第31届国际数学奥林匹克
中国北京

BOLETIN Nº 26

OCTUBRE 1990

VIII Concurso

SOCIEDAD CASTELLANA PUIG ADAM DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Contiene INDICE de los números 1 al 25

B O L E T Í N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matematicas

Octubre de 1990

nº 26 (1990-91)

- Toda la correspondencia para la Sociedad debera dirigirse al

Apartado nº 9479

28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

- La portada de este número presenta, en caracteres chinos, el título de la "31ª Olimpiada Matemática Internacional", cuya crónica incluimos aquí.

INDICE Pág.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: *José Vicente García Sestafe*

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez	(Madrid)
Amador Domingo Escribano	(Toledo)
Salvador Herrero Pallardo	(Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tudurí	(Cuenca)
Angel María Alcalá del Olmo Pérez	(Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés	(Segovia)

Secretaria: *Carmen García-Miguel Fernández*

Vicesecretario *Enrique Rubiales Camino*

Tesorero: *Alberto Aizpún López*

Bibliotecario: *Jesús Begoña Aina*

- - - - - -

VIII CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

El *VIII Concurso de Resolución de Problemas* convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras para alumnos de B.U.P. o F.P. correspondiente a 1990, se celebró en la mañana del sábado 23 de Junio, en los locales que amablemente nos cedió, como en ocasiones anteriores, el Instituto "Beatriz Galindo".

Esta vez han participado 33 alumnos de primer curso de B.U.P., 35 de segundo y 43 de tercero (111 en total); esta concurrencia, sin que se pueda calificar de baja, ha sido la menor registrada hasta ahora en nuestros Concursos, sin que podamos señalar exactamente las causas de esta disminución (en el año 1987 se alcanzó una participación de 187 aspirantes).

Lamentaríamos que esta reducción estuviese causada por una pérdida de popularidad de este tipo de certámenes. Si fuese así, deberíamos luchar por evitarla, aprovechando muy especialemnte la oportunidad de que la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas se celebre este año en España. Debemos conseguir que los medios de comunicación de masas den a estos acontecimientos el realce que merecen.

A los alumnos de cada curso se les propusieron cuatro problemas, para resolverlos en dos tandas de hora y media. Damos los enunciados de esos problemas al final de esta crónica.

Para que nuestros lectores puedan juzgar sobre la dificultad que ha ofrecido cada uno de los problemas a los concursantes, damos, tras cada enunciado, la puntuación media obtenida entre todos los participantes y la puntuación media obtenida por los cinco premiados.

La entrega de premios y diplomas se realizó a las siete de la tarde del mismo día, en el salón de actos del Instituto "Beatriz Galindo".

Nuestro Presidente, Sr. García Sestafe, pronunció unas palabras de aliento a los partipantes y felicitación a los ganadores, haciendo público el agradecimiento de la Sociedad al Instituto "Beatriz Galindo", al Colegio Oficial de Doctores y Licenciados, y a los que desinteresadamente han contribuido a la organización del acto y participado en el Jurado.

También hizo público el agradecimiento de la Sociedad a la firma "Coca-Cola" de España, que ha costeado la adquisición de los valiosos premios entregados a los ganadores. Consistían éstos en lotes de libros escogidos y varias calculadoras, algunas de ellas con salida gráfica incluida. El Colegio de Doctores y Licenciados ha completado estos lotes con algún obsequio adicional.

Damos a continuación la lista de alumnos premiados, con indicación de la puntuación alcanzada y el centro de procedencia; el máximo de puntos que podían obtenerse era de 40, diez por cada problema totalmente resuelto.

Los cinco ganadores de <u>PRIMER CURSO</u> han sido los siguientes:

1º - ALVARO GÓMEZ-REY ROMERO, del I. B. *"Gran Capitan"* de Madrid ... ... 28 puntos

2º - **DANIEL NAVARRO OLIVENCIA**, del Colegio Agustiniano de Madrid ... ... 19 puntos

3º - **GEMMA ESCARBAJAL MARTÍNEZ**, del Colegio JOYFE de Madrid ... ... 18 puntos

4º - **JUAN ENRIQUE PRADA SIMÓN**, del Colegio JOYFE de Madrid ... ... 16 puntos

5º - **JUAN FRANCISCO NEBRERA PORRAS**, del Colegio Agustiniano de Madrid ... ... 15 puntos

Han alcanzado puntuaciones próximas a éstas: **Justo Javier López Sarrión**, del Cº Acadª CEDES de Albacete (14 p.), **Joaquín Arias Herrero**, del Colº Berriz de Las Rozas (12 p.), **Carolina Martínez Zarzuela**, del I.B. "Marqués de Lozoya" de Cuellar (Segovia) (11 p.) y **Angel Sanz Fernández**, del I.B. "Lope de Vega" de Madrid (11 p.).

Los cinco ganadores de <u>SEGUNDO CURSO</u> han sido los siguientes:

1º - **DAVID GIL FRESNILLO**, del I. B. *"Marqués de Lozoya"* de CUELLAR (Segovia) ... 26 puntos

2º - **CÉSAR ALONSO GALLEGO**, del I. B. *"María Moliner"* de COSLADA (Madrid) (*)... 22 puntos

3º - **JORGE NEMESIO CASILLAS JORRÍN**, del Colegio S. E. K. - San Ildefonso de Madrid. 21 puntos

4º - **JOSÉ MIGUEL ATIENZA RIERA**, del Colegio JOYFE de Madrid ... ... 19 puntos

5º - **FERNANDO ALEMÁN RODA**, del I. B. *"Cervantes"* de Madrid . ... 18 puntos

Han obtenido puntuaciones próximas a las de este último: **Francisco J. Avellano Fernández**, del Colegio JOYFE (17 p.), **Luis M. Pozas Rodríguez**, del Colegio Agustiniano (14 p.) y **Antonio Segura Fontcuberta**, del Colº Berriz de Las Rozas. (10 p.). (*) Debemos señalar que C. ALONSO **GALLEGO** obtuvo el primer puesto como alumno de 1º el año **pasado**.

Los cinco ganadores de TERCER CURSO han sido los **siguientes**:

1º - IGNACIO DE URIARTE DE TUERO, del Colegio de Nª Sª del Recuerdo de Madrid .. 28 puntos

2º - ANDRÉS SERRANO VELASCO, del Colegio JOYFE de Madrid .. .. 24 puntos

3º - Mª ELENA BASCONES FERNANDEZ DE VELASCO, I.B. *"Ramiro de Maeztu"* de Madrid (*). 22 puntos

4º - JORGE RAMÍREZ GARCÍA, del I. B. *"Ramiro de Maeztu"* de Madrid .. .. 21 puntos

5º - FERNANDO JESÚS FERNANDEZ RODRIGUEZ, del Colegio *"Obispo Perelló"* de Madrid 20 puntos

Puntuaciones próximas a éstas han sido alcanzadas por **Juan L. Villalar González**, del colº de Nª Sª del Recuerdo (19 p.), **Damián Córdoba Díaz**, del I.B. "Avda. de los Toreros" (18 p.), **Bruno Fernández Ruiz** (*), del I. B. Complutense de Alcalá de Henares (17 p.) y **Miguel Angel Vicente Puente**, del I. B. del Barrio de la Elipa (17 p.). (*) Debemos señalar que Mª ELENA BASCONES ocupó el primer lugar, como alumna de 1º, en nuestro concurso de 1988, y Bruno Fernandez Ruiz el 5º como alumno de 2º en 1989

Debemos felicitar a los profesores de algunos centros cuyos alumnos vienen apareciendo sistemáticamente entre los ganadores de nuestros concursos; este año cabe destacar el caso del Colegio JOYFE, ya que sus alumnos han conseguido cuatro de los quince premios otorgados, superando así los ya brillantes resultados de años anteriores, pero también otros Colegios e Institutos vienen siendo citados en nuestras listas de ganadores, lo que revela que su profesorado lleva a cabo una encomiable labor de preparación de sus alumnos escogidos.

Esta Sociedad felicita cordialmente a los ganadores y a los centros de enseñanza que los han presentado y agradece la participación entusiasta, en un caluroso sábado de Junio, de todos los concursantes.

- - - - -

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en el concurso.

PRIMER CURSO

1º — Calcular cuál de los números X o Y es mayor:

$$X = 1990.(1 + 2 + 3 + \ldots + 1991) ,$$
$$Y = 1991.(1 + 2 + 3 + \ldots + 1990) .$$

Razonar la respuesta.

- - -

Puntuación media obtenida para los 33 concursantes: 3.5
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 5.2

- - - - - - -

2º — Se da un cuadrado A,B,C,D, de centro O y lado *1* . M es el punto medio del lado BC . Se pide:

1 - Calcular el area del triángulo AMO .

2 - Hallar el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y O .

- - -

Puntuación media obtenida para los 33 concursantes: 3.2
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 9.4

- - - - - - -

3º — Demostrar que si a_1 , a_2 , ... , a_n , son los n primeros términos de una progresión aritmetica, se verifica:

$$\frac{1}{a_1.a_2}+\frac{1}{a_2.a_3}+\frac{1}{a_3.a_4}+\quad\cdots\quad+\frac{1}{a_{n-1}.a_n}=\frac{n-1}{a_1.a_n}$$

- - -

Puntuación media obtenida para los 33 concursantes: 0.7
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 3.4

- - - - - - -

4º — Sea C_1 un punto del lado AB de un triángulo A,B,C. Sea A_1 el punto de intersección de la prolongación de BC con la paralela por A a CC_1 , y B_1 la intersección de la prolongación de AC con la paralela por B a CC_1 .
Demostrar:

$$\frac{1}{\overline{AA_1}}+\frac{1}{\overline{BB_1}}=\frac{1}{\overline{CC_1}}$$

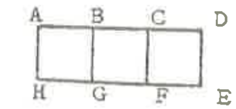
- - -

Puntuación media obtenida para los 33 concursantes: 0.8
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 1.2

- - - - - - -

SEGUNDO CURSO

1º — Sean los cuadrados de la figura adjunta. Calcular la suma de angulos
ACH + ADH .



- - -

Puntuación media obtenida para los 35 concursantes: 1.9
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 4.0

- - - - - - -

2º — Si n es un número natural y K es el número de divisores primos, positivos, de n , y distintos, demostrar la desigualdad: $\log n \geqslant K.\log 2$.

- - -

Puntuación media obtenida para los 35 concursantes: 2.0
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 6.0

- - - - - - -

3º — Escribir la expresión $(a^2 + a + 1)^2$ como suma de tres cuadrados.
Como aplicación del caso anterior, escribir la expresión $(a^2 + b^2 + a + b + 2ab + 1)^2$ como suma de tres cuadrados.

- - -

Puntuación media obtenida para los 35 concursantes: 1.9
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 7.2

- - - - - - -

4º — La fracción $F = \dfrac{6n+2}{10n+9}$, se puede simplificar para algunos valores de n . En dichos casos, probar que el numerador y denominador de dicha fracción son múltiplos de 17.

- - -

Puntuación media obtenida para los 35 concursantes: 0.9
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 4.0

- - - - - - -

TERCER CURSO

1º — Las funciones $f_1(x) = \text{sen } x + \text{sen } 2x$,

$$f_2(x) = \frac{\text{sen } 2x \cdot \tan 3x}{\cos 4x}$$

¿ son periódicas ? En caso afirmativo, calcular su periodo mínimo.

- - -

Puntuación media obtenida para los 43 concursantes: 3.4
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 9.6

- - - - - - - -

2º — En el triángulo A,B,C , el ángulo A es agudo. Desde A parten mediana, bisectriz y altura. Calcular cual es mayor de los dos ángulos siguientes: ¿ el formado por la mediana y bisectriz o el formado por la bisectriz y la altura ?

- - -

Puntuación media obtenida para los 43 concursantes: 1.5
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 2.4

- - - - - - - -

3º — Hallar un cuadrado perfecto que tenga, en base 10, cuatro cifras y tal que el número formado por las dos primeras cifras sea una unidad mayor que el formado por las dos últimas.

- - -

Puntuación media obtenida para los 43 concursantes: 3.2
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 6.4

- - - - - - - -

4º — Demostrar que el área del triángulo que tiene los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, es igual a:

$$S = 2.R^2.\text{sen } \hat{A}.\text{sen } \hat{B}.\text{sen } \hat{C} ,$$

siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

- - -

Puntuación media obtenida para los 43 concursantes: 2.3
Puntuación media obtenida por los cinco ganadores: 4.4

XXXI OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL BEIJING — CHINA — 1990

La *XXXI Olimpiada Matematica Internacional* tuvo lugar los dias 12 y 13 de Julio de 1990 en Pekin. Nuevamente se batió el record de participación, ya que este año concurrieron representantes de 51 paises.

Según la opinión de muchos delegados, ésta ha sido la Olimpiada más difícil de todas las que se ha celebrado hasta ahora, a pesar de lo cual, 4 estudiantes (dos chinos, un francés y un ruso) consiguieron el sueño de todo participante: lograr los 42 puntos, máximo posble, ya que se otorgaban hasta siete puntos por cada uno de los seis problemas propuestos.

Los seis enunciados pueden verse, en este mismo boletín, en la sección de *Problemas Propuestos*. La prueba se hizo en dos sesiones, cada una de cuatro horas y media, para resolver tres problemas.

Se concedieron medallas de bronce a partir de los 16 puntos, de plata a partir de los 23 y de oro a partir de los 34. El equipo chino obtuvo 5 medallas de oro y una de plata; el francés, 3 de oro y una de plata; el de la Unión Soviética, 3 de oro, 2 de plata y una de bronce; el rumano, 2 de oro, 2 de plata y 2 de bronce y el búlgaro, una de oro, 4 de plata y una de bronce.

En esta ocasión, la participación española ha sido mala, pese a lo que cabía esperar, tras los alentadores resultados obtenidos en las competiciones de los años precedentes. En este, no se ha conseguido ninguna medalla ni mención honorífica (éstas se conceden a quienes, sin obtener medallas, resuelven totalmente al menos uno de los problemas).

Las puntuaciones de nuestros representantes ha sido las siguientes:

Daniel Lasaosa Medarde	15 puntos
Enrique García López	14 puntos
Francisco Ogando Serrano	14 puntos
Marco Castrillón López	13 puntos
Javier Arregui García	12 puntos
Jesús J. Villalmanzo Manrique	4 puntos

En la clasificación no oficial por paises (ya que la Olimpiada es un concurso en el que se participa individualmente), España ocupó el lugar 34 de los 51 paises participantes.

La próxima Olimpiada Internacional se celebrará en Suecia, en 1991. Es posible que, por problemas financieros de la Comisión Organizadora, se reduzca a 4 el número de participantes por cada país.

\- - - - - -

V OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICA Valladolid (España), 1990

Como es bien sabido, la **V Olimpiada Iberoamericana de Matemática** se ha celebrado este año en España. Ha tenido lugar en Valladolid, entre los dias 22 y 29 de Septiembre de 1990. Es un acontecimiento que debemos celebrar, a la vez que lamentamos el escaso eco que ha tenido en los medios informativos en general, que apenas le han prestado atención, ofreciendo, en el mejor de los casos, alguna noticia tan breve como confusa.

En esta Olimpiada han participado 16 paises, con un total de 59 participantes. Los paises han sido: Argentina, Bolivia, Brasil, Colombia, Costa Rica, Cuba, Chile, Rep. Dominicana, Honduras, España, Méjico, Perú, Portugal, Puerto Rico, Uruguay y Venezuela. Cada uno podía presentar hasta cuatro alumnos, pero Perú y la República Dominicana participaron sólo con dos y Brasil se quedó con 3, ya que uno de los brasileños fué descalificado por no cumplir el reglamento, ya que había obtenido medalla de oro en la Interncional de China. Portugal participaba por primera vez en una Olimpiada Iberoamericana, pero había concurrido dos veces a Olimpiadas Internacionales. También eran nuevos en esta competición Honduras y la Rep. Dominicana.

Las pruebas, como de costumbre, consistieron en la resolución de 6 problemas, en dos tandas de cuatro horas y media de duración cada una. Los enunciados pueden verse en nuestra sección de **Problemas Propuestos**, en las páginas 73 a 75 de este Boletín. La resolución de cada problema permitía obtener hasta 10 puntos, por lo que la máxima puntuación alcanzable por un concursante era de 60 puntos.

En esta Olimpiada, como en la Internacional, se participa individualmente, por lo que oficialmente no se hace pública una clasificación por paises, pero extraoficialmente suele hablarse siempre de las puntuaciones totales obtenidas por los participantes de cada pais; si son cuatro los alumnos presentados, un pais podría llegar a alcanzar 240 puntos.

El jurado decidió otorgar medallas de oro a los que obtuviesen 44 puntos o más, de plata a los que consiguiesen de 33 a 43 y de bronce a los de 23 a 32. Decisión bastante generosa, pues resultaron premiados 35 estudiantes de los 59 presentados.

En total se concedieron 6 medallas de oro, 13 de plata y 16 de bronce. Los que obtuvieron las medallas de oro (un español entre ellos) son los siguientes:

Marcos Antonio Meggiolaro	Brasil	53 puntos
Luciano Guimaraes	Brasil	53 puntos
Julio Cesar de Souza	Brasil	46 puntos
Francisco Ogando	España	46 puntos
Pablo Milrud	Argentina	45 puntos
Andrés Saenz	Uruguay	44 puntos

A la vista de esos resultados, cabe destacar la magnífica actuación de los brasileños, cuyos tres representantes obtuvieron medallas de oro, sumando 152 puntos. En la clasificación extraoficial por equipos, el primer puesto correspondió a Argentina, con 166 puntos (una medalla de oro y tres de plata); el segundo al Brasil, a pesar de tener solo tres estudiantes en el equipo, el tercero a Méjico, con 148 puntos y el cuarto a España, con 146 puntos.

Este año se otorgó por primera vez la "Copa Puerto Rico", ofrecida por ese país al equipo que más hubiera progresado en su actuación respecto a años anteriores, según una fórmula que tiene en cuanta los resultados de los dos años inmediatamente anteriores, el número de estudiantes por equipo y el hecho de que es más difícil progresar si se parte de niveles altos que se parte de los más bajos. Este trofeo correspondió a Argentina

La Delegación Española estaba formada por los profesores María Gaspar y Ricardo Pérez Marco (que obtuvo medallas en la Olimpiada Internacional de Varsovia y el la Iberoamericana de Colombia) y por cuatro alumnos participantes, que obtuvieron los siguientes resultados:

Francisco Ogando Serrano	(Madrid)	oro	46 puntos
Daniel Lasaosa Medarde	(Navarra)	plata	38 puntos
Marco Castrillón López	(Madrid)	bronce	31 puntos
Javier Arregui García	(Madrid)	bronce	31 puntos

Los cuatro habían participado en la Olimpiada Internacional celebrada en China, aunque, como se explica en la crónica incluida en este mismo boletín, no obtuvieron allí ningún premio. Es curioso observar que estos cuatro alumnos quedaron clasificados, exactamente en este mismo orden, en los cuatro primeros lugares, en la XXVI Olimpiada Matemática Española (ver nuestro Boletín nº 25). Marco Castrillón participó en 1989 en el Concurso de nuestra Sociedad, como alumno de 3º de BUP, obteniendo el segundo premio.

La próxima Olimpiada Iberoamericana se celebrará en Córdoba (Argentina), en Septiembre de 1991.

Paralelamente a la Olimpiada y en forma extraoficial, se ha celebrado un Concurso de Resolución de

Problemas con ordenador. La inscripción era voluntaria (tras la realización de las pruebas de la Olimpiada) para los participantes, por parejas (no necesariamente del mismo pais). La pareja ganadora estaba formada por dos argentinos y los cuatro españoles resultron premiados también.

En los dias 20 a 22 de Septiembre se celebró en Madrid un *Simposio sobre la enseñanza de las Matemáticas en Iberoamérica, organizado por la O. E. I.*

SOBRE ANALISIS NO ESTANDAR

Por Manuel SUAREZ FERNANDEZ

***

CAPITULO III: PRIMERAS IDEAS NO ESTANDAR

En el Capítulo II, en la ZFC (es decir, en la Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección), consideramos una clase U de cosas que llamamos "conjuntos", una clase de cosas que llamamos "propiedades" y una clase que (ahora) notamos "ε", de propiedades que llamamos "enunciados". Ahora, en el Capítulo III, a las cosas de la clase U las llamamos "U-conjuntos" o "conjuntos de la clase U" o "conjuntos de la ZFC", a las cosas de la clase P las llamamos "P-propiedades" o "propiedades de la clase P" o "propiedades de la ZFC", a las propiedades de la clase ε las llamamos "ε-enunciados" o "enunciados de la clase ε" o "enunciados de la ZFC", a las palabras "conjunto", "propiedad" y "enunciado" les asignamos sus respectivos significados intuitivos, bien conocidos, del lenguaje coloquial, entendiendo que (intuitivamente hablando, sin el formalismo de la ZFC) los U-conjuntos son conjuntos, las P-propiedades son propiedades y los ε-enunciados son enunciados, y que a las palabras, "clase", "elemento", "contenido", "variable", "equivalente" y otras, les suponemos sus respectivos significados formales (de la ZFC) o bien los correspondientes intuitivos (en los que se inspiran los formales) según indique el contexto (formalmente, en la ZFC, las clases que consideramos son U ϕ , ε y para cada P-propiedad p(x) en la que figura libre una variable x y no figura libre variable alguna distinta de x, la clase de los U-conjuntos que verifican p(x), e intuitivamente consideramos que "clase" significa lo mismo que intuitivamente significa "conjunto").

Es decir, intuitivamente concebimos conjuntos, propiedades y enunciados, de los cuales los de la ZFC solo son los conjuntos de una cierta clase U, las propiedades de una cierta clase P y los enunciados de una cierta clase ε.

No todos los conjuntos son U-conjuntos o conjuntos de la clase U (que formalmente no es más que una clase cualquiera de cosas cualesquiera definida mediante las propiedades de la clase P y en particular los enunciados de la clase ε) y ni siquiera son U-conjuntos todos los conjuntos cuyos elementos son U-conjuntos. Así por ejemplo, el conjunto (o lo que intuitivamente es lo mismo, la clase) de los U-conjuntos tales que si x es una variable entonces verifican la P-propiedad $x \notin x$, no es un U-conjunto (pues si E es la referida clase de los U-conjuntos que verifican $x \notin x$ y E fuese un U-conjunto, entonces $E \notin E$ sería un ε-enunciado a la vez verdadero y falso, lo cual no se verifica).

Lo que se verifica (en virtud del teorema generalmente llamado "axioma de comprensión") es que si p(x) es una P-propiedad en la que figura libre una variable x y no figura libre variable alguna distinta de x y F es la clase de los U-conjuntos que verifican p(x), entonces F es un U-conjunto si y solo si existe un U-conjunto A y existe una P-propiedad q(x) de manera que p(x) es la P-propiedad $(x \in A) \wedge q(x)$ (en consecuencia la clase U de los U-conjuntos no es un U-conjunto, pues si lo fuera entonces la clase de los U-conjuntos que verifican la P-propiedad $x \notin x$ sería un U-conjunto que notaríamos "$\{x \mid (x \in U) \wedge (x \notin x)\}$", lo cual no se verifica).

Un conjunto de la clase U (o conjunto de la ZFC) que notamos N, en este capítulo III lo definimos como un U-conjunto a cuyos elementos llamamos "números naturales", tal que,

P_1 existe un número natural que notamos "0" y llamamos "cero",

P_2 si n es un número natural, entonces existe un número natural que notamos "s(n)" y llamamos "siguiente de n",

P_3 si n es un número natural, entonces $s(n) \neq 0$,

P_4 si n es un número natural y m es un número natural tal que $m \neq n$, entonces $s(m) \neq s(n)$,

P_5 (Principio de inducción completa o Principio de recurrencia) si E es un U-conjunto contenido en N tal que 0 es elemento de E y se verifica que si n es elemento de E entonces s(n) es elemento de E, entonces E = N.

Digamos que si C es una clase de conjuntos (intuitivamente hablando como ahora lo hacemos y como generalmente lo venimos haciendo en este Capítulo III, sería lo mismo decir "si C es un conjunto de conjuntos"), entonces un conjunto A,

- es el mínimo conjunto de la clase C si y solo si A es un conjunto de la clase C contenido en todo conjunto de la clase C,

- es el mínimo U-conjunto de la clase C si y solo si A es un U-conjunto de la clase C contenido en todo U-conjunto de la clase C,

- es un conjunto inicial si y solo si 0 es elemento de A,

- es un conjunto sucesor si y solo si se verifica que si un número natural n es elemento de A, entonces el $S(n)$ es elemento de A,

- es el conjunto inicial y sucesor mínimo si y solo si A es el mínimo conjunto de la clase de los conjuntos iniciales y sucesores,

- es el U-conjunto inicial y sucesor mínimo si y solo si A es el mínimo U-conjunto de la clase de los conjuntos iniciales y sucesores.

Evidentemente, en virtud de los ε-enunciados (admitidos como verdaderos) P_1, P_2 y P_5, la ZFC dice que $\mathbb{N}$ es el U-conjunto inicial y sucesor mínimo. Pero, puesto que el ε-enunciado P_5 (o Principio de recurrencia) solo hace referencia a U-conjuntos, sobre si $\mathbb{N}$ es o no es el conjunto inicial y sucesor mínimo la ZFC no se pronuncia. En consecuencia, la ZFC deja la posibilidad de (o está abierta a) admitir la existencia de un conjunto inicial y sucesor propiamente contenido (es decir, distinto y contenido) en N que, en virtud del referido Principio de recurrencia, no sea U-conjunto (es decir, la ZFC es compatible con el nuevo enunciado "existe un conjunto inicial y sucesor propiamente contenido en $\mathbb{N}$ y no de la clase U").

Con el fin de aclarar las referidas ideas consideremos sus analogías, salvando sus diferencias, con el siguiente ejemplo, en el que, entiéndase, todos los conjuntos que se mencionan son U-conjuntos:

Z es el conjunto de los números enteros y sean G_2, G_3, G_5^- y G_5^+ y E los conjuntos siguientes:

$$G_2 = \{2^{2x+1} \mid (x \in Z) \wedge (x \geq 0)\}$$

$$G_3 = G_2 \cup \{3^{2x+1} \mid x \in Z\}$$

$$G_5^- = \{5^{2x+1} \mid (x \in Z) \wedge (x < 0)\}$$

$$G_5^+ = \{5^{2x+1} \ (x \in Z) \wedge (x \geq 0)\}$$

$$E = G_3 \cup G_5^- \cup G_5^+$$

(es decir, de manera más informal aún, $E = \{2, 2^3, 2^5, 2^7, \ldots, 3^{-7}, 3^{-5}, 3^{-3}, 3^{-1}, 3, 3^3, 3^5, 3^7, \ldots, \ldots, 5^{-7}, 5^{-5}, 5^{-3}, 5^{-1}, 5, 5^3, 5^5, 5^7, \ldots\}$).

Si $p = 2$ ó $p = 3$ ó $p = 5$, x es un número entero $h = p^{2x+1}$ y h es elemento de E, entonces notamos "seg(h)" y llamamos "seguidor de h" al elemento $p^{2(x+1)+1}$ de E.

Decimos que T es una topología sobre un subconjunto F de E y a los elementos de T les llamamos "T-abiertos" ó "abiertos de T", si y solo si T es un conjunto de subconjuntos de F tal que

- ϕ es un T-abierto y F es un T-abierto,

- si H es un conjunto cuyos elementos son T-abiertos, entonces el conjunto unión de los elementos de H es un T-abierto.

- si A es un T-abierto y B es un T-abierto entonces el $A \cap B$ es un T-abierto.

Digamos que si C es un conjunto de subconjuntos de E, entonces un subconjunto A de ,

- es el mínimo conjunto de la clase C si y solo si (como ya dijimos) A es un conjunto de la clase C contenido en todo conjunto de la clase C,

- es el mínimo T-abierto de la clase C si y solo si A es un T-abierto de la clase C contenido en todo T-abierto de la clase C,

- es un conjunto iniciado si y solo si 2 es elemento de A,

- es un conjunto seguidor si y solo si se verifica que si h es elemento de A, entonces el seg(h) es elemento de A,

- es el conjunto iniciado y seguidor mínimo si y solo si A es el mínimo conjunto de la clase de los conjuntos iniciados y seguidores,

- es el T-abierto iniciado y seguidor mínimo si y solo si A es el mínimo T-abierto de la clase de los conjuntos iniciados y seguidores.

Pues bien, si G es un subconjunto de G_3, $F = G \cup G_5^- \cup G_5^+$ y T es el conjunto cuyos elementos son G, G_5^-, G_5^+, $G \cup G_5^-$, $G \cup G_5^+$, $G_5^- \cup G_5^+$, F y ϕ, entonces T es una topología sobre F, y si G es un T-abierto iniciado y seguidor, entonces $G, G \cup G_5^-$, $G \cup G_5^+$ y F son T-abiertos iniciados, $G, G \cup G_5^+$, F y ϕ son T-abiertos seguidores y en definitiva, G es T-abierto iniciado y seguidor mínimo. Y lo referido deja la posibilidad de (o está abierto a) que exista un subconjunto $\underline{G}$ de E que sea conjunto iniciado y seguidor propiamente contenido en G, pues (lo

referido) permite elegir que G sea G_3 (también que G sea G_2) y con tal elección (la de que G sea G_3) resulta que si $\underline{G}$ es G_2 entonces $\underline{G}$ es subconjunto de E y conjunto iniciado y seguidor propiamente contenido en G (que es el T-abierto iniciado y seguidor mínimo). ¿Por qué ello no significa contradicción alguna? La respuesta es muy sencilla: Porque eligiendo que G sea G_3, G_2 no es T-abierto.

En resumen, es posible una topología T sobre E tal que exista un T-abierto iniciado y seguidor mínimo G, sin perjuicio de que exista un subconjunto $\underline{G}$ de E que sea conjunto iniciado y seguidor propiamente contenido en G y que, claro está, no ha de ser T-abierto (si bien es posible una topología consistente en el conjunto cuyos elementos son G_2, G_5^-, G_5^+, $G_2 \cup G_5^-$, $G_2 \cup G_5^+$, $G_5^- \cup G_5^+$, $G_2 \cup G_5^- \cup G_5^+$ y ϕ, de la que $\underline{G}$, que es G_2, es abierto).

Una idea básica de la argumentación anterior, bien conocida por los matemáticos, es la de que decir "abierto" es hablar relativamente a una determinada topología. Así pues, si por ejemplo decimos simplemente, "G es un abierto", entonces es porque suponemos que está suficientemente claro en el contexto, cual es la topología de la que pensamos que G es un abierto, sin necesidad de mencionarla. En otro caso o sencillamente puestos a puntualizar, si T es la topología en cuestión, entonces decimos "G es un T-abierto" o "G es un abierto de T".

Una vez llegado a este punto, reflexionemos que la idea referida para abiertos y topologías sirve para conjuntos y clases de conjuntos, puesto que si consideramos una teoría de conjuntos: entonces decir "conjunto" es hablar relativamente a una determinada clase de conjuntos. Así pues, si consideramos una teoría de conjuntos y por ejemplo decimos simplemente "A es un conjunto", entonces es porque suponemos que está suficientemente claro en el contexto, cual es la clase de conjuntos de la que pensamos que A es un conjunto, sin necesidad de mencionarla, y que en otro caso o sencillamente puestos a puntualizar, si $\mathfrak{T}$ es la teoría de conjuntos en cuestión y $U_{\mathfrak{T}}$ es la clase de los conjuntos que se consideran en la teoría de conjuntos Z, entonces decimos "A es un $U_{\mathfrak{T}}$-conjunto" o "A es un conjunto de la clase $U_{\mathfrak{T}}$" o "A es un conjunto de la teoría de conjuntos $\mathfrak{T}$". Y si por ejemplo decimos simplemente, "N es el conjunto inicial y sucesor mínimo", entonces es porque suponemos que está suficientemente claro en el contexto que la teoría de conjuntos de la que pensamos que $\mathbb{N}$ es el conjunto inicial y sucesor mínimo, es la ZFC, sin necesidad de mencionarla, y que en otro caso o sencillamente puestos a puntualizar decimos, "$\mathbb{N}$ es el U-conjunto inicial y sucesor mínimo" o "N es el conjunto inicial y sucesor mínimo de la clase U" o "$\mathbb{N}$ es el conjunto inicial y sucesor mínimo de la ZFC", dejando así la posibilidad (ya referida) de admitir la existencia de un conjunto $\underline{\mathbb{N}}$ inicial y sucesor propiamente contenido en $\mathbb{N}$ y que, claro está, no ha de ser U-conjunto.

En virtud del Principio de recurrencia, $\mathbb{N}$ es el conjunto inicial y sucesor mínimo de la clase U, pero de todos los conjuntos que podamos concebir sean o no de la clase U, ¿hay alguno que nuestra intuición nos presente como el conjunto inicial y sucesor mínimo?

A mi modo de ver, sí. Y dicho conjunto, que bien puede ser la intuición que la gran mayoría de la gente entiende como conjunto de los números naturales, es, digamos por ejemplo, el conjunto $\mathbb{N}_c$ de los números naturales que tiene representación en el sistema de numeración decimal (es decir, $\mathbb{N}_c$ es el conjunto cuyos elementos son los números naturales 0, s(0), s(s(0)), etc., que respectivamente notamos con los símbolos "0", "1", "2", etc. y llamamos con los nombres "cero", "uno", "dos", etc., del sistema de numeración decimal). Creo que nuestra intuición también nos presenta al referido conjunto N_c como el conjunto cuyos elementos son los números naturales que son alcanzables contando a partir de 0 (es decir, como el conjunto tal que si n es un número natural, entonces n es elemento de N_c si y solo si diciendo "cero", "uno", "dos" y así continuando uno a uno, siguiente a siguiente, llega un tiempo o momento de decir un nombe del sistema de numeración decimal que corresponde a n, dando por bueno que si así es alcanzable un número natural, entonces también lo es el siguiente).

¿Coincide el conjunto N_c con el U-conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales? Creo que parece evidente que el conjunto $\mathbb{N}_c$ no tiene por que ser de la clase U (pues para definirlo no utilizamos P-propiedad alguna) y que, en consecuencia, a la anterior pregunta, la ZFC nada responde. Pero por tratarse de un viejo conocido de nuestra intuición, como sin duda lo es el conjunto N_c, glosemos un poco más la cuestión:

Antes de haber considerado el conjunto $\mathbb{N}_c$, afirmamos que "sobre si (de todos los conjuntos que podamos concebir sean o no de la clase U) $\mathbb{N}$ es o no es el conjunto inicial y sucesor mínimo, la ZFC no se pronuncia" (1). Si considerado $\mathbb{N}_c$ como el conjunto inicial y sucesor mínimo de todos los conjuntos que podamos concebir sean o no de la clase U, mantenemos la afirmación (1) (es decir, la seguimos suponiendo verdadera), entonces hemos de concluir que a la pregunta "¿Coincide el conjunto $\mathbb{N}_c$ con el U-conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales?, la ZFC nada responde.

Si, partiendo de supuestos más débiles, consideramos solamente que N_c es un conjunto inicial y sucesor contenido en $\mathbb{N}$ y prescindimos de la firmación (1) (es decir, ni la suponemos verdadera ni la suponemos falsa), entonces (puesto que $\mathbb{N}$ es el U-conjunto inicial y sucesor mínimo) $\mathbb{N}_c$ coincidiría con $\mathbb{N}$ si y solo si $\mathbb{N}_c$ fuese un U-conjunto, y $\mathbb{N}_c$ sería un U-conjunto si y solo si, por ejemplo, se verificase que si x es una variable y notamos "p(x)" a la propiedad "x es alcanzable contando a partir de 0", entonces p(x) fuese una P-propiedad (en cuyo caso $\mathbb{N}_c$ sería un U-conjunto que notaríamos "$\{x|(x \subset N) \wedge p(x)\}$").

Luego, si $\mathbb{N}_c$ es un conjunto inicial y sucesor contenido en $\mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N}_c$ coincidiría con $\mathbb{N}$ si y solo si p(x) fuese una P-propiedad (y análogamente podemos argumentar que entonces $\mathbb{N}_c$ coincidiría con $\mathbb{N}$ si y solo si la propiedad "x tiene representación en el sistema de numeración decimal", fuese una P-propiedad).

Pero, ¿es p(x) una P-propiedad?

Si para afirmar que p(x) es una P-propiedad (en sentido estricto) exigimos que p(x) sea una expresión del lenguaje de la ZFC, entonces evidentemente hemos de convenir en que p(x) no es una P-propiedad, pues es una expresión en la que aparecen términos tales como, por ejemplo, "alcanzable" y "contando" (o bien, si la expresión que consideramos es, "x tiene representación en el sistema de numeración decimal, entonces en la misma aparecen términos tales como, por ejemplo, "representación" y "sistema de numeración decimal") que no lo son del lenguaje de la ZFC. Si, por el contrario, para afirmar que p(x) es una P-propiedad (en sentido amplio) no exigimos que p(x) sea una expresión del lenguaje de la ZFC y nos conformamos con que exista una P-propiedad (en sentido estrico) q(x) tal que (intuitivamente hablando, claro está) p(x) sea equivalente a q(x)(2), entonces entiendo que también hemos de convenir en que p(x) no es una P-propiedad (en sentido amplio), lo que intentaré

explicar a continuación:

De la definición de U-conjunto N de los números naturales mediante los ε-enunciados P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 (en lenguaje de la ZFC) se deduce que el referido U-conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es no vacío, que está ordenado, que tiene primer elemento (es decir, que existe un elemento de N que no es siguiente de número natural alguno), que no tiene ramificaciones hacia adelante o hacia atrás (es decir, que $\mathbb{N}$ está totalmente ordenado), que para todo elemento de $\mathbb{N}$ hay uno que es el primero que le sigue (y que llamamos "siguiente de n"), que para todo elemento m de $\mathbb{N}$ distinto del primero hay uno que es el primero que le antecede y que llamamos "anterior a m" (entendiendo que "n es el anterior a m" significa "m es el siguiente de n"), y que es el más pequeño U-conjunto al que pertenece el 0 y el siguiente de todo número natural (es decir, que $\mathbb{N}$ es el U-conjunto inicial y sucesor mínimo). Pero creo que es evidente, que nada de lo referido significa (en sentido estricto o en sentido amplio) que todo número natural haya de ser alcanzable contando a partir de 0 (o lo que intuitivamente es equivalente, que todo número natural haya de tener representación en el sistema de

---

(2) Por ejemplo, si x es una variable y r (x) es la propiedad, "x es el número natural primer antecesor del siguiente de 0", entonces r(x) no es una P-propiedad en sentido estricto, pues, por ejemplo, el término "antecesor" no lo es del lenguaje de la ZFC. Pero, puesto que el significado intuitivo de la expresión "r(x)" viene a ser equivalente al de la P-propiedad $x = 0$, bien podemos convenir en que r(x) es una propiedad en sentido amplio.

numeración decimal) y que nada de lo referido significa (en sentido estricto o en sentido amplio) lo contrario.

Que, por ejemplo, un número natural n es alcanzable contando a partir de 0, sabemos que significa que nombrando uno a uno los números naturales menores que n, el proceso tiene fin en el tiempo, razón por la cual decimos que tal proceso es finito y que, intuitivamente hablando, el conjunto de los números naturales menores que n, es finito. Este es el significado intuitivo (o mejor, un significado intuitivo), de conjunto finito en general, pues, intuitivamente hablando, en lenguaje coloquial, "conjunto finito" significa "conjunto tal que si nombramos (escribimos, pensamos, imaginamos, etc.) sus elementos uno a uno (uno tras otro) el proceso tiene fin en el tiempo (es decir hay un "momento" en el que nombramos un último elemento).

Como consecuencia de lo referido y de que nombrando de menor a mayor uno a uno (uno tras otro), elementos de $\mathbb{N}_c$, el proceso no tiene fin, tenemos la intuición de que "un conjunto E es finito si y solo si existe un elemento n del conjunto $\mathbb{N}_c$ tal que E es coordinable con el conjunto M_n de los números naturales menores o iguales que n", entendiendo que ésto significa que es posible aparear cada elemento de E con un y sólo un elemento de M_n (es decir, que es posible aparear cada elemento de E con un elemento de M_n, de manera que elementos distintos de E sean pareja de elementos distintos de M_n, sin que sobre y, claro está, sin que falte elemento alguno de M_n).

Pues bien, esta última intuición (y no la de que nombrar, escribir, pensar, imaginar, etc. uno a uno los elementos de un conjunto es un proceso que tiene fin en el tiempo físico) es la que inspira o se traslada (o a sido posible trasladar) al lenguaje de la ZFC[3], ya

que para la ZFC puede servir como definición de conjunto finito el enunciado (P-propiedad en sentido amplio), "un conjunto E es un conjunto finito si y solo si existe un elemento n de N tal que E es coordinable con el conjunto de los elementos de N menores o iguales que n", o el enunciado (P-propiedad en sentido estricto), "un U-conjunto E es un conjunto finito si y solo si existe un elemento n de N y existe una aplicación biyectiva entre E y el $\{x \mid (x \in N) \wedge (x \leq n)\}$", el cual intuitivamente es equivalente al primero.

Resumiendo, para la ZFC, que un U-conjunto E es un conjunto finito solo significa que E es biyectivo con el U-conjunto M_n de los números naturales menores o iguales que un cierto número natural n (elemento de N), y que M_n es un conjunto finito solo significa, pues, que M_n es biyectivo con M_n (es decir, para la ZFC, que E es un conjunto finito significa que "E es como M_n", y que M_n es un conjunto finito significa que "M_n es como M_n", sin más).

Y si aún decimos que "M_n es un conjunto finito (o que tiene fin) significa que existe un último elemento de M_n", y que "n es el último elemento de M_n", entonces el significado de la expresión "M_n es un conjunto finito" lo fundamentamos, claro está, en el (significado)

---

(3) Por ejemplo, algo análogo a lo referido tiene lugar cuando al mirar figuras geométricas representadas en una pizarra con tizas de colores, son percibidas entre otras las intuiciones del color y de la forma, y de éstas la que inspira o se traslada al lenguaje de la Geometría es la segunda y no la primera.

de la expresión "n es el último elemento de M_n" y ésta para la ZFC no significa que, "nombrando elementos de M_n a partir de 0, uno a uno, siguiente a siguiente (de menor a mayor), llega un tiempo (o momento) en el que, nombrados ya todos los elementos de M_n menores que n, le toca el turno de ser nombrado al referido n", ya que "n es el último elemento de M_n" para la ZFC significa que "n es el mayor elemento de M_n" (es decir, que "n es elemento de M_n y que si x es elemento de M_n entonces $x \leq n$"), lo cual a su vez significa que "n es elemento de M_n y que si x es elemento de M_n entonces existe un número natural z tal que $x + z = n$", entendiendo que la ley de composición interna + (suma de números naturales) se define de manera que si m es un número natural y p es un número natural, entonces $s(m+p) = m + s(p)$, resultando así, en definitiva, que para la ZFC el referido enunciado "n es el último elemento de M_n", es un enunciado fundamentado en los ε-enunciados P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5, sin hacer referencia alguna, pues, al tiempo físico.

Por tanto, creo es correcto argumentar que el enunciado "n es alcanzable contando a partir de 0" (que se fundamenta en la intuición de tiempo físico), intuitivamente no es equivalente (o no es homologable) a enunciado alguno de los considerados (y por tanto, que no lo es a otro cualquiera equivalente a uno de éstos) que sirvan para la ZFC como posible definición de conjunto finito o de que el referido conjunto M_n es finito o de que el también referido número natural n es el último elemento de M_n. Y puesto que el tiempo físico nada significa para enunciado alguno de la ZFC, creo que bien podemos convenir que, en general, el enunciado "n es alcanzable contando a partir de 0", intuitivamente no es equivalente (o no es homologable) a enunciado alguno de la ZFC y, en consecuencia, que la propiedad p(x) (es decir, siendo x una variable, la propiedad "x es alcanzable contando a partir de 0") intuitivamente no es equivalente (o no se traduce) a P-propiedad alguna o, lo que significa lo mismo, que la propiedad p(x) no es una P-propiedad en sentido amplio. Es decir, que el conjunto $\mathbb{N}_c$ definido por la propiedad p(x), no es un conjunto de la ZFC o, lo que significa lo mismo, no es un U-conjunto.

Y para terminar, unas observaciones:

Como hemos referido (en este Capítulo III), la ZFC deja la posibilidad de admitir la existencia de un conjunto $\underline{\mathbb{N}}$ inicial y sucesor propiamente contenido en N, con tal que $\underline{\mathbb{N}}$ no sea un U-conjunto. El Análisis No Estándar aprovecha la referida posibilidad y así considera la ZFC y la existencia de un tal conjunto $\underline{\mathbb{N}}$ que se dice es un conjunto externo (a la clase U). Pues bien, no se considere que en el Análisis No Estándar el referido conjunto $\underline{\mathbb{N}}$ ha de ser el también referido conjunto $\mathbb{N}_c$. Conceptualmente $\mathbb{N}_c$ está tan lejos de ser $\underline{\mathbb{N}}$ en el Análisis No Estándar, como lo está de ser $\mathbb{N}$ en la clásica ZFC. Y si consideramos el conjunto $\mathbb{N}_c$, tanto en el Análisis No Estándar como en la teoría clásica, debemos hacerlo solo intuitivamente, "para fijar ideas". No conjeturemos que en el Análisis No Estándar $\underline{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{N}$ vienen a significar respectivamente lo que en la teoría clásica significan $\mathbb{N}$ y la clase O_r de los números ordinales, pues, por ejemplo, entre $\mathbb{N}$ y O_r hay la diferencia esencial de que para todo elemento n distinto de 0, existe un elemento de $\mathbb{N}$ (que llamamos "anterior a n") que es el inmediato anterior a n, cosa que no ocurre para todo ordinal distinto de 0.

BIBLIOGRAFIA

HARTHONG, Jacques. "Lánalyse non-standard". La Recherche, nº 143. Oct. 1983.

DIENER, Francine. "Cours dánalyse non standard". UNIVERSITE DÓRAN. Département de Mathématiques. 1983.

REEB, Georges. "La Mathématique Non Standard, vieille de soixante ans?". Universite Louis Pasteur. Département de Mathématiques. Strasbourg.
"La Mathématique Non Standard, vieille de soixante ans?". Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle. Vol XXII-2(1981). Dépt. de Mathém. U.L.P. Strasbourg.
"Intuitionisme, Formalisme, Mathématique Non Standard et Infinitesimaux". Dept. de Mathém. U.L.P. I.R.M.A. Strasbourg.

UN TEOREMA EN OLVIDO: EL TEOREMA MAESTRO[1] DE MAC-MAHON

José V. García Sestafe

Un teorema clásico, que no se suele encontrar en los manuales de Combinatoria hoy día en uso, es el Teorema Maestro (Master Theorem) debido al matemático ingles Mac-Mahon.

El mayor Percy Alexander Mac Mahon, nació en Malta en 1854 y murió en Cambridge en 1929. Doctor en Ciencias y en Leyes, perteneció a diversas sociedades científicas, entre ellas a la Real Sociedad Matemática de Londres y fue miembro del St. John's College. Publicó numerosos trabajos de matemática pura en distintas revistas especializadas y varios libros; de sus obras cabe destacar: Philosophical transactions simetric functions of the roots of systems of equations, Generating function in the Theory of Numbers, Theory of the partition of number y New Mathematical Pastimes. Especial mención merece su Combinatory Analysis [4] que, a juicio de Comtet ([2] tomo 1, pág. 6), junto con los tratados de Netto [6] y Riordan [7],[8],[9] son las grandes obras clásicas de Combinatoria. Posteriormente, Mac-Mahon publicó un resumen de su amplio tratado, con el nombre de An introduction to Combinatory Analysis [5], que no hace referencia al citado teorema.

En la obra de Cartier y Foata ([1], págs. 54-60) se encuentra una generalización del teorema maestro. Una brevísima demostración se debe a Good [3], que se puede consultar en COMTET ([2]. Le Théorème maître; tomo 1 págs. 180-181).

La ingeniosa demostración de Mac-Mahon se halla en el tomo primero de [4] (págs. 93-98). El enunciado del Teorema Maestro es el siguiente:

Se definen las n funciones,

$$X_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{n1}x_n = \sum_i a_{ji}x_i, \quad j = 1,2, \dots n$$

y siendo $c_1, c_2 \dots c_n$, n números naturales, se tiene que el coeficiente del monomio

$$x_1^{c_1}\, x_2^{c_2} \dots\dots x_n^{c_n}$$

[1] Quiero hacer constar mi agradecimiento a Dña. Sofia Berzosa, Subdirectora del Instituto Nacional de Estadística y a Dña. Ana María Calvo Irazusta, Jefa del Servicio de Información del Instituto Británico en Madrid. A la primera por conseguirme copia del libro original de Mac-Mahon; a la segunda, por la información que me ha proporcionado sobre la obra de este insigne matemático.

en el desarrollo de

$$X_1^{c_1} X_2^{c_2} \ldots X_1^{c_n}$$

es igual al coeficiente del mismo monomio en el desarrollo de D^{-1}, siendo D el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1-a_{11}x_1 & -a_{12}x_1 & \cdots\cdots & -a_{1n}x_1 \\ -a_{21}x_2 & 1-a_{22}x_2 & \cdots\cdots & -a_{2n}x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}x_n & -a_{n2}x_n & \cdots\cdots & 1-a_{nn}x_n \end{vmatrix}$$

En lo que sigue, y para mayor sencillez de la demostración se supone $n = 3$, lo cual no resta generalidad al proceso deductivo (lo realiza en algunos casos el mismo Mac-Mahon), luego

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

También, siguiendo al autor, se introduce la notación simbólica

$$\left|(1-a_{11}x_1)\ (1-a_{22}x_2)\ (1-a_{33}x_3)\right| = 1-a_{11}x_1-a_{22}x_2-a_{33}x_3 +$$

$$+\left|a_{11}a_{22}\right|x_1x_2+\left|a_{11}a_{33}\right|x_1x_3+\left|a_{22}a_{33}\right|x_2x_3-\left|a_{11}a_{22}a_{33}\right|x_1x_2x_3$$

donde los productos de los factores a_{kk} se expresan en forma de determinante

$$\left|a_{11}a_{22}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \left|a_{11}a_{33}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \left|a_{22}a_{33}\right| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\left|a_{11}a_{22}a_{33}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

La demostración se inicia, poniendo de manifiesto que el término general del desarrollo de

$$\frac{1}{(1-s_1X_1)\ (1-s_2X_2)\ (1-s_3X_3)} \qquad [I]$$

es de la forma

$$s_1^{c_1} s_2^{c_2} s_3^{c_3} X_1^{c_1} X_2^{c_2} X_3^{c_3} \qquad [II]$$

Si sólo se busca el coeficiente de

$$x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3}$$

en el desarrollo de

$$X_1^{c_1} X_2^{c_2} X_3^{c_3}$$

se desea obtener solamente la parte del desarrollo [II] que es función de

$$s_1x_1,\ s_2x_2,\ s_3x_3$$

esto es, se pretende obtener la parte del desarrollo [I] que es función exclusivamente de s_1x_1, s_2x_2 y s_3x_3.

El problema queda reducido a demostrar que la parte del desarrollo de [I] buscada es igual al desarrollo de la fracción

$$D^{-1} = \frac{1}{\left|(1-a_{11}s_1x_1)\ (1-a_{22}s_2x_2)\ (1-a_{33}s_3x_3)\right|}$$

en cuya escritura se ha utilizado la notación anteriormente introducida.

Se empieza por formar la fracción

$$F = \frac{\left|(1-a_{11}s_1x_1)\ (1-a_{22}s_2x_2)\ (1-a_{33}s_3x_3)\right|}{(1-s_1X_1)\ (1-s_2X_2)\ (1-s_3X_3)}$$

que se puede escribir

$$F = \left|[1-s_1X_1+s_1\ (X_1-a_{11}x_1)]\ [1-s_2X_2+s_2\ (X_2-a_{22}x_2)]\ [1-s_3X_3+s_3\ (X_3-a_{33}x_3)]\right|/P$$

donde por brevedad se ha escrito

$$P = (1-s_1X_1)\ (1-s_2X_2)\ (1-s_3X_3)$$

Efectuando los productos del numerador de F, se obtiene

$$
\begin{aligned}
F = {} & \frac{(1-s_1X_1)(1-s_2X_2)(1-s_3X_3)}{P} - \frac{s_1(X_1-a_{11}x_1)(1-s_2X_2)(1-s_3X_3)}{P} - \\
& - \frac{s_2(X_2-a_{22}x_2)(1-s_1X_1)(1-s_3X_3)}{P} - \frac{s_3(X_3-a_{33}x_3)(1-s_1X_1)(1-s_2X_2)}{P} + \\
& + \frac{(1-s_1X_1)\, s_2s_3 \left|(X_2-a_{22}x_2)(X_3-a_{33}x_3)\right|}{P} + \frac{(1-s_2X_2)\, s_1s_3 \left|(X_1-a_{11}x_1)(X_3-a_{33}x_3)\right|}{P} + \\
& + \frac{(1-s_3X_3)\, s_1s_2 \left|(X_1-a_{11}x_1)(X_2-a_{22}x_2)\right|}{P} - \frac{s_1s_2s_3 \left|(X_1-a_{11}x_1)(X_2-a_{22}x_2)(X_3-a_{33}x_3)\right|}{P}
\end{aligned}
$$

Se observa, inmediatamente, que la última fracción se anula idénticamente, ya que su numerador es

$$
s_1s_2s_3 \left|(X_1-a_{11}x_1)(X_2-a_{22}x_2)(X_3-a_{33}x_3)\right| =
$$

$$
= s_1s_2s_3 \begin{vmatrix} X_1-a_{11}x_1 & -a_{12}x_1 & -a_{13}x_1 \\ -a_{21}x_2 & X_2-a_{22}x_2 & -a_{23}x_2 \\ -a_{31}x_3 & -a_{32}x_3 & X_3-a_{33}x_3 \end{vmatrix} = 0
$$

como se comprueba, por ejemplo, sumando la segunda y tercera columnas a la primera.

Simplificando, las otras fracciones, resulta en definitiva

$$
\begin{aligned}
F = 1 & - s_1 \frac{X_1-a_{11}x_1}{1-s_1X_1} - s_2 \frac{X_2-a_{22}x_2}{1-s_2X_2} - s_3 \frac{X_3-a_{33}x_3}{1-s_3X_3} + \\
& + \frac{s_2s_3 \left|(X_2-a_{22}x_2)(X_3-a_{33}x_3)\right|}{(1-s_2X_2)(1-s_3X_3)} + \frac{s_1s_3 \left|(X_1-a_{11}x_1)(X_3-a_{33}x_3)\right|}{(1-s_1X_1)(1-s_3X_3)} +
\end{aligned}
$$

$$
+ \frac{s_1s_2 \left|(X_1-a_{11}x_1)(X_2-a_{22}x_2)\right|}{(1-s_1X_1)(1-s_2X_2)} \qquad [III]
$$

Es inmediato comprobar que ninguna de las fracciones del desarrollo anterior son funcines sólo de

$$s_1x_1,\ s_2x_2,\ s_3x_3$$

Por ejemplo en

$$
F_{23} = \frac{s_2\, s_3 \left|(X_2-a_{22}x_2)(X_3-a_{33}x_3)\right|}{(1-s_2X_2)(1-s_3X_3)}
$$

no existe s_1, pero sí existen términos en los que entra x_1, luego siendo F_{23} función de x_1, no lo es de s_1x_1.

Dividiendo ambos miembros de [III] por

$$
\left|(1-a_{11}s_1x_1)(1-a_{22}s_2x_2)(1-a_{33}s_3x_3)\right|
$$

se obtiene que [I]:

$$
\frac{1}{(1-s_1X_1)(1-s_2X_2)(1-s_3X_3)}
$$

resulta ser igual al segundo miembro de [III] multiplicado por D^{-1}. De aquí se sigue que la parte del desarrollo de la fracción [I], que solamente es función de s_1x_1, s_2x_2, s_3x_3, está representada por D^{-1}. Por tanto, notando por

$$
K_{x_1^{c_1}\, x_2^{c_2}\, x_3^{c_3}}^{X_1^{c_1}\, X_2^{c_2}\, X_3^{c_3}}
$$

al coeficiente del monomio $x_1^{c_1}x_2^{c_2}x_3^{c_3}$ en $X_1^{c_2}X_2^{c_2}X_3^{c_3}$, se puede escribir

$$
K_{x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3}}^{X_1^{c_1} X_2^{c_2} X_3^{c_3}} = K_{x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3}} \begin{vmatrix} 1-a_{11}x_1 & -a_{12}x_1 & -a_{13}x_1 \\ -a_{21}x_2 & 1-a_{22}x_2 & -a_{23}x_3 \\ -a_{31}x_3 & -a_{32}x_3 & 1-a_{33}x_3 \end{vmatrix}^{-1}
$$

En general

$$K_{x_1^{c_1} x_2^{c_2} \dots x_n^{c_n}} \; x_1^{c_1} x_2^{c_2} \dots x_n^{c_n} = K_{x_1^{c_1} x_2^{c_2} \dots x_n^{c_n}} \begin{vmatrix} 1-a_{11}x_1 & -a_{12}x_1 & \dots & -a_{1n}x_1 \\ -a_{21}x_2 & 1-a_{22}x_2 & \dots & -a_{2n}x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}x_n & -a_{n2}x_n & \dots & 1-a_{nn}x_n \end{vmatrix}^{-1}$$

Como es facil observar, D se puede escribir, también, en la forma

$$D = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n \begin{vmatrix} a_{11} - 1/x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1/x_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - 1/x_n \end{vmatrix}$$

EJEMPLOS

a) Aunque se puede obtener directamente de forma muy sencilla, se va a calcular, aplicando el teorema de Mac-Mahon

$$\sum_{i=0}^{n} C^2_{n,k} = C_{2n,n}$$

Es evidente que

$$\sum_{i=0}^{n} C^2_{n,k}$$

es el coeficiente del término $x^n . y^n$ en el producto

$$(x+y)^n \,.\, (x+y)^n$$

Entonces, haciendo

$$X = 1.x + 1.y = Y$$

se tiene

$$D = \begin{vmatrix} 1-x & -x \\ -y & 1-y \end{vmatrix} = 1-(x+y)$$

y, suponiendo $|x+y|<1$

$$D^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (x+y)^k$$

Los términos de grado n + n se obtienen para $k = 2n$ y, precisamente, el término en $x^n y^n$ resulta ser

$$C_{2n,n}$$

luego $\sum_{i=0}^{n} C^2_{2n,i} = C_{2n,n}$

b) Sea calcular

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, C^3_{2n,i}$$

Se observa que la suma pedida es el coeficiente de

$$x^{2n} . y^{2n} . z^{2n}$$

en el producto $(y-z)^{2n} \,.\, (z-x)^{2n} \,.\, (x-y)^{2n}$

Haciendo

$$X = y - z, \; Y = z - x, \; Z = x - y$$

se tiene, por el teorema maestro

$$K_{x^{2n} y^{2n} z^{2n}} \; x^{2n} y^{2n} z^{2n} = K_{x^{2n} y^{2n} z^{2n}} \begin{vmatrix} 1 & -x & x \\ y & 1 & -y \\ -z & z & 1 \end{vmatrix}^{-1}$$

desarrollando, supuesto $|xy + yz + zx| < 1$

$$D^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (xy + yz + zx)^k$$

Los términos de grado 6n se obtienen para $k = 3n$; en

$$(-1)^{3n} (xy + yz + zx)^{3n}$$

el coeficiente del término

$$x^{2n} y^{2n} z^{2n}$$

se calcula mediante la fórmula de Leibnitz, obteniéndose, en definitiva

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, C^3_{2n,i} = (-1)^{3n} \frac{(3n)!}{n!n!n!} = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

resultando conocido con el nombre de fórmula de Dixon (1891)

c) Una generalización del problema anterior es el cálculo de la suma

$$S = \sum_{i=-m}^{m} (-1)^i \; C_{b+c,b+i} \cdot C_{c+a,c+i} \cdot C_{a+b,a+i}$$

siendo $m = \min \{ a, b, c \}$

Se observa que el valor de la suma pedida es el coeficiente del término

$$x^{b+c} y^{c+a} z^{a+b}$$

en el desarrollo

$$(-1)^{a+b+c}\,(y-z)^{b+c}\,(z-x)^{c+a}\,(x-y)^{a+b}$$

Procediendo de forma análoga al ejercicio anterior, se obtiene

$$D^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\,(xy+yz+zx)^k$$

Los términos de grado 2.(a+b+c) se obtienen para $k = a+b+c$; en

$$(-1)^{a+b+c}\,(xy+yz+zx)^{a+b+c}$$

el coeficiente buscado en el desarrollo es

$$(-1)^{a+b+c}\,\frac{(a+b+c)!}{c!\,a!\,b!}$$

luego

$$\sum_{i=-m}^{m}(-1)^i\,C_{b+c,b+i}\cdot C_{c+a,c+i}\cdot C_{a+b,a+i} = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$$

d) Demostrar

$$\sum_{i=0}^{n} C^3_{n,i} = \sum_{i=0}^{r} C_{n+i,n-2i}\cdot 2^{n-2i}\,\frac{(3i)!}{(i!)^3}$$

siendo $r = E(n/2)$, donde E representa "parte entera".

Se observa que la suma que figura en el primer miembro es el coeficiente de $x^n\,y^n\,z^n$ en el producto de los desarrollos de

$$(y+z)^n\,(z+x)^n\,(x+y)^n$$

Haciendo

$$X = y+z,\ Y = z+x,\ Z = x+y$$

se obtiene

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -x & -x \\ -y & 1 & -y \\ -z & -z & 1 \end{vmatrix} = 1 - (xy+yz+zx+2xyz)$$

y por tanto

$$D^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(xy+yz+zx+2xyz)^k$$

Como

$$(2xyz+xy+yz+zx)^k = [2xyz+(xy+yz+zx)]^k = \sum_j C_{k,j}(2xyz)^j\,(xy+yz+zx)^{k-j}$$

los términos de grado 3n, se obtienen para $3j+2.(k-j) = 3n$ — $2k+j = 3n$, $j \leq k$ y dando sucesivos valores a k, resulta

$k = n, j = n$ — $C_{n,n}\,.\,(2xyz)^n = 2^n\,x^n\,y^n\,z^n$

$k = n+1,\ j = n-2$ — $C_{n+1,n-2}\,(2xyz)^{n-2}\,.\,(xy+yz+zx)^3$

$k = n+2,\ j = n-4$ — $C_{n+2,n-4}\,(2xyz)^{n-4}\,(xy+yz+zx)^6$

....

$k = n+r, j = n-2r$ — $C_{n+r,n-2r}\,(2xyz)^{n-2r}\,(xy+yz+zx)^{3r}$

donde $r = E(n/2)$.

Tomando sólo los términos en $x^n\,y^n\,z^n$, se obtiene

$$\sum_{i=0}^{n} C^3_{n,i} = 2^n\,x^n\,y^n\,z^n + 2^{n-2}\,C_{n+1,n-2}\cdot\frac{3!}{(1!)^3} + 2^{n-4}\cdot C_{n+2,n-4}\cdot\frac{6!}{(2!)^3} + \ldots + 2^{n-2r}\,C_{n+r,n-2r}\cdot\frac{(3r)!}{(r!)^3}$$

o bien

$$\sum_{i=0}^{n} C^3_{n,i} = \sum_{i=0}^{r} 2^{n-2i}\cdot C_{n+i,n-2i}\cdot\frac{(3i)!}{(i!)^3}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] CARTIER, P. y FOATA, D. Problémes combinatoires de commutation et réarrangement Springer. 1969.

[2] COMTET, L. Analyse Combinatoire. Dos tomos. Presses Universitaires de France. 1970.

[3] GOOD, I. A short proof of Mac-Mahon's Master Theorem. Proceedings of Cambridge Philosophical Society 52.1962.

[4] MAC.MAHON, P.A. Combinatory Analysis. Dos tomos. Cambridge University Press. 1915-1916. Existe una reimpresión, Chelsea.1960.

[5] MAC.MAHON, P.A. An introduction to Combinatory Analysis. Cambridge University Press.1920.

[6] NETTO, E. Lehrbuch der Combinatorik. Teubner.1901.

[7] RIORDAN, J. An Introduction to Combinatory Analysis. Wiley. 1958.

[8] RIORDAN, J. Applied Combinatorial Mathematics. Wiley. 1964.

[9] RIORDAN, J. Combinatorial identities. Wiley. 1968.

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlas.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Número y año	Convocado en Boletín	Crónica - Enunciados
I (1983)	1	2, pag 11
II (1984)	3	4, pág 7
III (1985)	5	7, pág 3
IV (1986)	9	10, pág 5
V (1987)	13	15, pág 3
VI (1988)	17	19, pág 17
VII (1989)	20	22, pág 9
VIII (1990)	24	26, pag 3

OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA :

Número y año	Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX (1984)		3, pág 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1966-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV (1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61
XXVI (1989-90)	24, págs 11 y 67	25, págs. 9 y 73

OLIMPIADA MATEMATICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
I (1986) Colombia	8, págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12, págs. 3 y 75
III (1988) Perú	18, págs. 5 y 73
IV (1989) Cuba	21, págs. 11 y 63
V (1990) España	26, pags. 13 y 73

OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
XXIV (1983) París	2, pág. 15
XXV (1984) Praga	4, pág. 67
XXVI (1985) Helsinki	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986) Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987) Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX (1988) Australia	19, págs. 23 y 77
XXX (1989) R. F. A.	22, págs. 15 y 73
[illegible] China	26, pags. 11 y 71

INDICE DE LOS ARTICULOS PUBLICADOS EN LOS 25 PRIMEROS NUMEROS DE ESTE BOLETIN (1983-90)

AUTORES y Títulos Boletín, pág. y año

AUTORES y Títulos Boletín, pág. y año

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA TEORÍA DE IDEALES: LA LOCALIZACIÓN

Por Fernando Etayo Gordejuela,
María Presentación García Lopez
y Concepción Romo Santos.

Introducción:

La Geometría Algebraica Clásica comenzó con la escuela italiana de finales del siglo pasado, en su vertiente geometrica y continuó, en la algebraica, con la escuela alemana de la primera mitad de este siglo. El exito principal consistió en vincular las operaciones algebraicas con las geométricas de un modo casi biunívoco, asociando a cada ideal una variedad. El teorema de los ceros de Hilbert precisa la manera como se hace esta correspondencia.

En este trabajo se proponen ejercicios cuya resolución enseña el manejo de este diccionario algebraico-geométrico. Tratamos de dibujar lo mas posible, buscando asi la mas intuitiva interpretación de la teoría. Bien entendido que los dibujos no muestran sino la parte real de las variedades complejas que consideramos y que, por ello, no pueden ser tomados como modelos seguros para obtener leyes generales.

1. Proposición :

Siendo p_1 un ideal primo de A, para su ampliado en $A \hookrightarrow A_p$, es decir, para el ideal $A_p p_1$ del anillo A_p, y para el contraido de este se tiene:

$$\text{i)}\quad p_1 \not\subset p \Longrightarrow \begin{cases} A_p p_1 = A_p \\ (A_p p_1) \cap A = A \end{cases}$$

$$\text{ii)}\quad p_1 \subset p \Longrightarrow \begin{cases} A_p p_1 \ \text{es primo propio} \\ (A_p p_1) \cap A = p_1 \end{cases}$$

iii) $A_p p$ es el único ideal maximal de A_p (por eso se le llama ideal de no unidades del anillo A_p).

Interpretación geométrica:

Si $A = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ y p es un ideal primo en A, A_p es el anillo de todas las funciones racionales f/g, donde $g \notin p$, es decir, bien definidas sobre la variedad $V(p)$.

Un ideal p_1 que cumple $p_1 \not\subset p$ ($\Longleftrightarrow V(p_1) \not\supset V(p)$), se dice que se pierde al pasar a A_p. Un ideal p_1 que cumple $p_1 \subset p$ ($\Longleftrightarrow V(p_1) \supset V(p)$), no se pierde al pasar a A_p.

Así, al estudiar la subvariedad $V(p)$ de una cierta variedad W mediante la localización, se centra el análisis en todas las subvariedades de W que contienen a $V(p)$, olvidando aquellas que no cumplen tal propiedad. Es decir, se hace un estudio local, lo cual justifica plenamente llamar localización a este proceso.

NOTA: En teoría general de ideales se dice que un anillo es local si tiene un único ideal maximal. Los anillos localizados A son, por lo tanto, anillos locales.

2. Ejercicio:

Buscar un ideal primo de A que se pierda al pasar al anillo local, y otro que no se pierda, en los casos siguientes:

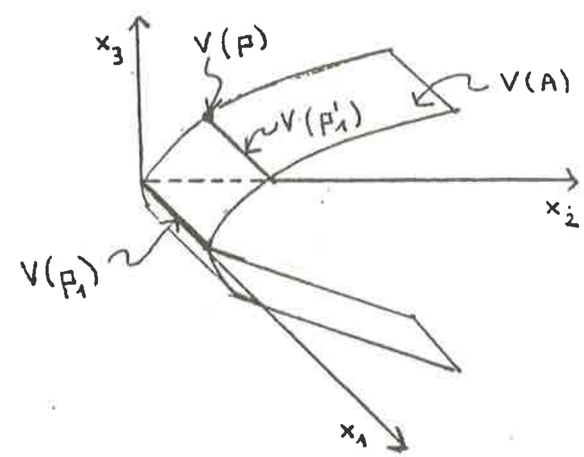
a) $A = \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$, $x_2 = x_3^2$; $p = A(x_1,x_2-1,x_3-1)$.

b) $A = \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$, $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$; $p = A(x_1,x_2,x_3)$.

c) $A = \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$, $p = A(x_1)$.

Solución:

Vamos a resolver los ejercicios pensando geométricamente:



a) $V(a)$ es el cilindro parabólico $x_2 = x_3^2$;

$V(p) = (0,1,1)$.

p_1 se pierde si $p_1 \not\subset p$, o lo que es lo mismo, $V(p_1) \not\supset V(p)$.

Sea $V(p_1)$ la recta x_1, esto es, $p_1 = A(x_3)$. Entonces $V(p) \not\subset V(p_1)$, lo que implica

$A(x_3) \not\subset p$;

esto es, se pierde.

p_1' no se pierde si $p_1' \subset p$, o sea si $V(p_1') \supset V(p)$.

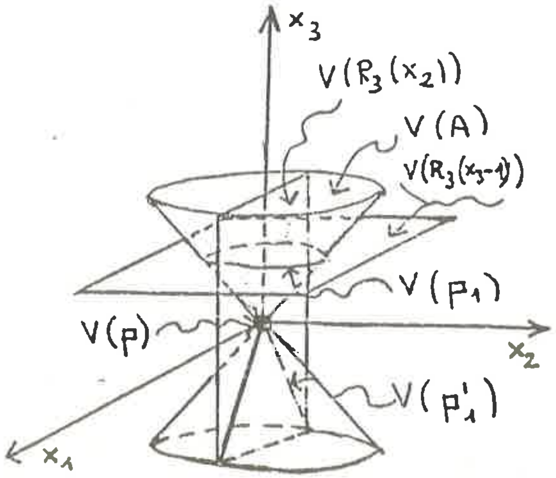
Sea $V(p_1')$ la recta $x_2=1$, $x_3=1$, esto es, $p_1' = A(x_2-1,x_3-1)$; p_1' no se pierde porque $p_1' \subset p$.

b) $V(A)$ es el cono $x_3 = x_1 + x_2$. $V(p)$ es el punto (0,0,0). Sea $V(p_1)$ la circunferencia $x_1 + x_2 = 1$, $x_3 = 1$, esto es, $p_1 = A(x_3-1)$; p_1 p, ya que $V(p_1)$ $V(p)$. Luego se pierde.

Hallemos p_1' que no se pierda; si cortamos el cono con el plano $x_2 = 0$ nos queda $x_3^2 = x_1^2$, es decir, un par de rectas, que no es variedad irreducible. Queremos que la variedad sea la recta $x_1 = x_3$. Tomamos entonces:

$p_1' = A(x_1 - x_3, x_2) \subset p$.

No se pierde.



c) $A = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, $V(A)$ es el espacio tridimensional C^3; $V(p)$ es el plano $x_1=0$. Si tomamos $p_1 = A(x_2)$, $V(p_1) \not\supset V(p)$, esto es, p_1 se pierde.

Si tomamos $p_1' = A(x_1)$, $V(p_1') \supset V(p)$ o sea que p_1' no se pierde. En este caso $p_1' = p$.

Observese que en estas condiciones, al ser p un ideal principal, es minimal y por tanto A_p tiene un solo ideal aparte de (0): el maximal pA_p.

3. Proposición:

Sea q_1 un ideal primario de A. Para su ampliado en $A \hookrightarrow A_p$, se tiene:

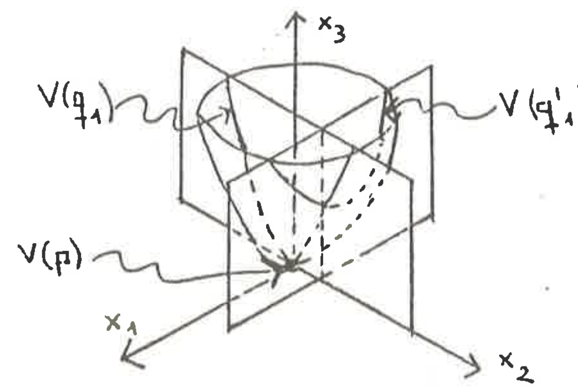
i) $q_1 \not\subset p \Longrightarrow A_p q_1 = A_p$.

ii) $q_1 \subset p \Longrightarrow \begin{cases} A_p q_1 \text{ es primario y su ideal primo asociado es } A_p\sqrt{q_1} . \\ (A_p q_1) \cap A = q_1 . \end{cases}$

4. Ejercicio:

Para el caso $A = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, con la condición $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ y $p = A(x_1, x_2, x_3)$, comprobar que $q_1 = A(x_1^3)$ no se pierde, pero $q_1' = A((x_1-1)^2)$ se pierde al pasar a A_p. Comparar $V(q_1)$ y $V(q_1')$ con $V(p)$ respecto de la relación de inclusión.

Solución:



$q_1 = A(x_1^3) \subset p$. Luego $A_p q_1 \neq A_p$ y por tanto q_1 no se pierde al pasar a A_p. En cambio, $q_1' = A((x_1-1)^2)$, luego $A_p q_1' = A_p$ y por tanto q_1' se pierde al pasar a A_p. Como $q_1 \subset p$, entonces $V(q_1) \supset V(p)$.

En cambio, como $q_1' \not\subset p$, entonces $V(q_1) \not\supset V(p)$.

Por tanto, dado un ideal u, u se conserva al pasar a A_p si $V(u) \supset V(p)$ y se pierde en caso contrario.

BIBLIOGRAFÍA

1) **García, Etayo, Romo:** *"Interpretación geometrica de la teoría de ideales"* Depto. de Algebra. Univ. Complutense de Madrid. Madrid, 1986.

2) **Roanes, E.:** *"Interpretación geometrica de la teoría de ideales"* Publicaciones del Inst. "Jorge Juan" de Matematicas del C.S.I.C. Madrid, 1977.

3) **Zariski-Samuel:** *"Cumulative Algebra"*. Van Nostrand.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL CONCURSO-OPOSICIÓN

PARA PROFESORES AGREGADOS DE MATEMATICAS.

JUNIO - 1990

Ofrecemos a continuación los enunciados de los problemas que han sido propuestos en el concurso-oposición para Profesores Agregados de Matemáticas en Institutos de Bachillerato, por los cuatro tribunales constituidos al efecto, en la convocatoria de 1990.

TRIBUNAL Nº 1

1. Sean $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base del espacio R^3 y f una forma n-lineal de $E = R^3 \times R^3 \times R^3 \longrightarrow R$ que llamaremos "Quasialternada" por cumplir con $\forall\ \vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k \in B$, $f(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) =$

$$= \begin{cases} 0, \text{ si } e_i = e_j \text{ ó } e_i = e_k \text{ ó } e_j = e_k \\ 1, \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

-- a) ¿ Son ciertas las implicaciones:

1.- Si g es tri-lineal y $\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in R^3$, $g(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$, entonces g es quasialternada.

2.- f quasialternada $\Longrightarrow$ $f(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$, $\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in R^3$?

-- b) Si $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \in E$, llamaremos permanente de $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$. Calcular λ para que el permanente de $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ sea 1990, siendo $\vec{x}_1 = (-2\lambda, -30, -10)$, $\vec{x}_2 = (-\lambda, 20, -40)$, $\vec{x}_3 = (2, 0, \lambda^2)$.

- - - - - -

2. Se extraen aleatoriamente de una población cualquiera una muestra de 6 observaciones independientes. ¿ Cual es la probabilidad de que las dos últimas observaciones sean menores que las cuatro primeras ?

- - - - - -

3. Sea E un espacio métrico. Se llama número ρ de Lebesgue de un recubrimiento abierto $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de E a todo número $\rho > 0$ tal que $\forall x \in E$ la bola centrada en x y de radio ρ está contenida en algún A_λ del recubrimiento. Demostrar que si E tiene la propiedad de que en él toda sucesión infinita tiene algún punto de acumulación, entonces existe el número ρ de Lebesgue para todo recubrimiento abierto de E.

Como consecuencia, probar que si en un espacio metrico toda sucesión infinita tiene un punto de acumulación, entonces es compacto.

- - - - - -

4. Sea ABCD un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Por el punto P de intersección de sus diagonales se trazan las perpendiculares a los lados. Demostrar que el cuadrilátero cuyos vértices son los pies de estas perpendiculares es de perímetro mínimo entre los que se pueden inscribir en ABCD.

- - - - - -

5. En R^4 se define la sucesión $\vec{x}_n = \frac{1}{2} A\,\vec{x}_{n-1} + \vec{b}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$,

siendo $A = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n$.

- - - - - -

6. Una función $f(x)$ real de variable real, definida en la semirrecta positiva $[0,+\infty)$, se llama acotada exponencialmente cuando existen un c positivo α real, tales que $\forall x \in [0,+\infty)$, $|f(x)| \leq c.e^{\alpha x}$. Demostrar que: Si $f(x)$ es una función segmentariamente continua en $[0,+\infty)$ y acotada exponencialmente en dicha semirrecta, se verifica que existe un α real tal que $\int_0^{+\infty} e^{-yx} f(x)\,dx$ sea convergente para todo y mayor que α .

- - - - - -

7. Dado el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + n$:

a) Encontrar todos los polinomios $Q_i(x)$ tales que

$Q_i(x) \equiv x^2 + ax + b$ y $P(x) \equiv [Q_i(x)]^2 + m[Q_i(x)] + n$.

b) Calcular el valor de n sabiendo que si $R(x)$ es el polinomio $[\,\Sigma\, Q_i(x)\,]^2$, $R(x)$ tiene un máximo relativo en $x_0 = n/2$.

c) Obtener las raices de $P(x)$ para ese valor de n .

- - - - - -

8. Se consideran los números naturales escritos del modo usual en base 10. Se pide:

a) Encontrar el menor número tal que al suprimirle la primera cifra de la izquierda quede reducido a su quinta parte.

b) Demostrar que no existe ningún número que al suprimirle su primera cifra de la izquierda quede reducido a su doceava parte.

c) Formular un criterio general que permita afirmar cuándo un número queda reducido k veces al suprimirle su primera cifra.

- - - - - -

9. Hallar el volumen de un cuerpo que tiene por base un triángulo isósceles de altura h y base a . La sección transversal del cuerpo (perpendicular a h) es el segmento de una parábola cuya cuerda es igual a la altura de dicho segmento.

- - - - - -

10. Hallar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ven dos esferas bajo ángulos iguales.

- - - - - -

TRIBUNAL Nº 2

1. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)$:

$$f(x) = |2x - 1| + |2x + 1|$$

\- - - - - -

2. Un recipiente cilíndrico, cuya base es un círculo de radio 2 dm, contiene agua hasta una altura de 1 dm.

Se introduce en este recipiente una bola esférica de diámetro d. ¿ Cuál es el valor de d para que se verifique que el plano horizontal determinado por el nivel del agua es tangente a la bola ? Determínese el valor de d en milímetros.

\- - - - - -

3. Calcular el siguiente límite; $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot I_k$

siendo $I_k = \frac{1}{k+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

\- - - - - -

4. En el sistema de numeración de base x, los números $121_{(x}$, $152_{(x}$, $213_{(x}$, son tres términos consecutivos de una progresión aritmética creciente.

a) Deducir los criterios de divisibilidad por 4 y por 5 en dicho sistema de numeración.

b) Considerando en ese sistema los números capicúas de 4 cifras, demuestra que cualquiera de ellos es múltiplo de 4 y halla la suma de aquellos que son además múltiplos de 5.

\- - - - - -

5. Resolver la ecuación $2.E(x) + 3 = 4x$, siendo $E(x)$ la parte entera de x.

\- - - - - -

6. Encontrar un polinomio de grado siete, de variable real, $p(x)$, de tal forma que $p(x) - 1$ sea divisible por $(x+1)^4$ y $p(x) + 1$ sea divisible por $(x-1)^4$.

\- - - - - -

7. Sea (ABC) un triángulo; G su baricentro.
A', B', C' son respectivamente los puntos medios de los lados (BC), (CA) y (AB).
A todo punto M del plano se asocia el punto X tal que:

$$\vec{MX} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$$

a) Probad que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$.

b) Expresad $\vec{GX}$ en función de $\vec{GM}$. Dad una construcción geométrica de X. Demostrad que las rectas (MA') y (AX) son paralelas. Demostrad que se cumple lo mismo entre las rectas (MB') y (BX) y entre las rectas (MC') y (CX).

c) O es el centro del círculo circunscrito al triángulo (ABC). Demostrad que si M está en O, entonces X está en H, ortocentro del triángulo (ABC).

d) Demostrad la alineación de los puntos O, H y G. Calculad $\vec{OH}$ en función de $\vec{OG}$.

\- - - - - -

8. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideremos la siguiente clase de subconjuntos de X:

$T = \{X, \emptyset, \{1\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4,5\}\}$.

a) Demostrar que T es una topología de X.

b) Determinar los subconjuntos cerrados de X.

c) Hallar los puntos de acumulación del subconjunto $A = \{1,2,3\}$.

d) Hallar el interior, el exterior y la frontera del subconjunto $B = \{2,3,4\}$.

\- - - - - -

9. En una sucesión finita de números reales, la suma de 7 términos consecutivos cualesquiera es negativa, y la suma de 11 términos consecutivos cualesquiera es positiva. Determinar el número máximo de términos que puede tener la sucesión.

- - - - - -

10. Dadas las ecuaciones: (I): $e^x . \text{sen}(x) = 1$; (II): $\text{sen}(x) + \cos(X) = 0$ y (III): $e^x . \cos(x) = -1$, y la familia de intervalos $I_k = [\, 2k\pi \, , \, (4k+1)\pi/2 \,]$, siendo $k \in \mathbb{N}$:

a) Demostrar que la ecuación (I) tiene una solución real y sólo una, en cada uno de los intervalos I_k .

b) Si s_1 y s_2 son dos soluciones consecutivas de la ecuación (I), entonces demostrar que las ecuaciones (II) y (III) tienen, cada una de ellas, al menos una solución en el intervalo (s_1, s_2) .

- - - - - -

TRIBUNAL Nº 3

1. Se considera un espacio de probabilidad $\langle \Omega \, , \, \beta \, , \, P \rangle$, donde Ω es un conjunto finito $\neq \emptyset$. Una variable aleatoria real X toma los valores 1, 2, 3 y 6 con la ley de probabilidad siguiente:

$$P[\, X = n \,] = \lambda/n \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+ .$$

a) Calcular λ , la esperanza y la varianza de X .

b) Se considera la variable aleatoria $Y = (X - 3)^2$. Calcular el coeficiente de correlación de X sobre Y .

- - - - - -

2. Demostrar que $\forall n$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, se verifica:

$$\text{sen} \frac{\pi}{n} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{n} \cdot \text{sen} \frac{3\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \text{sen} \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} .$$

- - - - - -

3. Sea (X, T) un espacio compacto, (Y, T') un espacio topológico separado o Hausdorff y sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Demostrar:

a) $f(X) \subset Y$ es compacto.

b) Si la aplicación f es suprayectiva, entonces Y es compacto.

c) Si la aplicación f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

- - - - - -

4. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones diferenciables definidas en $0 < x < \pi$, que satisfacen las condiciones siguientes:

$f'g = \text{sen } x + \cos x$, $f.g' = -\text{sen } x$, $f(\pi/2) g(\pi/2) = 1$,

$\lim_{x \to 0} g(x) = -1$. Determinar $f(x)$ y $g(x)$.

- - - - - -

5. Sean E y F los espacios vectoriales de polinomios en una indeterminada x , con coeficientes reales y de grados menor o igual que 2 y menor o igual que 5, respectivamente. Se considera el homomorfismo $f: E \longrightarrow F$ definido por

$$f(P(x)) = P(x) . (x^3 + ax^2 + bx + 1) .$$

a) Calcular a y b sabiendo que el homomorfismo:

$$g: \; F/\text{im } f \longrightarrow \mathbb{R}^3 \;\Big|\; [Q(x)] \longrightarrow \Big(Q(-1), Q'(1), cQ'(1) - Q(-1) \Big)$$

está bien definido, independientemente del valor de c .

b) Para estos valores de a y b hallados, determinar el valor de c para que $(0, 1, 0) \in \text{im } g$.

- - - - - -

6. Se forman los números 49 , 4489 , 444889 , 44448889 , ..., intercalando cada vez 49 en el centro del número anterior. Demostrar que todos ellos son cuadrados perfectos y hallar la raiz cuadrada del que consta de 2n cifras.

- - - - - -

7. Las medidas de los angulos de un triángulo están en progresión aritmetica y las longitudes de las alturas del mismo triángulo también están en progresión aritmética. Demostrar que el triángulo es equilátero.

- - - - - -

8. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de los pares de normales a una parábola dada, que son perpendiculares entre sí.

- - - - - -

9. Obtener el volumen determinado por la intersección en ángulo recto de dos cilindros iguales (empalme en cruz de dos tuberías de igual diámetro).

- - - - - -

10. Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $n \geqslant k$. Calcular:

$$I_{k,n} = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\, dx$$

- - - - - -

TRIBUNAL Nº 4

1. Sean dos rectas r y s, secantes en O, formando un ángulo a $(a \neq 0)$. Sobre la bisectriz del ángulo a se toma un punto M por el que se traza una recta variable que corta a la recta r en el punto P y a la s en Q. Hagamos $OP = x$, $OQ = y$. Se pide:

a) Demostrar que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ es constante.

b) Calcular x e y de forma que el área del triángulo OPQ sea igual a una cantidad constante.

c) Calcular x para que el área del triángulo OPQ sea mínima.

- - - - - -

2. Si h es la altura del Sol en el primer vertical al oeste, en un lugar de latitud ϕ y λ es la longitud del Sol, probar que (con $\epsilon = 23^\circ\ 27'$):

$$\phi = \text{arc sen}\,[\,\text{sen}\,\lambda\ \text{sen}\,\epsilon\ \text{cosec}\,h\,]$$

- - - - - -

3. Se da la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hallar una recta de tañl modo que los puntos de su intersección con la curva M_1, M_2, M_3, M_4, determinen tres segmentos iguales $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$. ¿ cuales son las condiciones para que este problema tenga solución ?

- - - - - -

4. ¿ Para que valores de a tiene el sistema siguiente:

$$x^2 - y^2 = 0$$
$$(x-a)^2 + y^2 = 1$$

cero, una, dos, tres, cuatro o cinco soluciones ?

- - - - - -

5. Determinar los tres números complejos a, b, c tales que para todo elemento z del cuerpo C de los números complejos, se tenga:

a) $z^3 + (-6+5i)z^2 + (9-24i)z + 18+13i = (z+i)(az^2 + bz + c)$.

b) Resolver en C la ecuación

$$z^3 + (-6+5i)z^2 + (9-24i)z + 18+13i = 0 .$$

c) Los puntos A, B, C, afijos de las raices de la ecuación anterior, se consideran como vértices de un triángulo. Hallar:

1º) lados y ángulos de este triángulo deduciendo de qué tipo es.

2º) radio de la circunferencia inscrita en el triéngulo.

- - - - - - -

6. Determinar las condiciones para que el polinomio:

$P(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$, sea divisible por por $x^4 + x^2 + 1$.

- - - - - -

7. Resolver el sistema
$$\begin{cases} x + y + z = -a \\ x^2 + y^2 + z^2 = -a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -a^3 \end{cases}$$

- - - - - -

8. Sea f una función contínua y estrictamente creciente en $[a\ ,\ b]$. Sea g la inversa de f en $[f(a)\ ,\ f(b)]$. Calcular razonadamente:
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx .$$

- - - - - -

9. Con 27 dados blancos se forma un cubo de 3 dados por arista, sólido, cuyas caras se pintan de negro. Se deshace el cubo y una persona, con los ojos cerrados lo reconstruye. Hallar la probabilidad de que resulte un hexaedro pintado de negro.

- - - - - -

10. Def. 1: Se denomina Z-matrices a las matrices cuyos elementos son números enteros racionales.

Def. 2: Dos matrices A , A' (A' = traspuesta de A), se denominan Z-semejantes, si existe una Z-matriz, X , cuadrada y unitaria (det X = ±1), tal que se verifique: (1) $A = X.A'.X^{-1}$.

PROBLEMA: Dada la Z-matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
comprobar que las Z-matrices A y A' son Z-semejantes. Es decir, demostrar que existe X , con las condiciones dadas en la Def. 2 y que además, la matriz X es simétrica.

- - - - - -

PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL CONCURSO-OPOSICIÓN PARA PROFESORES AGREGADOS DE MATEMATICAS.

ANDALUCÍA - 1990

1. Encontrar razonadamente los numeros de cuatro cifras de la forma *abab* que disminuidos en una unidad sean cuadrados perfectos.

- - - - - -

2. Se forma un triángulo uniendo tres puntos al azar sobre una circunferencia. Hallar la probabilidad de que el triángulo sea:
   a) Acutángulo.
   b) Obtusangulo.
   c) Rectángulo.

- - - - - -

3. Estudiar y representar la función definida por
$$y = \cos^2 x \operatorname{sen} 2x \quad ;$$
calcular el área limitada por dicha curva y el eje OX entre $x = 0$ y $x = \pi$.

- - - - - -

4. Dada la circunferencia de centro (1 , 0) y radio 2 , se trazan por el origen dos rectas variables que forman entre sí un ángulo $w = 30^\circ$. Sean A y B los puntos medios de las cuerdas que cada una de ellas intrecepta en la circunferencia. Sea M el punto medio de AB . Hallar el lugar geométrico de geométrico de los puntos M .

- - - - - -

5. Un rayo luminoso parte del punto $F(5,10)$ y despues de reflejarse en la recta $3x + 4y = 30$, pasa por el el punto $P(3,4)$. Determinar: a) Las coordenadas del punto de aquella recta en el que el rayo luminoso cambia de dirección.

b) Longitud del camino recorrido por el rayo desde F hasta P y explicar por que esa longitud es mínima.

- - - - - -

6. Sea $R_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales. Encontrar una base en $R_2(x)$ que contenga a una base del subespacio M que esta engendrado por el conjunto $A = \{ x-1 , x^2+1 , 3x^2+2x+1 \}$.

- - - - - -

7. Sea $s \in S_n$ una permutación del conjunto $I = (1,2,3,\dots,n)$. Se dice que una permutación es total si $\forall i \in I$, $s(i) \neq i$. Sea D_n el conjunto de las permutaciones totales. Se pide:

a) Definir el conjunto $\overline{D_n}$ (complementario de D_n en S_n) y domostrar que se puede considerar como la unión de una familia de n partes A_i, $i = 1,2,3,\dots,n$. Es decir:

$$\overline{D_n} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad .$$

b) Hallar el cardinal de $\overline{D_n}$ y a partir de él, el cardinal de D_n o sea el número de permutaciones totales.

c) Hallar el siguiente límite: $$\lim_{n \to \infty} \cdot \frac{\text{card}(D_n)}{n!}$$

- - - - - -

8. Dadas las esferas de radios R y r tales que la distancia entre sus centros es d, se sitúa un punto luminoso en la línea que une los centros, entre ambas esferas. ¿ En qué posición habrá que situarlo para que la suma de las superficies iluminadas en ambas esferas sea maxima ?

- - - - - -

RESEÑA DE LIBROS

JAPANESE TEMPLE GEOMETRY PROBLEMS, por H. Fukagawa y D. Pedoe. The Charles Babbage Research Centre. (P.O. Box 272, St. Norbert Postal Station, Winnipeg. Canadá R3J 1L6) 206 pags. y numerosas figuras. 1989.

Los suscriptores de la excelente revista canadiense de problemas CRUX MATHEMATICORUM conocíamos dede hace años los bellos problemas geometricos propuestos por el primero de los autores de este libro, **Hidetosi Fukagawa**, que publicó en GACETA MATEMATICA, 2ª serie, vol.1, nº 2 (1988) el artículo *"SANGAKU: Las tabletas matematicas de madera japonesas"*, traducido del inglés por quien esto escribe. Estos problemas proceden de la época en que Japón estuvo aislado de Occidente (siglos XVII a XIX), y el libro que comentamos es una recopilación de 35 ejemplos resueltos y 230 propuestos, de los que se incluye la respuesta final o numérica.

Los problemas suelen versar sobre complicadas configuraciones de círculos tangentes entre sí y a triángulos o cuadrados, así como su generalización natural al espacio, con esferas tangentes a cilindros o contenidas en elipsoides. El problema de *Malfatti*, por ejemplo, fué propuesto y resuelto en Japón, 30 años antes que en Europa. Siempre que es posible, se incluye la solución original de los problemas, que tiene la particularidad de no utilizar apenas trigonometría, con lo que la complicación algebraica alcanza en ocasiones cotas realmente notables. Otras veces - cuando la fuente ha desaparecido, bien el libro, bien la tableta votiva de madera que contenía el problema y que se colgaba en los templos *"para gloria de los dioses y honor de los autores"* - se incluye la solución "moderna", usando la trigonometría o la inversión, que no era conocida en Japon entonces, segun dice Fukagama (es sabido que el inventor occidental de la inversion fue Steiner, pero dado nuestro desconocimiento de la matematica tradicional oriental, es conveniente no aventurar juicios).

Simplemente a título de ilustración, mencionamos uno de los problemas: *En el triangulo* ABC , *sea* D *un punto del lado* BC *tal que los circulos inscritos en los triangulos* ABD *y* ADC *tienen el mismo radio. Hallar la longitud de la transversal* AD *en función de los lados de* ABC .

El libro incluye ademas una extensa bibliografía (de títulos japoneses, debe advertirse) relativa a los problemas de las tabletas de madera, reproducciones de algunas de ellas, fotos de algunos templos y un mapa con el número de tabletas halladas en cada prefectura de Japon.

Los aficionados a los problemas difíciles de geometría disfrutarán (mejor dicho, disfrutaremos) con este libro, de precio asequible (15 $ canadienses), que se puede pedir a la dirección indicada en la cabecera de este breve comentario.

Francisco Bellot
Catedratico de Matematicas del
I.B. *"Emilio Ferrari"* de Valladolid

PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA XXXI OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL CELEBRADA EN CHINA EN 1990

PROBLEMA Nº 1 :

Se consideran en una circunferencia dos cuerdas AB y CD que se cortan en el punto E interior a la circunferencia. Sea M un punto del segmento EB situado estrictamente entre B y E . La tangente a la circunferencia que pasa por D, E y M en el punto E corta a las rectas BC, AC en los puntos F, G respectivamente.

Si $\frac{AM}{AB} = t$, determínese $\frac{EG}{EF}$ en función de t .

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 2 :

Se da un conjunto E de 2n-1 (n > 3) puntos distintos sobre una circunferencia. Se supone que exactamente k de los puntos dados se colorean de negro. Tal coloración de k puntos es "buena" si existe al menos un par de puntos negros tal que el interior de uno de los arcos formados por esos dos puntos contiene exactamente n puntos de E .

Hállese el mínimo valor de k para el que toda coloración de exactamente k puntos es "buena".

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 3 :

Hállense todos los números enteros n > 1 tales que $\frac{2^n+1}{n^2}$ es un entero.

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 4 :

Sea Q^+ el conjunto de los números racionales estrictamente positivos. Constrúyase una función $f: Q^+ \longrightarrow Q^+$ tal que

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y} \quad \text{para todos } x,\ y \in Q^+ .$$

- - - - - -

PROBLEMA Nº 5 :

Dos personas A y B participan en un juego eligiendo alternativamente los números $n_1, n_2, \ldots$ de acuerdo con las siguientes reglas:

Al principio se da un número natural $n_0 > 1$.

Una vez conocido n_{2k} , el jugador A puede escoger cualquier $n_{2k+1} \in N$ tal que $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$.

Después, el jugador B escoge un número $n_{2k+2} \in N$ tal que $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ es una potencia de un número primo con exponente entero estrictamente positivo.

El jugador A gana el juego si logra elegir el número 1990, y el jugador B gana el juego si logra elegir el número 1.

(a) ¿ Para qué valores iniciales n_0 el jugador A puede asegurar su victoria ?

(b) ¿ Para qué valores iniciales n_0 el jugador B puede asegurar su victoria ?

(c) ¿ Para qué valores iniciales n_0 puede cada jugador asegurar que el otro no ganará ?

- - - - - -

PROBLEMA Nº 6 :

Demuéstrese que existe un polígono convexo de 1990 lados con las propiedades siguientes:

(i) Todos los ángulos son iguales.

(ii) Las longitudes de los 1990 lados son una permutación de los números $1^2, 2^2, \ldots, 1989^2, 1990^2$.

- - - - - -

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA V OLIMPIADA IBERO-AMERICANA DE MATEMATICAS CELEBRADA EN VALLADOLID EN 1990:

PROBLEMA Nº 7 :

Sea f una función, definida en el conjunto de los enteros mayores o iguales que cero, que verifica las dos condiciones siguientes:

I) Si $n = 2^j - 1$, para $j = 0,1,2,\ldots$, entonces $f(n)$ es cero.

II) Si $n \neq 2^j - 1$, para $j = 0,1,2,\ldots$, entonces $f(n+1) = f(n) - 1$.

a) Demostrar que para todo entero n , mayor o igual que cero, existe un entero k , mayor o igual que cero, tal que

$$f(n) + n = 2^k - 1 .$$

b) Calcular $f(2^{1990})$.

- - - - - -

PROBLEMA Nº 8 :

En un triángulo ABC , sean I el centro de la circunferencia inscrita y D , E y F sus puntos de tangencia con los lados BC , AC y AB , respectivamente. Sea P el otro punto de intersección de la recta AD con la circunferencia inscrita.

Si M es el punto medio de EF , demostrar que los cuatro puntos P , I , M y D pertenecen a una misma circunferencia o están alineados.

- - - - - -

PROBLEMA Nº 9 :

Sea $f(X) = (X + b)^2 - c$ un polinomio con b y c números enteros.

a) Si p es un número primo tal que p divide a c y p^2 no divide a c, demostrar que, cualquiera que sea el número entero n, p^2 no divide a $f(n)$.

b) Sea q un número primo, distinto de 2, que no divide a c. Si q divide a $f(n)$ para algún número entero n, demostrar que para cada entero positivo r, existe un número entero n' tal que q^r divide a $f(n')$.

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 10 :

Sea C_1 una circunferencia, AB uno de sus diámetros, t su tangente en B y M un punto de C_1 distinto de A y de B.

Se construye una circunferencia C_2 tangente a C_1 en M y a la recta t.

a) Determinar el punto P de tangencia de t y C_2 y hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias C_2 al variar M.

b) Demostrar que existe una circunferencia ortogonal a todas las circunferencias C_2.

NOTA: Dos ciscunferencias son ortogonales si se cortan y las tangentes respectivas en los puntos de intersección son perpendiculares.

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 11 :

Sean A y B vértices opuestos de un tablero cuadriculado de n por n casillas $(n \geq 1)$, a cada una de las cuales se añade su diagonal de dirección AB, formando así $2n^2$ triángulos isósceles. Se mueve una ficha recorriendo un camino que va desde A hasta B formado por segmentos del tablero, y se coloca, cada vez que se recorre un segmento, una semilla en cada uno de los triángulos que admiten ese segmento como lado. El camino se recorre de tal forma que no se pasa por ningún segmento más de una vez, y se observa, después de recorrido, que hay exactamente dos semillas en cada uno de los $2n^2$ triángulos del tablero. ¿ Para qué valores de n es posible esta situación ?

\- - - - - -

PROBLEMA Nº 12 :

Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3 con coeficientes racionales. Probar que si el gráfico de f es tangente al eje x, entonces $f(x)$ tiene sus tres raices racionales.

\- - - - - -

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	occ.
1	Varios	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	–	–	–	–	C
3	OME-f2 1984	12	19	19	19	18	19	19	19	–	–	C
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	–	–	–	–	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	–	–	–	–	C
6	Varios	7	7	16	–	–	–	–	–	–	–	C
7	OMI-85 (Finlª)	9	9	16	16	9	9	–	–	–	–	C
8	OIM-85(Bogotá)	10	10	17	10	10	11	–	–	–	–	C
9	OME-f2 1985	18	19	20	18	19	19	–	–	–	–	C
	Varios	–	–	–	–	–	–	17	17	11	17	C
10	China y Austª	20	15	21	20	15	{20 / 21}	20	23	21	–	C
11	OME-f1 1986	13	14	14	14	14	23	20	15/	20	12	C
	OMI-86(Varsoª)	26	20	12	21	–	–	–	–	–	–	C
12	OIM-87(Urug.)	16	14	14	17	15	17	–	–	–	–	C
	OME-f1-Extremª	–	–	–	–	–	–	15	15	15	21	C
13	OME-f2 1987	20	21	21	21	21	21	–	–	–	–	C
14	Varios	15	15	15	15	–	–	–	–	–	–	C
15	OMI-87 (Cuba)	18	18	18	21	21	21	–	–	–	–	C
16	OME-f1 1987	22	22	21	18	22	22	22	22	–	–	C
17	OME-f2 1988	25	23	23	25	23	23	–	–	–	–	C
18	OIM-Perú 1988	23	23	23	23	25	25	–	–	–	–	C
19	OMI-88(Australia)	23	26	24	24	23	26	–	–	–	–	C
20	OME-f1 (1988)	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2 (1989)/ OIM-89 (Cuba)	24 / 26	XX / XX	24 / –	XX / –	XX / –	24 / / –	XX / –	25 / –	XX / –	26 / –	
22	CMI-89 (RFA)/ oposiciones	XX / XX	XX / XX	XX / XX	XX / –	XX / –	XX / / –	XX / –	XX / –	XX / –	XX / –	
23	oposiciones	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	
24	OME-f1 (1990)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	
25	OME-f2/1(1990)	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OME = Olimpiada Matemática Española - fase 1ª o 2ª.

PROBLEMAS RESUELTOS

Publicamos a continuación la solución del problema 112 del Boletín nº 11 (de la Olimpiada Matemática Internacional celebrada en Varsovia en 1986), único de los propuestos en los 20 primeros números, del que todavía no se había recibido ninguna solución procedente de nuestros lectores. La que publicamos ahora es la presentada por el profesor ponente de ese problema en la citada Olimpiada.

PROBLEMA 112 (Boletín nº 11):

A cada vertice de un pentágono regular le asignamos un número entero de modo que la suma de estos cinco números es estrictamente positiva. Si a tres vertices consecutivos corresponden los números x , y , z , con $y < 0$, entonces se puede realizar la operación siguiente: Los números x , y , z , se reemplazan respectivamente por los $x+y$, $-y$, $z+y$. Esta operación se efectúa repetidamente mientras alguno de los cinco números sea estrictamente negativo. Determine si después de un número finito de pasos, este procedimiento necesariamente termina.

Solución:

Sea $f(X) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$

$$= (x_3-x_1)^2 + (x_4-x_2)^2 + (x_5-x_3)^2 + (x_1-x_4)^2 + (x_2-x_5)^2 .$$

Para ver como cambia el valor de f en cada paso, supongamos $x_3 < 0$, con lo que el vector $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ se transformará en el $Y = (x_1, x_2+x_3, -x_3, x_3+x_4, x_5)$, y tendremos

$$f(Y) = (x_1+x_3)^2 + (x_4-x_2)^2 + (x_5+x_3)^2 + (x_4+x_3-x_1)^2 + (x_2+x_3-x_5)^2$$

de donde resulta $F(Y) - f(X) = 2x_3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) < 0$. Por lo tanto, los valores de f , después del paso, constituyen una sucesión decreciente de enteros no negativos, y tal sucesión es necesariamente finita.

PROBLEMA 2 (Boletín nª 19)

Sea n un número entero estrictamente positivo. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ subconjuntos de un conjunto B tales que

a) cada A_i tiene exactamente 2n elementos

b) para todo (i,j), $1 \leq i < j \leq 2n+1$, $A_i \cap A_j$ contiene uno y sólo un elemento

c) cada elemento de B pertenece al menos a dos de los conjuntos A_i

Determinar para qué valores de n se puede asignar a cada uno de los elementos de B uno de los números 0 ó 1, de tal manera que cada uno de los conjuntos A_i tenga exactamente n elementos a los cuales se ha asignado 0.

Solución

Sean a, b, c,... elementos de B. Supongamos que el elemento a figura en k ($2 \leq k \leq 2n$) subconjuntos A_i, que podemos suponer son los k primeros: $A_1, A_2, \ldots, A_k$. para completar A_1 hay que añadir 2n-1 elementos distintos y distintos de a.

$A_1 = \{a, \ldots\}$
$A_2 = \{a, \ldots\}$
....
$A_k = \{a, \ldots\}$

Siguiendo el razonamiento, para completar A_k hay que agregar 2n-1 elementos distintos de a y distintos de todos los añadidos anteriormente.

Por tanto, hasta ahora se han utilizado

$$1 + (2n-1)k \text{ elementos distintos.}$$

Para formar A_{k+1} se puede tomar un elemento de A_1 ($\neq a$, puesto que se ha supuesto que a se incluye en sólo k subconjuntos A_i), otro de A_2 ($\neq a$),... otro de A_k ($\neq a$). Para completar A_{k+1} hay que añadirle 2n-k nuevos elementos, esto es, distintos de todos los utilizados hasta ahora.

Para formar A_{k+2} se puede tomar un elemento de A_1 ($\neq a$ y $\neq$ del tomado en A_{k+1}), otro de A_2 ($\neq a$ y $\neq$ del tomado en A_{k+1}) ... y otro de A_{k+1} (elegido entre los 2n-k nuevos elementos). Para completar A_{k+2} basta agregarle 2n-(k+1) nuevos elementos (no incluídos en ningún subconjunto anterior).

Siguiendo el proceso:

Para completar	A_{k+1}	hacen falta	2n-k	nuevos elementos
"	A_{k+2}	"	2n-(k+1)	"
...	...	...	...	...
"	A_{k+h}	"	2n-(k+h-1)	"
...	...	...	...	...
"	A_{2n}	"	1	"
"	A_{2n+1}	"	0	"

en total $(2n-k) + (2n-(k+1)) + \ldots + 1 + 0 = \frac{(2n-k).(2n-k+1)}{2}$.

Luego el número total de elementos distintos que existen en los 2n+1 subconjuntos, es

$$N = 1 + (2n-1).k + \frac{(2n-k).(2n-k+1)}{2}$$

y como el número total de elementos iguales o distintos en los 2n+1 subconjuntos es 2n(2n+1), dado que cada uno tiene 2n elementos, y, a excepción de a que se repite k veces, los restantes se repiten al menos dos veces, luego se debe verificar

$$k + 2\left[(2n-1)k + \frac{(2n-k).(2n-k+1)}{2}\right] \leq 2n(2n+1)$$

de donde $k^2 - 2k \leq 0 \rightarrow k(k-2) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq 2$ y como por otra parte $k \geq 2$, resulta $k = 2$, esto es, cada elemento se repite 2 y sólo 2 veces en los $2n+1$ subconjuntos, existiendo $n(2n+1)$ elementos distintos.

Una manera sencilla de formar los $2n+1$ subconjuntos consiste en dotar a cada elemento de dos subíndices que indiquen a que dos subconjuntos pertenece el elemento considerado. Así, por ejemplo, para $n = 2$

A_1	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
A_2	a_{12}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
A_3	a_{13}	a_{23}	a_{34}	a_{35}
A_4	a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{45}
A_5	a_{15}	a_{25}	a_{35}	a_{45}

Al asignar 0 ó 1 a cada elemento de B, en cada fila deben existir el mismo número de elementos marcados con 0 y marcados con 1, y, por tanto, en el total de los $2n+1$ subconjuntos habrá el mismo número de elementos marcados con 0 y marcados con 1; como el número total de elementos (iguales o distintos) es: $2n(2n+1)$ existirán $n(2n+1)$ elementos marcados con 0 y otros tantos marcados con 1. Ahora bien, como cada elemento se repite 2 y sólo 2 veces existirán $n(2n+1)/2$ elementos distintos marcados con cada uno de los dos números; finalmente, como $2n+1$ es impar, para que ésto sea posible tiene que cumplirse que $n = \dot{2}$, que es la condición pedida.

José V. García Sestafé, (Madrid).

- ■ - ■ - ■ -

PROBLEMA 62 (Boletín nº 19)

Sean a y b números enteros estrictamente positivos tales que $ab + 1$ divide a $a^2 + b^2$. Demuestre que $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ es un cuadrado perfecto.

Solución:

Sea $f(a,b) = (a^2 + b^2)/(1 + ab)$.

Si $f(a_0, b_0) = m \in N^*$, con $a_0 \geq b_0$, hay que demostrar que $m = k^2$, con $k \in N^*$. Pero

$$f(a_0,b_0) = m \iff a_0^2 - (mb_0)a_0 + b_0^2 - m = 0 \quad ;$$

entonces la ecuación

$$x^2 - mb_0x + b_0^2 - m = 0 \qquad (*)$$

tiene dos raices enteras, una de las cuales es a_0 y la otra $b_1 = (b_0^2 - m)/a_0$ (por ser $b_0^2 - m$ el producto de las raices); ahora

$$b_1^2 - mb_0b_1 + b_0^2 - m = 0 \Longrightarrow f(b_1, b_0) = m \quad ;$$

entonces $a_1 = b_0$ y $b_1 = (b_0^2 - m)/a_0$, cumplen $f(a_1, b_1) = m$; además

$$a_0 \geq b_0 \Longrightarrow b_1 = (b_0^2 - m))/a_0 \leq (b_0^2 - m)/b_0 < b_0 = a_1 \Longrightarrow a_1 > b_1 .$$

Repitiendo este procedimiento, se tiene la sucesión:

$$a_0 \geq b_0 = a_1 \geq b_1 = a_2 > b_2 \ldots\ldots = a_k > b_k \ , \qquad (1)$$

donde $\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ b_n = (b_{n-1}^2 - m)/a_{n-1} \end{cases}$ con $f(a_n, b_n) = m$. (2)

Si todas las a_i fuesen distintas de cero, esta sucesión se podría prolongar indefinididamente; además, como $f(a_n, b_n) = m > 0$, $1 + a_nb_n = 1 + a_na_{n+1} > 0$, y todos los a_i tienen el mismo signo; entonces, (1) sería una sucesión estrictamente decreciente de números enteros positivos, lo que lleva a contradicción.

Por tanto, debe ser $a_k = b_{k-1} = 0$, y

$f(a_{k-1}, b_{k-1}) = m \Longrightarrow a_{n-1}^2 = m$, es decir, m es cuadrado perfecto. c.d.d.

Observaciones:

(I) Para cálculos practicos que se veran a continuación, podemos usar el hecho de que la suma de raices de la ecuación (*) es mb_0, es decir, $a_0 + b_1 = mb_0$, $b_1 = mb_0 - a_0$; inductivamente se tiene:

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ b_n = mb_{n-1} - a_{n-1} \end{cases} \qquad (3)$$

(II) Si tomamos la sucesión (1) en sentido contrario, es decir, si definimos $(c_n, d_n) = (a_{k-n}, b_{k-n})$, se tiene $c_1 = \sqrt{m}$ y $d_1 = 0$; y por (3),

$$\begin{cases} d_{n+1} = c_n \\ c_{n+1} = md_{n+1} - d_n \end{cases} \quad ; \qquad (4)$$

esto nos permite alcanzar todos los pares de soluciones de $f(a,b) = m$, con $m = \lambda^2$; los primeros son:

$(\lambda, 0)$, (λ^3, λ) , $(\lambda^5-\lambda, \lambda^3)$, $(\lambda^7-2\lambda^3, \lambda^5-\lambda)$, ...

(III) Si (a,b) es solución $(a^2+b^2)/(1+ab) = m = \lambda^2$ sea d el $m.c.d.\ (a,b)$. Evidentemente $d \mid \lambda$; además, como en las iteraciones (4), $c_1 = \lambda$, $d_1 = 0$, todos los pares (c_n, d_n) son divisibles por λ y por tanto, lo son todas las soluciones; entonces, $\lambda \mid d$ y se tiene $\lambda = d$.

(IV) Resolviendo la ecuación en diferencias (4) se comprueba que todas las soluciones de $(a^2+b^2)/(1+ab) = m = \lambda^2$, con $a > b > 0$ son: (para $n = 2, 3, 4, \ldots$)

$$\begin{cases} a = f_n(\lambda) \\ b = f_{n-1}(\lambda) \end{cases}$$

con $f_n(\lambda) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^4-4}}\left[\left(\dfrac{\lambda^2+\sqrt{\lambda^4-4}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{\lambda^2-\sqrt{\lambda^4-4}}{2}\right)^n\right]$,

y λ entero mayor que 1 .

Fernando Chamizo Lorente (Madrid).

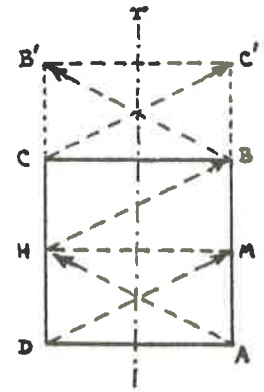
PROBLEMA 2 (Boletín nº 20)

Dado un cuadrado ABCD, sean M y H los puntos medios de los respectivos lados AB y CD. Se considera la transformación T entre puntos del plano de dicho cuadrado que conserva las distancias y tal que

$$T(A) = H, \qquad T(H) = B, \qquad T(D) = M$$

Razonar si existe o no una recta r tal que $T(r) = r$.
¿Existe algún punto X tal que $T(X) = X$)?

Solución



Como T conserva las distancias, se deduce de forma inmediata que T transforma cada segmento en otro de igual longitud.

Apoyándonos en lo anterior, podemos afirmar que a 4 lados iguales corresponden otros 4 lados iguales y que a 2 diagonales iguales, corresponden otras dos diagonales iguales. Según esto, el cuadrado ABCD ha de transformarse necesariamente en el cuadrado HB'C'M.

Vemos que T es la composición de la traslación de vector AM con la simetría respecto de la mediatriz del lado BC. Por lo tanto, es imposible que exista un punto X, tal que $T(X) = X$; sin embargo, sí existe r (la mediatriz mencionada) tal que $T(r) = r$.

Jaime Tagarro García, (Madrid).
(3º BUP, I.B. "AVENIDA DE LOS TOREROS")

Otra solución de: José V. García Sestafé, (Madrid).

- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 5 (Boletín nª 20)

Se escriben varias colecciones de números de modo que en cada una de esas colecciones se empleen una sola vez cada uno de los diez dígitos, del 0 al 9, (sin que estos números comiencen por un 0 por la izquierda) y que la suma de los números que forman cada colección escrita sea menor que 75. ¿Cuántas colecciones de esa clase se podrán escribir? (No se consideran distintas colecciones con los mismos números pero en otro orden).

Solución

Clasificamos las colecciones según la cantidad de números de dos cifras que pueden aparecer. Simbolizamos por (xy) el número de dos cifras y+10x y por d_j un dígito.

a) Colecciones con 0 números de dos cifras.

No hay solución, ya que cero habría de pertenecer a la colección y a la vez no comenzar por si mismo.

b) Colecciones con 1 número de dos cifras.

$$(xy) + \sum_{i=1}^{8} d_i < 75 \quad \text{con } x \neq 0 \text{ y } d_j \neq 0\text{, luego } y = 0.$$

$$(x0) + \sum_{i=1}^{8} d_i = 10x + (45-0-x) < 75 \text{ pues 45 es la suma}$$

de los diez dígitos

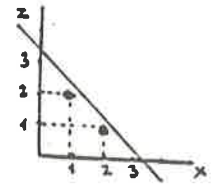
$$x < 10/3. \quad x\text{: } 1,\ 2 \text{ y } 3$$

Tras cada elección de x (1, 2 ó 3), como y = 0, los ocho dígitos restantes quedan determinados: HAY TRES SOLUCIONES.

c) Colecciones con 2 números de dos cifras.

$$(xy) + (zu) + \sum_{j=1}^{6} d_j < 75 \text{ con } x \neq 0,\ z \neq 0,\ d_j \neq 0 \text{ luego } y = 0 \text{ ó } u = 0.$$

I) Si y = 0, $(x0) + (zu) + \sum_{j=1}^{6} d_j = 10x+u+10z + (45-x-0-z-u) < 75$, es decir, $3x+3z < 10$, cuyas dos soluciones definitivas se muestran gráficamente.



Los puntos de los ejes se exluyen por contener algún dígito nulo, y la diagonal por repetir dígito.

Soluciones:

$$x = 1 \quad z = 2\text{, es decir } 10 + (2u) + \sum_{j=1}^{6} d_j$$

$$x = 2 \quad z = 1\text{, es decir } 20 + (1u) + \sum d_j$$

En cada caso u puede tomar los 7 valores no usados. En ambas situaciones los 6 dígitos restantes quedan determinados tras fijar u.

HAY 14 SOLUCIONES.

II) Si u = 0 se reproduce la situación anterior sin que haya lugar a nuevas soluciones

d) Colecciones con tres números de dos cifras.

$$(xy) + (zu) + (vw) + \sum_{j=1}^{4} d_j < 75$$

$$(10x+y) + (10z+u) + (10v+w) + (45-x-y-z-u-v-w) < 75$$

$3x + 3z + 3v < 10$ que no da soluciones del problema pues cada una de las tres variables es no nula por ocupar la posición de primer dígito.

HAY EN TOTAL, 17 SOLUCIONES.

F. Alvarez H., (Madrid).

Otra solución de: José V. García Sestafé, (Madrid).

- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 8 (Boletín nª 20)

Sea m un número impar; demostrar que para todo n entero mayor que 2, la suma de las potencias mésimas de los números primos con n, y menores que él, es un múltiplo de n.

Solución

Usaremos la propiedad m.c.d (n, n-i) = m.c.d (n,i).

Sea $n > 2$:

Sean $a_1, a_2, \dots, a_k$ todos los números primos con n, menores que $\frac{n}{2}$ $(a_k \neq \frac{n}{2})$.

Por la propiedad también serán primos con n, los números $n-a_1, n-a_2, \dots, n-a_k$, todos ellos menores que n.

Se trata de ver que

$$\underbrace{a_1^{2m+1} + (n-a_1)^{2m+1}}_{b_1} + \dots + \underbrace{a_k^{2m+1} + (n-a_k)^{2m+1}}_{b_k}$$

es múltiplo de n.

Si vemos que $b_1, \dots, b_k$ son múltiplos de n, la suma también será múltiplo de n.

$$a^{2m+1} + (n-a)^{2m+1} = a^{2m+1} + \sum_{j=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} n^{2m+1-j} \cdot (-a)^j =$$

$$= a^{2m+1} + \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m+1}{j} n^{2m+1-j} (-a)^j + \binom{2m+1}{2m+1} (-a)^{2m+1} =$$

$$= a^{2m+1} - a^{2m+1} + \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m+1}{j} n^{2m+1-j} a^j = n \cdot \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m+1}{j} n^{2m-j}$$

Luego $b_1, \dots, b_k$ son múltiplos de n y la suma también lo será.

Miguel Angel Cabezón Ochoa.

Otra solución de: Mercedes Rico (I.B. Fortuny, Madrid).
José V. García Sestafé (Madrid).

- ¤ - ¤ - ¤ -

PROBLEMA 9 (Boletín nª 20)

Las curvas A, B, C y D están definidas en el plano como sigue:

$$A = \left\{(x,y) : x^2 - y^2 = \frac{x}{x^2+y^2}\right\},$$

$$B = \left\{(x,y) : 2xy + \frac{y}{x^2+y^2} = 3\right\},$$

$$C = \left\{(x,y) : x^3 - 3xy^2 + 3y = 1\right\},$$

$$D = \left\{(x,y) : 3x^2y - 3x - y^3 = 0\right\};$$

Demostrar que $A \cap B = C \cap D$.

Solución

Sean $P(x,y) = 0$ y $Q(x,y) = 0$ las ecuaciones de dos curvas en el plano XOY. Si (x_0,y_0) es un punto de la intersección de ambas curvas, se cumple

$$P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$$

y, recíprocamente, si se cumple lo anterior, (x_0,y_0) es un punto perteneciente a la intersección de ambas curvas.

Haciendo $z = x+iy$, si $P(x,y) + i\,Q(x,y)$ se puede escribir como función únicamente de z, esto es

$$P(x,y) \pm i\,Q(x,y) = f(z)$$

se tendrá que para todo punto (x_0,y_0) perteneciente a la intersección de las referidas curvas $f(z_0) = 0$ siendo $z_0 = x_0 + iy_0$.

Recíprocamente, para todos los $z_0 = z_0 + iy_0$ tales que $f(z_0) = 0$, los puntos (x_0, y_0) son puntos de intersección de ambas curvas, ya que

$$f(z_0) = 0 \Rightarrow P(x_0,y_0) + i\,Q(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$$

Para las dos primeras curvas se puede escribir

$$x^2 - y^2 - \frac{x}{x^2+y^2} + i\left[2xy + \frac{y}{x^2+y^2} - 3\right] = (x+iy)^2 - \frac{x-iy}{(x+iy)\cdot(x-iy)} - 3i$$

y como (0,0) no pertenece a la intersección, haciendo $x+iy = z$, resulta

$$(x+iy)^2 - \frac{1}{x+iy} - 3i = z^2 - \frac{1}{z} - 3i$$

de donde $f(z) = z^3 - 3iz - 1$, luego los puntos de intersección de ambas curvas serán los puntos (x_k,y_k), $k = 1, 2, 3$ correspondientes a las tres raíces $z_k = x_k + iy_k$ de la ecuación

$$z^3 - 3iz - 1 = 0$$

Para la tercera y la cuarta curvas, se obtiene análogamente

$$x^3 - 3xy^2 + 3y - 1 + i(3x^2y - 3x - y^3) = (x+iy)^3 - 3(xi-y) - 1 =$$

$$= (x+iy)^3 - 3i(x+iy) - 1 = z^3 - 3iz - 1$$

que coincide con la anteriormente hallada, luego ambos pares de curvas tienen los mismos puntos comunes.

José V. García Sestafé, (Madrid).

Otras soluciones de: Mercedes Rico (I.B. Fortuny, Madrid).
F. Alvarez H.

- ■ - ■ - ■ -

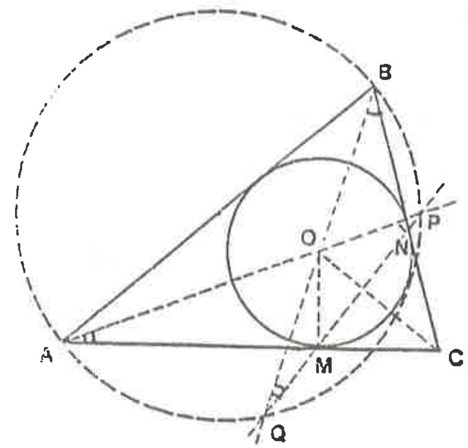
PROBLEMA 10 (Boletín nª 21)

La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, es tangente a los lados AC y BC en los puntos M y N respectivamente. Las bisectrices de A y B intersecan a MN en los puntos P y Q respectivamente. Sea O el incentro del triángulo ABC.

Probar que $\overline{MP} \cdot \overline{OA} = \overline{BC} \cdot \overline{OQ}$.

Solución

Designando por A, B y C la medida de los respectivos ángulos, se tiene OAB = OAC = A/2. En el triángulo MNC, por ser isósceles, $\widehat{NMC} = \widehat{MNC} = (\pi - C)/2$, luego $\widehat{AMN} = \pi - (\pi - C)/2 = \pi/2 + C/2$, en el triángulo APM, $\widehat{APM} = \pi - A/2 - (\pi + C)/2 = B/2 = \widehat{QBC}$.



Además, $\widehat{POQ} = \widehat{AOB} = \pi - (A+B)/2$ y en el triángulo QOP, $\widehat{OOP} = \pi - (\pi-(A+B)/2) - B/2 = A/2 = \widehat{PAC} = \widehat{PAB}$, y por tanto el segmento PB se ve bajo el mismo ángulo desde A y desde Q, luego A, Q, P y B son concíclicos; en la referida circunferencia, por potencia de un punto se tiene

$$OA \cdot OP = OB \cdot OQ \qquad (1)$$

Por otra parte, los triángulos OBC y OPM son semejantes, puesto que $\widehat{OMP} = \pi/2 - (\pi/2 - C/2) = C/2 = \widehat{OCB}$; y por tanto,

$$\frac{MP}{OP} = \frac{BC}{OB} \qquad (2)$$

Multiplicando miembro a miembro (1) y (2)

$$OA \cdot MP = OQ \cdot BC \quad .$$

José V. García Sestafé, (Madrid).

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 11 (Boletín nª 21)

Sea la función f definida sobre el conjunto 1, 2, 3,... por:

$$f(1) = 1; \quad f(2n+1) = f(2n); \quad f(2n) = 3f(n)$$

Determinar el conjunto de valores que toma f.

Solución

Vamos a demostrar que la imagen de un número natural escrito en base 2, es otro número natural escrito con las mismas cifras (mismo orden) en base 3.

Sea p el número de cifras binarias. Lo haremos por inducción sobre p.

$$p = 1 \qquad f(1_{(2}) = 1 = 1_{(3}$$

$$p = 2 \qquad f(10_{(2}) = f(2) = 3f(1) = 3 = 10_{(3}$$

$$f(11_{(2}) = f(3) = f(2) + 1 = 4 = 11_{(3}$$

$$p = 3 \qquad f(100_{(2}) = f(4) = 3f(2) = 9 = 100_{(3}$$

Supongamos cierto para un número de menos de p cifras binarias. Vamos a ver que es cierto para un número de p cifras binarias.

Sea $1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p(2}$ número de p cifras binarias $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Consideramos dos casos:

1ª. La última cifra binaria es cero

$$f(1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1}\ 0_{(2}) = f(10_{(2} \cdot 1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1(2}) =$$

$$= 10_{(3} \cdot f(1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1(2}) =$$

(Puedo aplicar la hipótesis de inducción a $1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1(2}$)

$$= 10_{(3} \cdot 1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1(3} =$$

$$= 1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1}\ 0_{(3}$$

2ª. La última cifra binaria es uno

$$f(1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1}\ 1_{(2}) = f(10_{(2} \cdot 1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1(2} + 1_{(2}) =$$

$$= f(10_{(2} \cdot 1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1(2}) + 1_{(3} = f(1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1(2}) + 1_{(3}$$

(POR EL CASO 1ª) $= 1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1}\ 0_{(3} + 1_{(3} = 1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{p-1}\ 1_{(3}$

El conjunto de valores que toma f es el formado por todos los números naturales que en base 3 se escriben utilizando solamente los dígitos 0 y 1.

Miguel Angel Cabezón Ochoa.

Otra solución de: José V. García Sestafé, (Madrid).

Como socio de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matematicas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletin *(señalar con unas aspas los que interesen)*:

3	4	5	9	10	11	13	14	15
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

16	17	18	19	20	21	22	23	24
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo *(20 pts. por número para Madrid y 30 pts. por número para provincias)*.

Hagan el envío utilizando como dirección la consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8 y 12 están agotados. De los números 9 y 19 quedan sólo unos pocos ejemplares.

Si desea acogerse a este ofrecimiento recorte o copie este cupón y envíelo a la *Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Apartado 9479 - 28080 - MADRID.*