exacto de srd, hay que recurrir al concepto de permanente.

Dado un sistema de subconjuntos A_i, $i = 1,2,..,m$, se define la matriz de incidencia de los A_i, como aquella matriz

$$C = (c_{ij}),\ c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_j \in A_i \\ \\ 0 \text{ si } a_j \notin A_i \end{cases}$$

Para la familia de subconjuntos del primer ejemplo se tendría

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la familia del segundo resultaría

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y para el tercer ejemplo

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observa que siendo C la matriz de incidencia de la familia A_1, A_2,..,A_m, se tiene que el número de srd que admite dicha familia es, precisamente per (C).

Así pues, en los ejemplos anteriores, como per (C) = 6 la familia del ejemplo 1 dispone exactamente de 6 srd, la del segundo de 9, puesto que per (D) = 9 y de per (E) = 0 se obtiene el resultado hallado anteriormente para el ejemplo 3.

5.2. PERMUTACIONES CON POSICIONES PROHIBIDAS

El problema de la obtención del número de permutaciones con posiciones prohibidas se presenta con frecuencia; la aplicación del permanente proporciona un método general y práctico para su cálculo. En primer lugar hay que situar los elementos sobre un damero. Sean los elementos.

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4$$

que dan lugar a 4! permutaciones; una cualquiera, por ejemplo la

$$a_2\ a_4\ a_1\ a_3$$

se podría representar mediante el damero de la figura:

	1	2	3	4
a_1			*	
a_2	*			
a_3				*
a_4		*		

a_1 está en la 3ª posición, a_2 en la primera, etc.

Si no existiera ninguna posición prohibida, cada elemento puede ocupar cualquier posición de su fila, con la única restricción de que en cada columna exista un único elemento. Obsérvese que cada permutación resulta ser una transversal del damero.

Si existen posiciones prohibidas "a priori" bastará situar ceros en las referidas posiciones y colocar unos en las restantes; el número de permutaciones buscadas es el número de transversales que no contengan ningún cero, que no es otra cosa que el permanente de la matriz asociada al damero.

EJEMPLO

Hallar el número de permutaciones que se pueden formar con los elementos a_1, a_2, a_3, a_4, sabiendo que a_2 no puede ocupar ni la 1ª ni la 4ª posición y que a_4 no debe figurar en 2ª posición.

La matriz asociada al damero sería

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y como per $(A) = S(A_0) - S(A_1) + S(A_2) - S(A_3) = 96 -$
$- (36+27+18+36) + (8+4+8+0+8+4) - (0+0+1+0) = 10$
que como puede comprobarse corresponde con las permutaciones 1234, 1243, 1324, 3124, 3214, 3241, 4123, 4213, 4231, y 4321

5.2.1. EL PROBLEMA DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Es el ejemplo más conocido de permutaciones prohibidas y consiste en que el elemento i no puede ocupar la posición i-ésima, esto es, representando por σ el indicador de posición, se debe cumplir $\sigma(i) \neq i$.

Como es evidente, para los n elementos $1,2,\ldots,n$, la matriz asociada al damero, es

$$D_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

y, por tanto, el número de desplazamientos d_n, resulta ser

$$d_n = \text{per } (D_n)$$

Si se forma la matriz

$$F_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

aplicando la propiedad IV, se obtiene

$$\text{per } (F_n) = \text{per } (D_{n-1}) + (n-1) \text{ per } (F_{n-1})$$

después de aplicar convenientes permutaciones de filas y columnas.

Aplicando la misma propiedad a D_n

$$\text{per } (D_n) = (n-1) \text{ per } (F_{n-1}) \qquad [VI]$$

o sea per (F_n) = per (D_{n-1}) + per (D_n)

Pero de [VI] se obtiene

$$\text{per } (D_{n+1}) = n \text{ per } (F_n)$$

luego

$$d_{n+1} = \text{per } (D_{n+1}) = n[\text{per } (D_n) + \text{per } (D_{n-1})] = n\,(d_{n-1}+d_n) \quad [VII]$$

fórmula de recurrencia que permite obtener el número de desplazamientos. Como

$$d_1 = \text{per } (D_1) = 0, \; d_2 = \text{per } (D_2) = 1$$

se obtiene, sucesivamente

$d_3 = 2.(1+0) = 2$; $d_4 = 3.(2+1) = 9$; $d_5 = 4.(9+2) = 44$;

$d_6 = 5.(44+9) = 265$; $d_7 = 6.(265+44) = 1854$ ...

Se observa fácilmente que

$d_2 = 1 = 2.0+1 = 2d_1+1$; $d_3 = 2 = 3.1-1 = 3d_2-1$

$d_4 = 9 = 4.2+1 = 4\ d_3 + 1;\ d_5 = 44 = 5.9-1 = 5d_4-1$

y, en general, se puede suponer

$$d_n = n.d_{n-1} + (-1)^n \qquad [VIII]$$

Aplicando la fórmula de recurrencia [VII], resulta,

$$d_{n+1} = nd_n + nd_{n-1} = nd_n + d_n - (-1)^n$$

$$d_{n+1} = (n+1)\ d_n + d_n + (-1)^{n+1}$$

con lo que queda probada. Aplicando [VIII], resulta, como $d_2 = 1$:

$$d_2 = 2.1/2$$
$$d_3 = 3.(2.1/2) - 1 = 3!.(1/2!-1/3!)$$
$$d_4 = 4.3!.(1/2!-1/3!) + 1 = 4!.(1/2!-1/3!+1/4!)$$

y supuesta cierta

$$d_{n-1} = (n-1)!\ [1/2!-1/3!+1/4!-..+ (-1)^{n-1}.(1/(n-1)!)]$$

se obtiene

$$d_n = n\ (n-1)!\ (1/2!-1/3!+1/4!-.. + (-1)^{n-1}.(1/(n-1)!) + (-1)^n = n!\ (1/2!-1/3!+1/4!-.. + (-1)^n.1/n!)$$

fórmula que da el número de desplazamientos.

Aplicando el teorema de Ryser, se puede obtener otra expresión de d_n. Para

$$D_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & .. & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene inmediatamente

$S(D_{n,0}) = (n-1)^n;\ S(D_{n,1}) = C_{n,1}\ (n-2)^{n-1}\ .\ (n-1);\ S(D_{n,2}) =$

$= C_{n,2}\ (n-3)^{n-2}\ (n-2)^2 \dots$

y en general, para r columnas sustituidas por ceros

$$S(D_{n,r}) = C_{n,r}\ (n-r-1)^{n-r}\ (n-r)^r$$

y, por tanto

$$d_n = \mathrm{Per}\ (D_n) = \sum_{r=0}^{n-2} C_{n,r}\ (n-r-1)^{n-r}\ (n-r)^r$$

Obsérvese que la suma sólo se extiende a n-2, ya que $S(D_{n,n-1}) = 0$

ANEXO

FORMULAS DE INCLUSION Y EXCLUSION

A.1. PRIMERA FORMULA DE INCLUSION Y EXCLUSION

Sea A un conjunto finito y sea A_i (i = 1,2,..,n) tal que $A_i \subset A$. Se designa por $\bar{A}_i$ al complementario de A_i en A.

Para dos subconjuntos cualesquiera A_1 y A_2 se tiene, evidentemente

$$(\overline{A_1 \cup A_2}) \cup (A_1 \cup A_2) = A \qquad (A.I)$$

de donde

card $(\overline{A_1 \cup A_2})$ = card (A) − card $(A_1 \cup A_2)$

que se puede escribir

card $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$ = card (A) − [card (A_1) + card(A_2)] + card $(A_1 \cap A_2)$

Poniendo $A_2 \cup A_3$ en lugar de A_2, se obtiene

card $[\bar{A}_1 \cap (\overline{A_2 \cup A_3})]$ = card (A) − [card(A_1) + card $(A_2 \cup A_3)$] + card $[A_1 \cap (A_2 \cup A_3)]$

de donde

card $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$ = card (A) − [card (A_1) + card (A_2) + card (A_3) − card $(A_2 \cap A_3)$] + card $[(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)]$ = card (A) − [card (A_1) + card (A_2) + card (A_3)] + [card $(A_1 \cap A_2)$ + card $(A_1 \cap A_3)$ + card $(A_2 \cap A_3)$] − card $(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

La igualdad anterior se puede generalizar por inducción; supuesta cierta para n-1 subconjuntos

card $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-1})$ = card (A) −[card (A_1) + card (A_2) + ... + card (A_{n-1})] + [card $(A_1 \cap A_2)$ + card $(A_1 \cap A_3)$ + ... + card $(A_{n-2} \cap A_{n-1})$] −[card$(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ +...+ card $(A_{n-3} \cap A_{n-2} \cap A_{n-1})$] +...+$(-1)^{n-1}$ card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

escribiendo en lugar de An-1, $A_{n-1} \cup A_n$ y operando se obtiene

card $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n)$ = card (A) − [card (A_1) + card(A_2) + ... + card (A_n)] + [card$(A_1 \cap A_2)$ + card $(A_1 \cap A_3)$ + ... +

card $(A_{n-1} \cap A_n)$] + [card $(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ + ... + card $(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)$] + ... + $(-1)^n$ card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$ (A.II)

que es la fórmula de inclusión y exclusión.

EJEMPLO A.1.

Sea el conjunto

$$A = \{1,2,3, \ldots, 20\}$$

Sobre él se definen las siguientes propiedades

P_1: $a \in A$ es tal que $a = \dot{2}$

P_2: $a \in A$ es tal que $a = \dot{3}$

P_3: $a \in A$ es tal que $a = \dot{4}$

P_4: $a \in A$ es tal que $a > 15$

Obtener cuántos elementos de A no verifican ninguna de las propiedades anteriores.

Se designa por $A_i \subset A$ el conjunto de elementos que verifican la propiedad P_i. Se obtiene sin dificultad

$A_1 = \{2,4,6,\ldots, 20\}$

$A_2 = \{3,6,9,\ldots, 18\}$

$A_3 = \{4,8,12,\ldots, 20\}$

$A_4 = \{15,16,17,18,19,20\}$

y, por tanto,

card (A_1)= 10; card (A_2) = 6; card (A_3) = 5; card (A_4) = 5;

card $(A_1 \cap A_2)$ = 3; card $(A_1 \cap A_3)$ = 5; card $(A_1 \cap A_4)$ = 3;

card $(A_2 \cap A_3)$ = 1; card $(A_2 \cap A_4)$ = 1; card $(A_3 \cap A_4)$ = 2;

card $(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ = 1; card $(A_1 \cap A_2 \cap A_4)$ = 1;

card $(A_1 \cap A_3 \cap A_4)$ = 2; card $(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ = 0;

card $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ = 0; card (A) = 20

La fórmula de inclusión y exclusión se puede escribir, en este caso

card $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4)$ = card (A) − [card (A_1) + card (A_2) + card(A_3) + card (A_4)] + [card $(A_1 \cap A_2)$ + card $(A_1 \cap A_3)$ + card $(A_1 \cap A_4)$ + card $(A_2 \cap A_3)$ + card $(A_2 A_4)$ + card $(A_3 \cap A_4$] − [card

$(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ + card $(A_1 \cap A_2 \cap A_4)$ + card $(A_1 \cap A_3 \cap A_4)$ + card $(A_2 \cap A_3 \cap A_4)]$ + card $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 20 - (10+6+5+5) +$ $+ (3+5+3+1+1+2) - (1+1+2+0) - 0 = 20 - 26 + 15 - 4 = 5.$

Para obtener cuales son los elementos se procedería a aplicar cada propiedad sucesivamente, esto es, a "cribar" con cada una de las condiciones, al conjunto dado:

a) No cumplen P_1, los impares: 1,3,5,...,19.

b) Al aplicar P_2, no la cumplen los múltiplos de 3 impares, quedando 1,5,7,11,13,17 y 19.

c) El no cumplimiento de P_3 no suprime ningún elemento.

d) No cumplen P_4, 17 y 19, resultando los cinco elementos

1,5,7,11 y 13

A.2. SEGUNDA FORMULA DE INCLUSION Y EXCLUSION

Si en vez de partir de (AI) se considera la igualdad evidente

$$\overline{(\overline{A_K} \cup A_{k+1})} \cup (\overline{A_K} \cup A_{k+1}) = A \qquad \text{(A.III)}$$

Se obtiene

card $(A_K \cap \overline{A_{k+1}})$ = card (A_K) − card $(A_K \cap A_{k+1})$

y si se hace $A_K = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$

resulta

card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}})$ = card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$ − card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1})$

expresión que se puede generalizar por inducción, obteniéndose, en definitiva

card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}} \cap \ldots \cap \overline{A_n})$ = card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$ − −[card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1})$ + card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+2})$ + +...+ card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_n)]$ + [card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots$

$\cap A_k A_{k+1} A_{k+2})$ + ... + card$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{n-1} \cap A_n)]$ − ... + $(-1)^{n-k}$ card $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1} \cap \ldots \cap A_n)$ (A.IV)

que es la segunda fórmula de inclusión y exclusión.

EJEMPLO A.2.

Con los datos del ejemplo 1 se quiere obtener el cardinal del conjunto que cumpla las propiedades P_1 y P_2 y no cumpla la P_3 ni la P_4, o más abreviadamente, el cardinal del conjunto que cumpla

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \overline{P_3} \wedge \overline{P_4}$$

La fórmula (A.III) se convierte en este caso en

card $(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4})$ = card $(A_1 \cap A_2)$ − [card $(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ + card $(A_1 \cap A_2 \cap A_4)]$ + card $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

Teniendo en cuenta los valores hallados en el ejemplo 1:

card $(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = 3 - (1+1) + 0 = 1$

Si se quisiese obtener cuáles son los elementos que verifican, se procede al cribado sucesivo:

Cumplen P_1: 2,4,6, ..., 20

Cumplen $P_1 \wedge P_2$: 6,12,18

Cumplen $P_1 \wedge P_2 \wedge \overline{P_3}$: 6 y 18

Cumplen $P_1 \wedge P_2 \wedge \overline{P_3} \wedge \overline{P_4}$: 6

A.3. NUMERO DE SUBCONJUNTOS QUE VERIFICAN EXACTAMENTE k PROPIEDADES

Sea $Q(k)$ el número de subconjuntos que verifican exactamente k propiedades de las

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

sin especificar cuáles son las propiedades verificadas.

Si se forman todos los subconjuntos de h elementos que se pueden obtener con los elementos de A

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_h}$$

se designa por $q(h)$ a la suma de los cardinales de los subconjuntos

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_h}$$

o sea

$$q(h) = \Sigma \text{ card } (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_h}),$$

designando $q(0)$ al card (A).

Partiendo de la fórmula (A.IV), $Q(k)$ se obtendrá como suma de los cardinales de todos los conjuntos de la forma

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \bar{A}_{i_{k+1}} \cap \ldots \cap \bar{A}_{i_n}$$

esto es, donde se cumplen k y sólo k propiedades. Por tanto, sumando:

$$Q(k) = q(k) - C_{k+1,1} \cdot q(k+1) + C_{k+2,2} \cdot q(k+2) - \ldots + (-1)^{n-k} C_{n,n-k}\, q(n) \qquad \text{(A.V)}$$

EJEMPLO A.3.

Con los datos del Ejemplo 1, se quieren obtener $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3)$ y $Q(4)$,

- $Q(0)$ representa el número de elementos que no cumplen ninguna propiedad

$Q(0) = q(0) - q(1) + q(2) - q(3) + q(4)$

Con los resultados del ejemplo 1

$q(0) = 20$; $q(1) = 10 + 6 + 5 + 5 = 26$;

$q(2) = 3 + 5 + 3 + 1 + 1 + 2 = 15$;

$q(3) = 1 + 1 + 2 + 0 = 4$; $q(4) = 0$

sustituyendo

$Q(0) = 20 - 26 + 15 - 4 + 0 = 5$

resultado, que como es lógico coincide con el del ejemplo 1.

- $Q(1)$ es el número de elementos que cumplen exactamente una propiedad; su número es

$Q(1) = q(1) - 2\, q(2) + 3\, q(3) - 4\, q(4) = 26 - 2 \cdot 15 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 8$

Los elementos que cumplen una sola propiedad son 2(1), 3(2), 9(2), 10(1), 14(1), 15(2), 17(4) y 19(4), donde se ha escrito entre paréntesis la propiedad satisfecha.

$-Q(2) = q(2) - 3 \cdot q(3) + 6 \cdot q(4) = 15 - 3 \cdot 4 + 0 = 3$

Los elementos que satisfacen son:

4(1y3), 6(1y2) y 8(1y3)

$- Q(3) = q(3) - 4 \cdot q(4) = 4 - 0 = 4$

Los elementos que satisfacen son:

12(1,2,3), 16(1,3,4), 18(1,2,4) y 20(1,3,4)

EJEMPLO A.4.

Sean las 4! = 24 permutaciones que se pueden formar con los números 1,2,3,4. Se dice que una de dichas permutaciones cumple la propiedad P_i si el número i (i = 1,2,3,4) ocupa el lugar i-ésimo. Obtener cuantas permutaciones cumplen 0,1,2,3 ó 4 de las propiedades enunciadas.

La propiedad P_1 es cumplida por 6 permutaciones, luego

$q(1) = 4 \cdot 6 = 24$

La propiedad $P_1 \wedge P_2$ es verificada sólo por dos permutaciones, luego

$$q(2) = C_{4,2}.2 = 12$$

La propiedad $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ es verificada por un elemento, luego

$$q(3) = C_{4,3}.1 = 4$$

Evidentemente $q(4) = 1$ y $q(0) = 4! = 24$

Por tanto

$- Q(0) = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$

Dichas permutaciones son

2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321.

$- Q(1) = 24 - 2.12 + 3.4 - 4.1 = 8$

Las permutaciones correspondientes son

1342, 1423, 2314, 2431, 3124, 3241, 4132 y 4213.

$-Q(2) = 12 - 12 + 6 = 6$

Cumplen

1243, 1324, 1432, 2134, 3214, 4231.

$- Q(3) = 0$

$- Q(4) = q(4) = 1$

Sólo verifica 1234

A.4. FORMULA GENERALIZADA DE INCLUSION Y EXCLUSION

En las aplicaciones de la fórmula de inclusión y exclusión se presenta, en ocasiones, la circunstancia de que no todos los elementos juegan el mismo papel, esto es, pueden tener más o menos importancia en el cálculo a efectuar. Esto da lugar a que en algunos problemas hay que asignar a cada

elemento $a_i \in A$ una ponderación o peso, que se designará en lo que sigue por p_i. Entonces hay que realizar en (A.V) algunas modificaciones.

Representado por $A_i \subset A$ al conjunto de elementos que verifican la propiedad P_i, se designa por

$N(P_{i_1} \wedge P_{i_2} \wedge \ldots \wedge P_{i_h}) = N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_h})$

a la suma de los pesos de todos los elementos que verifican h propiedades. Entonces se define el peso $p(h)$

$$p(h) = \Sigma N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_h})$$

De esta forma, la fórmula (A.V) adopta la expresión

$$P(k) = p(k) - C_{k+1,1}.p(k+1) + C_{k+2,2}.p(k+2) - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-k}.C_{n,n-k}.p(n) \qquad \text{(A.VI)}$$

y donde $p(0)$ es la suma de los pesos del conjunto A.

EJEMPLO A.5.

Se dispone de un dado; a cada puntuación del dado se le asigna el peso dado por la tabla:

i	1	2	3	4	5	6
p_i	5	1	2	-1	3	9

Al lanzamiento del dado se le asignan las propiedades

P_1: obtener un número $\dot{2}$

P_2: obtener un número $\dot{3}$

P_3: obtener un número >2

P_4: obtener un número <4

Se pide hallar el peso de los elementos que satisfacen a 0,1,2 ó 3 propiedades.

Se tiene

$p(0) = 5 + 1 + 2 + (-1) + 3 + 9 = 19$

$N(P_1) = N(A_1) = N\ \{2,4,6\} = 1 + (-1) + 9 = 9$

$N(P_2) = N(A_2) = N\ \{3,6\} = 2 + 9 = 11$

$N(P_3) = N(A_3) = N\ \{3,4,5,6\} = 2 + (-1) + 3 + 9 = 13$

$N(P_4) = N(A_4) = N\ \{1,2,3\} = 5 + 1 + 2 = 8$

y de aquí

$$p(1) = 9 + 11 + 13 + 8 = 41$$

Análogamente

$N(P_1 \wedge P_2) = N(A_1 \cap A_2) = N\ \{6\} = 9$

$N(P_1 \wedge P_3) = N(A_1 \cap A_3) = N\ \{4,6\} = - 1 + 9 = 8$

$N(P_1 \wedge P_4) = N(A_1 \cap A_4) = N\ \{2\} = 1$

$N(P_2 \wedge P_3) = N(A_2 \cap A_3) = N\ \{3,6\} = 2 + 9 = 11$

$N(P_2 \wedge P_4) = N(A_2 \cap A_4) = N\ \{3\} = 2$

$N(P_3 \wedge P_4) = N(A_3 \cap A_4) = N\ \{3\} = 2$

de donde

$$p(2) = 9 + 8 + 1 + 11 + 2 + 2 = 33$$

De forma similar

$N(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) = N\ (A_1 \cap A_2 \cap A_3) = N\ \{6\} = 9$

$N(P_1 \wedge P_2 \wedge P_4) = N\ (A_1 \cap A_2 \cap A_4) = N\ (\emptyset) = 0$

$N(P_1 \wedge P_3 \wedge P_4) = N\ (A_1 \cap A_3 \cap A_4) = N\ (\emptyset) = 0$

$N(P_2 \wedge P_3 \wedge P_4) = N\ (A_2 \cap A_3 \cap A_4) = N\ \{3\} = 2$

luego

$$p(3) = 9 + 0 + 0 + 2 = 11$$

$N(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4) = N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = N\ (\emptyset) = 0$

El peso total de los elementos que no satisfacen ninguna propiedad es

$P(0) = p(0) - p(1) + p(2) - p(3) + p(4) = 19 - 41 + 33 - 11 + 0 = 0$

y, respectivamente, los de los que satisfacen 1,2,3 ó 4 propiedades son:

$P(1) = p(1) - 2\ p(2) + 3\ p(3) - 4\ p(4) = 41 - 2.33 + 3.11 - 0 = 8$

$P(2) = p(2) - 3\ .\ p(3) + 6\ .\ p(4) = 33 - 33 + 0 = 0$

$P(3) = p(3) - 4\ p(4) = 11 - 0 = 11$

$P(4) = p(4) = 0$

Obsérvese que no hay ningún elemento que no cumpla ninguna propiedad.

Los elementos 1 y 5 verifican una única propiedad, respectivamente P_4 y P_3; la suma de sus pesos es $5 + 3 = 8$

Dos propiedades son cumplidas por los elementos 2(P_1 y P_4) y 4(P_1 y P_3); la suma de sus pesos es $1 + (-1) = 0$. Obsérvese que, si existen pesos negativos, puede resultar algún $P(k) = 0$, existiendo elementos que cumplan k propiedades.

Tres propiedades son verificadas por 3(P_2, P_3 y P_4) y 6(P_1, P_2 y P_3); la suma de pesos es $2 + 9 = 11$.

Finalmente, como no hay ningún elemento que satisfaga las cuatro propiedades, es evidente que $P(4) = 0$

B I B L I O G R A F I A

ANDERSON, I. A first course in combinatorial mathematics. Clarendon Press. 1989

BOSE, R.C. y MANWELL, B. Introduction to Combinatorial Theory. Wiley. 1984.

CAUCHY, A.L. Mémoire sur les funtions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite de transpositions opereès entre les variables qu'elles renferment. Journal Ecole Polythecnique. 1812.

COMTET, L. Analyse Combinatoire. PUF. 1970.

KAUFMANN, A. Introduction a la combinatorique. Dunod. 1969.

KAUFMANN, A. y COSTER, D. Ejercicios de Combinatoria. CECSA. 1971.

MAC-MAHON, P.A. Reseaches in the theory of determinants. Trans. Cambridge Philosophic. Society. 24.

MARCUS, M. Permanents. American Mathematical Monthly. 72. 1965.

MUIR, T. A relation between permanents and determinants. Proc-Royal Society. Edimburgo. 1897.

RIVNIKOV. Análisis Combinatorio. Mir. 1988.

RIORDAN, J. An introduction to Combinatorial Analysis. Wiley. 1958.

ROBERTS. Applied Combinatorics. Prentice Hall. 1984.

RYSER. Combinatorial Mathematics. Wiley. 1963.

GENERACION CONSTRUCTIVA DE LOS 17 GRUPOS DE SIMETRIA DEL PLANO: SIMULACION INFORMATICA DE SUS TESELACIONES

E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano
Sección Departamental de Algebra
E. U. "Pablo Montesino". Univ. Complutense

Abstract: *Se trata de considerar una generación constructiva de cada uno de los diecisiete grupos de simetría del plano, con el fin de realizar una adaptación geométrica, que permita efectuar la simulación informática de mosaicos periódicos de cada uno de los 17 tipos posibles. Nuestro objetivo final es facilitar la construcción de un "shell" tal que, para cada uno de los 17 tipos, baste elegir el motivo restringido al dominio fundamental y las dimensiones de este, para crear el correspondiente mosaico. Cada tipo se ejemplifica con la simulación de un mosaico de la Alhambra.*

Siendo o, u y v tres puntos no alineados, los vectores linealmente independientes $\overrightarrow{ou}$ y $\overrightarrow{ov}$ generan el grupo aditivo $\mathbf{Z}\overrightarrow{ou} + \mathbf{Z}\overrightarrow{ov} = \{i\overrightarrow{ou} + j\overrightarrow{ov} : i,j\in \mathbf{Z}\}$. Cada vector, $i\overrightarrow{ou} + j\overrightarrow{ov}$, de este $\mathbf{Z}$-módulo, define una traslacion, que notaremos abreviadamente $t_{i,j}$. Todas estas traslaciones pueden obtenerse a partir de dos de ellas, $t_{1,0}$ y $t_{0,1}$, ya que $t_{i,j} = (t_{0,1})^j(t_{1,0})^i$; $i,j\in \mathbf{Z}$.

Al punto imagen del O en la traslación $t_{i,j}$ lo notaremos $x_{i,j}$. Los puntos $x_{i,j}$ $(i,j\in \mathbf{Z})$ son vértices de una red de puntos del plano (figura 1), consistente en las imágenes en las $t_{i,j}$ del paralelogramo ouwv (siendo $w = x_{1,1}$). Si, en particular, este paralelogramo es rectángulo (respect. cuadrado, rombo o rombo con un ángulo de 60^0), la red obtenida será ortogonal (respect. ortonormal, rómbica o hexagonal).

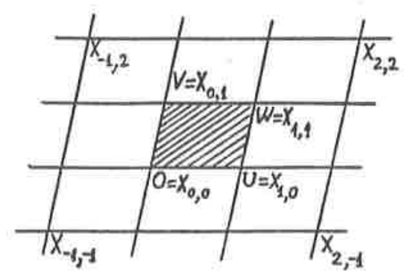


Figura 1

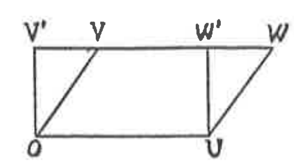


Figura 2

En el paralelogramo OUWV puede suponerse grabada una representación pictórica o *motivo*, de modo que al aplicarle las traslaciones $t_{i,j}$, se reproduce el motivo sobre cada uno de los paralelogramos $x_{i,j}x_{i+1,j}x_{i+1,j+1}x_{i,j+1}$, generando así un *mosaico* periódico sobre todo el plano euclídeo. La parte del mosaico consistente en el paralelogramo OUWV se llama *célula reticular* del mosaico.

Supongamos que en la célula reticular OUWV se prescinde de la parte triangular OWW', siendo W' un punto del lado $\overline{VW}$ (figura 2), sustituyéndola por su imagen, OVV', en $t_{-1,0}$, para tener la parte de mosaico consistente en el paralelogramo OUW'V'. A partir de esta nueva parte de mosaico, también se obtiene todo el mosaico aplicando las traslaciones $t_{i,j}$, por lo que se dice que esta nueva parte es otra *célula* del mosaico.

En general, una *célula* del mosaico es una parte, *C*, del mismo, a partir de la cual se genera todo el mosaico mediante las traslaciones $t_{i,j}$, y tal que ninguna parte propia de *C* posea esa misma propiedad. Si, en particular, la célula es un paralelogramo tal que los vectores que definen las traslaciones $t_{1,0}$ y $t_{0,1}$ yacen sobre dos lados de *C* (supuestos orientados y del mismo origen), entonces dicha célula se dice *reticular*. Se comprende que para un mismo mosaico existen infinitas células, todas ellas equivalentes (del mismo área), pero sólo una reticular (salvo traslaciones).

Por otra parte, dependiendo de cual sea el motivo, la célula podría obtenerse a partir de una figura poligonal generatriz de área mínima, contenida en la célula, aplicando isometrías apropiadas: giros, simetrías axiales o simetrías con deslizamiento (pero no traslaciones, para que ninguna parte propia de *C* sea célula). Tal figura generatriz se denomina un *dominio fundamental* del mosaico. Así, por ejemplo, para el caso de la célula OUWV de la figura 3, a partir del dominio fundamental consistente en la parte rectangular ABWC, aplicando sucesivamente las simetrías de ejes las rectas AB y AC, se obtiene dicha célula.

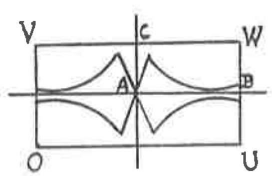


Figura 3

En consecuencia, el mosaico, considerado globalmente (en todo el plano), no sólo se transforma en sí mismo, mediante las traslaciones $t_{i,j}$, sino también mediante otras isometrías (ciertos giros, simetrías axiales o simetrías deslizantes). El subconjunto de las isometrías del plano, que dejan invariante un mosaico periódico, *M*, es un subgrupo, G(*M*), cuyas traslaciones son las $t_{i,j}$.

En general, los subgrupos del grupo de las isometrías del plano, cuyas traslaciones resultan de componer dos traslaciones definidas por vectores linealmente independientes, se denominan *grupos de simetría* del plano, existiendo solamente diecisiete de estos grupos, según puede verse, por ejemplo, en [Arm] o [Mar]. Es claro que dado un grupo de simetría, *S*, del plano, puede construirse un mosaico, *M*, tal que G(*M*) = *S*, bastando para ello elegir un punto del plano, o, determinar sus imágenes en todas las traslaciones de *S* (para obtener la red de puntos de *M*) y, siguiendo el proceso antes descrito, elegir una célula y en ella un dominio fundamental, en el que se representa el motivo deseado (cuya simetría habrá de ser de tipo C_1 , pues en otro caso bastaría elegir como dominio una figura generatriz menor). La consideración de mosaicos facilita el estudio de los grupos de simetría y su caracterización, además de conllevar una aplicación estética.

Para cada uno de los 17 grupos de simetría, es posible elegir sistemas de generadores finito-minimales (que constan de dos a cuatro isometrías, según el caso). Así, para el caso de la figura 3, basta considerar las 4 simetrías de ejes las rectas AB, CW, AC y BW, a partir de las cuales se obtienen todas las isometrías del grupo, incluidas las traslaciones $t_{i,j}$. No obstante, y pensando en la simulación informática, para cada grupo de simetría elegiremos un sistema de generadores que incluya a las dos traslaciones $t_{1,0}$ y $t_{0,1}$, aunque no sea minimal dicho sistema. Así, para el caso de la figura 3, puede considerarse el sistema de generadores consistente en las simetrías de ejes AB y AC y las traslaciones $t_{1,0}$ y $t_{0,1}$, de vectores $\overrightarrow{OU}$ y $\overrightarrow{OV}$.

Notemos que, en caso de considerar color, el número de grupos de simetría del plano es mucho mayor que 17, según puede verse, por ejemplo, en el artículo [Schw], citado en la bibliografía.

Nuestro primer objetivo es realizar una adaptación geométrica, que permita efectuar la simulación informática de mosaicos de cada uno de los 17 tipos posibles. Cada una de estas simulaciones requiere actuar en dos fases sucesivas:

i) construcción de la célula, a partir del dominio fundamental

ii) generación del mosaico, aplicando a la célula las traslaciones $t_{i,j}$

Para facilitar la simulación y mejorar la calidad de las representaciones gráficas, adoptaremos una célula en forma de hexágono regular, en caso de red hexagonal, y en forma rectangular para los demás tipos de red. Además, para cada uno de los 17 tipos, se efectuará un ejemplo de simulación de alguno de los mosaicos de la Alhambra. Nuestro objetivo final es facilitar la construcción de un "shell", de modo que, para cada uno de los 17 tipos, baste elegir el motivo restringido al dominio fundamental y las dimensiones de este, para obtener el correspondiente mosaico.

En cuanto a notación, representaremos por $g_{P,\alpha}$ al giro de centro el punto P y amplitud α, por s_{AB} a la simetría de eje la recta AB y por d_{AB} a la simetría con deslizamiento resultante de componer s_{AB} con la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ (que notaremos t_{AB}) , es decir,

$$d_{AB} = t_{AB} s_{AB}$$

En las figuras que interese, junto a los puntos que sean centros de giro de orden 2, 3, 4 ó 6, se indicará este número. Los ejes de simetría se representarán con trazo continuo. Los vectores que definen las dos traslaciones generadoras, $t_{1,0}$ y $t_{0,1}$, se representarán mediante flechas de trazo continuo. Y la simetría con deslizamiento d_{AB} se representará mediante una flecha de trazo discontinuo de origen A y extremo B. En cuanto a denominación de los grupos de simetría, adoptaremos, por su mayor difusión, la cristalográfica internacional.

Por la naturaleza del problema geométrico, los lenguajes informáticos más apropiados para efectuar las implementaciones correspondientes son aquellos que disponen de "tortuga": Turbo-Pascal, Logo o Turbo-Prolog (este último con la desventaja de disponer de pocas primitivas de carácter gráfico). Las simulaciones de las cuatro clases de isometrías del plano (traslaciones, giros, simetrías axiales y simetrías con deslizamiento) pueden efectuarse haciendo uso de adaptaciones geométricas apropiadas, como las indicadas en [R-R 1] o en [R-R 2].

GRUPO P1

Adoptamos como *dominio fundamental* el rectángulo ABCD (figura P1.1), que también tomamos como *célula* (es decir, la célula se genera a partir del dominio fundamental mediante la transformación idéntica). Reiterando traslaciones de vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AF}$ (siendo F un punto de la recta CD), se genera el mosaico.

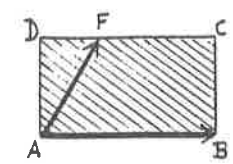


Fig. P1.1

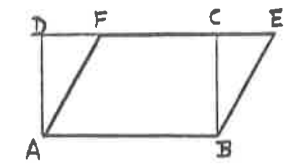


Fig. P1.2

isometrías del grupo:

•traslaciones definidas por vectores del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}\overrightarrow{AB} + \mathbb{Z}\overrightarrow{AF}$

célula reticular: Siendo E la imagen de F en la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ (fig. P1.2), basta sustituir el triángulo rectángulo ADF por su imagen, BCE, en dicha traslación, para pasar de la célula rectangular ABCD a la célula equivalente ABEF. Como los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AF}$ yacen sobre lados de este paralelogramo, ABEF es célula reticular.

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. P1.3, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. P1.4).

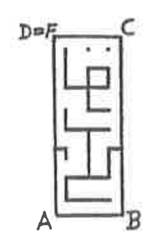


Fig. P1.3

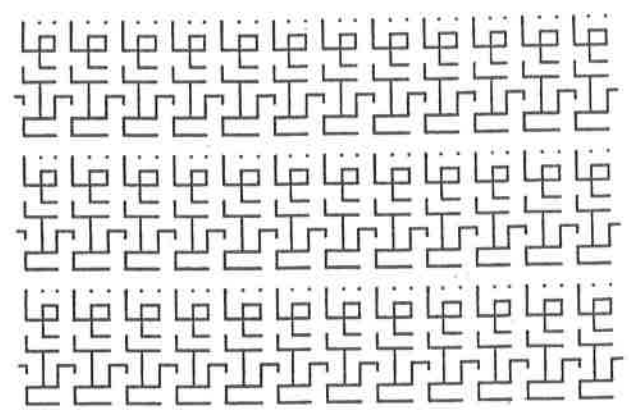


Fig. P1.4

GRUPO PM

Adoptamos como *dominio fundamental* el rectángulo ABCD. Aplicando la simetría de eje BC (fig.PM.1), se obtiene la *célula* rectangular AEFD. Ahora, aplicando reiteradamente a la célula traslaciones de vectores $2\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$, se genera el mosaico.

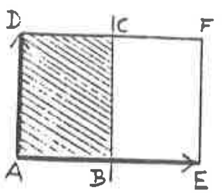


Fig. PM.1

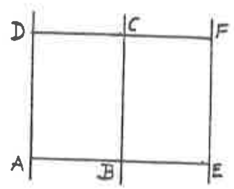


Fig. PM.2

isometrías del grupo:

•traslaciones de vectores del Z-módulo $\mathbb{Z}2\overrightarrow{AB} + \mathbb{Z}\overrightarrow{AD}$

•simetrías de ejes BC, AD, EF (fig. PM.2)

En efecto:

$$s_{BC}t_{2AB} = s_{BC}(s_{BC}s_{AD}) = (s_{BC}s_{BC})s_{AD} = s_{AD}$$

$$t_{2AB}s_{BC} = (s_{EF}s_{BC})s_{BC} = s_{EF}(s_{BC}s_{BC}) = s_{EF}$$

célula reticular: la misma célula rectangular AEFD adoptada

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. PM.3, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. PM.4)

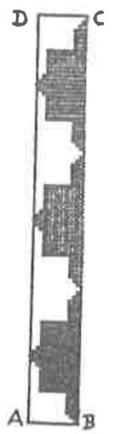


Fig. PM.3

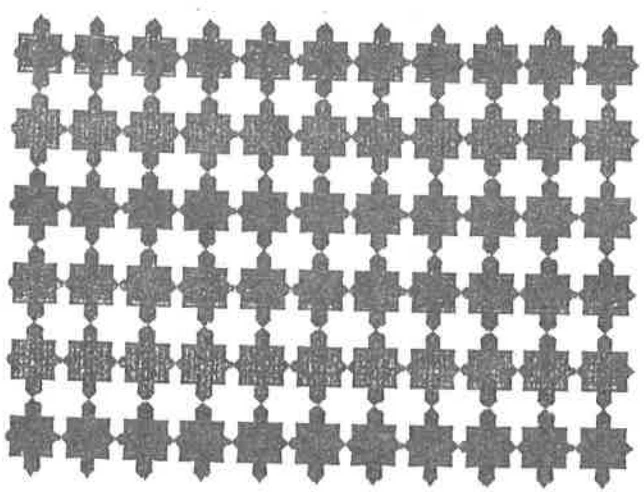


Fig. PM.4

GRUPO PG

Adoptamos como *dominio fundamental* el rectángulo ABCD, en que M y N son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (fig. PG.1). Aplicando la simetría con deslizamiento $d_{MN} = t_{MN}s_{MN}$, se obtiene la *célula* rectangular ABEF. Ahora, aplicando reiteradamente a la célula traslaciones de vectores $\overrightarrow{AB}$ y $2\overrightarrow{AD}$, se genera el mosaico.

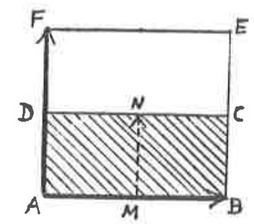


Fig. PG.1

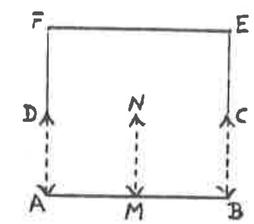


Fig. PG.2

isometrías del grupo:

•traslaciones de vectores del Z-módulo $\mathbb{Z}\overrightarrow{AB} + \mathbb{Z}2\overrightarrow{AD}$

•simetrías con deslizamiento d_{MN}, d_{AD}, d_{BC} (fig. PG.2)

En efecto:

$$d_{MN}t_{AB} = (t_{MN}s_{MN})(s_{MN}s_{AD}) = t_{MN}s_{AD} = t_{AD}s_{AD} = d_{AD}$$

$$t_{AB}d_{MN} = (s_{BC}s_{MN})(s_{MN}t_{MN}) = s_{BC}t_{MN} = t_{BC}s_{BC} = d_{BC}$$

(Notemos que $d_{MN}d_{MN} = t_{2AD}$. por lo que t_{AB} y d_{MN} generan este grupo de simetría que también es generado por d_{DA} y d_{MN})

célula reticular: la misma célula rectangular ABEF adoptada

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. PG.3, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. PG.4)

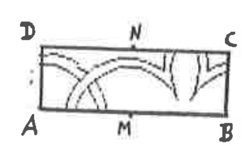


Fig. PG.3

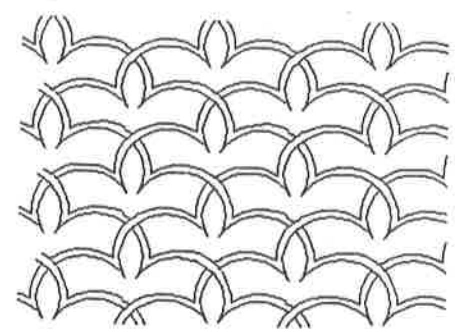


Fig. PG.4

GRUPO CM

Adoptamos como *dominio fundamental* el rectángulo ABCD. Aplicando la simetría de eje BC (fig.CM.1), se obtiene la *célula* rectangular AEFD. Aplicando a la célula traslaciones de vectores $2\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, se genera el mosaico.

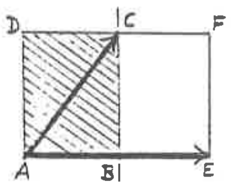


Fig. CM.1

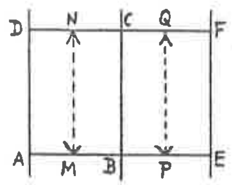


Fig. CM.2

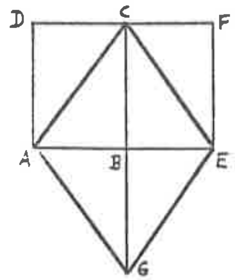


Fig. CM.3

isometrías del grupo:

- traslaciones de vectores del Z-módulo $Z2\overrightarrow{AB} + Z\overrightarrow{AC}$
- simetrías de ejes BC, AD, EF (fig. CM.2)
- simetrías con deslizamiento d_{MN}, d_{PQ} (siendo M, N, P y Q los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$)

En efecto:

$$s_{BC}t_{2AB} = s_{BC}(s_{BC}s_{AD}) = s_{AD} \quad ; \quad t_{2AB}s_{BC} = s_{EF}$$

$$s_{BC}t_{AC} = s_{BC}(t_{AB}t_{BC}) = (s_{BC}t_{AB})t_{BC} = s_{MN}t_{BC} = d_{MN} \quad ; \quad t_{AC}s_{BC} = d_{PQ}$$

célula reticular: sustituyendo los triángulos CDA y CFE (fig. CM.3) por sus imágenes, EBG y ABG en las respectivas traslaciones de vectores $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, se pasa de la célula AEFD a la CAGE, pudiendo tomar como traslaciones generadoras las de vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CE}$. Como ambos vectores yacen sobre lados del paralelogramo CAGE , este rombo es célula reticular

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. CM.4, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. CM.5)

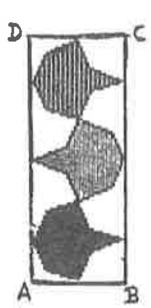


Fig. CM.4

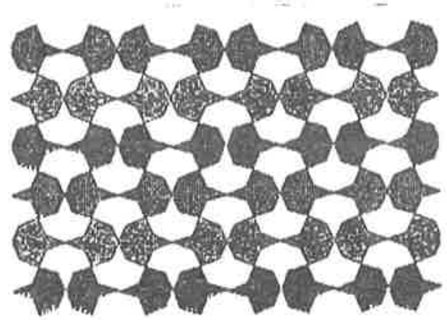


Fig. CM.5

GRUPO P2

Adoptamos como *dominio fundamental* el triángulo rectángulo ABC (fig.P2.1). Aplicando un giro de 180^0 con centro en el punto medio, O, de su hipotenusa $\overline{AC}$, se obtiene la célula rectangular ABCD. Aplicando a esta traslaciones de vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AV}$ (V es un punto de la recta CD), se genera el mosaico.

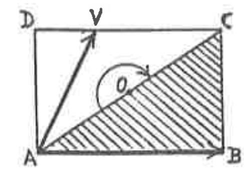


Fig. P2.1

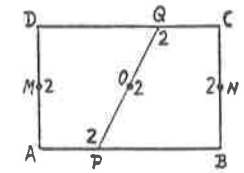


Fig. P2.2

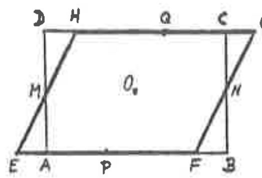


Fig. P2.3

isometrías del grupo:

- traslaciones definidas por vectores del Z-módulo $Z\overrightarrow{AB} + Z\overrightarrow{AV}$
- giros de 180^0 con centro en los puntos O M, N, P, Q (fig. P2.2), siendo M y N los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, y P y Q los respectivos puntos en que la paralela por O a la recta AV corta a las rectas AB y CD

En efecto,

$$g_{O,180}t_{AB} = g_{O,180}(g_{O,180}g_{M,180}) = g_{M,180} \quad ; \quad t_{AB}g_{O,180} = g_{N,180}$$

$$g_{O,180}t_{AV} = g_{O,180}(g_{O,180}g_{P,180}) = g_{P,180} \quad ; \quad t_{AV}g_{O,180} = g_{Q,180}$$

célula reticular: Sean E y H (respect. F y G) los puntos en que la paralela por M (respect. N) corta a las rectas AB y CD (fig. P2.3). Sustituyendo los triángulos MDH y NBF por sus respectivas imágenes, MAE y NCG, en $g_{M,180}$ y $g_{N,180}$, se pasa de la célula ABCD a la EFGH. Como los vectores $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AV}$ yacen sobre lados de EFGH, este paralelogramo es célula reticular.

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. P2.4, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. P2.5)

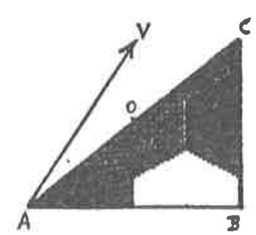


Fig. P2.4

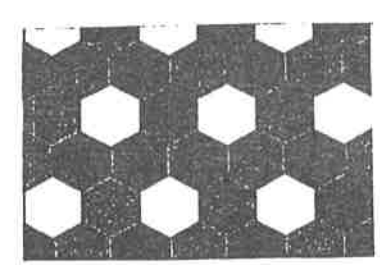


Fig. P2.5

GRUPO PMM

Adoptamos como *dominio fundamental* el rectángulo ABCD. Aplicando sucesivamente s_{BC} y $g_{C,180}$ (fig. PMM.1), se obtiene la *célula* rectangular AEFG. Aplicando a esta traslaciones de vectores $2\overrightarrow{AB}$ y $2\overrightarrow{AD}$, se genera el mosaico.

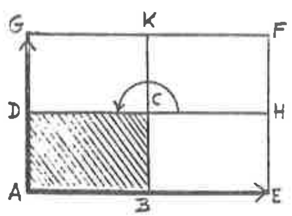


Fig. PMM.1

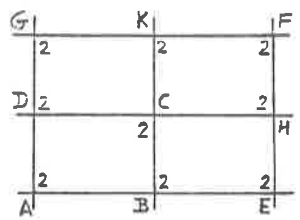


Fig. PMM.2

isometrías del grupo:

•traslaciones definidas por vectores del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}2\overrightarrow{AB} + \mathbb{Z}2\overrightarrow{AD}$

•giros de 180^0 con centro en C, B, K, D, H, A, E, F, G (fig. PMM.2)

•simetrías de ejes BC, AD, EH, CD, AB, GK

En efecto:

$$g_{C,180}t_{2AD} = g_{C,180}(g_{C,180}g_{B,180}) = g_{B,180} \quad ; \quad t_{2AD}g_{C,180} = g_{K,180}$$

$$g_{C,180}s_{BC} = (s_{CD}s_{BC})s_{BC} = s_{CD} \quad ; \quad s_{CD}t_{2AD} = s_{AB} \quad ; \quad t_{2AD}s_{CD} = s_{GK}$$

(Notemos que en la generación de la célula AEFG, $g_{C,180}$ puede sustituirse por s_{CD} ; de ahí el nombre, PMM, de este grupo)

célula reticular: la misma célula rectangular AEFG adoptada

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. PMM.3, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. PMM.4)

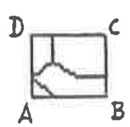


Fig. PMM.3

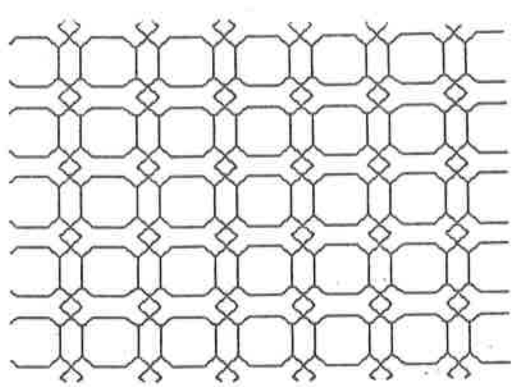


Fig. PMM.4

GRUPO PMG

Adoptamos como *dominio fundamental* el rectángulo ABCD. Aplicando sucesivamente $g_{M,180}$ (M es punto medio de $\overline{CD}$) y s_{BC} , se obtiene la *célula* rectangular AEFG (fig. PMG.1). Aplicando a esta traslaciones de vectores $2\overrightarrow{AB}$ y $2\overrightarrow{AD}$, se genera el mosaico.

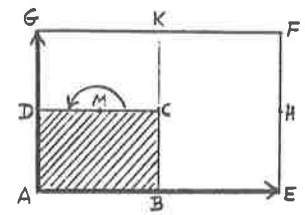


Fig. PMG.1

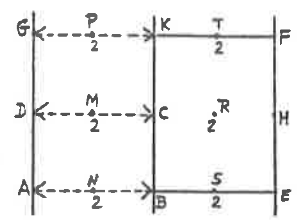


Fig. PMG.2

isometrías del grupo:

•traslaciones definidas por vectores del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}2\overrightarrow{AB} + \mathbb{Z}2\overrightarrow{AD}$

•giros de 180^0 con centro en M, N, P, R, S, T (fig. PMG.2)

•simetrías de ejes BC, AD, EH

•simetrías con deslizamiento d_{DC} , d_{AB} , d_{GK}

En efecto:

$$g_{M,180}t_{2AD} = g_{M,180}(g_{M,180}g_{N,180}) = g_{N,180} \quad ; \quad t_{2AD}g_{M,180} = g_{P,180}$$

$$s_{BC}t_{2AB} = s_{BC}(s_{BC}s_{AD}) = s_{AD} \quad ; \quad t_{2AB}s_{BC} = s_{AD}$$

$$s_{BC}g_{M,180} = s_{BC}(s_{MN}s_{CD}) = (s_{BC}s_{MN})s_{CD} = t_{DC}s_{DC} = d_{DC} \quad ; \quad s_{BC}g_{N,180} = d_{AB}$$

(Notemos que en la generación de la célula AEFG, $g_{M,180}$ puede sustituirse por d_{DC} ; de ahí el nombre, PMG, de este grupo)

célula reticular: la misma célula rectangular AEFG adoptada

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. PMG.3, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. PMG.4)

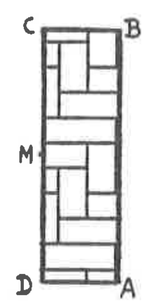


Fig. PMG.3

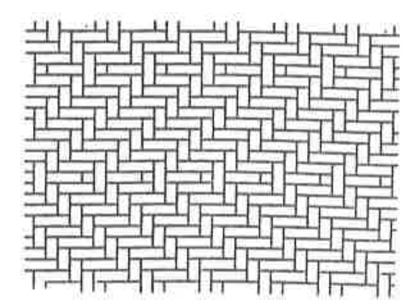


Fig. PMG.4

GRUPO PGG

Adoptamos como *dominio fundamental* el rectángulo ABCD. Aplicando sucesivamente $d_{MN} = t_{MN}s_{MN}$ (siendo M y N los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$) y $g_{C,180}$, se obtiene la *célula* rectangular AEFG (fig. PGG.1). Aplicando a esta célula traslaciones de vectores $2\overrightarrow{AB}$ y $2\overrightarrow{AD}$, se genera el mosaico.

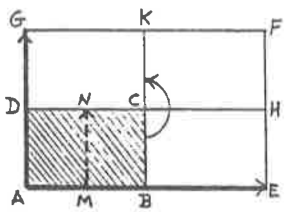


Fig. PGG.1

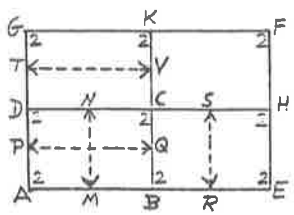


Fig. PGG.2

isometrías del grupo:

- traslaciones definidas por vectores del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}2\overrightarrow{AB} + \mathbb{Z}2\overrightarrow{AD}$
- giros de 180^0 con centros en C, B, K, D, A, G, H, E, F (fig. PGG.2)
- simetrías con deslizamiento d_{MN} , d_{RS} , d_{PQ} , d_{TV}

En efecto:

$$g_{C,180}t_{2AD} = g_{C,180}(g_{C,180}g_{B,180}) = g_{B,180} \quad ; \quad t_{2AD}g_{C,180} = g_{K,180}$$

$$g_{C,180}d_{MN} = g_{C,180}(t_{MN}s_{MN}) = (s_{BC}s_{CN})[(s_{NC}s_{PQ})s_{MN} = s_{BC}s_{PQ}s_{MN} =$$

$$= s_{CB}s_{MN}s_{PQ} = t_{PQ}s_{PQ} = d_{PQ}$$

(Notemos que en la generación de la célula AEFG, $g_{C,180}$ puede sustituirse por d_{PQ} ; de ahí el nombre, PGG, de este grupo)

célula reticular: la misma célula rectangular AEFG adoptada

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. PGG.3, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. PGG.4)

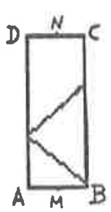


Fig. PGG.3

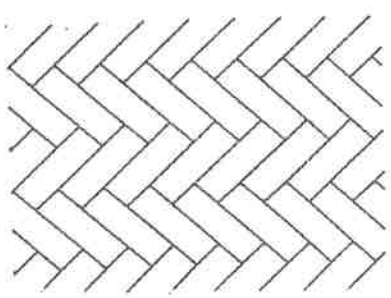


Fig. PGG.4

GRUPO CMM

Adoptamos como *dominio fundamental* el triángulo ABC ($\hat{B} = 90^0$). Aplicando sucesivamente $g_{M,180}$ (M es punto medio de $\overline{AC}$) y s_{BC} (fig. CMM.1), se obtiene la *célula* rectangular AEFD. Aplicando a esta célula traslaciones de vectores $2\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, se genera el mosaico.

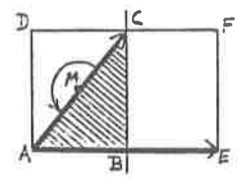


Fig. CMM.1

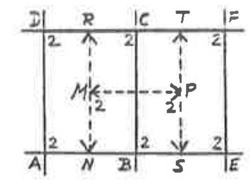


Fig. CMM.2

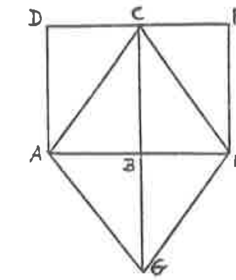


Fig. CMM.3

isometrías del grupo:

- traslaciones definidas por vectores del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}2\overrightarrow{AB} + \mathbb{Z}\overrightarrow{AC}$
- simetrías de ejes BC, AD, EF, AB, CD (fig. CMM.2)
- giros de 180^0 con centros M, P, A, B, C, D, E, F
- simetrías con deslizamiento d_{MP} , d_{NR} , d_{ST} , d_{PM}

En efecto:

$$s_{BC}t_{2AB} = s_{BC}(s_{BC}s_{AD}) = s_{AD} \; ; \; t_{AC}g_{M,180} = (g_{C,180}g_{M,180})g_{M,180} = g_{C,180}$$

$$g_{C,180}s_{BC} = s_{CD} \quad ; \quad s_{CD}t_{AC} = s_{CD}(t_{AD}t_{DC}) = s_{MP}t_{DC} = d_{MP} \quad ; \quad s_{BC}t_{AC} = d_{NR}$$

célula reticular: sustituyendo los triángulos CDA y CFE (fig. CMM.3) por sus imágenes, EBG y ABG en las respectivas traslaciones de vectores $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, se pasa de la célula AEFD a la CAGE, pudiendo tomar como traslaciones generadoras las de vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CE}$. Como ambos vectores yacen sobre lados de CAGE , este rombo (cuyas diagonales son ejes de simetría) es célula reticular (de ahí el nombre del grupo: CMM)

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. CMM.4, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. CMM.5)

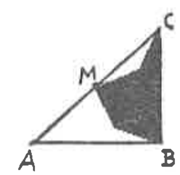


Fig. CMM.4

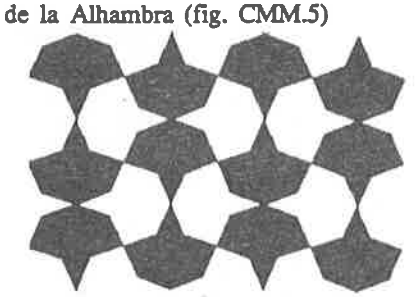


Fig. CMM.5

GRUPO P3

Adoptamos como *dominio fundamental* el rombo OABC ($\hat{A}=60^0$). Aplicando giros de 120^0 con centro en O, se obtiene la *célula* hexagonal regular ABCDEF (fig. P3.1). Ahora, aplicando reiteradamente traslaciones de vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AC}$, se genera el mosaico.

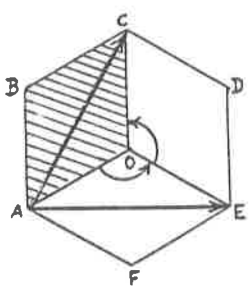


Fig. P3.1

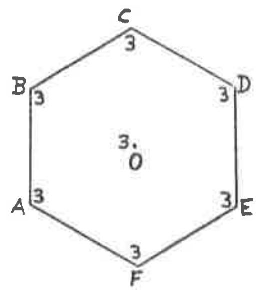


Fig. P3.2

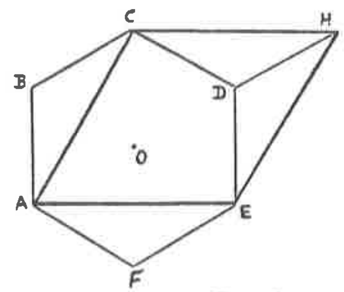


Fig. P3.3

isometrías del grupo:

- traslaciones definidas por vectores del Z-módulo $Z\overrightarrow{AE} + Z\overrightarrow{AC}$
- giros de 120^0 con centros en O, A, B, C, D, E, F (fig. P3.2)

En efecto:

$$g_{O,120}t_{AE} = (s_{OB}s_{OC})(s_{OC}s_{AB}) = s_{OB}s_{AB} = g_{B,120} \quad ; \quad t_{AE}g_{O,120} = g_{D,120}$$

$$g_{B,120}g_{O,120} = (s_{BC}s_{BO})(s_{OB}s_{OC}) = s_{BC}s_{OC} = g_{C,-120} \quad ; \quad (g_{C,-120})^2 = g_{C,120}$$

célula reticular: Sea $H=t_{AE}(C)$. Sustituyendo los triángulos ABC y AEF (fig. P3.3) por sus imágenes en las respectivas traslaciones de vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AC}$, es decir, por los triángulos EDH y CHD, se pasa de la célula hexagonal ABCDEF a la célula AEHC. Como los vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AC}$ yacen sobre lados de AEHC, este paralelogramo es célula reticular.

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. P3.4, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. P3.5).

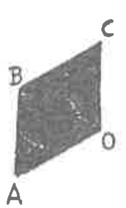


Fig. P3.4

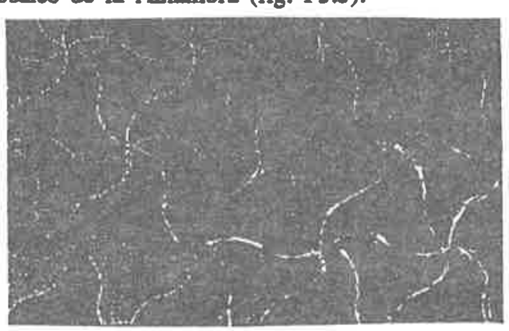


Fig. P3.5

GRUPO P3M1

Adoptamos como *dominio fundamental* el triángulo equilátero OAB. Aplicando la simetría de eje OB y luego giros de 120^0 con centro en O, se obtiene la *célula* hexagonal ABCDEF (fig. P3M1.1). Ahora, aplicando reiteradamente traslaciones de vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AC}$, se genera el mosaico.

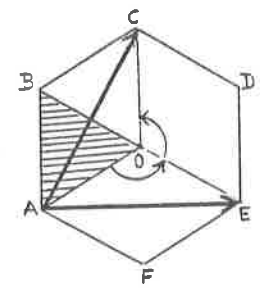


Fig. P3M1.1

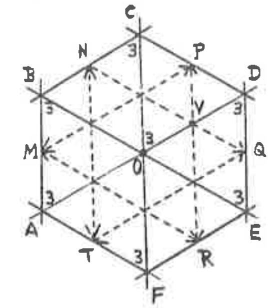


Fig. P3M1.2

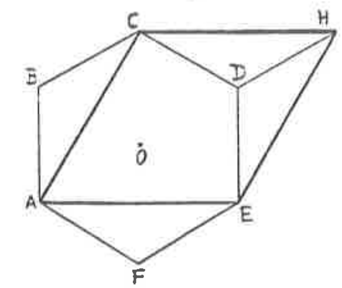


Fig. P3M1.3

isometrías del grupo:

- traslaciones definidas por vectores del Z-módulo $Z\overrightarrow{AE} + Z\overrightarrow{AC}$
- giros de 120^0 con centros en O, A, B, C, D, E, F (fig. P3M1.2)
- simetrías de ejes OA, OB, OC, AB, BC, CD, DE, EF, FA
- simetrías con deslizamiento d_{TQ}, d_{QT}, d_{RP}, d_{PM}, d_{NT}, d_{MR}, d_{QN} (siendo M, N, P, Q, R y T los puntos medios de los lados del hexágono regular)

En efecto, además de lo indicado respecto de P3, se tiene:

$$g_{O,120}s_{OB} = (s_{OA}s_{OB})s_{OB} = s_{OA} \quad ; \quad g_{A,120}s_{OA} = (s_{AB}s_{AO})s_{OA} = s_{AB}$$

$$t_{AE}s_{AO} = t_{VE}t_{AV}s_{AO} = t_{AV}(t_{VE}s_{AO}) = t_{AV}s_{TQ} = t_{TQ}s_{TQ} = d_{TQ}$$

célula reticular: paralelogramo AEHC de la fig. P3M1.3, que resulta como se indicó respecto de P3.

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. P3M1.4, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. P3M1.5).

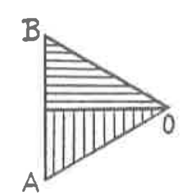


Fig. P3M1.4

Fig. P3M1.5

GRUPO P31M

Adoptamos como *dominio fundamental* el triángulo OAC ($\hat{A}=\hat{C}=30^0$). Aplicando la simetría de eje AC y luego giros de 120^0 con centro en O, se obtiene la *célula* hexagonal ABCDEF (fig. P31M.1). Ahora, aplicando reiteradamente traslaciones de vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AC}$, se genera el mosaico.

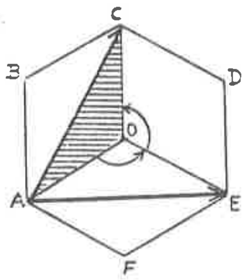


Fig. P31M.1

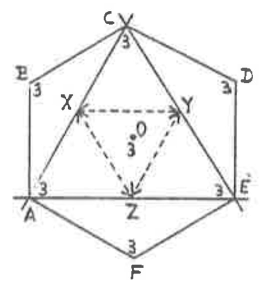


Fig. P31M.2

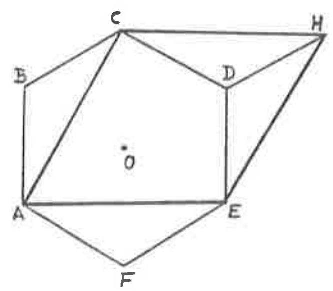


Fig. P31M.3

isometrías del grupo:

- traslaciones definidas por vectores del **Z**-módulo $\mathbb{Z}\overrightarrow{AE} + \mathbb{Z}\overrightarrow{AC}$
- giros de 120^0 con centros en O, A, B, C, D, E, F (fig. P31M.2)
- simetrías de ejes AC, CE, EA
- simetrías con deslizamiento d_{ZY}, d_{YX}, d_{XZ} (siendo X, Y, Z los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$, $\overline{CE}$ y $\overline{EA}$)

En efecto, además de lo indicado respecto de P3, se tiene:

$$g_{C,120}s_{AC} = (s_{CE}s_{CA})s_{AC} = s_{CE} \quad ; \quad g_{E,120}s_{CE} = s_{EA}$$

$$t_{AE}s_{AC} = (t_{XE}t_{AX})s_{AC} = t_{AX}(t_{XE}s_{AC}) = t_{AX}s_{ZY} = t_{ZY}s_{ZY} = d_{ZY}$$

célula reticular: paralelogramo AEHC de la fig. P31M.3 (como en caso P3)

ejemplo: a partir del dominio fundamental del la fig. P31M.4, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. P31M.5).

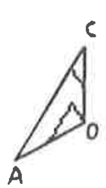


Fig.P31M.4

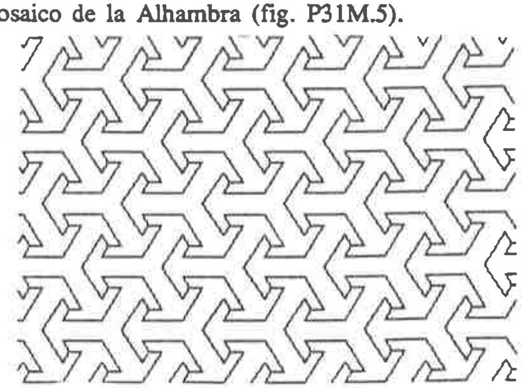


Fig. P31M.5

GRUPO P4

Adoptamos como *dominio fundamental* el cuadrado ABCD. Aplicando giros de 90^0 con centro en B, se obtiene la *célula* cuadrada DEFG (fig. P4.1). Ahora, reiterando traslaciones de vectores $2\overrightarrow{AB}$ y $2\overrightarrow{AD}$, se genera el mosaico.

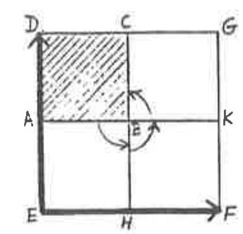


Fig. P4.1

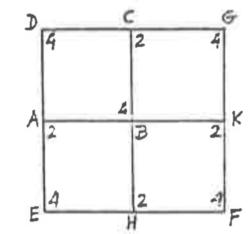


Fig. P4.2

isometrías del grupo:

- traslaciones de vectores del **Z**-módulo $\mathbb{Z}2\overrightarrow{AB} + \mathbb{Z}2\overrightarrow{AD}$
- giros de 90^0 con centros en B, D, E, F, G (fig. P4.2)
- giros de 180^0 con centros en C, A, H, K (puntos medios de lados)

En efecto:

$$g_{B,90}t_{2AB} = (s_{BD}s_{BC})(s_{BC}s_{AD}) = s_{BD}s_{AD} = g_{D,90}$$

$$g_{B,90}g_{D,90} = (s_{AB}s_{DB})(s_{DB}s_{AD}) = s_{AB}s_{AD} = g_{A,180}$$

célula reticular: la misma adoptada (cuadrado DEFG)

ejemplo: a partir del dominio fundamental de la fig. P4.3, se obtiene la simulación de un mosaicc de la Alhambra (fig. P4.4)

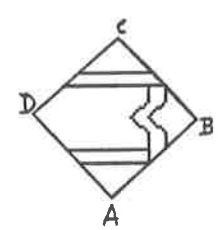


Fig. P4.3

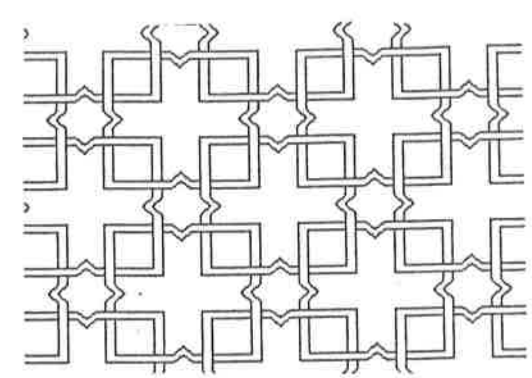


Fig. P4.4

GRUPO P4M

Adoptamos como *dominio fundamental* el triángulo ABD ($\hat{A}=90^0$;$\hat{B}=45^0$). Aplicando s_{BD} y luego giros de 90^0 con centro en B, resulta la *célula* cuadrada DEFG (fig. P4M.1). Reiterando traslaciones de vectores $2\vec{AD}$ y $2\vec{AB}$, se genera el mosaico.

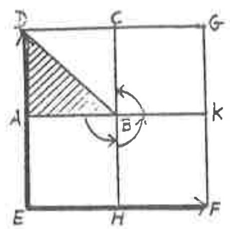


Fig. P4M.1

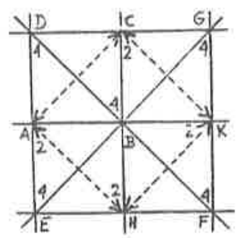


Fig. P4M.2

isometrías del grupo:

- traslaciones de vectores del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}2\vec{AB} + \mathbb{Z}2\vec{AD}$
- giros de 90^0 con centros en B, D, E, F, G (fig. P4M.2)
- giros de 180^0 con centros en C, A, H, K (puntos medios de lados)
- simetrías de ejes BD, AB, BE, HB, DE, EF, FG, GD
- simetrías con deslizamiento d_{AH} , d_{HA} , d_{HK} , d_{KC} , d_{CA},...

En efecto, además de lo indicado respecto de P4, se tiene:

$$g_{B,90}s_{BD} = (s_{AB}s_{BD})s_{BD} = s_{AB} \quad ; \quad g_{B,90}s_{AB} = s_{BE}$$

$$s_{BE}g_{A,180} = s_{BE}(s_{AC}s_{AH}) = (s_{BE}s_{AC})s_{AH} = t_{AH}s_{AH} = d_{AH}$$

célula reticular: la misma adoptada (cuadrado DEFG)

ejemplo: a partir del dominio fundamental de la fig. P4M.3, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. P4M.4)

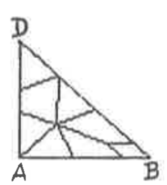


Fig. P4M.3

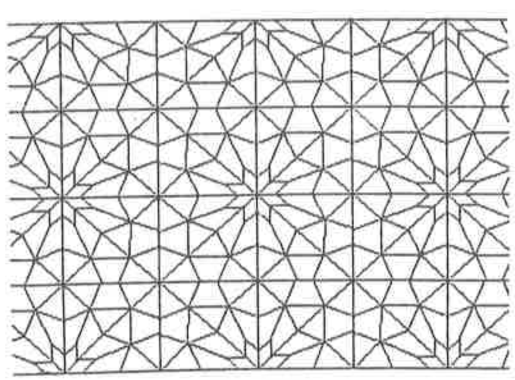


Fig. P4M.4

GRUPO P4G

Adoptamos como *dominio fundamental* el triángulo ABC ($\hat{A}=45^0$;$\hat{B}=90^0$). Aplicando s_{AC} y luego giros de 90^0 de centro B, resulta la *célula* DEFG (figura P4M.1). Reiterando traslaciones de vectores $2\vec{AB}$ y $2\vec{AD}$, se genera el mosaico.

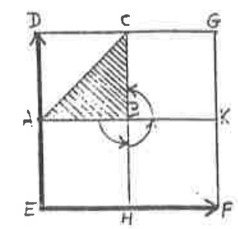


Fig. P4G.1

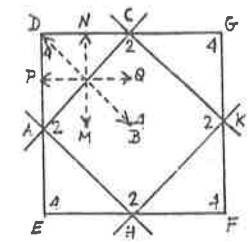


Fig. P4G.2

isometrías del grupo:

- traslaciones de vectores del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}2\vec{AB} + \mathbb{Z}2\vec{AD}$
- giros de 90^0 con centros en B, D, E, F, G (fig. P4G.2)
- giros de 180^0 con centros en C, A, H, K (puntos medios de lados)
- simetrías de ejes CA, AH, HK, KC
- simetrías con deslizamiento d_{BD} , d_{DB} ,...., d_{PQ} , d_{QP} , d_{MN} , d_{NM} ,.....
  (siendo M, Q, N, P puntos medios de los lados de ABCD)

En efecto, además de lo indicado respecto de P4, se tiene:

$$g_{A,180}s_{CA} = (s_{AH}s_{CA})s_{CA} = s_{AH} \quad ; \quad g_{H,180}s_{AH} = s_{HK}$$

$$s_{AC}g_{B,180} = s_{AC}(s_{BE}s_{BD}) = (s_{AC}s_{BE})s_{BD} = t_{BD}s_{BD} = d_{BD}$$

$$s_{AC}g_{D,90} = s_{AC}s_{BD}s_{AD} = s_{PQ}s_{MN}s_{AD} = s_{PQ}t_{PQ} = d_{PQ} \quad ; \quad g_{D,90}s_{AC} = d_{MN}$$

célula reticular: la misma adoptada (cuadrado DEFG)

ejemplo: a partir del dominio fundamental de la fig. P4G.3, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. P4G.4)

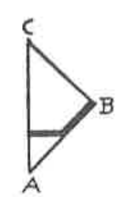


Fig. P4G.3

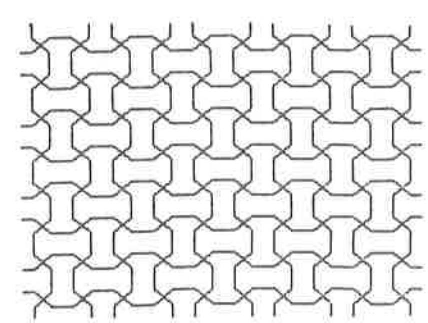


Fig. P4G.4

GRUPO P6

Adoptamos como *dominio fundamental* el triángulo equilátero OAB. Aplicando giros de 60^0 con centro en O, se obtiene la *célula* ABCDEF (fig.P6.1). Ahora, aplicando traslaciones de vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AC}$, se genera el mosaico.

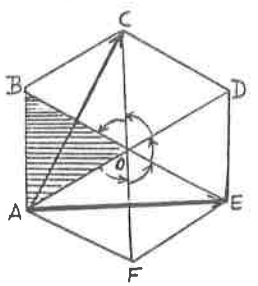


Fig. P6.1

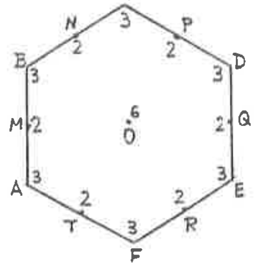


Fig. P6.2

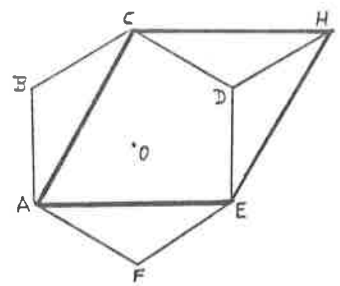


Fig. P6.3

isometrías del grupo:

- traslaciones definidas por vectores del Z-módulo $Z\overrightarrow{AE} + Z\overrightarrow{AC}$
- giros de 60^0 con centro en el punto O
- giros de 120^0 con centros en A, B, C, D, E, F (fig. P6.2)
- giros de 180^0 con centros en M, N, P, Q, R, T (puntos medios de lados)

En efecto:

$$(g_{O,60})^3 t_{AE} = g_{O,180} t_{AE} = g_{O,180}(g_{O,180} g_{M,180}) = g_{M,180}$$

$$(g_{O,60})^3 t_{AC} t_{EA} = (g_{O,60})^3 t_{EC} = g_{R,180} \quad ; \quad t_{AC} t_{EA} (g_{O,60})^3 = g_{N,180}$$

$$g_{M,180}(g_{O,60})^5 = g_{M,180} g_{O,-60} = (s_{MA} s_{OM})(s_{OM} s_{OA}) = s_{MA} s_{OA} = g_{A,120}$$

célula reticular: paralelogramo AEHC de la fig. P6.3 (como en P3)

ejemplo: a partir del dominio fundamental de la fig. P6.4, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. P6.5).

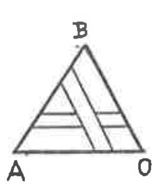


Fig. P6.4

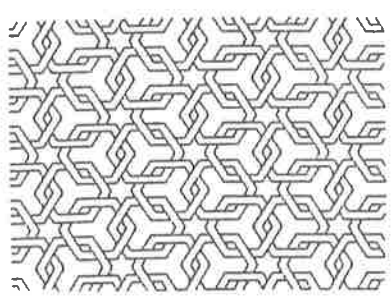


Fig. P6.5

GRUPO P6M

Adoptamos como *dominio fundamental* el triángulo OMA ($\hat{M}=90^0$; $\hat{O}=30^0$). Aplicando s_{OM} y luego giros de 60^0 de centro O, resulta la *célula* ABCDEF (fig. P6M.1). Mediante traslaciones de vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AC}$, se genera el mosaico.

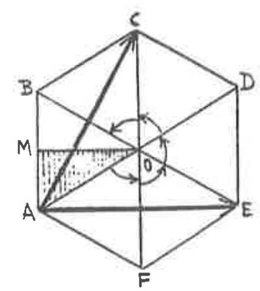


Fig. P6M.1

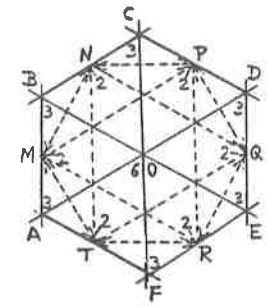


Fig. P6M.2

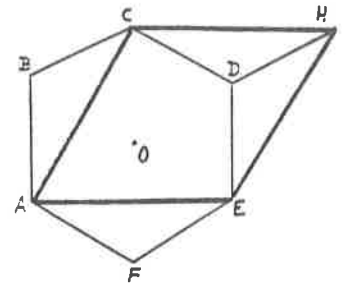


Fig. P6M.3

isometrías del grupo:

- traslaciones definidas por vectores del Z-módulo $Z\overrightarrow{AE} + Z\overrightarrow{AC}$
- giro de 60^0 con centro en el punto O
- giros de 120^0 con centros en A, B, C, D, E, F (fig. P6M.2)
- giros de 180^0 con centros en M, N, P, Q, R, T (puntos medios de lados)
- simetrías de ejes OA, OM, OB, ON, OC, OP, AB, BC, CD, DE, EF, FA
- simetrías con deslizamiento d_{MN}, d_{NM}, d_{NP}, d_{PQ} ,...., d_{MP}, d_{PR} ,...

En efecto, además de lo indicado respecto de P6, se tiene:

$$g_{O,60} s_{OM} = (s_{OA} s_{OM}) s_{OM} = s_{OA} \quad ; \quad s_{OM} g_{O,60} = s_{OB}$$

$$g_{A,120} s_{OA} = (s_{AB} s_{OA}) s_{OA} = s_{AB} \quad ; \quad s_{OA} g_{A,120} = s_{FA}$$

$$s_{OB} g_{M,180} = s_{OB}(s_{MR} s_{MN}) = (s_{OB} s_{MR}) s_{MN} = t_{MN} s_{MN} = d_{MN}$$

$$s_{ON} g_{M,180} = s_{ON}(s_{MT} s_{MP}) = (s_{ON} s_{MT}) s_{MP} = t_{MP} s_{MP} = d_{MP}$$

célula reticular: paralelogramo AEHC de la fig. P6M.3 (como en P3)

ejemplo: a partir del dominio fundamental de la fig. P6M.4, se obtiene la simulación de un mosaico de la Alhambra (fig. P6M.5)

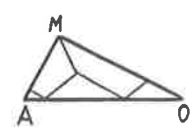


Fig. P6M.4

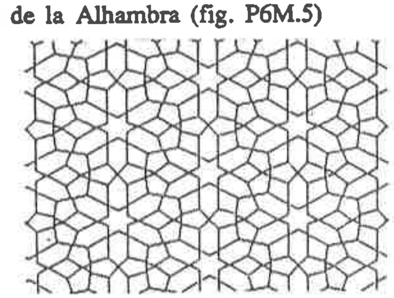


Fig. P6M.5

Hasta aquí nos hemos ocupado de la generación de mosaicos pertenecientes a cada uno de los diecisiete grupos de simetría del plano. Pero también tiene interés el problema inverso, consistente en determinar el grupo de simetría a que pertenece un mosaico ya construido.

Para ello basta observar los tipos de isometría que dejan al mosaico invariante: giros, simetrías axiales y simetrías deslizantes (no teniendo interés considerar traslaciones, por ser análogas para todos los grupos).

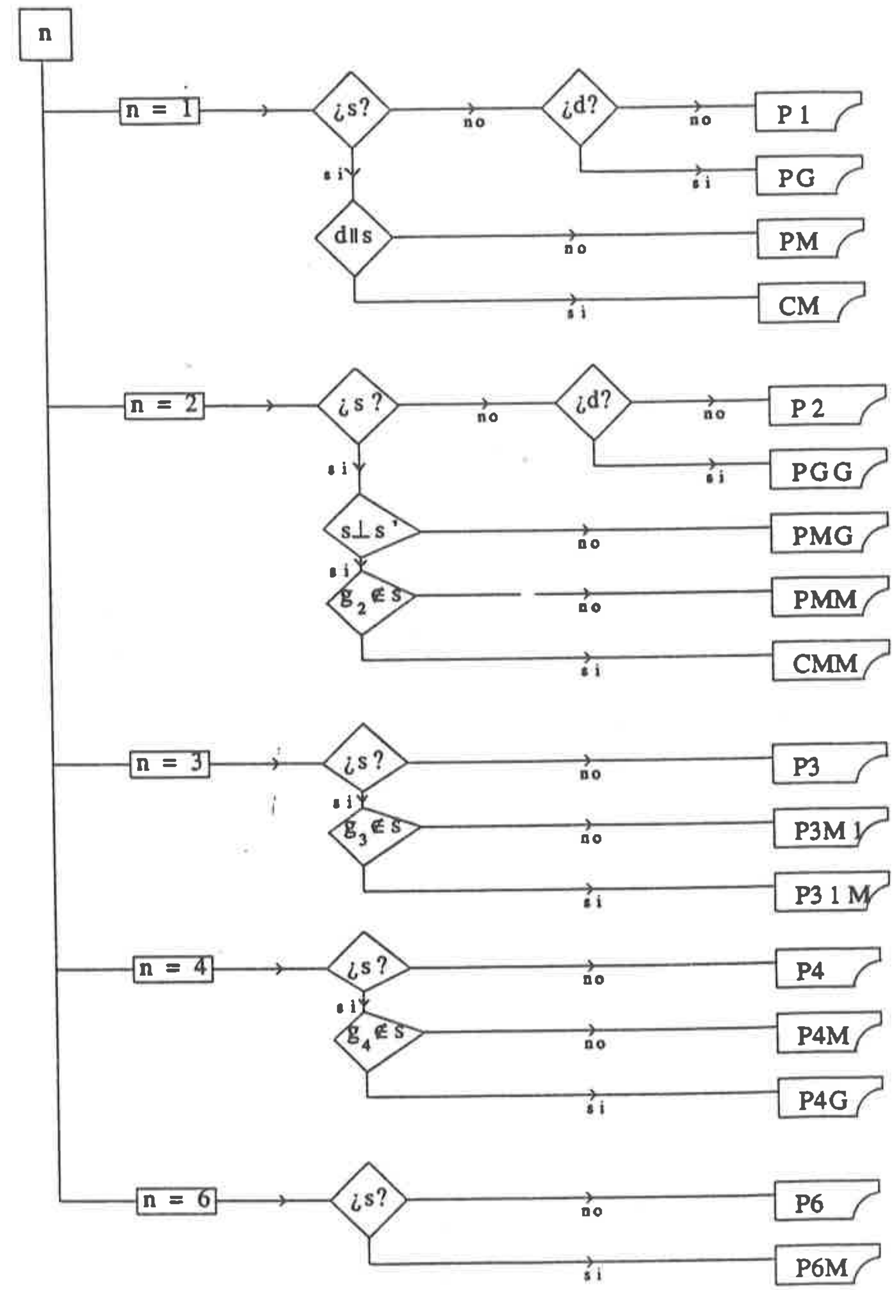
El algoritmo de clasificación más conocido es el debido a Rose y Stafford (puede verse, por ejemplo, en [A-T] o [Var]). En él se utiliza un sistema de clasificación que atiende sucesivamente a los siguientes criterios:

a) existencia de ejes de simetría axial
b) no paralelismo de ejes de simetría
c) existencia de ejes de simetría con deslizamiento
d) perpendicularidad de ejes de deslizamiento y ejes de simetría
e) paralelismo de ejes de deslizamiento y ejes de simetría
f) máximo orden de giros (2, 3, 4 ó 6), es decir, máximo número de superposiciones obtenidas al girar una vuelta completa alrededor de algún punto del mosaico
g) tipo de simetría (C_1 ,C_2 ,C_3 ,C_4 ,D_1 ,D_2 ,D_3) de una parte minimal del mosaico de forma triangular o rectangular, cuyos lados estén contenidos en ejes de simetría

El algoritmo de clasificación que se propone a continuación (basado en lo indicado en [Mar] y [Scha]) es más sencillo que el clásico de Rose y Stafford, siendo además, en bastantes casos, más cómodo de ejecutar (dependiendo del tipo de mosaico). El sistema de clasificación que utiliza atiende sucesivamente a los criterios siguientes (de acuerdo con la denominación precedente): g), a), c), b), junto con un nuevo criterio: existencia de centros de giro de orden máximo, por los que no pasen ejes de simetría. Para abreviar su escritura, haremos uso del siguiente simbolismo:

n = máximo orden de giros en que el mosaico sea invariante
¿s? - existencia de simetrías axiales (que dejen invariante al mosaico)
¿d? - existencia de simetrías con deslizamiento (que lo dejen invariante)
d∥s - existencia de ejes de deslizamiento paralelos y distintos a los de simetría
s⊥s' - existencia de ejes de simetría perpendiculares
$g_n \notin s$ - existencia de centros de giro de orden n (máximo) no pertenecientes a ejes de simetría

Algoritmo de clasificación:



Bibliografía

[A-D] **H.Abelson-A.DiSessa:** *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics;* M.I.T. 1981

[A-P-R] **C.Alsina-R.Pérez-C.Ruiz:** *Simetría Dinámica;* Síntesis, Madrid 1989

[A-T] **C.Alsina-E.Trillas:** *Lecciones de Algebra y Geometría;* Gustavo Gili, Barcelona 1984

[Arm] **M.A.Armstrong:** *Groups and Symmetry;* Springer-Verlag, N. York 1988

[Bar] **Barón de Taylor:** *La Alhambra;* Turpiana, Granada 1988

[Ber] **M.Berger:** *Geometry I;* Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg 1988

[Cox 1] **H.S.M.Coxeter:** *Fundamentos de Geometría;* Limusa-W., México 1971

[Cox 2] **H.S.M.Coxeter:** *Regular Polytopes;* Dover Pub., New York 1973

[Gra] **O.Grabar:** *La Alhambra;* Alianza Forma, Madrid 1978

[G-S] **B.Grünbaum-G.C.Shephard:** *Tilings and Patterns;* Freeman, N. Y. 1987

[H-C] **D.Hilbert-S.Cohn Vossen:** *Geometry and the Imagination;* Chelsea Pub., New York, 1952

[Mar] **G.E.Martin:** *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry;* Springer-Verlag, New York 1982

[Mon 1] **J.M.Montesinos:** *Caleidoscopios en la Alhambra;* Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profs. de Matemática, núm. 13, Madrid 1987

[Mon 2] **J.M.Montesinos:** *Classical Tessellations and Three-Manyfolds;* Springer Verlag, Berlín-Heidelberg 1987

[Mon 3] **J.M.Montesinos:** *Nudos, cristales y números: aspectos de la topología de baja dimensión;* Real Academia de Ciencias, Madrid 1990

[N-S] **V.V.Nikulin-I.R.Shafarevich:** *Geometries and Groups;* Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg 1987

[R-R 1] **Roanes Macías-Roanes Lozano:** *Simulación Logo del Grupo Equiforme;* Boletín de la Sociedad "Puig Adam", núm. 9, Madrid 1986

[R-R 2] **Roanes Macías-Roanes Lozano:** *Matemáticas con ordenador;* Síntesis, Madrid 1988

[Scha] **D.Schattschneider:** *The plane symmetry groups: their recognition and notation;* Am. Math. Monthly, vol. 85, núm. 6 (439-450) 1978

[Schw] **R.L.E.Schwarzenberger:** *Colour Symmetry;* Bull. London Math. Soc. 16 (209-240) 1984

[Var] **Varios:** *La Alhambra;* Epsilon. Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, Granada 1987

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN MADRID EN LA PRIMERA FASE DE LA XXVII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PROBLEMA Nº 1:

El número de este año, 1991, es un capicúa, producto de dos números primos, que también son capicúas. Desde este año hasta el 9999 ¿ Cuales serán los años cuyos números gozarán de esa misma propiedad ?

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 2:

En un plano, se ha definido un sistema de referencia cartesiano (ortonormal). Se considera un conjunto M de puntos (a,b) de ese plano (en número arbitrario), cuyas coordenadas a y b son números enteros cualesquiera, y el punto C de coordenadas $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Demostrar que ninguna circunferencia de centro en C pasa por dos de los puntos pertenecientes a M .

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 3:

Un triángulo equilátero LMN está limitado por las rectas l , m , n , cada una de las cuales divide en dos partes de áreas iguales a otro triángulo equilátero ABC . Suponiendo que el área del triángulo LMN sea igual a 30 y el área de ABC sea igual a 15000 , se pide calcular las áreas de cada una de las partes en que queda dividido ABC por las tres rectas citadas.

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 4:

Si para todo $x > 0$, la función f (no constante) es derivable y goza de la propiedad

$$f(x) = f(2x) \quad ,$$

se pide:

1. Probar que $f'(x)$ se anula en una infinidad de puntos.
2. Probar que si $b > a > 0$, $\int_a^b f(x)dx = 2\int_{a/2}^{b/2} f(x)dx$.
3. Poner un ejemplo de una función que cumpla las propiedades citadas al principio y hacer un esquema de su gráfica cartesiana.

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 5:

Se colorean los lados y las diagonales de un hexágono en rojo y azul. Demostrar que siempre hay al menos un triángulo que tiene por vértices tres puntos del hexágono y cuyos lados son del mismo color. Demostrar que hay siempre al menos dos triángulos monocromos (ambos rojos, ambos azules o uno rojo y otro azul). Demostrar que existen coloraciones de pentágonos que no tienen ningún triángulo monocromo.

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 6:

En el plano se considera un cuadrado ABCD, en que P y Q son los puntos medios de los lados BC y DA, respectivamente. Sea f la transformación del plano consistente en la simetría de eje la recta AB compuesta con la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$. Análogamente, sea g la transformación producto de la simetría de eje PQ por la traslación de vector $\overrightarrow{PQ}$. Razonar qué transformaciones son:

1) f^n , 2) $(g \circ f)^n$, 3) $g^n \circ f^n$,

según que n sea par o impar.

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 7:

Dado un cuadrilátero ABCD, trácense las dos diagonales AC y BD, y hállese el círculo inscrito en cada uno de los cuatro triángulos resultantes. Si los cuatro círculos son iguales, ¿ qué puede asegurarse del cuadrilátero ?

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 8:

Hallar un número de tres cifras abc, cuyo cuadrado sea de la forma bcdbc, donde letras iguales significan números iguales.

\- - - - - -

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

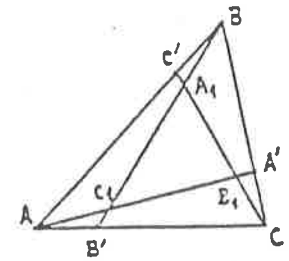
propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números										obs.
		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2 1984	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finlª)	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-85(Bogotá)	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2 1986	18	19	20	18	19	19	-	-	-	-	C
	Varios	-	-	-	-	-	-	17	17	11	17	C
10	China y Austª	20	15	21	20	15	{20 21}	20	23	21	-	C
11	OME-f1 1986	13	14	14	14	14	23	20	15/	20	12	C
	OMI-86(Varsoª)	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	C
12	OIM-87(Urug.)	16	14	14	17	15	17	-	-	-	-	C
	OME-f1-Extremª	-	-	-	-	-	-	15	15	15	21	C
13	OME-f2 1987	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1 1987	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2 1988	25	23	23	25	23	23	-	-	-	-	C
18	OIM-Perú 1988	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	C
19	OMI-88(Australia)	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	C
20	OME-f1 (1988)	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2 (1989)/	24	27	24	27	27	24 /27	25	27	26		
	OIM-89 (Cuba)	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	
22	OMI-89 (RFA)/	XX	XX	XX	XX	XX	XX / XX	XX	XX	XX		
	oposiciones	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	
23	oposiciones	27	27	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
24	OME-f1 (1990)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
25	OME-f2/1(1990)	XX	XX	XX	XX	XX	XX / XX	XX	XX	XX		
26	OMI-90 (China)	XX	XX	XX	XX	XX	XX / XX	XX	XX	XX		
	OIM-90 (Vall.)	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OME = Olimpiada Matemática Española - fase 1ª o 2ª.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 2 (Boletín nº 21)

Sobre los lados AB, EC y CA de un triángulo ABC se toman respectivamente los puntos C', A' y B', de tal modo que

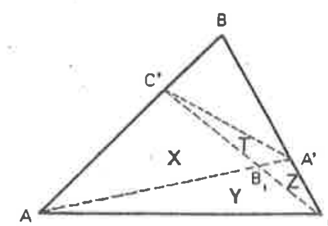


$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = r$$

Las rectas AA', BB' y CC' determinan un triángulo $A_1B_1C_1$. Determinar el área de este triángulo, si se conocen r y el área S de ABC.

Solución

Se tiene que $C'B = c/(r+1)$, $A'C = a/(r+1)$, $B'A = b/(r+1)$, $AC' = rc/(r+1)$, $BA' = ra/(r+1)$. Sean los triángulos de la figura de áreas X, Y, Z y T. Recordando que las áreas de dos triángulos, que tienen, respectivamente igual (o suplementario) un ángulo, son proporcionales al producto de los lados que forman dicho ángulo, se tiene



$$\frac{X+Y}{S} = \frac{AC' \cdot AC}{AB \cdot AC} = \frac{rc(r+1)}{c} = \frac{r}{r+1}$$

$$\frac{Y+Z}{S} = \frac{CA \cdot CA'}{CA \cdot CB} = \frac{a/(r+1)}{a} = \frac{1}{r+1}$$

$$T + Z = \frac{S}{r+1} - S_{up}\ A'C'B = \frac{S}{r+1} - \frac{rS}{(r+1)^2} = \frac{S}{(r+1)^2}$$

$$\frac{X}{T} = \frac{B_1C' \cdot B_1A}{B_1C' \cdot B_1A'} = \frac{B_1A \,.\, B_1C}{B_1A' \,.\, B_1C} = \frac{Y}{Z}$$

Resolviendo el sistema $Y = \frac{Sr}{r^2+r+1}$, que por ser independiente de los lados indica que $S_{up}\ A_1BC = S_{up}\ C_1AB = Y_c$.

Luego,

$$S_{up}\ A_1B_1C_1 = S - 3Y = S\left[1 - \frac{3r}{1+r+r^2}\right] = \frac{(r-1)^2}{1+r+r^2}\ S.$$

José V. García Sestafe (Madrid).

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Problema 4 (Boletín nª 21)

Probar que tanto el número 1989 como todas sus potencias, 1989^n, pueden escribirse como suma de dos cuadrados de números naturales, al menos de dos maneras diferentes.

Solución

Como $1989 = 3^2.13.17$ y $13.17 = 221 = 5^2 + 14^2 = 10^2 + 11^2$, se tiene $1989 = 15^2 + 42^2 = 30^2 + 33^2$, luego 1989 se puede descomponer en suma de dos cuadrados, de dos formas distintas.

Por otra parte se tiene que el producto de dos números que son suma de dos cuadrados es también un número que se puede expresar como suma de dos cuadrados, de dos formas distintas; en efecto

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = a^2c^2 + a^2d^2 +$$

$$+b^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd - 2abcd = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 =$$

$$= (ac - bd)^2 - (ad + bc)^2$$

Teniendo en cuenta este resultado, como 1989 es suma de dos cuadrados, 1989 · 1989 también se descompondrá en suma de dos cuadrados, al menos de dos formas

$$(42.33 + 15.30)^2 + (42.30 - 33.15)^2 = 3370896 + 585225 = 1989^2$$

$$(42.33 - 15.30)^2 + (42.30 + 33.15)^2 = 3080025 + 876096 = 1989^2$$

Análogamente $1989^3 = 1989^2 \cdot 1989$, o sea es el producto de dos números que son suma de dos cuadrados, luego 1989^3 al menos se podrá descomponer en suma de dos cuadrados de dos formas distintas.

Procediendo por inducción, cualquier potencia de 1989 se descompondrá en suma de dos cuadrados, por lo menos de dos formas distintas.

Obsérvese que $1989^2 = 1989 \cdot 1989^{n-1} = 1989^2 \cdot 1989^{n-2} = 1989^3 \cdot 1989^{n-3} = \ldots$

y de cada descomposición factorial se obtienen dos descomposiciones en sumandos cuadrados perfectos, salvo si los dos factores son iguales.

José V. García Sestafe (Madrid).

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Problema 5 (Boletín nª 21)

Sea D el conjunto de los números complejos que pueden escribirse en la forma $a + b\sqrt{-13}$, donde a y b son enteros. El número $14 = 14 + 0\sqrt{-13}$ puede expresarse como producto de otros dos números de D así: $14 = 2 \cdot 7$. Expresar 14 como producto de números pertenecientes a D, de todos los modos posibles.

Solución

Sean $z_1 = a + i\sqrt{13}\,b$ y $z_2 = c + i\sqrt{13}\,d$, tales que $z_1 z_2 = 14$ y como a, b, c, d $\in$ Z, $|z_1| \le 14$ y $|z_2| \le 14$, o sea $a^2 + 13b^2 \le 196$ y $c^2 + 13d^2 \le 196$. Por tanto b y d sólo pueden valer 0, ±1, ±2 y ±3. Por otra parte, $ac - 13bd = 14$ y $ad + bc = 0$, que para b = 0 proporciona ac = 14, ad = 0, de donde, como $a \ne 0$, d = 0.

$a = \pm 14,\ c = \pm 1;\ a = \pm 7,\ c = \pm 2;\ a = \pm 2,\ c = \pm 7;\ a = \pm 1,\ c = \pm 14$

Para b =1: ac − 13 d = 14, ad + c = 0, de donde

$$d = -1,\ a = \pm 1,\ c = \mp 1$$

y para b = −1

$$d = 1\ ,\ a = \pm 1,\ c = \mp 1$$

Para b = ±2 y b = ±3, no existen soluciones, luego las únicas descomposiciones posibles son

$(\pm 14 + 0.i\sqrt{13}).(\pm 1 + 0.i\sqrt{13});\ (\pm 7 + 0.i\sqrt{13}).(2 + 0.i\sqrt{13})$

$(\pm 1 + i\sqrt{13})\ (\mp 1 - i\sqrt{13})$

José V. García Sestafe (Madrid).

- ▨ - ▨ - ▨ -

Problema 7 (Boletín nº 21)

Determinar todas las ternas de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$X + Y - Z = -1$$
$$X^2 - Y^2 + Z^2 = 1$$
$$-X^3 + Y^3 + Z^3 = -1$$

Solución

Haciendo x − z = t, se tiene

$x + y - z = -1 \rightarrow t + y = -1$

$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \rightarrow (x-z)^2 + 2xz - y^2 = 1;\ t^2 - y^2 + 2p = 1$

$-x^3 + y^3 + z^3 = -1 \rightarrow -(x-z)^3 - 3xz(x-z) + y^3 = -1;\ -t^3 + y^3 - 3pt = -1$

Como $y = -(1+t)$, sustituyendo en la segunda $(t+y)(t-y)+2p=1;$ $-1.(1+2t)+2p = 1;$ $t = p-1$, $y = -p$ y sustituyendo en la tercera

$$-(p-1)^3 - p^3 - 3p\,(p-1) = -1 \rightarrow p^3 = 1$$

que sólo admite la solución real p = 1, de donde

$y = -1,\ t = 0$ y como $x - z = t = 0,\ x = z,$

luego

$$xz = p,\quad x^2 = 1,\quad x = \pm 1,\ z = \pm 1$$

Las únicas ternas solución son:

$x = 1,\ y = -1,\ z = 1$, $x = -1,\ y = -1,\ z = -1$

José V. García Sestafe (Madrid).

- ▨ - ▨ - ▨ -

Problema 9 (Boletín 21)

Sean a, b, c, las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que:

$$\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{16}$$

Solución

La desigualdad se cumple, evidentemente, para un triángulo isósceles, p. ej., si $b = c$

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-b}{b+b} + \frac{b-a}{a+b} = 0 < 1/16$$

Sea un triángulo escaleno, tal que $a > b > c$; tomando como unidad b, se puede escribir, $a = 1 + x$, $c = 1 - y$, con $x, y > 0$; como $a < b + c$, $1 + x < 1 + 1 - y \rightarrow x + y < 1$. El problema se reduce a obtener el máximo absoluto de

$$f(x,y) = \frac{x}{2+x} + \frac{x}{2-y} - \frac{x+y}{2+x-y}$$

en el cerrado D: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

Los extremos relativos de $f(x,y)$ se obtienen de

$$f'_x = 2\left[\frac{1}{(2+x)^2} - \frac{1-y}{(2+x-y)^2}\right] = 0 \;; \quad f'_y = 2\left[\frac{1}{(2-y)^2} - \frac{1+x}{(2+x-y)^2}\right] = 0$$

de donde resulta $(1-y).(2+x)^2 = (1+x).(2-y)^2 + (x-y).(x+y) = xy(x+y)$; simplificando por $x+y$, (con lo que se pierde $x+y = 0$, que en D sólo proporciona $x = y = 0$), resulta $y = x/(1+x)$, que sustituida en $f'_x = 0$, conduce a $x^2(x^2 + 3x + 3) = 0$, que aparte de $x = 0$ sólo tiene raíces complejas.

En el contorno, para $x = 0$, $f(0, y) = y/(2-y) - y/(2-y) \equiv 0$ y para $y = 0$ $f(x,0) \equiv 0$; a lo largo de $x+y = 1$, $y = 1-x$, se obtiene

$$Q(x) = \frac{x}{2+x} + \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{1+2x}$$

de donde $Q'(x) = 2\left[1/2+x)^2 - 1/(1+x)^2 + 1/(1+2x)^2\right] = 0$ que conduce a $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$, ecuación recíproca que en $[0, 1]$ sólo admite la solución correspondiente a un máximo para $x = (1 + \sqrt{10} - \sqrt{7+2\sqrt{10}})/2 \simeq 0,2560$ y como $Q(0,2560) =$

$= 0,0444\ldots$ $0,0625 = 1/6$ el valor que toma $f(x,y)$ en cualquier punto del abierto $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$ es menor 0 a lo sumo igual que el máximo absoluto de $f(x,y)$ en el cerrado D, queda probada la cuestión propuesta.

José V. García Sestafe (Madrid).

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Problema 12 (Boletín nª 21)

Mostrar que hay una infinidad de pares de números naturales que satisfacen la ecuación

$$2x^2 - 3x - 3y^2 - y + 1 = 0$$

Solución

Tomando como nuevo origen el punto (1,0) la ecuación se escribe $2x^2 + x = 3y^2 + y$; haciendo $x = y+a$ resulta $y^2 - 4ay - (2a^2 + a) = 0$, que admite la raiz positiva

$$y = 2a + \sqrt{6a^2 + a}$$

Para que y sea un número natural $6a^2 + a = k^2$ o bien $a(6a+1) = k^2$ y como a y $6a + 1$ son primos entre sí se debe cumplir

$$a = b^2, \quad 6a + 1 = c^2, \quad \text{o sea} \quad 6b^2 + 1 = c^2$$

que se puede escribir

$$c^2 - 6b^2 = 1 \qquad [I]$$

Supongamos que la ecuación [I] admite dos soluciones c_1, b_1 y c_2, b_2; entonces

$$c_1^2 - 6b_1^2 = 1 \quad y \quad c_2^2 - 6b_2^2 = 1$$

y multiplicando miembro a miembro

$$c_1^2\, c_2^2 - 6c_1^2\, b_2^2 - 6b_1^2\, c_2^2 + 36b_1^2\, b_2^2 = 1$$

que se puede escribir

$$(c_1^2\, c_2^2 + 12b_1\, b_2\, c_1\, c_2 + 36b_1^2\, b_2^2) - (6c_1^2\, b_2^2 + 12\, b_1\, b_2\, c_1\, c_2 + + 6b_1^2\, c_2^2) = 1$$

o bien

$$(c_1\, c_2 + 6b_1\, b_2)^2 - 6(c_1\, b_2 + b_1\, c_2)^2 = 1$$

luego

$$c_3 = c_1\, c_2 + 6b_1\, b_2 \quad y \quad b_3 = c_1\, b_2 + b_1\, c_2$$

son una nueva solución.

Obsérvese que basta la existencia de una única solución (distinta de $c = 1$ y $b = 0$) para, a partir de ella, obtener nuevas soluciones, pues haciendo $c_1 = c_2$, $b_1 = b_2$ se obtiene

$$c_3 = c_2^2 + 6b_2^2 \quad y \quad b_3 = 2c_2\, b_2$$

y como la ecuación [I] admite, además de la solución $c_1 = 1$, $b_1 = 0$, la solución $c_2 = 5$, $b_2 = 2$ se obtiene

$$c_3 = 49\,, \quad b_3 = 20$$

Reiterando el proceso, a partir de la solución c_n, b_n se obtiene

$$c_{n+1} = c_n^2 + 6b_n^2 \quad y \quad b_{n+1} = 2c_n\, b_n$$

esto es, existe una infinidad de números naturales que verifican la ecuación [I].

Resuelta esta ecuación, como era

$$y = 2a + \sqrt{a(6a+1)} = 2b^2 + \sqrt{b^2\, c^2} = 2b^2 + bc$$

para cada par de valores de b y c, se obtiene un valor para y, y un valor para $x = y + b^2 + 1$ con lo que queda demostrada la existencia de una infinidad de pares de números naturales que verifican la ecuación dada.

NOTA.- La ecuación [I] es del tipo de ecuación de Pell, resuelta por el matemático hindú Baskara en el siglo XII. El algoritmo de las fracciones continuas permite una elegante solución. A partir de $\sqrt{6} = |2, \overline{2, 4}|$ se obtienen las sucesivas reducidas

$$\frac{2}{1};\ \frac{5}{2};\ \frac{22}{9};\ \frac{49}{20};\ \frac{218}{89};\ \frac{485}{198};\ \frac{2158}{881};\ \frac{4801}{1960};\ \ldots$$

Son soluciones de [I]

$c = 5$, $b = 2$; $c = 49$, $b = 20$; $c = 485$, $b = 198$; $c = 4801$, $b = 1960$

y de aquí

$x_1 = 23$, $y_1 = 18$; $x_2 = 2181$, $y_2 = 1780$; $x_3 = 213643$, $y_3 = 174438$; etc.

José V. García Sestafe (Madrid).

Otra solución de Miguel A. Cabezón Ochoa

- ▪ - ▪ - ▪ -

Problema 1º (Boletín nº 23)

Sean a y b enteros positivos. Demostrar que $\sqrt{2}$ siempre está comprendido entre las dos fracciones

$$a/b \quad y \quad (a+2b)/(a+b)$$

¿Cuál de las dos fracciones está más próxima a $\sqrt{2}$?

Solución

a, b enteros positivos

$$\frac{a}{b} < \sqrt{2} \iff a < \sqrt{2}\, b \iff \underline{(\sqrt{2}\, b - a) > 0}$$

Por otra parte,

$$\frac{a+2b}{a+b} - \sqrt{2} > 0 \iff a+2b - \sqrt{2}\, a - \sqrt{2}\, b > 0 \iff \sqrt{2}(\sqrt{2}b-a) -$$

$$- (\sqrt{2}\, b - a) = (\sqrt{2}-1)\, (\sqrt{2}\, b-a) > 0$$

Como $(\sqrt{2}-1) > 0$ queda demostrado la primera parte.

Supongamos $\frac{a}{b} < \sqrt{2} < \frac{a+2b}{a+b}$

$$\frac{a+2b}{a+b} - \sqrt{2} = \frac{a+2b - \sqrt{2}\, a - \sqrt{2}\, b}{a+b} = \frac{(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}\, b-a)}{a+b}$$

$$\sqrt{2} - \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}\, b - a}{b}$$

Por otra parte $(\sqrt{2} - 1).(\sqrt{2}\, b-a) < (\sqrt{2}\, b -a)$ y $a+b > b$.

Se tiene que $\frac{(\sqrt{2}-1)\ (\sqrt{2}\, b-a)}{a+b} < \frac{\sqrt{2}\, b-a}{b}$, o sea que $\frac{a+2b}{a+b}$ está más cerca de $\sqrt{2}$ que $\frac{a}{b}$.

Si $\frac{a}{b} > \sqrt{2} > \frac{a+2b}{a+b}$

$$0 < \sqrt{2} - \frac{a+2b}{a+b} = \frac{\sqrt{2}\, a + \sqrt{2}\, b - a - 2b}{a+b} = \frac{(\sqrt{2}-1)\ (a - \sqrt{2}\, b)}{a+b}$$

$$0 < \frac{a}{b} - \sqrt{2} = \frac{a - \sqrt{2}\, b}{b}$$

y

$$(\sqrt{2}-1)\ (a - \sqrt{2}\, b) < (a - \sqrt{2}\, b)$$

$$a + b > b$$

Se tiene la misma conclusión anterior.

José Miguel Celorrio Laseca (Soria).

Otras soluciones de M.E. Serrano Caballero (Segovia), J. P. Sánchez Mielgo (Segovia) y J.V. García Sestafe (Madrid).

Problema 2 (Boletín nº 23)

Sea X un conjunto finito y llamemos

$$k(X) = \sum_{B \in P(X)} (-1)^{\text{card } B}$$

siendo P(X) el conjunto de las partes de X.

Demostrar que $k(X) = 1$ si $X = \emptyset$ y $k(X) = 0$ si $x \neq \emptyset$.

NOTA: En el enunciado publicado se omitió "y k(x) = 0".

Solución

i) Si $X = \emptyset$, es evidente que $k(X) = (-1)^0 = 1$.

ii) Si $X \neq 0$, sea card X=n

Como el número de conjuntos con i (i = 0,..., n) elementos es C_n^i, se tiene

$$k(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \quad C_n^i = (1 - 1)^n = 0$$

M.E. Serrano Caballero (Segovia)

Otras soluciones de: J.M. Celorrio Laseca (Soria)
J.P. Sánchez Mielgo (Segovia) y
J.V. García Sestafe (Madrid)

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -