junio 1990

2ª FASE XXVI OME
Castellón

boletín nº 25

sociedad castellana Puig Adam de profesores de matemáticas

B O L E T Í N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Junio de 1990 nº 25 (1989-90)

- Toda la correspondencia para la Sociedad deberá dirigirse al

Apartado nº 9479

28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

- La portada nos recuerda la combinación formada con las letras de la palabra MATEMATICAS que empleó don Pedro Puig Adam en las cubiertas de sus libros de Bachillerato.

INDICE Pág.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: *José Vicente García Sestafe*

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez	(Madrid)
Amador Domingo Escribano	(Toledo)
Salvador Herrero Pallardo	(Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tudurí	(Cuenca)
Angel María Alcalá del Olmo Pérez	(Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andres	(Segovia)

Secretaria: *Carmen García-Miguel Fernández*

Vicesecretario *Enrique Rubiales Camino*

Tesorero: *Alberto Aizpún López*

Bibliotecario: *Jesús Begoña Aina*

ASAMBLEA GENERAL DE NUESTRA SOCIEDAD

Nuestra Asamblea General correspondiente al año 1990 se celebró el pasado dia 12 de Mayo, como estaba anunciado, en los locales del Instituto "Isabel la Católica" de Madrid.

Tras ser aprobada el acta de la sesión anterior, nuestro Presidente, profesor Lorenzo Miranda, hizo un informe sobre las actividades de la Sociedad a lo largo de los últimos meses.

En ese informe, tuvo unas palabras de felicitación y de agradecimiento para los que se esfuerzan en mantener el alto nivel alcanzado por nuetros Boletines: A los que lo llenan de contenido con sus valiosas colaboraciones, a los que se encargan de su confección y lanzamiento, y a los que llevan la pesada carga de su distribución, todos en forma desinteresada y llena de entusiasmo.

Se refirió también a la excelente acogida que vienen teniendo nuestros Concursos de Resolución de Problemas, organizados en colaboración con el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras.

El de 1990, que hace el número VIII, se celebrará definitivamente el próximo dia 23 de Junio a las 10 h 15 m, en los locales del Instituto de Bachillerato "Beatriz Galindo" de Madrid. Aunque en las bases se fija como fecha límite para la recepción de preinscripciones la del 30 de Mayo, con objeto de conocer de antemano el número de participantes y poder preparar los locales adecuados, se acordó atender en lo posible las preinscripciones que lleguen con algún retraso.

Nuestro Presidente hizo público el agradecimiento de la Sociedad a la firma "Coca Cola España" por la colaboración que ha ofrecido para este VIII Concurso, costeando valiosos premios para los ganadores, al igual que el año pasado.

A continuación, el tesorero, profesor Aizpún, presentó las cuentas de la Sociedad, que fueron aprobadas. La mayor parte de los ingresos se invierten en costear los gastos de edición y distribución del Boletín. Son de lamentar los gastos que se producen por la devolución, por los bancos, de recibos de socios que cambian de residencia o cuenta corriente, sin acordarse de comunicarlo a la Sociedad. Se dió lectura a la lista de los socios cuyos recibos o boletines han sido devueltos, por si alguno de los presentes podía establecer contacto con ellos.

La situación económica de la Sociedad, que no cuenta con otros ingresos que los de nuestras cuotas, que han permanecido inalteradas en los últimos años, hace aconsejable una pequeña elevación de éstas. Tras debatir la cuestión, la Asamblea acordó fijar la cuota anual en la cantidad de 2000 pesetas para los cursos 1990-91 y siguientes.

Se procedió a continuación a la renovación de cargos directivos que correspondía a esta Asamblea, según los estatutos, acordándose nombrar Presidente de la Sociedad a nuestro asiduo colaborador don José Vicente García Sestafe y vicesecretario a don Enrique Rubiales Camino, renovándose el nombramiento a los restantes cargos que terminaban su mandato este año. La nueva Junta Directiva queda constituida, por tanto, tal como aparece en la página 2.

La Asamblea manifestó su satisfacción por la labor realizada por nuestro compañero Lorenzo Miranda al frente de la Sociedad, y felicitó cordialmente al nuevo Presidente.

- - - - - - - -

RECORDAMOS LA CONVOCATORIA DE NUESTRO

VIII CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Convocado por:

Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras.

BASES

PRIMERA

Podrán participar los alumnos de B.U.P. y F.P. de los Centros de **Albacete, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara, Madrid, Segovia y Toledo.** Los de F.P.1 lo harán con los de Primero de B.U.P., los de 1º de F.P.2 con los de Segundo de B.U.P. y los de 2º o 3º de F.P.2, con los de Tercero de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas del Concurso se realizarán en Madrid, en la segunda quincena del mes de junio (posiblemente el sábado, 23 de ese mes) y consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles).

TERCERA

Se concederán diplomas para los mejores de cada nivel, acompañados de los premios correspondientes.

CUARTA

Aquellos centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de dos en cada uno de los tres niveles) deberán resalizar la preinscripción antes del día 30 de Mayo de 1990, dirigiéndose por carta a esta Sociedad (Apartado de Correos nº 9.479, 28080 - Madrid)). En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Envíen las cartas sin certificar.

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar el curso en que estén matriculados en el año académico 1989-90 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

- - - - - - - - - -

En la Asamblea General del 12 de Mayo se acordó celebrar las pruebas de este Concurso el día 23 de Junio a las 10 h 15 m, en los locales del Instituto *"Beatriz Galindo"* de Madrid (c/ Goya, 10). En la tarde de ese día se hará la entrega solemne de premios a los ganadores.

NOTICIAS

XV JORNADAS LUSO-ESPAÑOLAS DE MATEMÁTICAS

Corresponde este año a la Universidad de Evora (Portugal) la organización de estas Jornadas, ya tradicionales en nuestra vida académica. Se celebrarán durante los días 3 a 7 del próximo septiembre. Para cualquier información y correspondencia en general, pueden dirigirse a:

Comisao Organizadora das XV Jornadas Luso Espanholas de Matemática.
Departamento de Matemática. Universidad de Évora
Largo dos Colegiais, nº 2
7000 - EVORA PORTUGAL

- - - - - - -

COLEGIO LIBRE DE EMÉRITOS

Esta Institución, dentro del sector *"Pensamiento, Ciencia y Técnica"*, está desarrollando una serie de conferencias sobre el tema *"El legado cultural de España en el siglo XXI"*. El día 26 de Febrero correspondió a don Sixto Ríos realizar un estudio sobre *"La aportación española a las Matemáticas"*; en él pasó revista a los comienzos, en el siglo pasado, de la investigación matemática española y, sobre todo, a los autores, resultados y aportaciones en el actual y perspectivas futuras.

- - - - - - -

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Recientemente han sido elegidos Académicos de número los profesores don **Amable Liñán Martínez**, de la Universidad Politécnica de Madrid, don **José María Montesinos Amilibia**, de la Universidad Complutense, don **Pedro Jiménez Guerra**, de la Universidad a Distancia y don **Francisco Girón González-Torres**, de la Universidad de Málaga, quedando pendientes de pronunciar el discurso de ingreso.

Se encuentra en elaboración un nuevo curso de **Historia de la Matemática**, continuación de los dos que ya se dieron en esta Academia, y que corresponderá a la primera mitad del siglo XIX. Las fechas probables de su celebración quedarán dentro de la primavera de de 1991.

En la apertura del próximo curso académico, en la segunda mitad de octubre de este año, ha correspondido el discurso protocolario a la Sección de Exactas de la Academia, que ha designado para realizarlo a don **José Javier Etayo**, académico de número y miembro de nuestra Sociedad.

- - - - - - -

CONFERENCIAS

El Prof. **André Lichnerowicz**, del Collège de France, reputado invertigador en geometría diferencial y mecánica teórica, ha pronunciado cuatro conferencias en las Facultades de Matemáticas y Física de la Universidad Complutense, sobre los temas: *"The Twistors-Spinors and its invariants"* y *"Kaeler Groups"*.

XXVI OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

SEGUNDA FASE

Las pruebas de la **Segunda Fase** de la " *XXVI Olimpiada Matemática Española* " correspondiente al curso 1989-90, se han realizado en los pasados dias 16 y 17 de Marzo. Como de costumbre, tuvieron lugar simultáneamente, con los mismos problemas, en Madrid y en La Laguna.

Como es sabido, esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*. A ella pueden concurrir los alumnos matrculados en C.O.U. o F.P.2.

En esta Segunda Fase participan los seleccionados en la Fase Primera, que son tres como máximo por cada una de las capitales donde se celebran las pruebas. En el número precedente de nuestro Boletín informamos del desarrollo y resultados de las pruebas de Primera Fase correspondientes a Madrid (que se considera un único distrito, a pesar de sus cuatro universidades). En esta ocasión han competido 40 **participantes**, procedentes de 15 distritos. Los de las Islas Canarias lo hicieron en La Laguna y los restantes en los locales de la E. T. S. de Ingenieros Industriales de Madrid.

Como de costumbre, las pruebas consistieron en la resolución de seis problemas, distribuidos en dos sesiones de cuatro horas cada una, que se realizaron en la tarde del dia 16 y en la mañana del 17.

El Jurado, tras examinar y valorar los ejercicios presentados, se reunió el pasado 5 de Abril, e hizo públicos los nombres de los seis aspirantes mejor clasificados.

Los ganadores de esta XXVI O. M. E. han sido:

1º - D. **Francisco OGANDO SERRANO**, del *I. B. "Ramiro de Maeztu"* de Madrid ... ... 49 puntos

2º - D. **Daniel LASAOSA MEDARDE**, del *I. B. "Ximenez de Rada"* de Pamplona ... ... 45 puntos

3º - D. **Marco CASTRILLÓN LÓPEZ**, del *I. B. "Avenida de los Toreros"* de Madrid ... 44 puntos

4º - D. **Javier ARREGUI GARCÍA**, del *Colegio de la Salle*, de Zaragoza ... ... 43 puntos

5º - D. **Manuel Francisco HERRADOR BARRIOS**, del *Colº. Nª Sª del Recuerdo* de Madrid 42 puntos

6º - D. **José Manuel GORDILLO ARIAS DE SAAVEDRA**, del *I.B."Antonio Machado"* de Sevilla 37 puntos

Por debajo de éstos, pero con más de 25 puntos, han quedado D. Mariano MOLINA INIESTA, de Murcia (36 puntos), D. Raul ANDRÉS RODIGUEZ, de Navarra (33), y D. Juan FERNÁNDEZ SÁNCHEZ, y D. Juan Carlos LOZANO SANCHO, ambos de Zaragoza.

La puntuación máxima alcanzable era de 60 puntos, ya que se valoró con 10 puntos la resolución de cada uno de los problemas propuestos. Los enunciados de éstos pueden verse en este mismo Boletín, en nuestra sección de **Problemas Propuestos**.

Para que nuestros lectores puedan juzgar sobre la dificultad relativa que han ofrecido esos problemas a los participantes en la Olimpiada, damos una tabla con algunos datos acerca de los resultados:

PROBLEMA Nº	1	2	3	4	5	6
Media de las puntuaciones para los 40 aspirantes..	6.3	1.7	1.0	4.0	3.9	2.9
Media de las puntuaciones para los 6 ganadores ...	10.0	4.2	3.0	9.5	9.5	7.2
Número de aspirantes con más de 7 puntos en él ..	12	4	1	12	12	4
Número de ganadores con más de 7 puntos en él ..	6	2	1	6	6	4

Como puede verse es el tercero el que más dificultades ha ofrecido; es notable la falta de correlación exitente entre los resultados del segundo y los de los restantes: Han fallado en este problema varios de los ganadores y en cambio lo han resuelto correctamente otros que han quedado con puntuaciones totales relativamente bajas.

Como ya hicimos notar en el número anterior de nuetro Boletín, el tercer clasificado en esta Segunda Fase, y campeón del distrito de Madrid en la Primera, D. **Marco CASTRILLóN LóPEZ**, quedó en segundo lugar, como alumno de 3º de B.U.P. en 1989, en el *Concurso de Resolución de Problemas* de nuestra Sociedad. Una vez más comprobamos que los premiados en nuestros concursos suelen figurar entre los ganadores de las Olimpiadas nacionales o internacionales.

Algunos de los ganadores serán seleccionados para formar el equipo que representará a España en las próximas Olimpiadas Matemáticas Internacional e Iberoamericana.

Damos la enhorabuena a los ganadores y a los Centros que se han esforzado en su preparación.

- - - - - - - -

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETÍN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlas.

Nuestro consocio, el profesor don **Miguel de Guzmán Ozámiz**, ilustre académico de la Real Academia de Ciencias y catedrático de la Universidad Complutense de Madrid, nos ha autorizado amablemente para reproducir el interesante artículo " *El infinito matemático ¿ Una apertura del hombre hacia lo transcendente ?* " que fué publicado el pasado año con motivo del homenaje ofrecido al profesor don **Alberto Dou** en la Facultad de Ciencias de la citada Universidad. Tenemos el gusto de ofrecerlo a continuación a nuestros socios.

- - - - - - -

El infinito matemático ¿una apertura del hombre hacia lo transcendente?

MIGUEL DE GUZMÁN

SUMARIO

La intención de este artículo es poner de relieve algunos aspectos del desarrollo de la matemática en nuestro siglo que parecen incidir profundamente en el pensamiento filosófico-religioso.

A. ¿Cuáles son los principales acontecimientos en el desarrollo matemático de nuestro tiempo con alguna relevancia en el pensamiento filosófico?

- Atención centrada en los fundamentos.
- Teoría de conjuntos de Cantor.
- Paradojas. Crisis de los fundamentos.
- Ensayos de solución. Whitehead-Russelll, Hilbert, Brouwer.
- Neopositivismo del Círculo de Viena.
- Wittgenstein.
- Gödel. Teorema de incompletitud. Impactos. Pérdida de certeza.
- La nueva filosofía de la matemática. Lakatos: Matemática como ciencia empírica. Evolución de la noción de demostración.

B. ¿Cuál es el origen de los diferentes cambios en profundidad de la orientación del pensamiento matemático?

- La ocupación con el infinito: el número irracional. Zenón, Cantor, Gödel,...
- El infinito matemático, ¿una manifestación de la apertura transcendental del hombre al misterio?

C. Algunas dificultades para el matemático respecto del pensamiento religioso.

- Tradicional tendencia al racionalismo.
- Intolerancia para la incertidumbre, el caos, la paradoja, el misterio, el conocimiento analógico,...
- La consideración del matemático de otras formas de pensamiento.
- ¿Hacia una evolución de actitudes en los tiempos recientes?

* * *

Comencemos leyendo un testimonio famoso del siglo XIX. En 1822 Jean Baptiste Fourier publicaba la *Teoría Analítica del Calor,* uno de los hitos de la ciencia matemática y física. En su prólogo aparecen estas palabras:

«Las ecuaciones analíticas... no se restringen a las propiedades de las figuras y a las que son objeto de la mecánica racional; se extiende a todos los fenómenos generales. No puede haber un lenguaje más universal ni más simple, más exento de errores y de oscuridades, es decir más digno de expresar las relaciones invariables de los seres naturales. Considerado bajo este punto de vista, el análisis matemático es tan extenso como la naturaleza misma; define todas las relaciones sensibles, mide el tiempo, los espacios, las fuerzas, las temperaturas,... su atributo principal es la claridad; no tiene en absoluto signos para expresar nociones confusas. Relaciona los fenómenos más diversos y descubre analogías secretas que los unen. Si la materia se nos evade, por su extrema tenuidad, como la del aire y de la luz, si los cuerpos están situados lejos de nosotros, en la inmensidad del espacio, si el hombre quiere conocer el espectáculo de los cielos en épocas sucesivas que un gran número de siglos separa, si las acciones de la gravedad y del calor se ejercen en el interior del globo sólido a profundidades que nos serán siempre inaccesibles, el análisis matemático puede, con todo, dominar las leyes de estos fenómenos. El nos los hace presentes y parece ser una facultad de la razón humana destinada a suplir la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos; y, lo que es aún más notable, sigue el mismo camino en el estudio de todos los fenómenos; los interpreta con el mismo lenguaje como para atestiguar la unidad y la simplicidad del plan del universo, y hacer aún más patente este orden inmutable que preside en todas las causas naturales».

Analicemos un poco. ¿Qué características aparecen destacadas en este hiperbólico ditirambo sobre el análisis matemático? Ante todo una notable confianza en la inteligibilidad matemática del universo. Es la veta pitagórica que se ha ido conservando en el mundo matemático desde el siglo VI a. de C. Es la fe, en otro tiempo sustentada en una teoría general

del cosmos, que en el entusiástico Fourier aparece soportada por el brillo mismo de sus éxitos y sus promesas.

Junto a esta confianza imbatible en el universal poder del método matemático no se puede menos de adivinar un cierto desdén implícito por otros modos de conocimiento, menos universales, más complicados, con errores y oscuridades, y donde la confusión aparece en las mismas nociones iniciales.

El párrafo de Fourier ha sido y sigue siendo fuertemente típico del sentir del matemático sobre su ciencia y de la opinión que le merecen otras posibles formas de conocimiento.

Y sin embargo... he aquí otro testimonio casi de nuestros mismos días. Bourbaki ha sido por bastantes años seudónimo de un importante colectivo de matemáticos franceses con gran influencia en la matemática actual. En 1948 escribía Bourbaki el siguiente párrafo sobre *La Arquitectura de las Matemáticas:*

«Creemos que la matemática está destinada a sobrevivir y que jamás tendrá lugar el derrumbamiento de este edificio majestuoso por el hecho de una contradicción puesta de manifiesto repentinamente, pero no pretendemos que esta opinión se base sobre otra cosa que la experiencia. Es poco, dirán algunos. Pero desde hace 25 siglos los matemáticos tienen el hábito de corregir sus errores y de ver así su ciencia enriquecida, no empobrecida. Esto les da el derecho de arrostrar el porvenir con serenidad».

Tras una expresión un tanto a la defensiva se pone de manifiesto la confesión de la fragilidad del edificio matemático, de la posibilidad de su derrumbamiento por la aparición posible de una contradicción, de la forma de caminar de los matemáticos, corrigiendo errores, al igual que sus hermanos todos los otros científicos y como ellos apoyados sobre su confianza en la experiencia, que sigue siendo mera experiencia, aunque sea de 25 siglos.

Este sentimiento sobre el quehacer matemático no está, aunque pueda parecer una sorprendente paradoja, tan extendido como el que representa el párrafo de Fourier de 1822, entre aquellos que enfocan su saber matemático desde el punto de vista meramente técnico, que son la inmensa mayoría de los matemáticos actuales. Pero sí se puede decir, como veremos más adelante, que es el de la avanzada y vanguardia de quienes más se han ocupado de pensar sobre el sentido de la actividad matemática, si bien prescindiendo en muchos casos de los tintes oscuros y sombríos, como de gran señor venido a menos, que aparecen en las palabras de Bourbaki.

La pregunta surge espontáneamente ante este contraste entre Fourier y Bourbaki: ¿Qué ha pasado entre medias? Hasta cierto punto y hasta cierta fecha suele estar bastante bien recogido en los resúmenes sobre el desarrollo de la filosofía de la ciencia.

A grandes rasgos. El siglo XVIII es el del desarrollo explosivo de las aplicaciones del análisis matemático a problemas físicos. La culminación de este desarrollo viene tal vez representada por la *Teoría de Calor* (1822) de Fourier. En el siglo XIX el análisis matemático es sometido a un examen riguroso en cuanto a su fundamentación, movimiento motivado en gran parte para dar fundamento riguroso a las audacias del desarrollo de Fourier. Paralelamente aparecen las misteriosas geometrías no euclídeas. Ambos elementos, fundamentación del análisis y sentido de las geometrías no euclídeas, ocasionan fuertes controversias. A fines de siglo XIX Georg Cantor explora aventuradamente con éxito nuevos tratamientos del infinito matemático. Aparecen rápidamente paradojas extrañas, y además no muy lejos de la misma base. Es decir, supuestos «obvios» dan lugar mediante razonamientos «obviamente» correctos a que lo blanco es negro. Hay que poner cortapisas al pensamiento. No todo lo «obvio» se puede permitir. Pero, ¿dónde empezamos a poner cortapisas, barreras para nuestro pensamiento matemático? Por otra parte ¿serán suficientes las que se nos ocurren? Al soslayar una paradoja mediante algún truco evitamos una contradicción, pero ¿las hemos evitado todas?

Los comienzos del siglo XX vieron muchos intentos diferentes de las escuelas logicistas (Whitehead, Russell), formalistas (Bernays, Hilbert) e intuicionistas (Brouwer, Poincaré) para lograr una fundamentación adecuada de la matemática. Los logicistas y formalistas pretendían poner a salvo el edificio de la matemática efectiva, el de las herramientas en uso de los matemáticos contemporáneos, mientras que los intuicionistas abogaban, al menos teóricamente, por imponer fuertes restricciones, nada populares entre los matemáticos de a pie, de los modos permisibles de razonamiento lógico y matemático.

Hilbert, en 1925, en su artículo famoso *Ueber das Unendliche*, se expresa de esta manera proponiendo su teoría finitista de demostración a fin de poner fuera de toda duda los fundamentos de la matemática: «el objetivo de mi teoría consiste en establecer de una vez para todas la certeza de los métodos matemáticos». Y un poco más adelante expresa así la convicción imperante entre los matemáticos sobre la solidez imbatible de su ciencia: «En cierto sentido la matemática se ha convertido en una corte de arbitraje, un tribunal supremo para decidir cuestiones fundamentales sobre una base concreta en la que todos puedan concordar y donde cada afirmación sea controlable,... Un ejemplo del tipo de cuestiones fundamentales que pueden ser tratadas de este modo es la tesis de que todo problema matemático es soluble. Todos nosotros estamos convencidos de que realmente es así. De hecho uno de los principales atractivos para atacar un problema matemático es que siempre oímos esta voz dentro de nosotros: Ahí está el problema, encuentra la contestación, siempre la puedes encontrar puramente pensando, pues en matemáticas no hay ningún ignorabimus».

Contemporáneo a este entusiasmo de Hilbert ante la perspectiva de

afianzamiento, de una vez por todas, de los fundamentos de la matemática, es el espíritu del Círculo de Viena, donde se esperaba poder formalizar igualmente los fundamentos y estructuras de las demás ciencias empíricas. Para *Erkenntniss*, la revista órgano del Círculo de Viena, estaba claro que el contraejemplo que había que evitar, la mala ciencia, era la metafísica, con sus primeras nociones totalmente confusas y sus teoremas carentes absolutamente de sentido.

Ya para entonces había aparecido en 1921 el sibilino *Tractatus Logico-Philosophicus* de Ludwig Wittgenstein, una especie de espada de dos filos que, si por una parte abogaba por un radical análisis del lenguaje a la hora de hacer ciencia cierta, manifiesta por otra bien explícitamente cómo «incluso cuando todas las posibles cuestiones científicas han sido respondidas nuestros problemas vitales no han sido aún tocados en absoluto». El *Tractatus*, que en un principio los neopositivistas y el mismo Russell tuvieron interés en presentar como un intento de exploración del lenguaje científico-lógico-matemático, que venía a corroborar las tesis del Círculo de Viena, contiene en realidad, a partir de su sección 6, expresiones con profundas resonancias vitales y éticas que debieron de constituir el fundamento del itinerario de la vida posterior de Wittgenstein. He aquí una traducción de algunos de estos párrafos:

«6.53. El método correcto de la filosofía sería propiamente el siguiente: no decir nada que no se pueda decir, esto es, proposiciones de las ciencias de la naturaleza, es decir algo que nada tiene que ver con la filosofía, y luego, siempre que algún otro quiera decir algo metafísico, mostrarle que en sus proposiciones a ciertos signos no les ha dado ninguna significación. Este método sería insatisfactorio para el otro, no tendría la sensación de que le estamos enseñando filosofía, pero sería el único estrictamente correcto.

6.54. Mis proposiciones significan, por tanto, que el que me entiende las comprende al final carentes de sentido, cuando él, mediante ellas —sobre ellas— ha saltado por encima. (Tiene que arrojar la escalera por así decirlo, después que ha ascendido por ella). Tiene que superar estas proposiciones y entonces ve el mundo correctamente.

7. De lo que no se puede hablar es necesario guardar silencio.»

Junto a esto, que parece pura expresión de positivismo, aparecen misteriosamente expresiones profundas sobre el sentido de la ética y el significado del mundo, 6.41, 6.42, la voluntad, la muerte, el sentido de la inmortalidad del alma, lo místico, el enigma, elementos todos ellos que al parecer constituyeron en verdad el *leit motiv* de Wittgenstein para escribir su obra.

Wittgenstein es, en el aspecto que más me interesa considerar ahora, el gran adelantado de vanguardia, en toda su concepción intelectual y vital. El itinerario seguido por Wittgenstein, en trazos no tan radicales, es, si no típico, sí al menos fuertemente significativo como corriente de pensamiento que se ha repetido en muchos de los pensadores contemporáneos que se han ocupado de desentrañar el sentido profundo del quehacer matemático, como veremos en seguida. Wittgenstein llega primero desde el riguroso análisis lógico del raciocinio y del lenguaje para enmarcar sus limitaciones, a la convicción de la inutilidad de la construcción a la hora de enfrentarse con los auténticos problemas del hombre. Su silencio consiguiente por décadas («wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen») y su reaparición con la teoría de la matemática como juego matemático en muchos pasajes de su *Philosophische Untersuchungen* representa como un renacer en él con ojos nuevos del pensamiento matemático.

Como veremos son muchos los matemáticos de primera línea en nuestro siglo que han experimentado un trayecto intelectual semejante, e incluso en cierto sentido más radical, pues han pasado de la arrogancia hilbertiana del *Kein ignorabimus in der Mathematik* a la actitud humilde de pedir para la matemática al menos un *status* científico semejante al de las teorías físicas.

En este ambiente efervescente llega uno de los resultados más sorprendentes de la historia de la matemática que va a dar un vuelco curioso a la situación. En 1931 Kurt Gödel publica su famoso artículo *Uber formal-unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas emparentados). Se demostraba en él que en todo sistema formal con riqueza interna suficiente para desarrollar en ella la aritmética clásica, la de los números naturales, existen proposiciones P con perfecto sentido dentro de la estructura del sistema que son indecidibles, es decir: P es una proposición con capacidad de resultar en el sistema un teorema o bien un contrateorema, pero sucede que se puede demostrar que P no es demostrable, y por tanto P no es teorema, y que tampoco no P es demostrable, y así P tampoco es contrateorema. Así hay proposiciones que no se pueden demostrar ni refutar. Y entre ellas está precisamente la que afirma la consistencia del sistema. Es decir, *la ausencia de contradicción del sistema es indemostrable*. Ahora bien, si la ausencia de contradicción del sistema es indemostrable, el edificio matemático se sostiene sobre un acto de aceptación semejante al que está en la base de todas las otras ciencias y son criterios de congruencia y adecuación más o menos evidentes de este edificio a una cierta realidad previa o posterior los que nos impulsan a realizar dicho acto de fe. Es la experiencia de los siglos, en último término, el criterio básico que nos conforta en el pensamiento de la solidez de la matemática.

Este fue el estallido. ¿Cuál fue el impacto sobre los matemáticos? Sobre la mayor parte de los técnicos de la matemática, los enfrascados en

el juego milenario de la resolución de problemas propuestos por la misma comunidad matemática, el impacto fue, es y posiblemente será, al menos en un futuro previsible, bastante escaso. Como veremos, las pautas de conducta científica de los matemáticos en general están mucho más fuertemente enraizadas en criterios empíricos y sociales que sobre las férreas leyes de la lógica.

Pero he aquí unos cuantos testimonios del cambio profundo ejercido en algunos de los matemáticos más famosos de nuestro siglo que, aparte de cultivar su técnica con excelencia, se han ocupado de pensar también en el sentido de la actividad matemática.

Bertrand Russell afirmaba en 1901 que «el edificio de las verdades matemáticas se mantiene inconmovible e inexpugnable ante todos los proyectiles de la duda cínica». En 1924 ya había cambiado considerablemente de opinión. Para él, la lógica y la matemática, al igual que, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell «son aceptadas debido a la verdad observada de algunas de sus consecuencias lógicas». En 1959, en la descripción de su itinerario filosófico, afirma: «La espléndida certeza que siempre había esperado encontrar en la matemática se perdió en un laberinto desconcertante».

El mismo Carnap al que en 1930 se podía oír ponderar «la más cierta de todas las ciencias», señala en 1958 como una de las analogías principales entre la física y la matemática: «la imposibilidad de la certeza absoluta».

Hermann Weyl, uno de los matemáticos más profundos de nuestro siglo, se percató, incluso antes de que Gödel publicara su contribución fundamental sobre los fundamentos, de que la matemática era «irremisiblemente falible». Y en 1949 presenta lo que para él debe ser la adecuada interpretación de la matemática como ciencia: «Ningún Hilbert será capaz de asegurar la consistencia para siempre; hemos de estar satisfechos de que un sistema axiomático simple de matemáticas haya superado hasta el presente el test de nuestros elaborados experimentos matemáticos... Una matemática genuinamente realista debería concebirse, en parangón con la física, como una rama de la interpretación teorética del único mundo real y debería adoptar la misma actitud sobria y cautelosa que manifiesta la física hacia las extensiones hipotéticas de sus fundamentos».

John von Neumann afirma asimismo en 1947 que «la matemática clásica, aunque nunca más se pudiera estar absolutamente seguro de su fiabilidad..., se sostiene sobre un fundamento al menos tan firme como, por ejemplo, la existencia del electrón. En consecuencia, si se está dispuesto a aceptar las ciencias, se puede aceptar también el sistema de la matemática clásica». Y confiesa también cómo experimentó el mismo itinerario mental común a tantos matemáticos de nuestro siglo: «Yo mismo reconozco con qué humillante facilidad cambiaron mis puntos de vista respecto a la verdad absoluta matemática... y cómo cambiaron tres veces sucesivas».

Quine, uno de los lógicos matemáticos contemporáneos más importantes afirmaba ya en 1958 desde su perspectiva: «lo más razonable es considerar la teoría de conjuntos, y la matemática en general, como consideramos las porciones teóricas de las ciencias naturales; en cuanto que contienen verdades o hipótesis que han de ser vindicadas menos por la pura luz de la razón que por la contribución indirecta y sistemática que hacen a la organización de los datos empíricos en las ciencias naturales».

El año 1931, con el teorema de Gödel se había producido un vuelco espectacular en la orientación de la filosofía de las matemáticas, pero para que tal revolución se haga efectiva habrá que esperar hasta los años 50. Hermann Weyl había propuesto ya hacía mucho tiempo una reforma profunda en la consideración de lo que la actividad matemática es: «tal vez pueda decirse que el matematizar sea una actividad creativa del hombre, como la música o el arte, cuyas decisiones históricas desafían completamente una racionalización objetiva».

En 1956 Imre Lakatos introduce en la matemática los conceptos filosóficos sobre la ciencia de Karl Popper. Un resultado práctico de sus pesquisas fue el siguiente programa. Lo primero que hay que hacer es dejarse de sentimentalismos apegados a las verdades absolutas de los pitagóricos y platónicos:

«¿Por qué no admitir honestamente la falibilidad matemática y tratar de defender la dignidad del conocimiento falible frente al escepticismo cínico más bien que engañarnos a nosotros mismos creyendo que seremos capaces de arreglar invisiblemente el último jirón en el tejido de nuestras «últimas» intuiciones?»

Hay que considerar la matemática como un proceso tentativo de acercamiento a una hipotética realidad que no hay que pensar en tratar de abarcar ni de un golpe ni completamente. Los teoremas están ahí como teoremas para nuestra generación, esperando las refutaciones de la generación siguiente que pongan de manifiesto su carácter fragmentario e inacabado. Su tesis doctoral de 1956, *Proofs and Refutations*, fue publicada en los años 70. El resto de su obra apenas ha tenido tiempo de posar en el espíritu actual de la filosofía de la matemática, pero se puede decir que los pasos iniciados por Lakatos se cuentan entre los pocos realmente originales desde los años 30 y que sin ninguna duda harán escuela.

Ya empiezan a aparecer obras de gran divulgación entre los matemáticos a través de las cuales estas nociones, carácter falible del pensamiento matemático, sentido social de la demostración matemática, carácter de sistema cultural de la actividad matemática con todos sus condicionantes históricos, geográficos, etc., irán penetrando poco a poco en la comunidad de los matemáticos. Tales son:

M. Kline, Mathematics. The Loss of Certainty (1980)
Davies & Hersh, The Mathematical Experience (1981)
R. L. Wilder, Mathematics as a Cultural System (1983).

Preguntémonos ahora, ahondando un poco, cuál puede ser el sentido profundo de la situación de la intelección matemática puesta de manifiesto en el teorema de Gödel.

La raíz de esta situación debe buscarse en la incapacidad radical de la matemática para dominar totalmente el reto fundamental con que se ha enfrentado desde el principio de su existencia: el señorío de los procesos infinitos del pensamiento. Lo más característico de la aritmética clásica, lo que más claramente separa a la matemática de ser una inmensa tautología, es la aceptación de algún tipo de proceso infinito. Con el infinito matemático sucede algo parecido (o lo mismo tal vez) que con el ser de las consideraciones metafísicas. En la apertura inicial de la mente al conocimiento intelectual (a cualquier conocimiento intelectual) está yacente, como horizonte, condición de posibilidad de cualquier conocimiento concreto, el ser en su infinitud, en su inconcreción. En este horizonte debe destacarse el ser concreto y este horizonte es el que da la posibilidad de cualquier otro conocimiento. No nos lo planteamos como objeto. Es el horizonte, el fondo de nuestra visión cognoscitiva que, de no estar ahí no habría nada en ella.

La mente está por su propia naturaleza abierta a este horizonte y cualquiera de sus actividades lo pone de manifiesto. Es como constitutivo de su forma de ser. El ser concreto se destaca en ella precisamente de modo negativo, mostrando su limitación, su modo de ser particular que niega el modo de ser de otros muchos, afirmando así implícitamente que el ser importante es el que no tiene modo.

El infinito está en el principio de todo quehacer matemático. Del uno al dos... y ya está ahí el infinito presente, y aun en el simple uno con la conciencia de que no lo llena todo y de que es repetible.

No es de extrañar, pues, que el enfrentamiento con el infinito sea la gran fuente de fecundidad del pensamiento matemático, pero al mismo tiempo la causa de las frustraciones más profundas en aquellos que han pensado en algún momento en tenerlo aferrado entre sus manos. Los momentos más fecundos y al mismo tiempo los más profundos de la historia de la matemática han tenido lugar precisamente en los instantes de audacia matemática hacia un nuevo tipo de comprensión del infinito: pitagóricos, descubrimiento del irracional, Zenón, cálculo infinitesimal, dominio de los procesos infinitos de paso al límite, series, integral,... por Cauchy, Weierstrass, teoría de conjuntos de Cantor, teorema de Gödel,... teorías de conjuntos no cantorianas,... El infinito se ha escurrido de entre los dedos después de cada intento y esta vez, después de los resultados de Gödel, parece que de forma bastante más profunda, radical y definitiva...

¿Cómo se puede parafrasear el teorema de Gödel a la luz de esta apertura de la mente al infinito? El teorema de Gödel habla de sistemas formales. ¿Qué es un sistema formal? Viene a ser como una copia material de algunos aspectos que nos interesa destacar de nuestra propia estructura mental. Los axiomas que gobiernan la repetibilidad (axiomas del infinito) vienen a ser un correlato de la apertura de la mente al infinito que he comentado antes. Hemos creado un infinito mediante nuestro esquema inicial del proceso formal. Naturalmente que no lo vamos a realizar nunca totalmente, por ser infinito. Por ello tiene sentido que nos preguntemos: La infinitud que hemos creado, ¿es cerrada? es decir, todas las proposiciones que, según las reglas del juego tienen sentido y pueden en principio aparecer como resultados de la deducción del sistema ¿aparecerán efectivamente todas ellas? La idea de Hilbert y de todos los matemáticos en general era que así había de ser, que esa infinitud sería cerrada *«kein ignorabimus in der Mathematik»*. La realidad resultó ser sorprendentemente contraria a tales expectativas. Ese sencillo infinito que se crea con tan pocos elementos resulta ser un *infinito abierto*. Abierto... ¿a qué? Abierto a la sorpresa, abierto al misterio, abierto... nada menos que a la contradicción misma. Y no sólo éste, sino todo infinito matemático es estructuralmente abierto en este mismo sentido, el del teorema de Gödel.

Esperaría uno tal vez que los matemáticos escrupulosos contemporáneos habrían de reaccionar en esta situación de forma parecida a la de sus antepasados pitagóricos ante la aparición del número irracional, el *alogos*. Uno podría esperar oír: «Esto nos sucede por introducir procesos infinitos. Lo nuestro es lo finito. En los procesos finitos encontramos una forma de proceder segura, incontrovertible, tal como la han soñado los matemáticos de todos los tiempos». En realidad existía ya la escuela intuicionista que había abogado desde antes por tal actitud. Pero nunca había sido plato de gusto entre los matemáticos que no querían dejar relegados los logros de muchos siglos por métodos no finitistas.

La tendencia actual parece ir sin embargo por otro camino. Aunque estamos lejos de que se airee por las plazas matemáticas un discurso como el que sigue, acabará probablemente por constituirse en la reacción común al teorema de Gödel: «La matemática no es lo que pensó el viejo Pitágoras ni el sapientísimo Platón. No tratamos de verdades inmutables ni infalibles, ni de métodos de pensamiento incontrovertibles. La matemática es una actividad del hombre vieja como la música y la poesía, y que como ellas persigue una cierta armonía y belleza, esas que puede ciertamente proporcionar la estructura mental ágil, limpia y elegante de las construcciones matemáticas. Además la comunidad matemática de todos los tiempos se nutre también de la actividad de aquellos que se entusiasman como Fourier por los aspectos prácticos de la ciencia proporcionando cierta confianza en nuestro sistema al observar el extraño acuerdo de las predicciones a que nuestras deducciones nos llevan con la realidad. Lo nuestro es lo infinito, sí, pero acompañado por la conciencia de la falibilidad y apertura a errores de nuestros procesos. Lo nuestro es lo infinito y al mismo tiempo el proceso de corregir nuestros errores al ocuparnos de él.»

Es en este punto donde, pienso yo, se puede apuntar una cierta conexión de la matemática con el misterio de Dios. La apertura transcendental del hombre al infinito que antes he expuesto es tan sólo un aspecto de la apertura total del hombre al misterio del ser, presente en su propia estructura intelectual y vital. Esta apertura transcendental del hombre al horizonte misterioso del ser constituye la luz inherente al hombre mismo que puede ser desglosada de diversas formas en el conocimiento natural de Dios. El teorema de Gödel permite una interpretación semejante, se puede mirar como una indicación de la apertura estructural de la mente matemática al misterio, a lo que ni sabe ni ha de saber nunca. Ese misterio está inherente en su estructura misma, forma parte de su propio ser. El matemático puede mirarse a sí y a la magnífica estructura que ha creado y reconocer con alegría la presencia del misterio, que no le desbarata los muchos mundos maravillosos que la matemática de 25 siglos ha creado, y luego al contemplarse en mayor profundidad, como hombre, puede encontrarse más dispuesto para abrise a este misterio total del ser al que apunta su misma estructura humana integral.

Finalmente consideremos un poco detenidamente las siguientes cuestiones: ¿Cuáles han sido las relaciones entre el pensamiento matemático y el pensamiento religioso? ¿Cuál es la situación hoy día? ¿Hay alguna perspectiva de evolución?

Al inicio de la matemática como ciencia se vivió una absoluta fusión con el sentido religioso. Entre los pitagóricos la matemática era el soporte fundamental de su cosmovisión y al mismo tiempo el instrumento principal de purificación hacia la comunión con la divinidad. La actividad matemática era vivida con entusiasmo profundamente religioso y ella abría el sentido escondido de la existencia humana.

El fervor espiritual y religioso pasó a constituir en Platón un entusiasmo intelectual sin las connotaciones religiosas y místicas presentes en los pitagóricos. La matemática era la escala hacia el *conocimiento* perfecto, hacia el *cosmos noetos*, no ya hacia la *vida* perfecta. La Edad Media preserva la presencia de las diferentes ramas de la matemática de los pitagóricos en el quadrivium; aritmética, geometría, astronomía y música, pero el modo de su cultivo debió de quedar muy cerca de la rutina formativa y muy lejos de la reverencia vital de los pitagóricos.

El sentido pitagórico pleno de la matemática, su sentido religioso, es vivido por personajes individuales aislados como Kepler, pero nunca colectivamente se dará en la historia una situación semejante a la creada en la Magna Grecia de los siglos VI y V a. de C.

En la Edad Moderna *coexisten* normalmente sentido matemático y sentido religioso en científicos como Newton, Leibniz, Descartes, Pascal, Euler,... que no tienen inconveniente en airear sus opiniones religiosas pero no pretenden, en general, apoyar un tipo de conocimiento en el otro. Se van distanciando los dos mundos...

La separación fuerte entre el mundo matemático y el mundo filosófico-religioso aparece con el espíritu de la Ilustración. En el siglo XIX apenas hay matemático, incluso entre aquellos que se sabe eran profundamente religiosos, como Gauss por ejemplo, que se decida a expresar públicamente ninguna opinión que se salga de lo que es propio de su universo técnico. La dicotomía vital del científico se ha convertido en la estructura típica de su personalidad.

Y esta es la situación que predomina en el ambiente actualmente, pese a que, como veremos en seguida, entre los científicos más eminentes se da, desde hace bastantes años, una tendencia a volver hacia actitudes más abiertas y libres con respecto al pensamiento más vital del hombre. Sucede claramente que así como es fácil y rápido cambiar de paradigmas técnicos a otros más eficaces, sin embargo la comunidad matemática manifiesta una enorme inercia a los cambios de mentalidad profunda. Sólo los matemáticos y científicos muy seguros de sí mismos y de su propio prestigio se suelen atrever a hacer incursiones por aquellos terrenos del pensamiento que la comunidad matemática, de modos muy sutiles, veta como grupo, tildando de vaguedad, ensoñación, poca seriedad, pensamiento endeble, todo intento de uno de sus miembros de expresarse al margen de lo que es la pura y dura herramienta común de trabajo tradicionalmente admitida.

En nuestro siglo ha habido matemáticos famosos que han conjugado su quehacer matemático con una profunda dedicación filosófica, dando lugar a obras muy interesantes. Entre ellos se pueden contar a Bertrand Russell, Alfred N. Whitehead, Hermann Weyl,... Su actitud y la de otros físicos eminentes, como Einstein, Schrödinger, Heisenberg, von Weizsäcker,... va contribuyendo a esponjar un tanto la rigidez del esquema mental del matemático típico actual. Este suele estar enfrascado en su mundo técnico, que es para él el mundo de la verdad. Este otro de la vida normal es el mundo de la opinión, de la confusión, donde casi nada se puede asir con firmeza comparable con la que aprehende las verdades de su mundo técnico.

El matemático suele extrapolar sus técnicas de conocimiento, aun sin haber profundizado mucho en ellas. Sólo aquello que en su vida extracientífica pudiera ser aprehendido con técnicas semejantes le parece estar perfectamente asegurado. Su nivel de tolerancia para la incertidumbre, la paradoja, el misterio, el conocimiento analógico... suele ser mínimo, sin haberse percatado de que todos estos elementos no sólo se encuentran en otros tipos de conocimiento distinto del suyo, y que detesta, sino que, si bien lo examina, los encontrará como elementos estructurales en los fundamentos de sus mismas técnicas de conocimiento. Lo que pasa es que nunca ha tenido ocasión de mirar a fondo la situación de su propio conocimiento especializado.

¿Qué indicios hay de cambio? Muchos. Como hemos visto a lo largo de la primera parte de este trabajo, los presupuestos en los que la actitud vital del matemático del siglo XIX se basaba han caído irremisiblemente.

La demostración rigurosa ha sido desde siempre el orgullo del matemático que distingue su modo de trabajo por el uso de esta herramienta. Pues bien, más y más nos vamos convenciendo de que el desarrollo de la matemática a través de demostraciones formales es un sueño irrealizable. Después de casi cien páginas de simbolismo abstracto llega Bourbaki a lograr introducir el número natual ¿Cuántos kilómetros de páginas harían falta para presentar en el mismo estilo «riguroso» una demostración de, por ejemplo, el teorema del punto fijo de Brouwer? Una demostración, para los matemáticos más rigurosos, como Hardy, un gran analista de nuestro siglo, no es sino una indicación de hacia dónde hay que mirar para llegar a convencerse uno mismo del teorema. Para René Thom, un importante matemático francés contemporáneo, una demostración es rigurosa cuando los expertos en la materia no tienen nada que objetar. Muchas demostraciones matemáticas van perdiendo su carácter de proporcionar evidencia al individuo personal, para convertirse en una labor colectiva de cientos de personas, cada una de las cuales conoce solamente una pequeña partecilla de la inmensa maquinaria. En otros casos la evidencia humana es sustituida por la confianza en el ordenador... Ni el rigor ni la demostración matemática son lo que en algún tiempo se pensó que eran.

Las nuevas filosofías de la matemática de Lakatos, Wilder,... acentúan elementos como la falibilidad, el aspecto social de la creación matemática, etc..., que ciertamente han de proporcionar una base nueva para nuevas actitudes vitales de los matemáticos.

En 1978 apareció un nuevo foro donde han ido desde entonces apareciendo de vez en cuando artículos que, en mi opinión, expresan las tendencias cambiantes de la mentalidad matemática respecto de su propio quehacer. Se trata de la revista *The Mathematical Intelligencer*, que tiende a ampliar los intereses particulares de los matemáticos abriéndoles panoramas nuevos en historia y filosofía de la matemática y otros acontecimientos de relevancia. De entre los varios artículos significativos que se podrían citar para corroborar lo que vengo diciendo he elegido uno de un importante matemático soviético, I. R. Shafarevich, que encontró en seguida un fuerte eco. Se titula *On Certain Tendencies in the Development of Mathematics* (Mathematical Intelligencer 1981, vol. 3, pp. 182-184). En él estudia el propósito y finalidad de las matemáticas y, después de observar que éste no se justifica en modo alguno por sus aplicaciones, continúa de este modo:

«Por lo tanto, si rechazamos este sendero, pienso que sólo queda una posibilidad: El propósito de las matemáticas no puede ser derivado de una actividad inferior a ellas, sino desde una esfera superior de la actividad humana, es decir, de la religión.

Claramente es muy difícil en el momento presente ver cómo puede suceder esto. Pero es aún más difícil concebir cómo la matemática puede seguir desarrollándose por siempre sin conocer lo que estudia y por qué. Está abocada a perecer en la próxima generación, ahogada en un diluvio de publicaciones, pero eso, después de todo, es tan sólo la más elemental razón extrínseca.

Por otra parte, la solución sugerida, como la historia misma lo demuestra, es en principio posible. Si volvemos al tiempo en que la matemática comenzó a existir, sabemos que entonces conoció su propósito y que adquirió este propósito siguiendo precisamente este sendero.

La matemática como ciencia nació en el siglo VI a. de C. en la comunidad religiosa de los pitagóricos y fue parte de esta religión. Su propósito estaba bien claro. Revelando la armonía del mundo expresada en la armonía de los números proporcionaba un sendero hacia una unión con lo divino. Fue este objetivo elevado el que en aquel tiempo proporcionó las fuerzas necesarias para un logro científico del que en principio no puede darse parangón. Lo que estaba involucrado no era el descubrimiento de un bello teorema ni la creación de una nueva rama de la matemática, sino la creación misma de las matemáticas.

Entonces, casi en el momento de su nacimiento habían aparecido ya aquellas propiedades de la matemática gracias a las cuales las tendencias humanas generales se manifiestan más claramente que en ninguna otra parte. Esta es precisamente la razón por la que en aquel tiempo las matemáticas sirvieron como modelo para el desarrollo de los principios fundamentales de la ciencia deductiva.

En conclusión quiero expresar la esperanza de que por esta misma razón la matemática ahora pueda servir como modelo para la solución del problema fundamental de nuestro tiempo: *revelar un supremo objetivo y propósito religioso para la actividad cultural humana*».

Y con esta larga cita de Shafarevich termino el recorrido de unos cuantos aspectos del desarrollo matemático que, pienso, tienen o tendrán con el tiempo cierta influencia en la comunidad matemática sobre el modo de considerar algunos aspectos de su propio quehacer y de su propia vida extracientífica.

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS HIPERCOMPLEJOS

Por Javier Peralta

Catedrático del I.B. "Conde de Orgaz"

Profesor Asociado de la U. Complutense

1. Introducción

El conjunto de los números complejos puede considerarse como una ampliación del conjunto de los números reales, y tiene la misma estructura algebraica de éste: cuerpo conmutativo y R-espacio vectorial; el primero de dimensión 2 y el segundo de dimensión 1. Tratando de generalizar esta situación, en la primera mitad del siglo XIX se planteó el problema de si se podrían construir números complejos superiores o ***hipercomplejos***, formados por ternas, cuaternas, etc., de números reales. Se llegó a probar, en cambio, que no era posible lograr ese objetivo si se deseaba que dichas ampliaciones gozasen de la misma estructura algebraica que C, sino que, al construir sucesivas extensiones, se iban perdiendo propiedades.

Históricamente, la primera extensión que se obtuvo fué el conjunto H de los *cuaterniones*, debido a Hamilton. A dicho conjunto se la pueda dotar de una adición, multiplicación y multiplicación por números reales, respecto a los cuales tiene estructura de R-espacio vectorial de dimensión 4 y de cuerpo no conmutativo.

Además del interés intrínseco que supone el hallazgo del primer cuerpo no conmutativo (y el único que puede construirse sobre los reales, como probaría más tarde Frobenius), es bien sabido que los cuaternios tienen diferentes aplicaciones en Física y, muy especialmente, en Mecánica, además de su uso en diversas ramas de la Matematica, como la Teoría de Números.

La siguiente extensión consistió en el conjunto K de los octonios, introducida por Graves y Cayley algo más tarde y que también tiene algunas aplicaciones en Física. K es un espacio vectorial real de dimensión 8, pero la multiplicación pierde de nuevo otra propiedad: la asociatividad.

Se llaman números de Cayley, además de a los octonios, a otros R-espacios vectoriales de dimensiones 16 y 32, de los que no nos vamos a ocupar, por la dificultad de su manejo y la complejidad de su notación. Digamos que estos dos últimos ni siquiera son anillos de división ([21]); es decir, que si a y b son dos números de Cayley del mismo espacio, la ecuación $ax + b = 0$, no tiene siempre solución única en el mismo.

- - -

En estas líneas hemos querido poner un poco de orden entre las ideas a que nos hemos referido más arriba.

Es obvio que los conjuntos R , $C = R^2$, $H = R^4$ y $K = R^8$, con las operaciones habituales, tienen estructura de espacio vectorial real de dimensiones 1, 2, 4 y 8, respectivamente. En consecuencia, el problema que nos ocupará en las sigueintes páginas es el de la multiplicación en cada uno de dichos conjuntos.

En los apartados 2, 3, 4, 5 y 6 se describen las distintas maneras de multiplicar en los conjuntos anteriores. En el apartado 7 se llega a la conclusión de que todas ellas se reducen esencialmente a dos, lográndose por cada uno de dichos procedimientos estructuras isomorfas. Con el primero de ellos, se obtienen los complejos como pares de números reales, los cuaternios como pares de números complejos y los octonios como pares de cuaternios. El segundo permite construir a los cuaternios como una cuaterna de números reales y a los octonios como una cuaterna de números complejos.

2. Multiplicación de cuaternios

En el conjunto $H = R^4$ de los cuaternios, se define la multiplicación de la siguiente forma:

Si $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in H$, entonces $x.y = z$, donde $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ viene determinado por

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 \\ z_1 &= x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2 \qquad (1) \\ z_2 &= x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1 \\ z_3 &= x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0 \end{aligned}$$

Se demuestra entonces ([1]) que esta ley de composición interna es asociativa, no conmutativa y distributiva respecto a la adición habitual en R^4 . Tiene también elemento unidad, que es $(1, 0, 0, 0)$.

Se define **conjugado** de $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, a $\bar{x} = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$, que verifica ([4]): $\bar{\bar{x}} = x$, $\overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y}$, $\overline{x.y} = \bar{y}.\bar{x}$, propiedades análogas (salvo la última) a la conjugación de números complejos.

Y se llama **norma** del cuaternio x , al número real $N(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, que cumple ([4]):

$$\forall x \in H,\ N(x) \geq 0 \ ;$$

$$N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = (0, 0, 0, 0) \ ; \quad N(x) = N(\bar{x}) \ ;$$

$$N(x.x') = N(x).N(x').$$

Entonces, el cuaternio inverso de $x \neq (0, 0, 0, 0)$ es $x^{-1} = \frac{1}{N(x)} \bar{x}$.

Así, el conjunto H tiene estructura de cuerpo no conmutativo y de R-espacio vectorial (de dimensión 4) y, en consecuencia, de R-álgebra.

De la misma manera que la subálgebra C_0 de C formada por los números complejos de parte imaginaria cero, puede identificarse con R : $C_0 \approx R$, también la subálgebra H_0 de H formada por los cuaternios cuyas dos últimas componentes son cero, puede identificarse con C : $H_0 \approx C$. En efecto, es evidente que la afirmación es válida para la adición y multiplicación por números reales, y según la definición de multiplicación dada en (1) :

$$(x_0, x_1, 0, 0).(y_0, y_1, 0, 0) = (x_0y_0 - x_1y_1, x_0y_1 + x_1y_0, 0, 0) \ ;$$

esto es,

$$(x_0, x_1).(y_0, y_1) = (x_0y_0 - x_1y_1, x_0y_1 + x_1y_0) \ ,$$

que es la multiplicación habitual de números complejos como pares de números reales.

3. Multiplicación de octonios.

En el conjunto $K = \mathbb{R}^8$ de los **octonios** se define la multiplicación de la siguiente forma:

Si $x = (x_0, x_1, \ldots, x_7)$, $y = (y_0, y_1, \ldots, y_7) \in K$, entonces $x.y = z \in K$, donde $z = (z_0, z_1, \ldots, z_7)$ viene determinada por:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 - x_7y_7 \\
z_1 &= x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_5 - x_5y_4 - x_6y_7 + x_7y_6 \\
z_2 &= x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1 + x_4y_6 + x_5y_7 - x_6y_4 - x_7y_5 \\
z_3 &= x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0 + x_4y_7 - x_5y_6 + x_6y_5 - x_7y_4 \\
z_4 &= x_0y_4 - x_1y_5 - x_2y_6 - x_3y_7 + x_4y_0 + x_5y_1 + x_6y_2 + x_7y_3 \\
z_5 &= x_0y_5 + x_1y_4 - x_2y_7 + x_3y_6 - x_4y_1 + x_5y_0 - x_6y_3 + x_7y_2 \\
z_6 &= x_0y_6 + x_1y_7 + x_2y_4 - x_3y_5 - x_4y_2 + x_5y_3 + x_6y_0 - x_7y_1 \\
z_7 &= x_0y_7 - x_1y_6 + x_2y_5 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_5y_2 + x_6y_1 + x_7y_0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Se demuestra entonces ([3]) que esta multiplicación **no es asociativa ni conmutativa**. En efecto, si tomamos

$x=(0,0,0,0,1,0,0,0)$, $y=(0,0,0,0,0,0,1,0)$, $z=(0,0,0,0,0,1,0,0)$

se tiene

$(x.y).z = (0,0,1,0,0,0,0,0).z = (0,0,0,0,0,0,0,1)$,

$x.(y.z) = x.(0,0,0,1,0,0,0,0) = (0,0,0,0,0,0,0,-1)$;

$x.y = (0,0,1,0,0,0,0,0)$, $y.x = (0,0,-1,0,0,0,0,0)$.

Existe **elemento neutro**: $(1,0,0,0,0,0,0,0)$, y todo octonio $x = (x_0,\ldots,x_7) \neq (0,\ldots,0)$ *tiene* ***inverso***

$x^{-1} = \dfrac{1}{N(x)}\,\overline{x}$, siendo $N(x) = x_0^2+\ldots+x_7^2$, la norma de x

y $\overline{x} = (x_0,-x_1,-x_2,\ldots,-x_7)$, el conjugado de x ([3]) , con propiedades similares a las del conjugado y la norma de un cuaternio.

Además, la multiplicación es distributiva respecto de la adición, y como K es también un R-espacio vectorial, resulta que K es un álgebra no asociativa.

También puede identificarse la subálgebra K_0 de K formada por los octonios cuyas cuatro últimas componentes son cero con el álgebra H : $K_0 \approx H$. En efecto, es inmediato

comprobar que subsisten la adición y la multiplicación por números reales y, si en (2) se hace

$$x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = 0 ,$$

se obtienen $z_i = 0$ $(4 \leqslant i \leqslant 7)$, y z_j viene dada como en (1), si $0 \leqslant j \leqslant 3$.

4. Los octonios como cuaternas de números complejos

Al conjunto C^4 se le puede dotar de la forma habitual de la estructura de R-espacio vectorial de dimensión 8 con las operaciones habituales de adición y multiplicación de números reales por elementos de C^4 .

Definimos además, en C^4 , la siguiente multiplicación:

$(x_0, x_1, x_2, x_3).(y_0, y_1, y_2, y_3) = (z_0, z_1, z_2, z_3)$, siendo:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= x_0 y_0 - x_1 \overline{y_1} - x_2 \overline{y_2} - \overline{x_3} y_3 \\ z_1 &= x_0 y_1 + x_1 \overline{y_0} + \overline{x_2} y_3 - x_3 \overline{y_2} \\ z_2 &= x_0 y_2 - \overline{x_1} y_3 + x_2 \overline{y_0} + x_3 \overline{y_1} \\ z_3 &= \overline{x_0} y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

donde denotamos con $\overline{w}$ el conjugado del número complejo w .

Se puede probar que esta operación no es asociativa ni conmutativa, pues si $x = (0,0,1,0)$, $y = (0,0,0,1)$, $z = (0,0,i,0)$, se tienen:

$$(x.y).z = (0,0,0,i) \quad , \quad x.(y.z) = (0,0,0,-i) \quad ,$$
$$x.y = (0,1,0,0) \quad , \quad y.x = (0,-1,0,0) \quad .$$

En cambio, si es **distributiva** respecto a la adición de C^4 y tiene **elemento unidad**, que es $(1,0,0,0)$. Por último, como $(x_0, x_1, x_2, x_3).(\overline{x_0}, -x_1, -x_2, -x_3) =$

$$= (x_0\overline{x_0} + x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + x_3\overline{x_3} \; , \; -x_0x_1 + x_1x_0 - \overline{x_2}x_3 + x_3\overline{x_2} \; ,$$
$$-x_0x_2 + \overline{x_1}x_3 + x_2x_0 - x_3\overline{x_1} \; , \; -\overline{x_0}x_3 - x_1x_2 + x_2x_1 + x_3\overline{x_0} \;) =$$

$= (\Sigma_{j=0}^{3} |x_j|^2 \; , \; 0, \; 0, \; 0 \;)$ (y análogamente se llega al mismo resultado cambiando el orden de los factores), resulta que todo $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in C^4$, $x \neq 0$, tiene inverso:

$$x^{-1} = (1 \,/\, \Sigma_{j=0}^{3} |x_j|^2 \,)(\overline{x_0}, -x_1, -x_2, -x_3) \; .$$

Así pues, C^4 tiene la misma estructura algebraica que el álgebra $\mathbb{K}$ de los octonios.

Definamos ahora la siguiente aplicación:

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow C^4 \;\; / \;\; f(r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \; ,$$

siendo $x_k = r_{2k} + i r_{2k+1}$, $0 \leqslant k \leqslant 3$.

Es trivial que f **es un isomorfismo de R-espacios vectoriales:**

Sean $(r_0,\dots,r_7).(s_0,\dots,s_7) = (t_0,\dots,t_7)$,
$f(r_0,\dots,s_7) = (x_0,x_1,x_2,x_3)$, $f(s_0,\dots,s_7) = (y_0,y_1,y_2,y_3)$,
$(x_0,x_1,x_2,x_3).(y_0,y_1,y_2,y_3) = (z_0,z_1,z_2,z_3)$.

En virtud de (1), (2), (3) y la definición de f , se tiene:

$$z_0 = x_0y_0 - x_1\overline{y}_1 - x_2\overline{y}_2 - \overline{x}_3y_3 =$$
$$= (r_0+ir_1)(s_0+is_1) - (r_2+ir_3)(s_2-is_3)$$
$$- (r_4+ir_5)(s_4-is_5) - (r_6-ir_7)(s_6+is_7) =$$
$$= (r_0s_0-r_1s_1-r_2s_2-r_3s_3-r_4s_4-r_5s_5-r_6s_6-r_7s_7) +$$
$$+ i(r_0s_1+r_1s_0+r_2s_3-r_3s_2+r_4s_5-r_5s_4-r_6s_7+r_7s_6) = t_0+it_1 ,$$

y, mediante cálculos farragosos, se llega análogamente a

$$z_1=t_2+it_3 , \quad z_2=t_4+it_5 , \quad z_3=t_6+it_7 .$$

Por lo tanto, $f(t_0,\dots,t_7) = (z_0,z_1,z_2,z_3)$; esto es:

$$f[(r_0,\dots,r_7).(s_0,\dots,s_7)] = f(r_0,\dots,r_7).f(s_0,\dots,s_7) .$$

Resulta, por tanto, que f es un isomorfismo de álgebras y, en consecuencia, podemos identificar el álgebra K de los octonios con C^4 .

Obsérvese también que si en las ecuaciones (3) se supone que x_j , y_j , $z_j \in R$, $0 \leq j \leq 3$, se obtienen las ecuaciones (1), ya que $\overline{x}_j = x_j$, $\overline{y}_j = y_j$. Es decir, si consideramos el subconjunto C_0 de C , formado por los números complejos de parte imaginaria igual a cero, es obvio que $C_0^4 \approx R^4$ como R-espacios vectoriales y, en virtud de lo anterior, también son isomorfos respecto a la multiplicación.

En consecuencia, podemos identificar H con la subálgebra K siguiente:

$$K^0 = \{ (x_0,\dots,x_7) \in K \mid x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = 0 \} \quad ;$$

es decir, $K^0 \approx H$.

5. Los cuaternios como pares de números complejos

El conjunto C^2 puede ser dotado, de la manera habitual, de estructura de R-espacio vectorial de dimensión 4 . Y también se puede definir la siguiente multiplicación:

$$(x,x').(y,y') = (xy-\overline{y}'x', y'x+x'\overline{y}) \tag{4}$$

Es sencillo probar que esta multiplicación es asociativa, no conmutativa, distributiva respecto de la adición, tiene elemento unidad $(1,0)$, y si $(x,x') \in C^2$, $(x,x') \neq (0,0)$, entonces

$$(x,x').(\overline{x},-x') = (x\overline{x}+\overline{x}'x', -x'x+x'\overline{\overline{x}}) = (|x|^2+|x'|^2 , 0) ,$$

y al mismo resultado se llega permutando los factores. En consecuencia, existe el inverso:

$$(x,x')^{-1} = \frac{1}{|x|^2+|x'|^2}(\overline{x},-x') .$$

Por lo tanto, C^2 , además de R-espacio vectorial es un cuerpo no conmutativo.

Definimos la aplicación $g : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}^2$

$g(r_0,r_1,r_2,r_3) = (x,x')$, siendo $x=r_0+ir_1$, $x'=r_2+ir_3$, que se comprueba fácilmente que es un isomorfismo de R-espacios vectoriales.

Además, $g[(r_0,r_1,r_2,r_3).(s_0,s_1,s_2,s_3)] =$

$= g(r_0s_0-r_1s_1-r_2s_2-r_3s_3\ ,\ r_0s_1+r_1s_0+r_2s_3-r_3s_2\ ,$

$r_0s_2-r_1s_3+r_2s_0+r_3s_1\ ,\ r_0s_3+r_1s_2-r_2s_1+r_3s_0) =$

$= ((r_0s_0-r_1s_1-r_2s_2-r_3s_3) + i(r_0s_1+r_1s_0+r_2s_3-r_3s_2)\ ,$

$(r_0s_2-r_1s_3+r_2s_0+r_3s_1) + i(r_0s_3+r_1s_2-r_2s_1+r_3s_0)) =$

$= ((r_0+ir_1).(s_0+is_1)-\overline{(s_2+is_3)}.(r_2+ir_3)\ ,$

$(s_2+is_3).(r_0+ir_1)+(r_2+ir_3).\overline{(s_0+is_1)}) =$

$= g(r_0,r_1,r_2,r_3).g(s_0,s_1,s_2,s_3)$.

Resulta, en consecuencia, que g es un isomorfismo de álgebras que permite identificar $\mathbb{H}$ con $\mathbb{C}^2$: $\mathbb{H} \approx \mathbb{C}^2$.

6. Los octonios como pares de cuaternios

Es obvio que las definiciones habituales de adición y multiplicación por números reales, dotan al conjunto $\mathbb{H}^2$ de estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 8.

Definamos una multiplicación en $\mathbb{H}^2$ por la fórmula (4). Nótese que allí $x,x',y,y' \in \mathbb{C}$ y ahora, en cambio, $x,x',y,y' \in \mathbb{H}$.

Si $x = (x_0,x_1,x_2,x_3)$, $x' = (x_4,x_5,x_6,x_7)$,

$y = (y_0,y_1,y_2,y_3)$, $y' = (y_4,y_5,y_6,y_7)$,

y teniendo en cuenta que $\overline{(z_0,z_1,z_2,z_3)} = (z_0,-z_1,-z_2,-z_3)$, se tiene: $(x,x').(y,y') =$

$((x_0,x_1,x_2,x_3).(y_0,y_1,y_2,y_3)-(y_4,-y_5,-y_6,-y_7).(x_4,x_5,x_6,x_7),$

$(y_4,y_5,y_6,y_7).(x_0,x_1,x_2,x_3)+(x_4,x_5,x_6,x_7).(y_0,-y_1,-y_2,-y_3))$

De (1) resulta, tras cálculos muy pesados, que el producto $(z_0,\ldots,z_7)$ viene dado por las ecuaciones (2).

Dicha multiplicación no es asociativa ni conmutativa; es distributiva respecto a la adición en $\mathbb{H}^2$, tiene elemento unidad $(1,0,0,0,0,0,0,0)$, y resulta que

$(x,x')^{-1} = \frac{1}{N(x)+N(x')}(\overline{x},-x')$, si $(x,x') \in \mathbb{H}^2$ es no nulo.

En consecuencia, $\mathbb{H}^2$ tiene la misma estructura algebraica que $\mathbb{K}$.

De manera similar a como fueron definidas f y g, se define $h : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{H}^2$, tal que $h(x_0,\ldots,x_7) = (x,x')$, siendo $x = (x_0,x_1,x_2,x_3)$, $x' = (x_4,x_5,x_6,x_7)$, y se prueba que h es un isomorfismo de álgebras, que permite identificar $\mathbb{K}$ con $\mathbb{H}^2$.

7. Conclusiones

Trataremos ahora de esquematizar los métodos que hemos seguido a lo largo de este artículo para obtener las álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{K}$, partiendo de otra de ellas.

Consideraremos los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{K}$, de dimensiones 1, 2, 4, y 8, respectivamente. Dichos espacios forman también un álgebra con una multiplicación que, junto a la adición, les confieren estructura de: cuerpo conmutativo a los dos primeros, y cuerpo no conmutativo al tercero; en el cuarto, ésta tampoco es conmutativa y ni siquiera es asociativa, aunque es distributiva respecto a la adición y tiene elemento neutro y simétricos.

La multiplicación en los primeros conjuntos es bien conocida y, en los dos últimos, viene dada por (1) y (2), respectivamente.

Usaremos la notación $\mathbb{E}_p$ para referirnos indistintamente a cada uno de los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{K}$, poniendo $p = dim\, \mathbb{E}_p$, $\mathbb{E}_1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{E}_2 = \mathbb{C}$, $\mathbb{E}_4 = \mathbb{H}$, $\mathbb{E}_8 = \mathbb{K}$.

A continuación se resumen las posibles formas de definir la multiplicación en cada $\mathbb{E}_p$, considerando cada elemento de $\mathbb{E}_p$ como un par, o una cuaterna, de elementos de $\mathbb{E}_q$, con $q < p$:

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN DE INSCRIPCIÓN

D. ... ...Teléfono... ... ...

Dirección particular ... ...

Ciudad ... ... Codº Postal... ... ...

Centro de trabajo ... ...

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO NUMERARIO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ... ...

Sucursal o Agencia ... ... en ... ...

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en mi cuenta.. ... ..nº .. ..

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1990-91

y siguientes. Fecha.................. de .... de 1990

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 2.000 pesetas

Remítanse ambas partes a *Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*. Apartado. nº 9479. 28080 - MADRID

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia ... ... en ... ...

dirección de esta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de mi cuota anual en la *Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matematicas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y apellidos ... ...

Dirección ... ...

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETÍN DE ADHESIÓN DE CENTRO

D. ... ...

como . ... del Centro ... ...

.. ..

domiciliado en ... ...

ciudad ... ... Codº Postal... ...Telefº ... .

SOLICITA LA ADHESIÓN DE ESE CENTRO A LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ... ...

Sucursal o Agencia ... ... en ... ...

Dirección de la misma ... ...

para que cargue en la cuenta.. ... ..nº .. ..

abierta a nombre de .. ..

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1990-91

y siguientes. Fecha.................. de .... de 1990

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 2.000 pesetas

Remítanse ambas partes a *Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*. Apartado. nº 9479. 28080 - MADRID

Fecha ... ... BANCO: ... ...

Sucursal o Agencia ... ... en ... ...

dirección de esta ... ...

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta ... ... nº ... ...

los recibos de la cuota anual en la *Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y apellidos ... ...

Nombre de la cuenta... ... ...

(1º) $q = p/2$.

Se obtienen, por tanto, los complejos como un par de números reales, los cuaternios como un par de números complejos y los octonios como un par de cuaternios: $C = R^2$, $H = C^2$, $K = H^2$.

La multiplicación, en todos los casos, viene dada por (4), donde $x, x', y, y' \in E_q$; (x,x') , $(y,y') \in E_p$.

(2º) $q = p/4$.

Se obtienen así los cuaternios como una cuaterna de números reales y los octonios como una cuaterna de números complejos.

La multiplicación viene dada por (3), siendo x_i, y_i, $z_i \in E_q$ $(i=0,1,2,3)$;

(x_0,x_1,x_2,x_3) , (y_0,y_1,y_2,y_3) , $(z_0,z_1,z_2,z_3) \in E_p$.

Nótese que si $q = 1$, entonces $x_i=x_i$, $y_i=y_i$, y (3) se convierte en (1).

- - - - - - - -

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. D. Aleksandrov y otros. *"La Matemática: su contenido, métodos y significado"*. Vol 3. Alianza Universidad. Madrid, 1973.

[2] R. Gilmore. *"Lie Groups, Lie Algebras and some of their applications"*. Wiley-Interscience. John Wiley & Sons. New York, 1974.

[3] N. Jacobson. *"Basic Algebra I"*. W.H. Freeman and Company New York, 1985.

[4] J. Peralta. *"Una presentación de los cuaternios"*. (Aparecerá en el nº 16 de *"Thales"*. Revista de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas. Sevilla).

- - - - - - - - -

UNAS IDENTIDADES ALGEBRAICAS ELEMENTALES Y SU SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

por Juan Bosco Romero Márquez

I. B. "Isabel de Castilla". Avila

El objeto de este artículo es probar unas identidades algebraicas elementales y su interpretación en el lenguaje geométrico. Dichas interpretaciones geométricas tienen su realización en las geometrías planas de Euclides, de Galileo y de Minkowski basadas, respectivamente, en la métrica euclídea, de Galileo y de Minkowski. La métrica de la geometría queda determinada por su producto escalar (descripción vectorial) correspondiente, sobre el que se construye la geometría. También se puede dar una interpretación en términos de los números complejos, duales y dobles (descripción algebraica).

I. Comenzaremos esta sección enunciando los resultados elementales y principal de nuestro trabajo. Damos en primer lugar unos teoremas elementales auxiliares:

Teorema 1.: Si b, c, b', c', son números reales cualesquiera, entonces

a) $(b+c)(b'-c') - (b'+c')(b-c) = 2(cb'-bc')$.

b) $(b+c)(b'-c') + (b'+c')(b-c) = 2(bb'-cc')$.

c) $(b+c)(b'+c') - (b-c)(b'-c') = 2(bc'+cb')$.

d) $(b+c)(b'+c') + (b-c)(b'-c') = 2(bb'+cc')$.

La demostración se hace por cálculo directo sencillo.

Teorema 2.: Si b, c, b', c', son números reales arbitrarios tales que $0 < c \leq b$ y $0 < c' \leq b'$, entonces:
a) $bb' + cc' \geq bc' + cb'$ y **b)** $cb' - bc' \leq bb' - cc'$.
Con la igualdad en **a)** si y sólo si $b' = c'$ o $b = c$.

La demostración se hace por cálculo directo sencillo.

El teorema principal es el siguiente:

Teorema 3.: Si b, c, b', c' son números reales cualesquiera, se tienen las siguientes identidades algebraicas elementales:

a) $(b^2 + c^2)(b'^2 + c'^2) = (bb' + cc')^2 + (cb' - bc')^2 =$
$= (bb' - cc')^2 + (cb' + bc')^2$. (Diofanto)

b) $4bcb'c' = (bb' + cc')^2 - (bb' - cc')^2 =$
$= (cb' + bc')^2 - (cb' - bc')^2$.

c) $(b^2 - c^2)(b'^2 - c'^2) = (bb' + cc')^2 - (cb' + bc')^2 =$
$= (bb' - cc')^2 - (cb' - bc')^2$.

La demostración se hace por cálculo directo sencillo.

Observación: Algunas de las identidades anteriores pueden ser escritas en la forma de producto si recordamos la identidad algebraica elemental: $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$. El teorema 1 nos permite a su vez, escibir las identidades del teorema 3 en otra forma simple.

Corolario: Si b, c, b', c' son números reales arbitrarios, entonces:

$$(b^2 + c^2)(b'^2 + c'^2) \geq (bb' + cc')^2 ,$$
$$(b^2 + c^2)(b'^2 + c'^2) \geq (bc' + cb')^2 ,$$

con las igualdad entre los dos primeros miembros si y sólo si $bc' - cb' = 0$, y entre los dos últimos, si y sólo si $bb' - cc' = 0$

La demostración de este corolario es una consecuencia directa de los teoremas 1, 2 y 3.

Como un buen ejercicio de cálculo algebraico elemental proponemos el siguiente a los alumnos:

Ejercicio: Si todas las letras que se indican en las diversas cuestiones de este problema representan números reales, probar las siguientes identidades algebraicas, indicando, en las que sea posible, una interpretación geométrica sencilla:

a) $(x \pm y)^2 \mp 4xy = (x \pm y)^2$.
b) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.
c) $(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) = x^3 \pm y^3$, y más general:
$(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n - y^n$,
$(x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots \mp xy^{n-2} \pm y^{n-1}) = x^n \pm y^n$.
con signo superior o inferior según que n (natural) sea un número impar o par.

Las identidades que a continuación proponemos tienen una importancia fundamental para demostrar diversos resultados útiles e interesantes de la teoría de números:

d) $(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx' \mp yy')^2 + (xy' \pm yx')^2$,
$(x^2 + ay^2)(x'^2 + ay'^2) = (xx' \pm ayy')^2 + a(xy' \mp yx')^2$.

f) $(x^2 - y^2)(x'^2 - y'^2) = (xx' \pm yy')^2 - (xy' \pm yx')^2$,

$(x^2 - ay^2)(x'^2 - ay'^2) = (xx' \pm ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2$.

g) $(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) =$

$= (xx'+yy'+zz')^2 + (yz'-y'z)^2 + (zx'-z'x)^2 + (xy'-x'y)^2$

(Lagrange)

$(z^2-x^2-z^2)(z'^2-x'^2-y'^2) =$

$= (zz'-xx'-yy')^2 + (yz'-y'z)^2 + (zx'-z'x)^2 + (xy'-x'y)^2$

h) $(x^2+y^2+z^2+u^2)(x'^2+y'^2+z'^2+u'^2) = (xx'+yy'+zz'+uu')^2+$

$+(xy'-yx'+zu'-uz')^2+(xz'-yu'-zx'+uy')^2+(xu'+yz'-zy'-ux')^2$

Ejercicio: Si las letras que aparecen en las diversas cuestiones de este problema indican números complejos cualesquiera, probar por cálculo directo las identidades:

a) $z\bar{z}' = \left|\frac{z + z'}{2}\right|^2 - \left|\frac{z - z'}{2}\right|^2 - i\left|\frac{z + iz'}{2}\right|^2 - i\left|\frac{z - iz'}{2}\right|^2$

b) $|z| + |z'| = \left|(z+z')/2 - \sqrt{zz'}\right| + \left|(z+z')/2 + \sqrt{zz'}\right|$.

c) $|1-z_0z|^2-|z-z_0|^2 = (1 - |zz_0|)^2 - (|z| - |z_0|)^2 =$

$= (1 + |zz_0|)^2 - (|z| + |z_0|)^2$.

d) $|w_0z_0+wz|^2 + |wz_0-w_0z|^2 = (|w_0|^2+|w|^2)(|z_0|^2+|z|^2)$.

f) $|1-z_1z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$.

g) $|z + \lambda z'|^2 + |z' + \lambda z|^2 = (1+\lambda^2)(|z|^2+|z'|^2)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

h) $(n-2)\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|^2 = \sum_{1\le k<s\le n}|a_k + a_s|^2$.

i) $n\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - \left|\sum a_k\right|^2 = \sum_{1\le k<s\le n}|a_k - a_s|^2$.

II. Aplicaciones algebraicas: Identidades increibles.

Comenzamos esta sección dando las siguientes y sorprendentes identidades numéricas, cuya comprobación se propone como problema:

a) $\sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$

debida a D. Shanks.

b) $\sqrt[4]{\frac{3 + 2\sqrt[4]{5}}{3 - 2\sqrt[4]{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5} + 1}{\sqrt[4]{5} - 1}$

debida a Hardy.

c) $\sqrt{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25}\right)$.

d) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

e) $\sqrt{2}\,(\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}) = 2$.

f) $\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + 125/7}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + 125/7}} = 1$.

g) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$.

h) $\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{5})$.

i) $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$.

j) $\sqrt{a + b} \pm \sqrt{a - b} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b^2}}$ $(a > b)$.

k) $\sqrt{a \pm b} = \sqrt{(a + \sqrt{a^2-b^2})/2} \pm \sqrt{(a - \sqrt{a^2-b^2})/2}$ $(a > b)$.

Ejercicios: Utilizando como base el teorema 3, establecer las siguientes identidades algebraicas y numéricas:

a) $\sqrt{11 - 4\sqrt{6}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

b) $\sqrt{825 - 168\sqrt{6}} = 21 - 8\sqrt{6}$.

c) $\sqrt{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{3})} + \sqrt{(\sqrt{2}+1)(2-\sqrt{3})}$.

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}\;\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[4]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[4]{\sqrt{2}+1}\,\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}$.

e) $\sqrt{(6+\sqrt{2}-4\sqrt{3})(8+\sqrt{2}+4\sqrt{3})} = \sqrt{\sqrt{2}-1}\,(2+\sqrt{3}) + \sqrt{\sqrt{2}+1}\,(2-\sqrt{3})$.

f) $\sqrt{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}\;\sqrt{2x+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} =$
$= \sqrt{(\sqrt{x^2+1}-x)(x+\sqrt{x^2-1})} + \sqrt{(\sqrt{x^2+1}+x)(x-\sqrt{x^2-1})}$, $(x>1)$

g) $\sqrt{2y^2+2x(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2})} =$
$= \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-x)(x+\sqrt{x^2-y^2})} + \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}+x)(x-\sqrt{x^2-y^2})}$, $(x>y>0)$

h) Probar la identidad a) de Shanks de la página anterior poniendo $x = \sqrt{11-2\sqrt{29}}$, $y = \sqrt{11+2\sqrt{29}}$ en

$$xy + \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = y + \sqrt{x^2(1+y^2)+2(xy)x} .$$

III. Interpretación geométrica de las identidades del teorema 3.

Veamos primero una interpretación geométrica de algunas de las identidades del teorema 3, en términos de triángulos rectángulos.

Teorema 4. Sean T: $a > b \geq c$ y T': $a' > b' \geq c'$ dos triángulos rectángulos. Entonces se tiene:

i) $aa' \geq bb' + cc'$, alcanzándose la igualdad si y sólo si los triángulos T y T' son semejantes (linelmente proporcionales);

ii) $aa' \geq bc' + cb'$, alcanzándose la igualdad si y sólo si los triángulos son semejantes hiperbólicamente (inversamente proporcionales).

Demostración: i) se sigue del hecho siguiente:
$a^2 = b^2 + c^2$, $a'^2 = b'^2 + c'^2$, ya que los triángulos T y T' son rectángulos, por hipótesis.

Podemos escribir, por el teorema 3 a) que:

$$a^2a'^2 = (b^2+c^2)(b'^2+c'^2) = (bb'+cc')^2 + (bc'-cb')^2 ,$$

y de aquí,

$$a^2a'^2 \geq (bb' + cc')^2 , \quad aa' \geq bb' + cc' .$$

Si se tiene la igualdad, entonces tenemos que
$aa' = bb'+cc' \Longleftrightarrow a^2a'^2 = (bb'+cc')^2 \Longleftrightarrow (bc'-cb')^2 = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow bc'-cb' = 0 \Longleftrightarrow b/c = b'/c' \Longleftrightarrow$ T y T' son semejantes.

ii) Por el teorema 3 b) podemos poner que

$$a^2a'^2 = (b^2+c^2)(b'^2+c'^2) = (bb'-cc')^2 + (bc'+cb')^2 ,$$

y de aquí tenemos que

$$a^2a'^2 \geq (bc'+cb')^2 \Longleftrightarrow aa' \geq bc'+cb' .$$

Si se tiene la igualdad, operando llegamos a:
$aa' = bc'+cb' \Longleftrightarrow a^2a'^2 = (b^2+c^2)(b'^2+c'^2) = (bc'+cb')^2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (bb' - cc')^2 = 0 \Longleftrightarrow bb'-cc' = 0 \Longleftrightarrow bb' = cc' \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ T y T' son hiperbólicamente semejantes.
Con esto queda concluida la demostración del teorema.

Ejemplo de dos triangulos hiperbólicamente semejantes: Tomar para $T: b = 12,\ c = 8,\ a = \ b^2+c^2 = 4\ 13$ y para $T': b' = 6,\ c' = 9,\ a = \ b'^2+c^2 = 3\ 13$. Tenemos de lo anterior que $bb' = cc' = 72$, los triángulos son hiperbólicamente semejantes y $4\ 13.3\ 13 = 12.9 + 6.8$.

Teorema 5. Sean T y T' dos triángulos rectángulos tales que entre sus lados se verifican, respectivamente que $c \leqslant b < a$, $c' \leqslant b' < a'$. Entonces se tiene que

$$aa' \geqslant bb' + cc' \geqslant bc' + cb'.$$

La demostración se sigue como una consecuencia del teorema 4.

Teorema 6. Si $T: a > b \geqslant c$ y $T': a' > b' \geqslant c'$ son dos triángulos que ninguno de ellos sea acutángulo, entonces:

$$aa' \geqslant bb' + cc' \geqslant bc' + cb'.$$

La demostración es una consecuencia del teorema 3 y de su corolario.

Los conceptos de pares de triángulos linealmente semejantes e hiperbólicamente semejantes, mencionados antes, se pueden definir, en principio sólo para triángulos rectángulos, como sigue:

Definiciónes: Los dos triángulos rectángulos $T: a > b \geqslant c$ y $T': a' > b' \geqslant c'$, de lados indicados, son linealmente semejantes si y sólo si se verifica:

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Los triángulos rectángulos $T: a > b \geqslant c$ y $T': a' > b' \geqslant c'$, de lados indicados, son hiperbólicamente semejantes si y sólo si se verifica:

$$bb' = cc'.$$

Teorema 7. Los únicos pares de triángulos rectángulos que son a la vez linealmente e hiperbólicamente semejantes son los triángulos isósceles.

Finalmente, para encontrar una interpretación geométrica de las identidades enunciadas en el teorema 3, relacionadas con las Geometrías de Euclides, de Galileo y de Minkowski, ver el libro de I. M. Yaglom : *"A simple non-euclidean geometrie and its physical bases"* (Springer, New York, 1979). También puede verse en este libro la interpretación de las identidades del teorema 3, en términos de números complejos, duales y dobles.

NOTA

En el número 23 (1.989-90) de este Boletín se publicó el trabajo "Interpretación geométrica de la extensión y contracción de ideales" de doña Concepción Romo Santos. Sin duda por algún error involuntario no aparece en la publicación de dicha nota que la misma es parte del trabajo mencionado en la Bibliografía como (1), realizado por F. Etayo y P. García y de título "Interpretación geométrica de la teoría de ideales", dirigido por doña Concepción Romo; lo cual me complazco en aclarar como Secretario que era, en aquella época, del Departamento de Algebra de la Universidad Complutense, en el marco de cuyo Programa de Doctorado se hizo el trabajo.

José Javier Etayo Gordejuela.

SOBRE ANALISIS NO ESTANDAR

por Manuel Suárez Fernández

CAPÍTULO II : AXIOMAS Y PRIMEROS TEOREMAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS DE ZERMELO-FRAENKEL Y AXIOMA DE ELECCIÓN.

Aunque el título de la serie es "Sobre Análisis No Estandar", este segundo artículo o Capítulo de la misma, solo tratará de matemática estandar o clásica. En lugar del mismo podría simplemente escribir que "se considera la Teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección", *pero prefiero concretar un poco mas estas cuestiones con el fin de precisar los significados de notaciones y términos que jugarán un papel fundamental en siguientes artículos o capítulos de la referida serie.*

– – –

AXIOMAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS DE ZERMELO-FRAENKEL

Admitimos que existe una clase, que notamos *"U"* , de cosas que llamamos *"conjuntos"*, que existe un (algún) conjunto y que existe una clase, que notamos "$\mathcal{P}$", de cosas que llamamos *"propiedades"*.

Los signos que llamamos *"variables"* sólo son para "señalar lugares".

Admitimos que si ξ es una variable o ξ es un conjunto y η es una variable o η es un conjunto, entonces existe una propiedad que notamos " $\xi \in \eta$ " y llamamos "*ξ pertenece a η* " o " *ξ es elemento de η* ", y existe una propiedad que notamos "$\xi = \eta$" y llamamos " *ξ es igual a η* ".

Admitimos que si α es una propiedad, entonces existe una propiedad que notamos " $\neg\alpha$ " y llamamos " *no α* ".

Si ξ es una variable o ξ es un conjunto y η es una variable o es un conjunto, entonces a $\neg(\xi \in \eta)$ la notamos "$\xi \notin \eta$" y a $\neg(\xi = \eta)$ la notamos "$\xi \neq \eta$".

Admitimos que si α es una propiedad y β es una propiedad, entonces existe una propiedad que notamos "$\alpha \wedge \beta$" y llamamos "*α y β*" .

Si α es una propiedad y β es una propiedad, entonces a $\neg((\neg\alpha)\wedge(\neg\beta))$ la notamos "$\alpha \vee \beta$" y la llamamos "*α o β*", a $(\alpha\vee\beta)\wedge\neg(\alpha\wedge\beta)$ la notamos "$\alpha\, W \beta$" y la llamamos "*o α o β*", a $(\neg\alpha)\vee\beta$ *la notamos* " $\alpha \Rightarrow \beta$ " y la llamamos " *α implica β* " o "*si α , entonces β* ", y a $(\alpha \Rightarrow \beta)\wedge(\beta \Rightarrow \alpha)$ la notamos " $\alpha \Leftrightarrow \beta$ " y la llamamos " *α equivale a β* " o " *α es equivalente a β* " o " *α si y sólo si β* ".

Si X, Y son variables, E es un conjunto y F es un conjunto, entonces decimos que:

- en $X \in Y$ y en $X=Y$ figuran libres X, Y, no figura libre variable alguna distinta de X, Y (es decir, distinta de X y de Y), y no figura conjunto alguno.
- en $X \in E$, $E \in X$, $X = E$ y $E = X$, figura libre X no figura libre variable alguna distinta de X, figura E y no fgura conjunto alguno dsitinto de E.
- en $E \in F$ y $E = F$ figuran E, F y no figura conjunto alguno distinto de E, F, y no figura libre variable alguna.

Si X es una variable, E es un conjunto y α es una propiedad, entonces decimos que:

- en $\neg\alpha$ figura libre X si y sólo si en α figura libre X .
- en $\neg\alpha$ figura E si y sólo si en α figura E .

Si X es una variable, E es un conjunto, α es una propiedad y β es una propiedad, entonces decimos que:

- en $\alpha\wedge\beta$ figura libre X si y sólo si en α figura libre X o en β figura libre X .
- en $\alpha\wedge\beta$ figura E si y sólo si en α figura E o en β figura E .

Admitimos que si X es una variable y α es una propiedad tal que en α figura libre X , entonces existe una

propiedad que notamos " $\exists x\alpha$ ", llamamos "*existe X tal que (se verifica) α* ", y decimos que en $\exists x\alpha$ figura ligada X y que "*ligada*" significa "*no libre*" (y que "*libre*", pues, significa "*no ligada*").

Si X es una variable y α es una propiedad tal que en α figura libre X , entonces a $\neg(\exists x(\neg\alpha))$ la notamos " $\forall x\alpha$ " y la llamamos "*para todo x (se verifica) α* ".

Si α es una propiedad, entonces decimos que "*α es un enunciado*" si y sólo si en α no figura libre variable alguna.

Se demuestra que:

- si E es un conjunto y F es un conjunto, entonces $E \in F$ y $E = F$ son enunciados.
- si α es un enunciado, entonces $\neg\alpha$ es un enunciado.
- si α es un enunciado y β es un enunciado, entonces $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\, W\beta$, $\alpha\Rightarrow\beta$ y $\alpha\Leftrightarrow\beta$ son enunciados.
- si X es una variable y α es una propiedad tal que en α figura libre X y no figura libre variable alguna distinta de X , entonces $\exists x\alpha$ y $\forall x\alpha$ son enunciados.
- si X es una variable, E es un conjunto, $P(x)$ es una propiedad tal que en $P(x)$ figura libre X y no figura libre variable alguna distinta de X y $P(E)$ es la propiedad tal que en $P(E)$ figura E donde en $P(X)$ figura X, entonces $P(E)$ es un enunciado.

Admitiremos que existe una clase de enunciados a los que llamamos "*verdaderos*", que existe una clase de enunciados a los que llamamos "*falsos*" y que si p es un enunciado, entonces o p es verdadero o p es falso (es decir, p es verdadero o p es falso y no se verifica que p es verdadero y p es falso).

Si p es un enunciado, entonces " p " y "*se verifica* p " significan " *p es verdadero*" y "*no se verifica* p " significa " *p es falso*".

Admitimos que si p es un enunciado, entonces se verifica que:

- si p es verdadero, entonces $\neg p$ es falso.
- si p es falso, entonces $\neg p$ es verdadero.

Admitimos que si p es un enunciado y q es un enunciado, entonces se verifica que:

- si p es verdadero y q es verdadero, entonces $p \wedge q$ es verdadero.
- si p es verdadero y q es falso, entonces $p \wedge q$ es falso.
- si p es falso y q es verdadero, entonces $p \wedge q$ es falso.
- si p es falso y q es falso, entonces $p \wedge q$ es falso.

Si X es una variable, E es un conjunto, $P(X)$ es una propiedad tal que en $P(X)$ figura libre X y no figura libre variable alguna distinta de X, y $P(E)$ es el enunciado tal que en $P(E)$ figura E donde en $P(X)$ figura X , entonces decimos que E verifica $P(X)$ si y sólo si el enunciado $P(E)$ es verdadero.

Admitimos que si X es una variable y $P(X)$ es una propiedad tal que en $P(X)$ figura libre X y no figura libre variable alguna distinta de X, entonces el enunciado $\exists xP(x)$ es verdadero si y sólo si existe (algún) conjunto E tal que E verifica $P(X)$.

Admitimos que si E es un conjunto y F es un conjunto, entonces $E = F$ si y sólo si E es el mismo conjunto que F .

Admitimos (**axioma de extensionalidad**) que si E es un conjunto y F es un conjunto de manera que si A es un conjunto, entonces A es elemento de E si y sólo si A es elemnto de F , entonces $E = F$ (es decir, admitimos que si X, Y, Z son variables, entonces el enunciado:

$$\forall X \forall Y \quad (\forall Z \ (Z \in X \Longleftrightarrow Z \in Y) \Longrightarrow X = Y) \text{ es verdadero}) .$$

Si ξ es una variable o ξ es un conjunto, η es una variable o η es un conjunto y X es una variable, entonces a (la propiedad) $\forall X \ (X \in \xi \Longrightarrow X \in \eta \ )$ la notamos " $\xi \subset \eta$ " y llamamos " ξ *está contenido en* η " o " ξ *es subconjunto de* η " o " ξ *es parte de* η " (luego si E *es un conjunto y* F es un conjunto, entonces el enunciado $E \subset F$ es verdadero si y sólo si se verifica que si A es elemento de E , entonces A es elemento de F).

Admitimos (**axioma del conjunto potencia**) que si E es un conjunto, entonces existe un conjunto que notamos " $\mathcal{P}(E)$" y llamamos "*conjunto potencia de* E " o "*conjunto de los subconjuntos de* E " o "*conjunto de las partes de* E ", tal que si A es un conjunto, entonces A es elemento del $\mathcal{P}(E)$ si y sólo si A es subconjunto de E (es decir, admitimos que si X, Y, Z son variables, entonces el enunciado

$$\forall X \exists Y \forall Z \ (Z \in Y \Longleftrightarrow Z \subset X) \qquad \text{es verdadero}).$$

Admitimos (***axioma de la unión***) *que si* X es una variable y E es un conjunto, entonces existe un conjunto, que notamos " $\bigcup_{X \in E} X$ " y llamamos "*conjunto unión de los elementos de* E ", tal que si A es un conjunto, entonces es elemento del $\bigcup_{X \in E} X$ si y sólo si existe un (algún) elemento B de E tal que A es elemento de B (es decir, admitiremos que si X, Y, Z, T son variables, entonces el enunciado

$$\forall X \exists Y \forall Z \ (Z \in Y \Longleftrightarrow \exists T \ ((T \in X) \wedge (Z \in T))) \text{ es verdadero}).$$

Si X, Y son variables y $P(X,Y)$ es una propiedad tal que en $P(X,Y)$ figuran libres X, Y y no figura libre variable alguna distinta de X, Y, entonces decimos que $P(X,Y)$ es una *propiedad funcional* de función Y si y sólo si se verifica que si E es un conjunto, F es un conjunto, G es un conjunto, $P(E,Y)$ es la propiedad tal que en $P(E,Y)$ figura E donde en $P(X,Y)$ figura libre X, F verifica $P(E,Y)$ y G verifica $P(E,Y)$, entonces $F = G$.

Si X, Y son variables, $P(X,Y)$ es una propiedad tal que en $P(X,Y)$ figuran libres X, Y y no figura libre variable alguna distinta de X, Y, $P(X,Y)$ es una propiedad funcional de función Y, E es un conjunto, $P(E,Y)$ es la propiedad tal que en $P(E,Y)$ *figura* E donde en $P(X,Y)$ figura libre X, y F es un conjunto, entonces decimos que F es ***imagen*** de E respecto de $P(X,Y)$ si y sólo si F verifica $P(E,Y)$.

Admitimos (**axioma de sustitución**) que si X, Y son variables, $P(X,Y)$ es una propiedad tal que en $P(X,Y)$ figuran libres X, Y y no figura libre variable alguna distinta de X, Y, $P(X,Y)$ es una propiedad funcional de función Y y E es un conjunto, entonces existe un conjunto F tal que si B es un conjunto, entonces B es elemento de F si y sólo si existe un (algún) elemento A de E tal que B es imagen de A respecto de $P(X,Y)$ (es decir, si X, Y, Z, T son variables, $P(T,Z)$ es una propiedad tal que en $P(T,Z)$ figuran libres T, Z y no figura libre variable alguna distinta de T, Z, y $P(T,Z)$ es una propiedad funcional de función Z, entonces el enunciado

$\forall X \exists Y \forall Z \; (Z \in Y \Longleftrightarrow \exists T \; ((T \in X) \wedge P(T,Z)) \;)$ es verdadero).

Se demuestra que existe un conjunto, que notamos " $\emptyset$ " y llamaremos *"conjunto vacío"* tal que si A es un conjunto, entonces A no es elemento de $\emptyset$ (es decir se demuestra que si X, Y son variables, entonces el enunciado $\exists X \forall Y \; (Y \notin X)$ es verdadero).

Se demuestra que si E es un conjunto, entonces existe un conjunto, que notamos " $\{E\}$ " y llamamos *"conjunto de elemento E"*, tal que si A es un conjunto, entonces A es elemento del $\{E\}$ si y sólo si $A = E$ (es decir, se demuestra que si X, Y, Z son variables, entonces el enunciado

$\forall X \exists Y \forall Z \; (Z \in Y \Longleftrightarrow Z = X)$ es verdadero).

Se demuestra que si E es un conjunto y F es un conjunto, entonces existe un conjunto que notamos " $E \cup F$ " y llamamos *"conjunto E unión F"*, tal que si A es un conjunto, entonces A es elemento del $E \cup F$ si y sólo si A es elemento de E o A es elemento de F (es decir, se demuestra que si X, Y, Z, T, *son variables, entonces el enunciado*

$\forall X \forall Y \exists Z \forall T \; (T \in Z \Longleftrightarrow (T \in X) \vee (T \in Y) \;)$ es verdadero).

Admitimos (**axioma del infinito**) que existe un conjunto ω tal que:

- $\emptyset$ es elemento de ω.
- si A es elemento de ω, entonces el $A \cup \{A\}$ es elemento de ω.
- si A, B son elementos de ω y A es elemento de B, entonces B no es elemento de A.
- si E es subconjunto de ω tal que $\emptyset$ es elemento de E, y se verifica que si A es elemento de E entonces el $A \cup \{A\}$ es elemento de E, entonces $E = \omega$ (es decir, admitimos que si X, Y, Z son variables, entonces el enunciado

$\exists X \; ((\emptyset \in X) \wedge \forall Y (Y \in X \Rightarrow Y \cup \{Y\} \in X) \wedge \forall Y \forall Z ((Y \in X) \wedge (Z \in X) \wedge (Y \in Z) \Rightarrow$
$\Rightarrow (Z \notin Y)) \wedge \forall Y ((Y \subset X) \wedge (\emptyset \in Y) \wedge \forall Z (Z \in Y \Rightarrow Z \cup \{Z\} \in Y) \Rightarrow Y = Z))$

es verdadero).

PRIMEROS TEOREMAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS DE ZERMELO-FRAENKEL

Los ya considerados (cuya redacción, como la de los que consideraremos a continuación, empieza: "se demuestra...") y los siguientes:

Se demuestra (teorema generalmente llamado **"axioma de comprensión"**) que si E es un conjunto, X es una variable y $P(X)$ es una propiedad tal que en $P(X)$ figura libre X y no figura libre variable alguna distinta de X , entonces existe un conjunto F tal que si A es un conjunto, entonces A es elemento de F si y sólo si A es elemento de E y A verifica $P(X)$ (es decir, se demuestra que si X, Y, Z son variables y $P(Z)$ es una propiedad tal que en $P(Z)$ figura libre Z y no figura libre variable alguna distinta de Z , entonces el enunciado $\forall X \exists Y \forall Z\ (Z \in Y \Longleftrightarrow (Z \in X) \wedge P(Z)\ )$ es verdadero).

Se demuestra (teorema generalmente llamado **"axioma del par"**) que si E es un conjunto y F es un conjunto, entonces existe un conjunto, que notamos " $\{E,F\}$ ", y llamamos *"conjunto de elementos E, F "*, tal que si A es un conjunto, entonces A es elemento del $\{E,F\}$ si y sólo si $A=E$ o $A=F$ (es decir, se demuestra que si X, Y, Z, T son variables, entonces el enunciado
$\forall X \forall Y \exists Z \forall T\ (\ T \in Z \Longleftrightarrow (T=X) \vee (T=Y)\ )$ es verdadero).

Se demuestra que si X es una variable y E es un conjunto tal que $E \neq \emptyset$, entonces existe un conjunto, que notamos " $\bigcap_{X \in E} X$ " y llamamos *"conjunto intersección de los elementos de E "* tal que si A es un conjunto, entonces A es elemento del $\bigcap_{X \in E} X$ si y sólo si se verifica que si B es elemento de E , entonces A es elemento de B (es decir, se

demuestra que si X, Y, Z, T son variables, entonces el enunciado $\forall X\ (X \neq \emptyset \Longrightarrow \exists Y \forall Z (Z \in Y \Longleftrightarrow \forall T (T \in X \Longrightarrow Z \in T)))$ es verdadero).

Se demuestra que si E es un conjunto, entonces existe un conjunto, que notamos " $E \cap F$ " y llamamos *"conjunto E intersección F "*, tal que si A es un conjunto, entonces A es elemento del $E \cap F$ si y sólo si A es elemento de E y A es elemento de F (es decir, se demuestra que si X, Y, Z, T son variables, entonces el enunciado
$\forall X \forall Y \exists Z \forall T (T \in Z \Longleftrightarrow (T \in X) \wedge (T \in Y)\ )$ es verdadero).

Se demuestra que si E es un conjunto y F es un conjunto, entonces existe un conjunto que notamos " $E \setminus F$ " y llamamos *"conjunto diferencia entre E y F "*, tal que si A es un conjunto, entonces A es elemento del $E \setminus F$ si y sólo si A es elemento de E y A no es elemento de F (es decir, se demuestra que si X, Y, Z, T son variables, entonces el enunciado $\forall X \forall Y \exists Z \forall T\ (\ T \in Z \Longleftrightarrow (T \in X) \wedge (T \notin Y)\ )$ es verdadero).

Si E es un conjunto y F es un subconjunto de E , entonces al $E \setminus F$ le notamos " ${}^{c}F_{E}$ " o (si no hay peligro de confusión) " ${}^{c}F$ " y le llamamos *"conjunto complementario de F respecto de E "* o (si no hay peligro de confusión) *"conjunto complementario de F "*.

Si E es un conjunto y F es un conjunto, entonces al $\{\ \{E\}\ ,\ \{E,F\}\ \}$ le notamos " (E,F) " y le llamamos *"par ordenado de primera componente E y segunda componente F "* o *"par ordenado de componentes E, F "* o *"par de componentes E, F "*.

Se demuestra que si E es un conjunto, F es un conjunto, G es un conjunto y H es un conjunto, entonces $(E,F) = (G,H)$ si y sólo si $E = G$ y $F = H$ (es decir, se demuestra que si X, Y, Z, T son variables,, entonces el enunciado $\forall X \forall Y \forall Z \forall T \ ((X,Y)=(Z,T) \Longleftrightarrow (X=Z) \wedge (Y=T))$ es verdadero).

Se demuestra que si E es un conjunto y F es un conjunto, entonces existe un conjunto, que notamos " $E \times F$ " y llamamos *"conjunto producto cartesiano de E por F "*, tal que si A es un conjunto, entonces A es elemento de $E \times F$ si y sólo si existe un elemento B de E y existe un elemento C de F de manera que $A = (B,C)$ (es decir, se demuestra que si X, Y, Z, T, R, S son variables, entonces el enunciado
$\forall X \forall Y \exists Z \forall T \ (T \in Z \Longleftrightarrow \exists R \exists S \ ((R \in X) \wedge (S \in Y) \wedge T=(R,S)) \ )$
es verdadero).

AXIOMA DE ELECCIÓN

Admitimos (**axioma de elección**) que si X, Y son variables y E es un conjunto, entonces existe una propiedad $P(X,Y)$ tal que en $P(X,Y)$ figuran libres X, Y y no figura libre variable alguna distinta de X, Y , $P(X,Y)$ es una propiedad funcional de función Y , y A es un subconjunto de E tal que $A \neq \emptyset$, entonces existe un elemento B de A tal que B es imagen de A respecto de $P(X,Y)$ (es decir, admitimos que si X, Y son variables y E es un conjunto, entonces existe una propiedad $P(X,Y)$ tal que en $P(X,Y)$ figuran libres X, Y y no figura libre variable alguna distinta de X, Y , $P(X,Y)$ es una propiedad funcional de función Y , y el enunciado:

$$\forall X \ ((X \subset E) \wedge (X \neq \emptyset) \Longrightarrow \exists Y \ ((Y \in X) \wedge P(X,Y)))$$

es verdadero. Luego, considerando que " $P(X,Y)$ " significa *"elegimos un y sólo un elemento Y de X "* , lo que admitimos es que si E es un conjunto y A es un subconjunto no vacío de E , entonces elegimos un y sólo un elemento B de A).

APÉNDICE

Con los axiomas, definiciones y teoremas considerados de la ZFC (es decir, de la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección), se definen ternas, cuaternas, correspondencias (entre conjuntos), relaciones binarias, relaciones de equivalencia (clases de equivalencia, conjuntos cociente), relaciones de orden (de orden total, de buen orden), relaciones de orden estricto (de orden estricto total, de buen orden estricto), aplicaciones, leyes de composición, estructuras algebraicas, estructuras topológicas, etc.

Los números naturales se definen con los axiomas de Peano (*), de (por ejemplo) la siguiente manera:

Admitimos que existe una clase, que notamos " $\mathbb{N}$ " de cosas que llamamos *"números naturales"*, tal que

- existe un número natural que notamos 0 y llamamos *"cero"*,
- si n es un número natural, entonces existe un número natural que notamos " $s(n)$ " y llamamos *"siguiente de n "* ,
- el 0 no es siguiente de número natural alguno,
- si n es un número natural y m es un número natural distinto de n , entonces $s(n)$ es distinto de $s(m)$,
- **(principio de inducción completa o principio de recurrencia)** si E es una clase de números naturales (es de-

(*) Giuseppe Peano (1858-1932)

cir, si E es una subclase de $\mathbb{N}$) tal que 0 es de (la clase) E y se verifica que si (un número natural) n es de (la clase) E entonces el $s(n)$ es de (la clase) E, entonces E es la misma clase que $\mathbb{N}$.

Si, considerando el axioma del infinito de la ZFC, al conjunto ω le notamos " $\mathbb{N}$ " y a sus elementos les llamamos *"números naturales"*, al $\emptyset$ le notamos " 0 " y le llamamos *"cero"*, y si n es un elemento de ω, entonces al n (n) le notamos $s(n)$ y le llamamos *"siguiente de n "*, entonces, considerando los axiomas de la ZFC, se demuestra que existe un conjunto, que notamos " $\mathbb{N}$ " y a cuyos elementos llamamos *"numeros naturales"*, tal que:

P_1: existe un número natural que notamos " 0 " y llamamos *"cero"*,

P_2: si n es un número natural, entonces existe un número natural que notamos " $s(n)$ " y llamamos *"siguiente de n "*,

P_3: si n es un número natural, entonces $s(n) \neq 0$,

P_4: si n es un número natural y m es un número natural tal que $m \neq n$, entonces $s(n) \neq s(m)$,

P_5 (principio de inducción completa o principio de recurrencia): si E es subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que 0 es elemento de E y *si se verifica que si* n es elemento de E entonces $s(n)$ es elemento de E, entonces $E = \mathbb{N}$.

Es decir, se reduce así la clase $\mathbb{N}$ de los números naturales y cada número natural a un conjunto, y los axiomas de Peano a teoremas de la ZFC .

La estructura de los números naturales se define considerando básicamente el Principio de recurrencia.

Considerando relaciones de equivalencia sobre conjuntos producto cartesiano, clases de equivalencia y conjuntos cociente, se definen los números enteros, su conjunto, y su estructura como prolongación de la estructura de los números naturales, y los numeros racionales, su conjunto, y su estructura como prolongación de la estructura de los números enteros.

Se definen sucesiones (como cierta clase de aplicaciones) y sucesiones regulares (o de Cauchy) de números racionales, su conjunto, una relación de equivalencia sobre el mismo, los números reales como las clases de equivalencia, su conjunto como el conjunto cociente y su estructura como proplongación de la estructura de los números racionales.

Los números complejos, en fin, se definen como pares ordenados de números reales, su conjunto, por tanto, como un producto cartesiano y su estructura como prolongación de la estructura de los números reales

De esta forma, los conceptos del Analisis Matemático quedan reducidos a pares ordenados, productos cartesianos, relaciones de equivalencia, conjuntos cociente y aplicaciones partiendo de los números naturales, y en consecuencia, a conjuntos. Es decir, el Análisis Matemçatico resulta así interpretado en la ZFC.

Algunos teoremas básicos y algunas definiciones, notaciones y consideraciones usuales son las siguientes:

Al conjunto de los números reales le notamos " $\mathbb{R}$ ", a la suma de números reales la notamos " $+$ ", al producto de números relaes le notamos " $.$ " y a la relación de orden sobre $\mathbb{R}$ la notamos " $\leqslant$ ". Se demuestra que la cuaterna de componentes $\mathbb{R}$, $+$, $.$, $\leqslant$, que notamos " $(\mathbb{R},+,.,\leqslant)$ " es un (o tiene estructura de) cuerpo (conmutativo), totalmente ordenado, arquimedeano y completo. Si r es un número real, entonces, al simetrico de r respecto a la + le notamos "$(-r)$" o "$-r$" y si $r \neq 0$, entonces al simétrico de r respecto del . le notamos "r^{-1}" o "$\frac{1}{r}$". Si r es un número real y s es un número real tal que $s \neq 0$, entonces a $r.\frac{1}{s}$ le notamos "$\frac{r}{s}$".

Se demuestra que si ξ es una variable o ξ es un número real y η es una variable o η es un número real, entonces $\xi \leq \eta$ es una propiedad que llamamos "ξ *es menor o igual que* η". Si ξ es una variable o ξ es un número real y η es una variable o η es un número real, entonces "$\xi \geq \eta$" significa "$\eta \leq \xi$", "$\xi < \eta$" significa "$(\xi \leq \eta) \wedge (\xi \neq \eta)$" y "$\xi > \eta$" significa "$\eta < \xi$".

Consideramos (para simplificar) que $\mathbb{N}$ es un subconjunto de R y, en consecuencia, que 0 es elemento neutro de la suma de números reales, que el $s(0)$, que notamos "1", es el elemento neutro del producto de números reales y que si n es un número natural, entonces $s(n)=n+1$.

Si x es una variable y $P(x)$ una propiedad tal que en $P(x)$ figura libre x, no figura libre variable alguna distinta de x y existe un conjunto E tal que si A es un conjunto, entonces A es elemento de E si y sólo si A verifica $P(X)$, entonces a E le notamos "$\{x \mid P(x)\}$" y le llamamos "*conjunto de los x que verifican P(x)*" o "*conjunto de los x tales que (se verifica) P(x)*".

Al conjunto de los números enteros lo notamos "Z", al conjunto de los números racionales le notamos "Q" y (para simplificar) consideramos que si X, Y son variables, entonces

$$Z = \mathbb{N} \cup \{x \mid (-x) \in \mathbb{N}\}$$

y

$$Q = \{\frac{x}{y} \mid (x \in Z) \wedge (y \in Z) \wedge (y \neq 0)\}$$

(luego consideramos que $\mathbb{N} \subset Z \subset Q \subset R$). Notaciones como las de valores absolutos, potencias, raices, logaritmos, trigonometría, límites y otras, son bien conocidas.

Y para terminar, consideramos que

- Si E es un conjunto, entonces decimos que E es un *ordinal* si y sólo si se verifica que $\in$ es una relación de buen orden estricto sobre E y que si A es elemento de E, entonces A es subconjunto de E.
- Si E es un ordinal, entonces decimos que E es un *ordinal límite* si y sólo si $E \neq \emptyset$ y se verifica que si A es elemento de E, entonces el $A \cup \{A\}$ es elemento de E.
- Admitimos que existe un (algún) ordinal límite.
- Se demuestra que existe un ordinal límite, que llamamos "*primer ordinal límite*", tal que si E es un ordinal límite, entonces el primer ordinal límite es subconjunto de E.

Y consideramos que se demuestra que si:

- α es el enunciado "$\mathbb{N}$ es el conjunto ω considerado en el enunciado que llamamos "*axioma del infinito*"",
- β es el enunciado "$\mathbb{N}$ es el primer ordinal límite",
- γ es el enunciado "$\mathbb{N}$ es un conjunto que verifica los enunciados P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 (que ya han sido considerados),
- δ es el enunciado "$\mathbb{N}$ es un conjunto tal que existe una aplicación inyectiva s entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$, tal que existe un elemento 0 de $\mathbb{N}$ tal que 0 no es elemento de $s(\mathbb{N})$, *y se verifica que si* B es subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que 0 es elemento de B y $s(B)$ es subconjunto de B, entonces $B = \mathbb{N}$",

entonces se verifican los enunciados $\alpha \Leftrightarrow \beta$, $\gamma \Leftrightarrow \delta$, $\alpha \Rightarrow \gamma$ (y en consecuencia los enunciados $\alpha \Rightarrow \delta$, $\beta \Rightarrow \gamma$, $\beta \Rightarrow \delta$), $\neg(\gamma \Rightarrow \alpha)$ (y, en consecuencia, los enunciados $\neg(\gamma \Rightarrow \beta)$, $\neg(\delta \Rightarrow \alpha)$, $\neg(\delta \Rightarrow \beta)$).

BIBLIOGRAFÍA:

Halmos, Paul R.: *"Teoría intuitiva de los conjuntos" ("Naive set theory")*. Compañía Editorial Continental, S. A. Mexico-España, 1965

Krivine, Jean-Lucis: *"Theorie axiomatique des ensembles"*. Presses Universitaires de France. París, 1969.

- - - - - - - - -

El rango de una matriz. Una demostración elemental

J. Ruiz

Presentamos una demostración, creemos que breve, del conocido

TEOREMA. *El rango por filas de una matriz coincide con el rango por columnas.*

Se supone conocido que un espacio vectorial con un sistema de generadores de cardinal r tiene dimensión no mayor que r.

DEMOSTRACIÓN: Sea A una matriz de orden $m \times n$ y r su rango por filas. Podemos suponer $r > 0$ y será suficiente probar que r es mayor o igual que el rango por columnas de A, ya que lo mismo ocurrirá con la matriz A^t.

Existirán r filas de A, digamos las $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$, linealmente independientes y tales que cualquier fila de A será combinación lineal de ellas. Luego existirá una matriz B de orden $m \times r$ verificando:

$$A = B \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ A_{i_2} \\ \vdots \\ A_{i_r} \end{pmatrix}$$

Pero en un producto de dos matrices las columnas del producto son combinación lineal de las columnas del factor de la izquierda, lo que en nuestro caso muestra que las columnas de A son combinación lineal de las r columnas de B. Por lo tanto el rango por columnas de A es menor o igual que r.

Como socio de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matematicas, deseo que me envien gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín *(señalar con unas aspas los que interesen)*:

3	4	5	9	10	11	13	14	15
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

16	17	18	19	20	21	22	23	24
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo *(20 pts. por número para Madrid y 30 pts. por número para provincias)*.

Hagan el envío utilizando como dirección la consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8 y 12 están agotados. De los números 9 y 19 quedan sólo unos pocos ejemplares.

Si desea acogerse a este ofrecimiento recorte o copie este cupón y envíelo a la *Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Apartado 9479 - 28080 - MADRID.*

PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA FASE FINAL DE LA XXVI OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PROBLEMA Nº 1 :

Sean x e y dos números reales positivos. Probar que la expresión

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$

se puede escribir en la forma

$$B = \sqrt{x} + \sqrt{y + xy + 2y\sqrt{x}}$$

y comparar los números

$$L = \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{3}}$$

y

$$M = \sqrt{5 + \sqrt{22}} + \sqrt{8 - \sqrt{22} + 2\sqrt{15 - 3\sqrt{22}}}\ .$$

- - - - - - -

PROBLEMA Nº 2 :

Cada punto de un plano está pintado de un color elegido entre tres distintos. ¿ Existen necesariamente dos puntos de ese plano distantes entre sí 1 cm y pintados del mismo color ?

- - - - - - -

PROBLEMA Nº 3 :

Se llama parte entera de un número real a y se representa por $[a]$ al mayor entero menor o igual que a . Demostrar que la parte entera de $(4 + \sqrt{11})^n$, donde n es un número natural, es un número impar.

- - - - - - -

PROBLEMA Nº 4 :

Demostrar que la suma

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}-\frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}$$

para todo valor real de $a \geqslant -3/4$, es independiente del valor de a y hallar el valor de dicha suma.

- - - - - - -

PROBLEMA Nº 5 :

Sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo dado ABC de área S , se sitúan respectivamente tres puntos A', B', C' tales que

$$\frac{AC'}{AB}=\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=p$$

siendo p, $0 < p < 1$, un parámetro variable.

Determinar:

1. El área del triángulo $A'B'C'$ en función de p .
2. El valor de p para el que dicha área es mínima.
3. Lugar geométrico de los puntos M de intersección de las paralelas trazadas por A' y C' a los lados AB y AC respectivamente, al variar p .

- - - - - - -

PROBLEMA Nº 6 :

Se consideran n puntos del plano tales que no existen dos parejas equidistantes. Por cada punto se traza el segmento que le une al más cercano. Probar que ningún punto está unido a más de cinco puntos.

- - - - - - -

ALGUNOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA 1ª FASE DE LA XXVI OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA EN EL DISTRITO DE EXTREMADURA:

PROBLEMA Nº 7 :

Tenemos una red formada por cuadrados de lado 1. ¿ Qué lado debe tener un cudrado C de modo que, como quiera que se coloque, contenga al menos uno de los cuadrados de la red ?

- - - - - - -

PROBLEMA Nº 8 :

Probar que el número $2^{55} + 1$ es divisible por 11.

- - - - - - -

PROBLEMA Nº 9 :

Sean $x_1, \dots, x_n$ números positivos tales que su suma $x_1 + \dots + x_n$ es menor o igual que n . Probar que su producto es menor o igual que 1 .

- - - - - - -

PROBLEMA Nº 10 :

Sean a y b números reales. Determinar los máximos y los mínimos de la función

$$f(x) = |x-a| + |x-b| \quad .$$

¿ Qué ocurre si, en vez de dos, son tres los números y $f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|$?
¿ Y si son n ?

- - - - - - -

ÍNDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	obs.
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2 1984	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finl^a)	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-85 (Bogotá)	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2 1986	18	19	20	18	19	19	-	-	-	-	C
	Varios	-	-	-	-	-	-	17	17	11	17	C
10	China y Aust^a	20	15	21	20	15	{20, 21}	20	23	21	-	C
11	OME-f1 1986	13	14	14	14	14	23	20	15/	20	12	C
	OMI-86 (Varso^a)	XX	20	12	21	-	-	-	-	-	-	
12	OIM-87 (Urug.)	16	14	14	17	15	17	-	-	-	-	C
	OME-f1-Extrem^a	-	-	-	-	-	-	15	15	15	21	C
13	OME-f2 1987	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1 1987	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2 1988	25	23	23	25	23	23	-	-	-	-	C
18	OIM-Perú 1988	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	C
19	OMI-88 (Aust^lia)	23	XX	24	24	23	XX	-	-	-	-	
20	OME-f1 (1988)	24	XX	24	25	24	XX	24	XX	XX	24	
21	OME-f2 (1989)/	24	XX	24	XX	XX	24 /	XX	25	XX	XX	
	OIM-89 (Cuba)	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
22	OMI-89 (RFA)/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	oposiciones	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	
23	oposiciones	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
24	OME-f1 (1990)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
25	OME-f2/1(1990)	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OME = Olimpiada Matemática Española - fase 1ª o 2ª.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1º (Boletín nº 17)

Sea $(X_n)_{n \in N}$ una sucesión de números enteros, en que $X_1 = 1$ y se verifican las condiciones:

a) Para todo $n \geq 1$ $\quad X_n < X_{n+1}$

b) Para todo $n \geq 1$ $\quad X_{2n+1} \leq 2n$.

Probar que para todo entero natural k existen dos términos de la sucesión X_r y X_s tales que $X_r - X_s = k$.

Solución:

Sea k un número natural. Por b), $X_{k+1} \leq 2k$, y por a), tenemos $1 = X_1 < X_2 < \dots < X_{k+1} \leq 2k$, lo que implica que:

$$\{ X_1 , \dots , X_{k+1} \} \subseteq \{ 1 , 2 , \dots , 2k \} .$$

El conjunto $\{ 1 , 2 , 3, \dots , 2k \}$ puede ponerse como unión de los k subconjuntos:

$$\{ 1 , k+1 \} , \{ 2 , k+2 \} , \dots , \{ k , 2k \} \quad ;$$

Si tenemos $k + 1$ elementos en k conjuntos disjuntos, por lo menos dos de esos elementos están en el mismo conjunto, es decir, existen X_r , X_s tales que $\{ X_r , X_s \} \subseteq \{ i , k+i \}$, para algún $i \in \{ 1 , \dots , k \}$. Como $X_r \neq X_s$ resulta que $X_r - X_s = k$ (suponiendo $r > s$).

Carlos José Pérez Jiménez (Logroño)

Recibida otra solución de J. V. García Sestafe

- - - - - - - - -

PROBLEMA 4º (Boletín nº 17)

Se atribuye al matemático renacentista Leonerdo de Pisa (Fibonacci) la sucesión

$$a_1 = 1 \ , \ a_2 = 2 \ , \qquad a_i = a_{i-2} + a_{i-1} \qquad (i > 2)$$

Expresar a_{2n} en función de los términos a_{n-1}, a_n, a_{n+1} (y sólo de ellos tres).

Solución:

A partir de la ley de recurrencia:

$$a_{2n-i} = a_{2n-i-1} + a_{2n-i-2} \qquad (i = 0,1,2,\dots,n-1) \ ,$$

multiplicando la segunda por a_1, la tercera por a_2 , ..., la $(n-1)$-ésima por a_{n-2} y la n-ésima por a_{n-1} , se obtiene

$$\begin{array}{ll} a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 a_{2n-1} = a_1 a_{2n-2} + a_1 a_{2n-3} & a_{n-3}a_{n+3} = a_{n-3}a_{n+2} + a_{n-3}a_{n+1} \\ a_2 a_{2n-2} = a_2 a_{2n-3} + a_2 a_{2n-4} & a_{n-2}a_{n+2} = a_{n-2}a_{n+1} + a_{n-2}a_n \\ a_3 a_{2n-3} = a_3 a_{2n-4} + a_3 a_{2n-5} & a_{n-1}a_{n+1} = a_{n-1}a_n + a_{n-1}a_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}$$

Sumando miembro a miembro, como $a_2 = a_1+1$, $a_3 = a_1+a_2$, ..., $a_{n-2} = a_{n-3}+a_{n-4}$, $a_{n-1} = a_{n-2}+a_{n-3}$, resulta

$$a_{2n} = a_{n-1}a_n + a_{n-2}a_n + a_{n-1}^2$$

que se puede escribir: $a_{2n} = (a_{n-1} + a_{n-2})a_n + a_{n-1}^2$ o sea

$$a_{2n} = a_n^2 + a_{n-1}^2 \ ,$$

que expresa el término a_{2n} en función <u>sólo</u> de los términos a_{n-1} y a_n . Si se quiere hacer aparecer explícitamente el a_{n+1} , se puede hacer, por ejemplo

$$a_{2n} = a_{n+1} + a_n^2 + a_{n-1}^2 - a_n - a_{n-1} =$$
$$= a_{n+1} + a_n(a_n-1) + a_{n-1}(a_{n-1}-1) \ .$$

José V. García Sestafe (Madrid)
Recibida otra solución de Paz Lucas Padín (Madrid)
y de Manuel B. Serrano Caballero (Segovia)

PROBLEMA 5º (Boletín nº 18)

Considere las expresiones de la forma $x + yt + zt^2$ con x, y, z números racionales y $t^3 = 2$. Demuestre que si $x + yt + zt^2 \neq 0$, entonces existen u, v y w racionales, tales que $(x + yt + zt^2)(u + vt + wt^2) = 1$.

Solución:

El ser $x + yt + zt^2 \neq 0$, implica que $x, y, z,$ no son todos cero; esto supuesto, de

$$(x + yt + zt^2)(u + vt + wt^2) = 1$$

se deduce

$$xu + 2zv + 2yw = 1; \ yu + xv + 2zw = 0; \ zu + yv + xw = 0. \quad [A]$$

El determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 2z & 2y \\ y & x & 2z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz \ ,$$

bajo el supuesto anterior es distinto de cero; en efecto, de

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = x^3 + y^3t^3 + z^3t^6 - 3t^3xyz =$$
$$= (x + ty + t^2z)(x^2 - txy - t^2xz - t^3yz + t^2y^2 + t^4z^2) \ ,$$

se tiene que el primer factor, por hipótesis, es distinto de cero; la anulación del segundo implicaría:

$$x^2 - 2yz = 0 \ ; \ xy - 2z^2 = 0 \ ; \ y^2 - xz = 0 \ . \qquad [B]$$

El sistema [B] es indeterminado, puesto que la tercera ecuación es consecuencia de las dos primeras; además de la solución trivial $x = y = z = 0$ (que no es admisible por contradecir a $x + yt + zt^2 \neq 0$), luego Δ no se puede anular. Por tanto, el sistema [A] es de Cramer, existiendo los números racionales u , v , w , únicos para cada terna $x, y, z \in \mathbb{Q}$:

$$u = \frac{x^2 - 2yz}{\Delta} \quad , \quad v = \frac{2z^2 - xy}{\Delta} \quad , \quad w = \frac{y^2 - zx}{\Delta}$$

José V. García Sestafe (Madrid)

Recibidas otras soluciones de M. Carmen Castro Merino

Carlos José Pérez Jiménez (Logroño)

y Manuel E. Serrano Caballero (Segovia)

- - - - - - - - - - -

PROBLEMA 62 (Boletín nº 18):

Considere los conjuntos de n números naturales diferentes de cero en los cuales no hay tres elementos en progresión aritmética. Demuestre que en uno de esos conjuntos la suma de los inversos de sus elementos es máxima.

Solución:

Sea A un conjunto de n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$; los elementos a_i $(i = 1, \ldots, n)$, se pueden ordenar de menor a mayor sin que varíe la suma de sus inversos. Ordenemos los elementos de todos los conjuntos considerados y sea B un conjunto ordenado tal que $b_1 \neq 1$; a partir de él se puede

obtener el conjunto B' restando a todos los números b_1, b_2, ..., b_n , el número $b_1 - 1$, con lo cual se obtiene el nuevo conjunto B' formado por 1, $b_2=b_2-b_1+1$, $b_3=b_3-b_1+1$, ..., $b_n=b_n-b_1+1$; es obvio que la suma de inversos de B' es menor que la suma de inversos de B .

Consideremos, dentro de los conjuntos ordenados, sólo los que tienen su primer elemento igual a la unidad; sea $1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ uno de esos conjuntos; por el enunciado, las diferencias $c_2-1, c_3-1, \ldots, c_n-1, c_3-c_2, \ldots, c_n-c_2, \ldots, c_n-c_{n-1}$, tienen que ser diferentes. Por otra parte, poniendo:

$$\Delta_1 = c_2 - 1 \; ; \; \Delta_2 = c_3 - c_2 \; ; \; \ldots \; ; \; \Delta_i = c_{i+1} - c_i \; ,$$

si en ese conjunto se alcanza el máximo citado, se debe cumplir que $\Delta_1 < \Delta_2 < \ldots < \Delta_{n-1}$. En efecto, es

$$c_i = c_{i-1} + \Delta_{i-1} = c_{i-2} + \Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} = \ldots$$
$$= 1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} \; ;$$

haciendo $\Delta_i = p$, $\Delta_j = q$, $i < j$, $p < q$, se puede escribir

$$c_{i+1} = 1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{i-1} + p \; ;$$
$$c_{i+2} = 1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{i-1} + p + \Delta_{i+1} \; ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{j-1} = 1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{i-1} + p + \Delta_{i+1} + \ldots + \Delta_{j-2}$$
$$c_j = 1 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{i-1} + p + \Delta_{i+1} + \ldots + \Delta_{j-2} + \Delta_{j-1}$$
$$c_{j+1} = 1 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{i-1} + p + \Delta_{i+1} + \ldots + \Delta_{j-2} + \Delta_{j-1} + q$$

y haciendo $\Delta_i = q$, $\Delta_j = p$, resulta la sucesión γ_n :

$$\gamma_{i+1} = 1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{i-1} + q \; ;$$
$$\gamma_{i+2} = 1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{i-1} + q + \Delta_{i+1} \; ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_{j-1} = 1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{i-1} + q + \Delta_{i+1} + \ldots + \Delta_{j-2}$$
$$\gamma_j = 1 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{i-1} + q + \Delta_{i+1} + \ldots + \Delta_{j-2} + \Delta_{j-1}$$
$$\gamma_{j+1} = 1 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{i-1} + q + \Delta_{i+1} + \ldots + \Delta_{j-2} + \Delta_{j-1} + p$$

Es obvio observar que $c_n = \gamma_n$ salvo para

$$n = i+1,\ i+2,\ \ldots,\ j-1,\ j \quad ,$$

valores para los cuales $c_n < \gamma_n$. Esto es, para las mismas diferencias $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$, el conjunto buscado es el que se obtiene agregando las sucesivas diferencias de menor a mayor.

Resumiendo, **a)** El conjunto ordenado buscado tiene por primer elemento la unidad. **b)** Las diferencias de cada elemento con todos los que le preceden deben de ser distintas. **c)** Las diferencias sucesivas Δ_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ deben formar una sucesión monótona estrictamente creciente.

Con estas condiciones y eligiendo cada Δ_i el menor posible, se obtiene una sucesión que es la de términos menores, y por tanto, tal que la suma de sus inversos será máxima, ya que siendo $\{c_i\}$ la sucesión hallada y $\{e_i\}$ otra sucesión cualquiera distinta de la anterior, se cumple:

$$c_1 \le e_1\ ;\ c_2 \le e_2\ ;\ \ldots\ ;\ c_i \le e_i\ ;\ c_{i+1} < e_{i+1}\ ;$$
$$c_{i+2} \le e_{i+2}\ ;\ \ldots\ ;\ c_j < e_j\ ;\ c_{j+1} \le e_{j+1}\ ;\ \ldots$$
$$\ldots\ ;\ c_{n-1} \le e_{n-1}\ ;\ c_n \le e_n\ .$$

donde el < se cumple al menos para algunos pares de términos; de lo anterior se deduce inmediatamente:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}$$

esto es, la sucesión $c_1, c_2, \ldots, c_n$ es tal que la suma de sus inversos es maxima.

Como ejemplo, se forman los primeros términos. Por lo dicho, $c_1 = 1$; el menor valor de Δ_1 es la unidad, luego $c_2 = 2$. El menor valor para Δ_2 es 2 , o sea $c_3 = 4$; Δ_3 no se puede tomar igual a 3, ya que $c_3 - c_1 = 3$; tomando Δ_3

igual a 4, se tiene $c_4 = 8$. Prosiguiendo análogamente se obtiene:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 13\ ,\ 21\ ,\ 31\ ,\ 45\ ,\ 66\ ,\ 91\ ,\ \ldots$$

Para cada valor de n, el conjunto considerado en el enunciado, en el que se alcanza el máximo, es el formado por los n primeros términos de esta sucesión.

Jose V. Garcia Sestafe (Madrid)

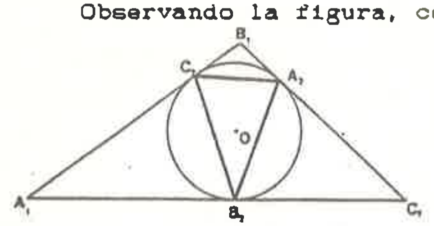
- - - - - - - - - - -

PROBLEMA 4º (Boletín nº 20)

Se conocen los ángulos de un triángulo $A_1B_1C_1$. Para todo n natural, llamamos A_{n+1}, B_{n+1} y C_{n+1} a los puntos de tangencia con los lados B_nC_n, C_nA_n, A_nB_n, de la circunferencia inscrita en el triángulo $A_nB_nC_n$. Determinar, en función de n , los ángulos del triángulo $A_nB_nC_n$.

Solución:

Observando la figura, como $\hat{A}_1$ es un ángulo exterior respecto a la circunferencia O, se



tiene $\hat{A}_1 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{C_2A_2}\ {}_2 - \overset{\frown}{C_2B_2}) = \hat{B}_2+\hat{C}_2-\hat{A}_2 = \hat{A}_2\ {}_2+\hat{C}_2-2\hat{A}_2$, o sea $\hat{A}_2 = \frac{1}{2}(\pi - \hat{A}_1)$, o de forma general, $\hat{A}_{n+1} = \frac{1}{2}(\pi - \hat{A}_n)$.

Esta es una ecuación de recurrencia; la homogénea correspondiente, $2A^*_{n+1} + A^*_n = 0$, admite como solución $A^*_n = k(-\frac{1}{2})^n$; como $\pi/3$ es una solución particular de la completa, la solución general será

$$\hat{A}_n = k(-\frac{1}{2})^n + \frac{\pi}{3}\ ;$$

para $n = 2$, $\hat{A}_2 = (\pi - \hat{A}_1)/2 = k/4 + \pi/3$, de donde $k = 2\pi/3 - 2\hat{A}_1$, y la solución general será:

$$\hat{A}_n = (\frac{2\pi}{3} - 2\hat{A}_1).(-\frac{1}{2})^n + \frac{\pi}{3}\ ..$$

José V. García Sestafe (Madrid)

Recibidas otras soluciones de Juan Lahoz García, F. Alvarez H. y Amparo Ortega.

PROBLEMA 8º (Boletín nº 21)

Sean x, y, z tres números reales tales que

$$0 < x < y < z < \pi/2.$$

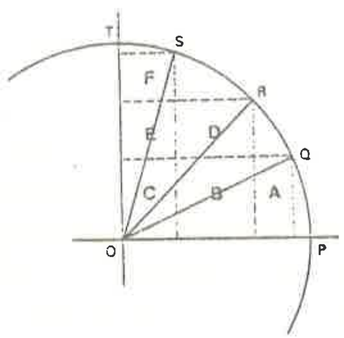
Demostrar la desigualdad

$$\pi/2 + 2\text{sen } x \cos y + 2\text{sen } y \cos z > \text{sen } 2x + \text{sen } 2y + \text{sen } 2z$$

Solución:

La desigualdad dada se puede escribir:

$$\pi/4 + \text{sen } x \cos y + \text{sen } y \cos z - \text{sen } x \cos x - \text{sen } y \cos y - \text{sen } z \cos z > 0 .$$



Sea la circunferencia de la figura, de radio unidad y sean $PQ = x$, $PR = y$, $PS = z$. Designando por A, B, C, D, E y F el área de cada rectángulo de la figura, se tiene:

$$\text{sen } x \cos y = B + C$$
$$\text{sen } y \cos z = C + E$$
$$\text{sen } x \cos x = A + B + C$$
$$\text{sen } y \cos y = B + C + D + E$$
$$\text{sen } z \cos z = C + E + F$$

Luego $\pi/4 + \text{sen } x \cos y + \text{sen } y \cos z - \text{sen } x \cos x - \text{sen } y \cos y - \text{sen } z \cos z =$

$= \pi/4 + (B + 2C + E) - (A + 2B + 3C + D + 2E + F) =$

$= \pi/4 - (A + B + C + D + E + F)$;

y como el área del cuadrante OPT es $\pi/4$, se tiene, cualquiera que sean x, y, z :

$$\pi/4 - (A + B + C + D + E + F) > 0$$

y por tanto es cierta la desigualdad del enunciado.

José V. García Sestafe (Madrid)

- - - - - - - - - - - -