sociedad castellana Puig Adam de profesores de matemáticas

XXVI OME
Castrillón

Boletín nº 24

marzo 1990

ABRAHAM ROBINSON

B O L E T Í N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Marzo de 1990 nº 24 (1989-90)

- Toda la correspondencia para la Sociedad debera dirigirse al

Apartado nº 9479

28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernandez Biarge

- La portada reproduce la efigie del Prof. **Abraham Robinson**, creador del "Análisis No Estandar", acerca del cual iniciamos en este número una serie de artículos.

INDICE Pág.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Francisco Lorenzo Miranda

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Amador Domingo Escribano (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Vicesecretario: Francisco Quesada Cobo

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Jesús Begoña Aina

VEA NUESTRAS CONVOCATORIAS
DE ASAMBLEA GENERAL Y DE
NUESTRO VIII CONCURSO DE
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS,
EN LAS PAGINAS SIGUIENTES:

CONVOCATORIA DE LA

ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE 1990

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente a 1990, para el día 12 de Mayo de este año, a las 11 h 30 m en primera convocatoria y a las 12 h en segunda, en el Instituto "Isabel la Católica" de Madrid (Alfonso XII, 3 y 5), con el siguiente

ORDEN DEL DIA

1. - Lectura y aprobación, si procede, del acta de la asamblea anterior.
2. - Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. - Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. - Elección de los cargos directivos cuya renovación establecen los estatutos: Presidente, Vicepresidentes de Cuenca y Segovia, Vicesecretario y Tesorero.
5. - Ruegos y preguntas.

- - - - - - -

¡ Esperamos tu asistencia !

- - - - - - -

Vea la convocatoria de nuestro
VIII Concurso de Resolución de Problemas
en las páginas siguientes.

VIII CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Convocado por:

Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras.

BASES

PRIMERA

Podrán participar los alumnos de B.U.P. y F.P. de los Centros de **Albacete, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara, Madrid, Segovia y Toledo**. Los de F.P.1 lo **harán** con los de Primero de B.U.P., los de 1º de F.P.2 con los de Segundo de B.U.P. y los de 2º o 3º de F.P.2, con los de Tercero de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas del Concurso se realizarán en Madrid, en la segunda quincena del mes de junio (posiblemente el sábado, 23 de ese mes) y consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles).

TERCERA

Se concederán diplomas para los mejores de cada nivel, acompañados de los premios correspondientes.

CUARTA

Aquellos centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un **máximo** de dos en cada uno de los tres niveles) deberán realizar la preinscripción antes del día **30 de Mayo de 1990**, dirigiéndose por carta a esta Sociedad (Apartado de Correos nº **9.479**, 28080 - Madrid)). En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Envíen las cartas sin certificar.

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos centros entregarán a los alumnos que envíen, **credenciales individuales** en las que se haga constar el curso en que estén matriculados en el año académico 1989-90 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

- - - - - - - - -

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETÍN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlas.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA :

OLIMPIADA MATEMÁTICA IBERO-AMERICANA :

OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL :

NOTICIAS

V OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

La *Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*, que ha celebrado sus anteriores competiciones en Colombia, Paraguay, Peru y Cuba, con un importante número, cada vez mayor, de paises participantes, se realizará este año en España.

Las pruebas se realizarán en Valladolid, los dias 23 y 24 de Septiembre de 1990, y en ellas pertiparán alrededor de 140 alumnos de cursos preuniversitarios de la mayor parte de los paises iberoamericanos. El equipo español será seleccionado entre los mejores clasificados en la XXVI Olimpiada Matemática Española, cuya fase final tendrá lugar los dias 16 y 17 del mes de Marzo próximo.

- - - - - - - - -

XXXI OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL

La *Olimpiada Matemática Internacional* se celebrará este año en China, en el mes de Julio próximo. En nuestro próximo Boletin daremos datos más precisos.

- - - - - - - - - -

SIAN 3

El **Tercer Simposium Internacional de Análisis Numérico**, organizado conjuntamente por la *Universidad Politecnica de Madrid* y la *Universidad Carolina de Praga (Checoslovaquia)*, tendrá lugar en Madrid, del 22 al 24 de Mayo de 1990.

El **SIAN** (o **ISNA**) tiene el objetivo de examinar el estado del arte actual en Análisis Numérico, especialmente en el aspecto de las aplicaciones computacionales.

Para cualquier cuestión relacionada con el SIAN diríjanse al Prof. Dr. Carlos Vega. Rectorado de la U. P. M.

- - - - - - - -

IV SIMPOSIO INTERNACIONAL DEL CONOCIMIENTO Y SU INGENIERíA

Las sesiones de este Simposio se celebrarán en Barcelona del 7 al 11 de Mayo de 1990. Las tutorías (7 y 8 de Mayo) tendrán lugar en el Deptº de Informática de la Universidad Autónoma de Barcelona (Bellaterra) y las sesiones técnicas (9 al 11 de mayo) en el Auditorium Banca Catalana (Diagonal, 662-664).

Para información o inscripciones, diríjanse a IBC , Alvarez de Baena, 3, 2º, 28006-Madrid. Tno. 319 75 38.

- - - - - - - - -

VIII CIAEM

La *VIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se celebrará del 3 al 7 de Agosto de 1991, con sede en la Universidad de Miami, en Coral Gables (Florida).

C. D. L.

CURSOS DE FORMACIóN DEL PROFESORADO

El Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias y el Colegio Profesional de la Educación han organizado unos cursos de Formación del Profesorado que comenzaron el 1 de Febrero y se prolongarán hasta el 20 de Abril. Los cursos programados, con sus fechas previstas, son los siguientes:

1, 2 y 3 de Febrero de 1990:
El diseño curricular base en el área de Lenguas Extranjeras (Inglés) y sus aplicaciones al aula.

19 al 23 de Febrero de 1990 (19.00 a 21.00 horas):
Filosofía y Educación: Consideraciones en torno a la reforma del sistema educativo.

5, 7, 9 y 12 de Marzo de 1990 (a las 18.30):
MATEMÁTICAS. Seminario de Matemáticas.

6, 7, 13, 14, 20, 21, 27 y 28 de Marzo (a las 19.00):
Seminario de Ciencias Naturales. Introducción a la técnica histológica.

13, 14, 20, 21 y 22 de Marzo de 1990 (a las 19.00):
El Tiempo en Gramática, Lógica, Matemáticas, Física e Historia.

15, 16 y 17 de Marzo de 1990 :
El diseño curricular base en el área de Lenguas Extranjeras (Inglés) y sus aplicaciones en el aula (2ª parte).

22, 23 y 24 de Marzo de 1990 :
El diseño curricular base en Enseñanza Secundaria Obligatoria.

16 al 20 de Abril de 1990 (a las 19.00):
Tratamiento de las dificultades de aprendizaje en el área de MATEMATICAS a través de las adaptaciones curriculares.

Las inscripciones para estos cursos pueden realizarse en las oficinas del Colegio de Doctores y Licenciados, plaza de Santa Bárbara, 10, de 10.00 a 13.30 y de 16.30 a 19.30, excepto sábados. Tno. 3 19 27 12. Las plazas están limitadas y hay cuotas especiales para los colegiados. El CDL extenderá Certificados de Asistencia al terminar los cursos.

Por considerarlo de especial interés para nuestros socios, damos a continuación el programa del Seminario de Matemáticas, destinado a profesores de Enseñanzas Medias, que se realizará en los locales del I. B. "Avenida de los Toreros" (Avda. de los Toreros, 57. Madrid):

5-Marzo: *"Transformaciones Geométricas"*. por Dª **Adela Salvador Alcalde**.
7-Marzo: *"Geometría y experimentación"*, por D. **Julio Fernández Biarge**.
9-Marzo: *"Diseño curricular Base de Matemáticas ¿ Un cambio de programas ?"*, por Dª **Mª Jesús Luelmo**.
12-Marzo: *"Algunas curiosidades, divertimientos y problemas sobre números"*, por D. **Javier Peralta**.

XXVI OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PRIMERA FASE

Las pruebas de la **Primera** Fase de la " ***XXVI Olimpiada Matemática Española*** ", correspondiente al curso 1989-90, se han realizado en el distrito de Madrid y en la mayor parte de los restantes, en los pasados días 16 y 17 de Febrero.

Como es sabido, esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio.* A ella pueden concurrir los alumnos matrculados en C.O.U. o F.P.2.

Los tres primeros clasificados de cada distrito, además de tener opcion a una beca para cursar la licenciatura de Matemáticas, pueden participar en la fase final, en la que se proclaman los ganadores. Esta fase final servirá de base para seleccionar los equipos que representarán a España en las Olimpiadas Matemáticas Internacional e Iberoamericana, anunciadas para los próximos meses de Julio y Septiembre, respectivamente. Lo tardío de estas fechas, en relación con lo que es habitual, explica el que también las pruebas de la XXVI Olimpiada Matemática Española se hayan celebrado más tarde de lo acostumbrado.

Las pruebas de esta Primera Fase, en el distrito de Madrid, tuvieron lugar en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. El número de participantes ha sido de 110, bastante superior al registrado en los años precedentes. Como de costumbre, consistieron en la resolucion de ocho problemas, distribuidos en dos sesiones de cuatro horas cada una, que se realizaron en la tarde del dia 16 y en la mañana del 17.

Los enunciados de estos problemas pueden verse en este mismo Boletin, en nuestra sección de **Problemas Propuestos**. Sobre su grado de dificultad, nuestros lectores formarán su propio juicio, pero podrán comprobar que la mayor parte de ellos son mucho más fáciles de resolver que los que se suelen proponer en las competiciones internacionales, lo cual es razonable para la Primera Fase de la Olimpiada.

El Jurado, tras examinar y valorar los ejercicios presentados, se reunio el pasado 22 de Febrero, e hizo públicos los nombres de los aspirantes mejor clasificados. Se asigno a cada particpante una puntuación **de cero a diez puntos** por problema, con lo que había una posibilidad teorica de obtener **80 puntos**.

Al igual que en los años precedentes, se pudo comprobar que bastantes de los participantes concurren a las pruebas sin preparación alguna, confiados tan sólo en en cierto gusto por la asignatura de matemáticas; esto no es, evidentemente, lo que exige la participación en una competición olimpica. Son pocos los centros que han llevado a cabo una preparacion sistemática de los alumnos que presentan, tal como es habitual en otros paises. Eso explica que el nivel medio resulte bastante bajo, pero entre los alumnos que han sido guiados por sus centros en preparacion y entrenamiento adecuados, unas pocas horas al mes, los resultados quedan muy por encima de ese nivel.

Los aspirantes mejor clasificados en el distrito de Madrid han sido los siguientes:

1º - D. **Marco CASTRILLÓN LÓPEZ**, del *I. B. "Avenida de los Toreros"* de Madrid ... ... 58 puntos

2º - D. **Franciso OGANDO SERRANO**, del *I. B. "Ramiro de Maeztu"* de Madrid ... ... 57 puntos

3º - D. **Manuel Francisco HERRADOR BARRIOS**, del *Colegio de Nª Sª del Recuerdo* de Madrid 47 puntos

4º - D. J. Luis PEREZ CASELLES, del *I. B. "Cervantes"* de Madrid ... ... 45 puntos

5º - D. Esteban CHACÓN RISCO, del *I. B. "Dionisio Aguado"* de Fuenlabrada (Madrid)... 43 puntos

6º - D. Daniel ALMODOVAR HERRAIZ, del *I. B. "Alfonso VIII"* de Cuenca ... ... 40 puntos

7º - D. Ignacio LACADENA GARCÍA-GALLO, del *Colegio de Nª Sª del Recuerdo* de Madrid .. 39 puntos

8º - D. Francisco MOYA FERNANDEZ, del *I. B. "El Gran Capitán"* de Madrid .. .. 38 puntos

Por debajo de éstos, pero con 35 puntos o más, han resultado Dña. Nuria Talayero San Miguel (Liceo Francés), D. Pedro Javier Castro Sayas (Nª Sª del Recuerdo), D. Ricardo Torres Zurita (Col. Ramón y Cajal) y D. José Manuel Moya Fernández (I.B. El Gran Capitán).

Los tres primeros clasificados son los que podrán partipar en las pruebas de la Fase Final y los que tienen opcion a sendas becas para estudiar, si lo desean, la licenciatura de Ciencias Matematicas. Si algunos de esos tres primeros renunciasen al disfrute de sus becas, éstas podrían ser adjudicadas a los siguientes de la lista.

Debemos señalar con satisfacción que algunos de los participantes citados antes, compitieron con éxito, en años anteriores, en los Concursos de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad: El mejor clasificado, D. **Marco CASTRILLÓN LÓPEZ**, quedó en segundo lugar, como alumno de 3º de B.U.P. en 1989; también D. **J. Luis PÉREZ CASELLES**, ahora clasificado el cuarto, fué el primero, como alumno de 3º de B.U.P. en 1989 y el primero, como alumno de 2º de B.U.P. en 1988; D. **Daniel ALMODOVAR HERRAIZ**, ahora sexto, quedó el 3º como alumno de 3º en 1989, el 2º como alumno de 2º en 1988 y el 1º como alumno de 1º en 1987. Una vez más comprobamos que los premiados en nuestros concursos suelen figurar entre los mejores clasificados en las pruebas de sus distritos, en la Primera Fase de la Olimpiada.

Damos la enhorabuena a los ganadores y a los Centros que se han esforzado en su preparación y deseamos que tengan una destacada actuación cuando participen en la **FASE FINAL**, que se celebrará simultáneamente en las Islas Canarias y en Madrid (E. T. S. de Ingenieros Industriales) **en la tarde del dia 16 y en la mañana del 17 de Marzo de 1990.**

TEMAS DE SELECTIVIDAD

En el número anterior de nuestro Boletin, entre los temas de **MATEMATICAS II** que publicamos, apareció uno de ellos repetido en las paginas 15 y 16, omitiendo, en cambio, otro de los que fueron propuestos en el Distriro único de Madrid.

Publicamos en la página siguiente la reproducción de ese tema, para completar la información que tratabamos de dar a nuestros socios.

El Grupo de Trabajo encargado de la elaboración de los temas de MATEMÁTICAS II en el curso pasado, entregó a los coordinadores de esta asignatura del C.O.U. de las cuatro Universidades de la Comunidad Autónoma de Madrid, dos modelos de temas, para que los hiciesen llegar al profesorado de los Centros coordinados por ellos, como orientación en sus enseñanzas. Como estos modelos tuvieron gran difusión, es posible que sean ya conocidos por nuestros socios; por si no fuese así, los incluimos en las páginas siguientes.

Ofrecemos también algunos de los temas de **MATEMATICAS II** propuestos en las Universidades de Extremadura y Sevilla.

- - - - - - - - - - - -

MATEMATICAS II

1ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente distribución de probabilidad:

K	1	2	3	4	5	6
P(X=K)	1/9	1/18	1/9	5/18	1/6	--?

Se pide: a) Completar la distribución de probabilidad

b) Calcular la media y la desviación típica

b) Se considera la función real de variable real $y = f(x) = \frac{1}{32}(x^5 - 80x)$. Se pide: Crecimiento o decrecimiento, extremos relativos y dibujo de su gráfica.

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Calcular el valor del determinante $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+2 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix}$ (conocidos a , b , c)

b) Dados tres sucesos A , B , C , expresar (mediante las operaciones con sucesos) los siguientes sucesos: 1) Ocurre exactamente un suceso de los A , B , C . 2) Ocurren exactamente dos de los sucesos A , B , C . 3) Ocurren al menos dos sucesos de los A , B , C .

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Hallar el área encerrada por las gráficas de $y = x^2 - 1$, $y = 3$.

b) Dado el sistema $\begin{cases} x + 3y - 2z + 3 = 0 \\ 3x - y + z - 2 = 0 \\ ax + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$, determinar a para que tenga infinitas soluciones y resolverlo para ese valor de a .

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Dadas las restricciones:

$$x - 2y \leqslant -1$$
$$6x - y - 5 \geqslant 0$$
$$5y \leqslant -4x - 22$$

Hallar los puntos de la región que limitan, en los cuales la función $F(x,y) = x+y$ es máxima y aquéllos en que es mínima.

b) Calcular una función primitiva de la función $y = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$

MATEMATICAS II (MODELO A)

1ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Se han obtenido las pulsaciones de un equipo de atletas después de una carrera: los datos obtenidos son los siguientes

Pulsaciones	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94	95-100
Núm. de atletas	3	3	7	10	12	8

Se pide: a)Las marcas de clase b)El intervalo mediano c)Coeficiente de variación

b) Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, para $x > 0$. Contestar razonadamente a:

- ¿ La función es creciente o decreciente ?
- ¿ Existen valores de x para los que $f(x) > 1$?
- ¿ Existen valores de x para los que $f(x) < 0$?
- Cuando x crece indefinidamente ¿ los valores de f(x) tienden a algún valor ?
- Hacer un bosquejo de la gráfica de f(x) .

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Comprobar que los tres planos $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -x + 3y - z = 4 \end{cases}$ se cortan en un punto y hallarlo.

b) Dada la distribución de frecuencias

valor X	15	20	25	30	35	40	45	50	55
frecuencias n	6	13	38	74	106	85	30	10	4

Se pide: a) Calcular la media y la desviación típica.

b) Construir el polígono de frecuencias

c) Si se considera una distribución normal X con la misma media y desviación típica que en a). Calcular $P(X>35)$ y compararla con la frecuencia relativa de la tabla anterior.

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Estudiar y comparar las gráficas de las funciones $y = \frac{2}{3}\cos(4\pi x)$, $y = 3\cos(4\pi x)$.

b) Se considera la función $z = f(x,y) = 4x + 5y$. Determinar el punto donde la función $z = f(x,y)$ toma su valor mínimo, con las restricciones siguientes: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $4x + 3y \geqslant 90$, $2x + y \geqslant 20$, $5x + 12y \geqslant 120$.

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) El precio de un billete de una línea de autobuses es suma de una cantidad fija y otra proporcional al número de kilómetros del recorrido. Por un billete a una población se han cobrado 1 800 pts. Por otro a otra población que dista el doble, 3 300 pts. ¿ Cuanto cobrarán por el billete a una población que diste la mitad que la primera ?

b) Determinar el área finita limitada por el eje OX , la recta x = 2 , y la gráfica de la función $y = \frac{9}{x^2} - 1$.

MATEMATICAS II (MODELO B)

1ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Un distribuidor de llantas las vende en lotes de cuatro, la distribución probabilística del número de defectuosas en cada lote es la siguiente

K	0	1	2	3	4
P(Y=K)	0.9	0.05	0:03	0.015	0.005

Se pide a)Cuál es la media ?

b)Cuál es el coeficiente de variación?

b) Representar la gráfica de la función $y = (x^2 - 1)(x + 2)$, hallando para ello las características de esa gráfica que se estimen convenientes.

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Sean las siguientes rectas del plano:

$$-x - 3y = 2$$
$$5x - 2y = 1$$
$$2x - 7y = -3$$

Determinar su posición relativa y los puntos que pertenezcan a más de una de ellas.

b) Un equipo de baloncesto, encuentra que el número de puntos obtenidos en cada partido a lo largo del campeonato, está distribuido normalmente con media de 85 puntos y desviación tipica de 11 puntos. Se pide:

a)Probabilidad de que en el partido siguiente, el equipo obtenga entre 67 y 82 puntos. b)Probabilidad de que supere los 100 puntos.

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Si la derivada de una función se anula para x igual a 3 , la función ¿ puede ser creciente en ese punto ? ¿ puede ser decreciente ? ¿ puede tener un máximo o un mínimo relativos en él ?

b) Si (x,y) son las coordenadas de un punto P , escribir dos matrices cuadradas de segundo orden , A y B , tales que el producto $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sea la columna de coordenadas del punto simétrico de P respecto al origen de coordenadas y el producto $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sea la columna de coordenadas del punto simétrico de P respecto al eje $y = 0$ (o sea el OX).

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Se compran las cantidades a , b y c de los productos A , B y C , respectivamente. Para estos tres productos, un fabricante ofrece los precios de 2 , 3 y 5 pesetas por kg, respectivamente; otro fabricante, los precios de 1 , 2 y 6 pesetas por kg, y un tercero, los precios de 3 , 4 y 4 pts/kg. ¿ Qué cantidades a , b y c hay que comprar de cada producto para que el importe total de lo pagado sea 6200 pesetas cualquiera que sea el fabricante que los sirva ?

b) Una piscina tiene forma de prisma con base cuadrada y su capacidad es de 4000 metros cúbicos. Calcular sus dimensiones sabiendo que se construyó de modo que el material empleado en su revestimiento fuese mínimo.

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
SELECTIVIDAD

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II - ______________ Tiempo: 1h. 30m.

Obligatoria / Optativa

EL ALUMNO TIENE QUE ELEGIR ENTRE EL REPERTORIO DE CUESTIONES QUE FIGURA EN ESTA "CARA" Y EL QUE FIGURA AL DORSO.
Cada cuestión del repertorio elegido se calificará de 0 a 2'5 puntos.

REPERTORIO 1

1.- Se quieren obtener 10 kg. de pasta con trigo, arroz y maíz, cuyos precios son 20, 40 y 25 ptas./Kg., respectivamente. Hallar la cantidad de cada materia que ha de formar la pasta, sabiendo que el precio resultante ha de ser de 40 ptas./Kg. y que la cantidad de arroz ha de ser doble que la de maíz.

2.- Los litros de agua/m² caídos en determinada región han sido los siguientes:

Año	1982	1984	1986	1988
Lluvia	630	510	540	310

Hallar la previsión de lluvias para el año 1989 utilizando el polinomio de interpolación de segundo grado más idóneo.

3.- A cierta distribución bidimensional de las variables (x_i, y_i) le corresponde como recta de regresión la de ecuación $y = 0'6\,x + 8$

Sabiendo que la media y la desviación típica de la distribución marginal de la variable x son iguales a 12'2 y 1'3, respectivamente, calcular:

a) La media de la variable y
b) La covarianza.

4.- En la fabricación en serie de bombillas en cierta fábrica, se estima que de cada partida de 1.000, cinco salen defectuosas. Si en un año se han fabricado 50.000 bombillas, ¿cuántas cabe esperar que presenten defectos? ¿Cuál es la varianza y la desviación típica de la distribución?

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
SELECTIVIDAD

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II - ____________________ Tiempo: 1h. 30m.
Obligatoria / Optativa

REPERTORIO 2

1.- Un fabricante de alfombras dispone de las siguientes existencias de lana: 500 Kg. de color azul, 400 Kg. de color verde y 225 Kg. de color rojo. Desea fabricar alfombras de dos tipos que llamaremos A y B. Las del tipo A llevan 1 Kg. de lana azul, y 2 Kg. de lana verde. Las del tipo B, 2 Kg. de lana azul, 1 Kg. de verde y 1 Kg. de lana roja. Por cada alfombra del tipo A obtiene un beneficio de 2.000 ptas. y 3.000 por cada una del tipo B.

¿Cuántas alfombras debe fabricar de cada clase para que la ganacia sea máxima?

2.- El Ayuntamiento de cierto municipio ha publicado el siguiente censo (a 31 de diciembre) de varios años:

Años	Población
1960	1.050
1970	1.290
1980	1.552

Estimar la población en el año 1976 mediante:
a) Interpolación lineal
b) Interpolación cuadrática

3.- Las calificaciones obtenidas por un grupo de 5 estudiantes en C.O.U y en la *Selectividad* han sido:

COU	*Selectividad*
6'8	6'2
8'2	7
7'4	7'6
6'6	5
7'8	5'4

a) Calcular el coeficiente de correlación y la ecuación de la recta de regresión de las calificaciones en la *Selectividad* respecto de las calificaciones en C.O.U.
b) Obtener la calificación en la *Selectividad* que resulta previsible para un alumno cuya calificación en C.O.U. fue 7.

4.- Se lanza un dado 4 veces y se considera la variable aleatoria, X, que indica el número de veces que se obtiene una puntuación divisible entre 3.

Establecer la distribución de probabilidad y la función de distribución de la variable X y representarlas gráficamente.

SEVILLA

MATEMATICAS II

El alumno contestará DOS de las siguientes cuestiones:

CUESTION 1.

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$.

(a) Determinar su dominio de existencia y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(b) Calcular sus asíntotas.
(c) Representar gráficamente la función.
(d) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la ordenada $x = 1$.

CUESTION 2.

Se ha medido la talla de 20 jóvenes obteniéndose los siguientes datos en centímetros:
171, 182, 192, 162, 173, 172, 160, 187, 197, 180, 163, 173, 167, 179, 178, 181, 198, 175, 168, 168.
(a) Agrupar los datos en cuatro intervalos de amplitud 10, representando el histograma correspondiente.
(b) Calcular razonadamente la media y la desviación típica de los datos agrupados.
(c) Construir el polígono de frecuencias acumuladas y calcular la mediana.
(d) Localizar el intervalo modal y la moda.

CUESTION 3.

De una distribución bidimensional (X, Y) se conocen las rectas de regresión:

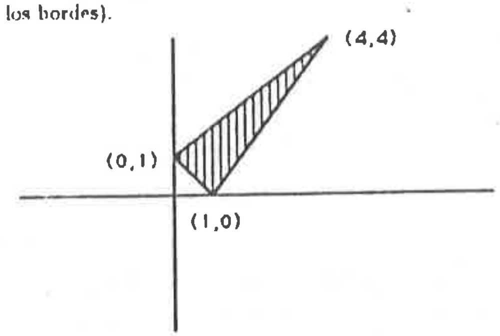
de Y sobre X $\quad 4Y = 15X + 50$

de X sobre Y $\quad 64X = 15Y - 110$

(a) Calcular el coeficiente de correlación entre las variables X e Y e interpretarlo.
(b) Calcular la media de la variable X y la media de la variable Y.

CUESTION 4.

(a) Construir un sistema de inecuaciones cuyo conjunto solución corresponda con el señalado en las figura adjunta (incluyendo los bordes).



(b) Determinar a para que el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

tenga una única solución y para que no tenga solución.

MATEMATICAS Y
FILOSOFÍAS DEL ESPACIO

El Profesor don **Rafael Rodriguez Vidal**, eminente catedrático de la Universidad de Zaragoza, al que ya debemos algunas valiosas aportaciones para nuestro Boletín, ha tenido la amabilidad de autorizarnos a reproducir, del número 15 de los *Cuadernos del Ateneo de Zaragoza* (Noviembre, 1989), el artículo que ofrecemos a continuación, que estimamos ha de ser de gran interés para nuestros socios.

- - - - - - - - - -

Matemáticas y filosofías del espacio

Por **Rafael RODRIGUEZ VIDAL**

Es indudable que la contemplación reflexiva del espacio sin límites donde vivimos y medimos, ha debido preocupar al hombre racional desde su etapa precientífica y esta contemplación ha seguido, como un desafío interrogante, hasta los filósofos y matemáticos de hoy mismo. En la extensión de una conferencia, no podemos tomar el tema desde tan lejos, ni llegar hasta tan cerca. Nos limitaremos, pues, a exponer un resumen de tres invenciones capitales, a saber, la *geometría analítica*, las *geometrías no euclídeas* y la *geometría diferencial*: que son matemática pura, pero por su potencia intelectual alcanzan a la filosofía.

Geometría analítica

LA GEOMETRIA DE DESCARTES

Es de conocimiento general que a partir del siglo XVII el espacio y su geometría pueden tratarse en términos de álgebra, según enseña la llamada *geometría analítica*. La concepción de esta geometría se vincula indisolublemente al genial filósofo y matemático R. Descartes (1596-1650); tal vinculación es totalmente justa, pero demasiado exclusiva cuando se olvidan antecedentes y complementarios importantes.

El libro de *La Geometría* de Descartes aparece como tercer apéndice al *Discurso del método* (1637) cartesiano. Debe ya decirse que no es un libro escrito para lectores cualesquiera, ni aun para matemáticos cualesquiera, pues en muchos puntos es deliberadamente hermético, y así fueron frecuentes las peticiones de aclaración que los propios amigos y discípulos elevaban al autor. No es esto extraño, cuando en el texto se leen, por ejemplo, frases así:

> "Pero yo no me detengo aquí para explicar esto más en detalle, porque os quitaría el gusto de descubrirlo por vosotros mismos, y la utilidad de cultivar vuestro ingenio ejercitándolo, que es, a mi parecer, lo principal que se puede obtener de esta ciencia."

O, más adelante,

> "...; y yo intentaré poner la demostración en pocas palabras, porque me aburro ya de escribir."

El que piense en la geometría analítica como la estudiamos hoy, definiendo primero unos ejes de coordenadas, para pasar a las ecuaciones de las líneas del plano y las superficies del espacio, con los problemas consecuentes, seguramente no la reconocerá en la obra de Descartes, donde no aparecen los ejes de coordenadas, ni las ecuaciones de líneas notables. Todo esto se ve más patente en la obra de P. de Fermat (1601-1665), escrita antes, pero publicada –póstuma– 30 años después, que la de Descartes. Sin embargo es la concepción de Descartes, y no la de Fermat, la más próxima a nuestro ideario.

Esto se debe a que P. de Fermat, que es el matemático más importante de su tiempo (aunque no el más célebre, que sin duda lo es Descartes), permanece ligado al formulismo de la homogeneidad, por el cual, si AB es un segmento, AB x AB es un área y AB x AB x AB es un volumen, y las ecuaciones deben ser, explícitamente, entre cantidades homogéneas. Descartes, en cambio, orilla la homogeneidad con un recurso tan sencillo como genial. Le basta considerar un segmento arbitrario (que no hay que explicitar) como unidad: si x es un segmento de recta, también x^2, x^3 los concibe como segmentos "aunque, dice Descartes, para servirme de los nombres usados en álgebra les llamo cuadrados, cubos, etc".

De este modo, si x es un segmento, en Fermat no tendría ningún sentido la igualdad

$$y = x^2 - 5x - 9$$

pues x^2 es un área, 5x es un segmento y 9 es un número, mientras Descartes permite dejar tácita la estancia de un segmento u, unidad, arbitrario generalmente, con el que la fórmula anterior se entenderá homogeneizada así:

$$y = \frac{x^2}{u} - 5x - 9u$$

Para la matemática actual, las variables son números y no segmentos, por lo que la ecuación anterior debe sobreentenderse homogeneizada así:

$$\frac{y}{u} = \frac{x^2}{u^2} - 5\frac{x}{u} - 9$$

Por todo ello suele decirse, como es bien sabido, que Descartes ha reducido la Geometría al álgebra (los puntos son números, las figuras son ecuaciones, ...); pero los matemáticos prefieran tal vez decir, con H. Lebesgue (1875-1941), que Descartes ha referido todas las geometrías, plana y espacial, a la de la recta. Esto lleva a construir el continuo lineal y de aquí a la aritmetización de la Matemática. "Este progreso lógico ha sido tan considerable –concluye Lebesgue–, que su amplitud es en cierto modo filosófica". Pero no será esta filosofía de la matemática la que tratemos en esta lección.

EL TRATADO DEL MUNDO

Descartes no cita nunca la fuente de sus ideas y es patente la reserva y reticencia con que de ordinario trata la obra de los autores de talento comparable al suyo (pocos ciertamente). En particular es lamentable que no llegase a apreciar el genio del ya citado P. de Fermat, así que, por ejemplo, en cierta ocasión, con motivo de algunos problemas propuestos por Fermat, cuyos enunciados había recibido Descartes a través del P. Mersenne, contestó a éste:

> "Para hablar de ello francamente entre nosotros, así como hay quien se niega a batirse en duelo contra los que no son de su calidad, yo creo tener algún derecho para no detenerme en contestarle."

Como bien dice uno de los biógrafos de Descartes a propósito de su carácter: "He aquí una de las extravagancias que es sensible encontrar en la vida de un gran hombre, porque uno no sabe bajo qué aspecto presentarla para hacerla disculpable." Esta observación la hace E. Figuier, francés, comentando los juicios de Descartes sobre Galileo. Tema que nos vuelve al de nuestro discurso.

En 1625 Descartes estuvo en Florencia y evitó el encuentro con Galileo, entonces en la cumbre de su prestigio. Algunos biógrafos benévolos dicen que esto fue por la prudencia de Descartes ante la Inquisición; pero el proceso de Galileo (1633) estaba entonces muy lejano. Años después de su viaje a Italia, escribe al P. Mersenne:

> "Por lo tocante a Galileo, os diré que no le he visto nunca, que nunca he tenido ninguna comunicación con él, y que, por consiguiente, no puedo haber adquirido nada de él. Por esto no veo nada en sus escritos que me cause envidia, ni casi nada que yo quisiera reconocer por mío. Todo lo mejor es lo que ha hecho en la música; pero los que me conocen podrían creer que él la habría tenido de mí más bien que yo de él; porque yo había escrito casi lo mismo diez y nueve años há, en cuyo tiempo yo no había estado en Italia."

En cuanto a la explicación que dan los historiadores italianos es unánime: "che forse il Descartes evitó Galileo, perche non poteva gareggiare con lui..." (G. Loria).

Descartes elabora hacia 1635 su *Tratado del mundo*, que hace conocer en publicaciones parciales (esta vez, sí, por temor tras la condena de Galileo). La materia, tanto como cuerpo vivo como natural, tiene según Descartes, un solo carácter fundamental, que es la extensión; funde, pues, las ideas de extensión y de materia, así que la extensión es lo que constituye la materia, y la materia es lo que constituye el espacio. Descartes considera que al principio Dios creó la materia con una cierta cantidad de reposo y de movimiento, y luego conserva inmutable esta cantidad. El vacío es inconcebible, no existe; tampoco los átomos. Como en este macizo espacio cartesiano no cabe acción a distancia, la única acción posible es por contacto, produciéndose movimientos en torbellino que llenan el universo, y con los que Descartes explica todos los fenómenos del cosmos, desde la formación del sistema solar a los movimientos del mundo animal. En una palabra, Descartes, totalmente ajeno a su *Método*, imagina en vez de observar y medir.

Es ocioso comparar estas imaginaciones cartesianas (tan poco "cartesianas" en paradigma tópico) con la investigación sistemática con las que Galileo había establecido, trece años antes, las leyes del movimiento, que darían a Newton el estribo para su descubrimiento del sistema del mundo. Lo extraordinario está en que la teoría de los torbellinos subsistiese en Francia por más de un siglo, oponiéndola a los newtonianos como cuestión de honor patrio.

Volviendo a la actitud de Descartes, el gran físico y matemático holandés Cristian Huygens (1629-1695), hijo de Constantiny notable amigo y seguidor de Descartes, la entiende claramente así:

> "Descartes, que siempre me pareció celoso de la fama de Galileo, deseaba ardientemente ser reverenciado como creador de una nueva filosofía."

Y para el fugaz éxito de la cosmología cartesiana (rápidamente olvidada en Europa, excepto en Francia) tiene esta natural explicación:

> "Descartes ha encontrado la forma de que sus conjeturas y ficciones se tomen por verdades. A cuantos leyeron sus *Principios de Filosofía* les sucedió algo parecido a aquellos otros que se deleitan leyendo novelas hasta el punto de producirles éstas la misma impresión que las cosas reales."

Muy oportuna es, para concluir, la referencia del jansenista Pierre Nicole:

> "El difunto Monsieur Pascal, cuando quería poner un ejemplo de una locura aprobada por obcecación, proponía generalmente la teoría de Descartes sobre la materia y el espacio."

Geometrías no euclídeas

EL PARADIGMA EUCLIDEO

Hacia los años 300 a. de C. elaboró Euclides su imperecedero texto de *Elementos de Geometría*. (En lo sucesivo será citado *Elementos*). Por razón del plan expositivo que adopta, los *Elementos* se han tomado siempre como el paradigma de las ciencias matemáticas.

El proyecto de Euclides es demostrar lógicamente, irrebatiblemente, toda la Geometría, si se le admiten como punto de partida ciertos axiomas y cinco postulados que (dejando aparte las discusiones de los eruditos en sus ediciones), son los siguientes

I. *Entre dos puntos cualesquiera se puede trazar una recta.*

II. *Una recta limitada se puede siempre prolongar por ambos extremos.*

III. *Se puede describir un círculo con cualquier centro y con cualquier radio.*

IV. *Todos los ángulos rectos son iguales.*

V. *Si una recta incide sobre otras dos, y forma a un mismo lado ángulos internos que valen (sumados) menos* *de dos rectos, las dos rectas prolongadas ilimitadamente se encontrarán en el lado en que los ángulos valen menos de dos rectos.*

El postulado V tiene un enunciado sorprendente, sin la evidencia inmediata de los otros cuatro, y el fino talento de Euclides le lleva a usarlo con tanta precaución que no lo utiliza hasta la proposición 29:

Una recta que corta a dos paralelas determina ángulos internos del mismo lado que suman dos rectos.

Lo anterior a esta, es decir, las 28 primeras proposiciones de la *Elementos* constituyen el primer texto de lo que ahora se llama *geometría absoluta*, que significa el conjunto de proposiciones geométricas que pueden demostrarse sin utilizar el postulado V. Las proposiciones que se apoyan en ese postulado forman lo que siempre se ha llamado *geometría euclídea*, por treinta siglos tenida como la única posible; la más conocida proposición euclídea es la 32 de los *Elementos*, que dice:

La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

POSTULADOS EQUIVALENTES AL DE EUCLIDES

Desde los más antiguos comentadores de los *Elementos* encontramos intentos de *demostrar* el extraño postulado V, lo que quiere decir, *deducirlo* de los axiomas y postulados que le preceden. Muchos matemáticos importantes creyeron haberlo demostrado, pero pronto un examen atento, venía a descubrir que se había introducido en la demostración alguna otra hipótesis tácita. Por ejemplo, si se admite como cierta la proposición: *Dos rectas paralelas son equidistantes*, entonces el postulado V podría demostrarse, pero esta proposición pasaría a tomarse como postulado. En este sentido se dice que tal proposición es equivalente al postulado de Euclides. Asimismo, si admitimos como postulado *una* de las proposiciones siguientes, entonces el postulado V puede demostrarse, y las otras proposiciones también, pasando aquél y éstas a la categoría de teoremas:

V_1.– *Por un punto fuera de una recta puede trazarse una paralela a ella, y sólo una.*

V_2.– *La suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos.*

V_3.– *Si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, el cuarto ángulo también es recto.*

y muchos otros, equivalentes al V en el sentido explicado.

La forma V_1, enunciada por Playfair y adoptada por Legendre ha terminado por ser la forma habitual de enunciar el que por antonomasia llamamos *postulado de Euclides*.

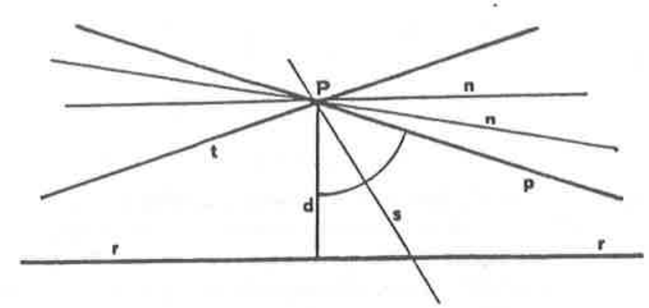
Por consiguiente, el hecho de admitir que *por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a la dada*, constituye el punto fundamental de la teoría del paralelismo euclídeo y, más generalmente, de toda la geometría de Euclides.

LA NUEVA GEOMETRIA

El 23 de febrero de 1826 un joven profesor ruso, Nicolai Lobatchevski (1792-1856), en la Universidad de Kazán, leyó una comunicación que creaba una nueva geometría. Esta geometría era la que resultaba al sustituir el postulado V_1 de las paralelas por el siguiente:

Las rectas que pasan por un punto P exterior a una recta r, se dividen en tres categorías: unas son secantes, como la s, y otras no cortan a la recta r, como las n; estas últimas constituyen un haz cuyo límite son dos rectas p, t, que (como es fácil demostrar) no son secantes a r. A estas dos rectas límites de las no secantes se les llama paralelas a la recta r.

De este modo la expresión "una recta paralela a otra recta" significa en esta geometría, no sólo que la recta *p* no corta a la *r*, sino también que separa, de ambas partes del punto *P*, las rectas que cortan a *r* de las que no son secantes a *r*.

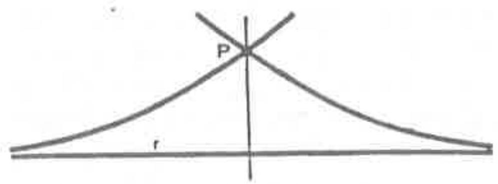


El segmento de recta normal a *r* desde el punto *P* mide la distancia *d* del punto a la recta. Y el ángulo agudo que esa normal forma con cada paralela se llama *ángulo de paralelismo* correspondiente a la distancia *d*.

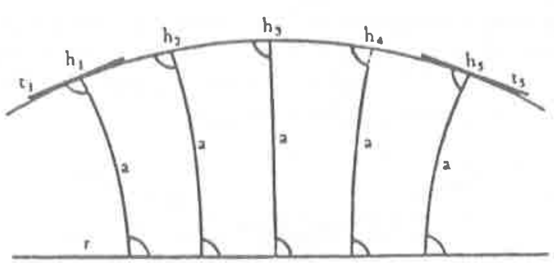
Con estos principios se va desarrollando una geometría en la que las figuras tienen propiedades distintas de la geometría euclídea, pero no son contradictorias entre sí. De este modo la geometría de Lobatchevski aparece tan coherente como la de Euclides. Mencionemos alguna de estas propiedades de extraña apariencia.

1. *Dos líneas paralelas (según Lobatchevski) no son equidistantes, sino que se aproximan indefinidamente con carácter asintótico.*

Por esta razón la representación gráfica en ideograma de estas paralelas suele dibujarse asi:

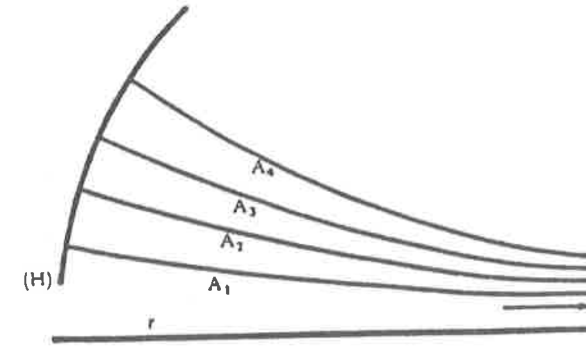


2. *El lugar de los puntos equidistantes de una recta no es otra recta, sino una línea llamada hiperciclo (es la trayectoria ortogonal de las normales a la recta dada).*



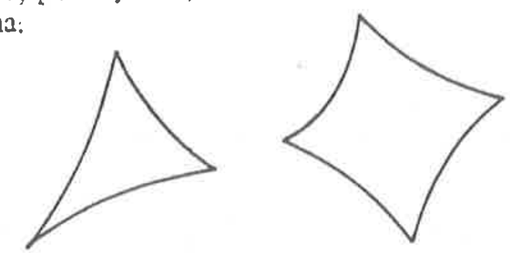
Digresión.– Si en el plano de Lobatchevski tomásemos para vías del tren dos rectas paralelas, el tren descarrilaría, porque los raíles se aproximan indefinidamente. Si se reemplazan los raíles paralelos por raíles "equidistantes", el tren descarrilaría también, porque las ruedas de un lado y otro no recorrerían nunca la misma distancia.

3. *La trayectoria ortogonal de un haz de rectas paralelas no es otra recta, sino una línea llamada horociclo (ésta es el límite de una circunferencia cuyo centro se aleja al infinito, lo que en el plano euclídeo es una recta).*



4. *La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos: tanto menor cuanto mayor es su área.*

De nuevo, para ayudar, a la mente, se dibujarán los polígonos de esta forma:

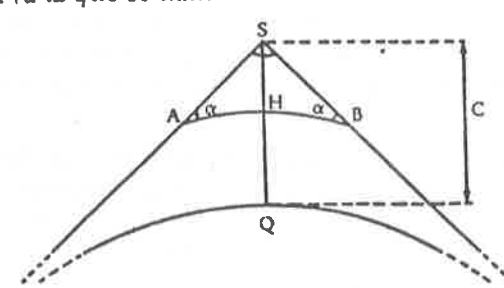


Digresión.– En 1768 escribe Voltaire un cuento titulado *El hombre de los cuarenta escudos*, donde un geómetra le habla así al protagonista:

> "Aconséjole a Vd. que dude de todo, como no sea de que los tres ángulos de un triángulo son igual a dos rectos; de que los triángulos que tienen la misma base y la misma altura son equivalentes, y otras proposiciones semejantes, ..."

Pues bien, aunque Voltaire no sabía matemáticas, es cierto que ni el más eminente de los matemáticos de su tiempo habría opuesto el más pequeño reparo a esos modelos de verdad absoluta. Júzguese en esto la revolución que supuso la geometría de Lobatchevski.

5. *La altura de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos crecen infinitamente tiene por límite una longitud C finita y bien determinada (a la que se llama constante de Schweikart).*



6. *La longitud de la circunferencia no es proporcional al radio R; a radio igual su longitud es superior a la de la circunferencia euclídea, según la fórmula*

$$L = 2\pi k \frac{e^{\frac{R}{k}} - e^{-\frac{R}{k}}}{2}$$

(fórmula de Gauss) *donde e es la base de los logaritmos naturales y k es una "constante universal" llamada constante de Gauss. Si k se hace infinito, o R es infinitesimal, resulta* $L = 2\pi R$.

La historia del descubrimiento de las geometrías no euclídeas no es la historia de una revelación súbita. El tema tiene una larga prehistoria; rescatemos siquiera los nombres de Sacheri, Lambert, Schweikart y Taurinus, entre los precursores. El descubrimiento propiamente tal, se centra en tres autores de biografía muy distinta: F.K. Gauss, justamente considerado en su tiempo el primer matemático del mundo, que en esta historia aparece "Deus ex machina" en los momentos oportunos: en cuanto a los otros dos autores, Bolyai, húngaro, y Lobatchevski, ruso, descubridores casi simultáneos de esta geometría, es inútil enzarzarse en una cuestión de prioridad. Tanto más inútil si se tiene en cuenta, que el descubrimiento de las geometrías no euclídeas se había hecho en su tiempo uno de los "descubrimientos inevitables" que presenta la historia de la ciencia.

JANOS BOLYAI (1802-1860)

Farkas Bolyai, el padre de Janos, había sido condiscípulo de Gauss, y esta amistad juvenil se mantuvo largo tiempo, en correspondencia epistolar. El tema preferente eran cuestiones de fundamentos de las matemáticas, entre las que, concretamente, Farkos expuso a Gauss dos demostraciones (falsas) del postulado de las paralelas. En cuanto a Janos, durante sus años de estudiante de ingeniería en Viena intentó también obstinadamente demostrar el postulado; tan pronto Janos dio a su padre noticia de aquellos intentos de estudiante, la respuesta paterna fue, en cierto modo, conmovedora:

> "Te suplico, no trates de intentar conseguir la demostración de la teoría de las paralelas. Perderás en ello todo tu tiempo y, con todo lo que tú eres, no llegarás a demostrar

> esa proposición. No busques la razón de esa teoría ni por el procedimiento que me comunicas, ni por ningún otro. He explorado a fondo todas las vías posibles: no he dejado una sola idea sin estudiar. He atravesado esa noche negra y en ella he enterrado todos los goces de la vida. Por el amor de Dios, te lo suplico, abandona ese tema, témele tanto como a las pasiones, porque puede sustraerte todo tu tiempo, tu salud, tu tranquilidad, toda la felicidad de tu vida..."

En 1823 Janos Bolyai se incorporó como oficial al ejército húngaro, donde escaso de libros y corresponsales matemáticos fue elaborando un sistema geométrico original. Digamos ahora que como militar no fue muy feliz; de carácter pendenciero y poco sociable, parece cierto que en 1833 fue obligado a presentar su dimisión como oficial. Entretanto, hacia 1825, había elaborado un sistema geométrico original que resolvía el problema de las paralelas de un modo drástico y nuevo: *el postulado de las paralelas es opcional;* puede admitirse o no, y Janos había construido efectivamente los principios de una nueva geometría no euclídea. Su padre, Farkas, convencido al fin insistió a su hijo para que no demorase la publicación.

Fecha importante: En el año 1832 Farkas Bolyai publicaba un texto en latín de matemáticas generales titulado *Ensayo de iniciación de la juventud escolar en los elementos de las Matemáticas puras* (esto es *Tentamen...* etc.). El tomo segundo era seguido de un *Apendix* que era la obra de Janos Bolyai, con los principios de la Geometría no euclídea por él descubiertos.

Se comprenderá que en estas condiciones de edición el texto fuera muy poco leído. Pero Farkas Bolyai envió un ejemplar a Gauss, bien seguro de que la aprobación de éste sería un pasaporte indiscutido para la fama en Europa. Pero la contestación de Gauss fue absolutamente imprevista:

> "Algunas palabras ahora sobre el trabajo de tu hijo. Comienzo por decirte que no lo puedo alabar. Evidentemente, por un instante estarás sorprendido, pero no lo puedo hacer de otra forma, porque eso significaría cantar mi propio elogio. Todo el contenido de la obra de tu hijo, la vía que sigue, así como los resultados que ha obtenido, casi coinciden con aquellos que yo mismo he logrado hace unos 35 años. En realidad estoy sorprendido enormemente. Tenía la intención de no publicar nada de mi propio trabajo mientras estuviera vivo, por consiguiente, muy poca cosa

he puesto sobre el papel. ... . No obstante, me proponía con el tiempo poner todo esto por escrito, con el fin de evitar, en todo caso, que estas ideas mueran conmigo. Por lo tanto, me sorprende en exceso que esté dispensado de esa obligación, y me siento extremadamente feliz de que sea precisamente el hijo de mi viejo amigo el que se me haya adelantado en el camino."

Esta carta produjo en los Bolyai un desencanto muy profundo. Janos juzgaba increíble que Gauss hubiese tenido esas ideas antes que él, y que hubiese renunciado a publicarlas.

Más penosa debió ser la decepción del desalentado Janos Bolyai cuando recibió, enviado por su padre, el folleto de Lobatchevski traducido al alemán, *Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas* (1840), donde este autor hace alusión a la publicación de sus primeros resultados en el *Mensajero de Kazán* de 1829; esto deshacía la prioridad de Janos en el *Apendix*. Aunque desilusionado totalmente, Bolyai escribe el comentario, frase por frase, del folleto de Lobatchevski, con juicio crítico matemático excelente, aunque sin intención de publicar lo escrito, como no lo hizo. Afortunadamente, la obra de los Bolyai, padre e hijo, incluída la correspondencia, fue rescatada y publicada por el matemático alemán P. Stäkel (1902), que así salvó para Janos Bolyai un puesto de privilegio entre los geómetras del siglo XIX.

NICOLAI LOBATCHEVSKI (1793-1856)

La biografía científica de Lobatchevski es rectilínea. Se resume en cuarenta años ligado a la Universidad de Kazan. En esta Universidad entró como alumno Lobatchevski (L.) a los 15 años; nombrado profesor adjunto en 1814, a los 21; fue rector entre 1827 y 1846; finalmente, jubilado en 1855 por motivos de salud, murió al año siguiente.

Su biografía personal también es sencilla. Como estudiante fue más bien altanero y travieso pero bien tolerado por sus profesores, que reconocieron su talento matemático. Como profesor tuvo algunas dificultades por su tal vez demasiado arrogante carácter en la juventud, pero más adelante, en su rectorado especialmente, demostró gran capacidad de organización y gestión.

Escribió y enseñó matemáticas superiores, no sólo geometría. Para sus publicaciones de geometría no euclídea encontró la in-

comprensión y sarcasmo de muchos colegas, y la defensa de otros, pero nunca el aislamiento esterilizador que amargó en soledad científica los últimos años de J. Bolyai.

En 1832, a los 40 años de edad, N.L. contrajo matrimonio con una joven noble y rica de Kazan; no fue un matrimonio desgraciado, aunque tampoco, como era previsible de identificación absoluta. Uno de sus biógrafos y amigos cuenta:

> "Mientras Nicolai Ivanovitch se distinguía por su sangre fría y buen sentido, Bárbara Aleixeneva tenía un carácter en extremo vivo y fuerte. No era raro que hiciera reproches violentos y prolijos a su esposo por cualquier torpeza, y durante todo ese tiempo Nicolai Ivanovitch caminaba tranquilamente de arriba hacia abajo fumando su pipa turca."

La familia tuvo pronto graves problemas económicos, por la obligada atención a una familia muy numerosa, y el fracaso económico de reformas agrarias en sus propiedades.

El 23 de febrero de 1826, en la sección de Física y Matemáticas, Lobatchevski leyó una memoria (hoy perdida) en la que, por primera vez, se exponen públicamente los principios de una Geometría no euclídea. En 1829-30 se publican en el *Mensajero de Kazán* sus *Principios de Geometría*, primera obra publicada sobre ésta.

Al desconcierto casi general siguen las críticas. Algunas son auténticos libelos, como la publicada en 1834 en la revista *Hijos de la Patria* (firmada S.S.). Allí, por ejemplo, se dice:

> "¿Por qué, en lugar de *Principios de la Geometría*, no haber tomado por título *Sátira de la Geometría*, por ejemplo, o *Caricatura de la Geometría*, o alguna cosa de este género? De entrada cada uno se hubiese dado cuenta de lo que se trataba y el autor hubiese evitado muchos comentarios y juicios descorteses. ¡Feliz yo por haber podido captar el verdadero fin de este libro!... etc."

El entonces rector, Musin Puchkin, aunque no matemático, tomó ardorosamente la defensa del sabio contra tan grosero ataque.

El más importante matemático que sotuvo una actitud hostil hacia la obra total de Lobatchevski (no sólo la geométrica) fue M. Ostrogradski.

En 1832 en un informe oral, en la Academia de Ciencias, acerca de los *Principios de Geometría* de L. aparecidos en el *Mensajero de Kazán*, Ostrogradski concluye que ese trabajo de L. "no merece la atención de la Academia".

En 1840 aparece una crítica anónima de las *Investigaciones Geométricas* de L., en el *Repertorio alemán* de Gersdarf, donde se dice:

> "Los fundamentos de esta nueva ciencia (Geometría imaginaria) se exponen en el presente folleto; sin embargo este principio, existencia de infinitas rectas secantes a otra desde un punto y la proposición que de él se desprende: "mientras más prolongamos las paralelas en el sentido de su paralelismo, más se aproximan la una a la otra" caracterizan bastante bien esta obra limitada, y dispensan al redactor de la necesidad de proseguir su apreciación."

Pero en 1841 Gauss escribe al astrónomo J.F. Encke, y dice:

> "El señor Knorr me envió un pequeño trabajo de Lobatchevski (de Kazán) escrito en ruso. Este trabajo, así como un opúsculo en alemán (a propósito del cual el *Repertorio* de Gersdorf contiene una nota completamente estúpida) han hecho nacer en mí un gran deseo de leer el mayor número de obras de este ingenioso matemático."

En 1842 el Ministerio solicitó a la Academia una recensión de otra obra de L.; otra vez Ostrogradski (en quien una hostilidad personal hacia L. es patente) informa:

> "La Academia me ha encargado examinar una memoria sobre la convergencia de series e informar sobre ella. El autor de esta memoria N. Lobatchevski, rector de la Univ. de Kazan, ya es conocido, y en verdad bajo un aspecto desfavorable, por la creación de una nueva geometría que él califica de imaginaria, por un tratado de álgebra bastante voluminoso y por varias disertaciones de análisis matemático. La memoria presentada, de la cual se me ha confiado el examen, no contribuye a modificar la reputación del autor ... etc."

Pocos meses después de publicado este informe, Lobatchevski fue elegido, a propuesta de Gauss, miembro de la Sociedad de las Ciencias de Göttingen. La aprobación de Gauss fue ya, para siempre, título de crédito para la nueva geometría.

LA NATURALEZA DEL ESPACIO

No fueron pocas las polémicas que el siglo XVIII le dejó planteadas al siguiente; en una de ellas, por lo menos, parece que las

geometrías no euclídeas tuvieron algo decisivo que decir. Retrocedamos al tiempo en que la filosofía de Immanuel Kant (1724-1804) dominaba los espíritus.

Siempre ha sorprendido que se haya podido construir una ciencia como la Geometría (euclídea) de un modo tan distinto a las otras ciencias. Se trata de una ciencia del espacio, luego de una ciencia de la naturaleza. Pero todas las ciencias de la naturaleza exigen un largo trabajo previo de aportación de nuevos hechos, y de retoques, que éstos provocan. Nada de esto ocurre con la Geometría. En ella el único motor de progreso es la deducción y, en efecto, la Geometría progresa y no se retoca. Pero, además, su confirmación en la experiencia natural, desde la agrimensura a la astronomía, es infalible: nadie que realice un buen cálculo con medidas buenas de relaciones espaciales, se encontrará con un desmentido de la naturaleza. Todo esto hace, según expone el gran físico y fisiólogo Herman Helmholz en una conferencia célebre de 1884, que se haya presentado la Geometría como ejemplo probatorio fácil de la posibilidad (que Helmoltz no acepta) de conocer hechos concretos sin apoyarse en una base empírica.

Pero ya hemos recordado que a principios del siglo XIX el pensamiento filosófico dominante era el kantiano. Se sabe bien que la concepción del espacio y del tiempo, tal como Kant las expone en su *Crítica de la Razón Pura*, están impregnadas de idealismo. Según Kant nuestra representación del espacio y del tiempo, no sólo son inherentes a nuestra conciencia, sino que constituyen además las formas absolutamente necesarias del pensamiento, fuera de las cuales éste es imposible.

Una vez creadas las geometrías no euclídeas estas ideas de Kant resultan inconsistentes, o, para decirlo con la frase de Helmoltz, "se fundieron como hielo puesto al sol". No hay ya duda de que nuestro pensamiento maneja no sólo las representaciones espaciales establecidas, sino también imágenes absolutamente diferentes del Universo considerado en su conjunto; en esta nueva ciencia, se ceden las viejas representaciones a la insignificante parte del Universo a la que el hombre tiene acceso.

Los axiomas geométricos aparecían tan claros y evidentes que no era espontáneo atribuirlos a la experiencia. Pero téngase en cuenta que cualquier geómetra regular que se familiarice con el contenido de la geometría no euclídea, puede desenvolverse por el universo de Lobatchevski con la misma soltura que por el de Euclides. Por tanto, las representaciones espaciales como forma de pensamiento inherentes a la conciencia de cada uno de nosotros, no pueden sostenerse.

Destacaremos ahora, para terminar, la más notable particularidad del espacio no euclídeo, en oposición al de Euclides:

En el espacio euclídeo se concibe una unidad "absoluta" para la medida de ángulos: el ángulo recto, por ejemplo; pero no hay "metro natural" para la longitud; cualquier unidad de longitud que se elija depende de un convenio humano. Por contra, en la geometría no euclídea sí existen longitudes *absolutas universales* (por ejemplo, la constante C de Schweikart). En una carta de Gauss a Taurinus fechada el 8 de noviembre de 1824, el gran geómetra dice:

> "La hipótesis de que la suma de los tres ángulos de un triángulo es inferior a 180°, conduce a una geometría particular distinta de la nuestra; esta geometría es absolutamente coherente y yo la he desarrollado para mi uso particular. ... . Todos mis esfuerzos para encontrar una contradicción o inconsecuencia en esa geometría no euclídea han fracasado; la única cosa aquí que choca a nuestra razón es que en el espacio, si ese sistema fuera justo, debería existir una cierta magnitud lineal determinada por sí misma (aunque desconocida para nosotros). Pero me parece que, dejando aparte discursos puramente verbales de los metafísicos, sabemos muy poca cosa, o verdaderamente nada, de la naturaleza del espacio. ... Así a veces, en forma de broma, he expresado el deseo de que la geometría euclídea no fuese verdad, porque entonces dispondríamos a priori de una medida de longitud absoluta."

En enero de 1829 Gauss escribía a su amigo y gran astrónomo F.W. Bessel (1784-1846):

> "Es posible que yo no pueda preparar enseguida mis investigaciones sobre ese sujeto en forma que se pueda publicar. Pero es posible que yo no me decida jamás, porque temo los gritos de los beocios cuando yo enuncie mis puntos de vista por completo."

La crítica interpreta unánimemente que la referencia a los beocios alude a los filósofos kantianos. (Por lo demás, son muchas las cuestiones en que Gauss no tuvo interés en publicar y dejó inéditas por no tenerlas completamente elaboradas: *Parca sed paura* era su lema habitual).

Parece a primera vista que la experiencia demuestra suficientemente que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Pero ¿cuándo la experiencia hubiese demostrado a los arquitectos que las esquinas verticales de un edificio no son paralelas? Y aun ahora, que las sabe concurrentes en el centro de la tierra, debe calcular y proyectar como si fuesen paralelas. Del mismo modo, aunque se conciba el universo construido según una geometría no euclídea, hay que dejar a la geometría tradicional la infinitesimal parte de universo al alcance de la observación humana.

Geometría diferencial

COORDENADAS DE GAUSS

Por elegante y eficaz que resulte el método de las coordenadas llamadas cartesianas para el estudio analítico de una superficie, es claro que tal estudio se liga a un sistema de referencia extrínseco a la superficie en cuestión. Contrariamente, imaginemos una superficie sobre la que viven y miden unos seres inteligentes sin ninguna noción del espacio ambiente, inimaginable e inaccesible para ellos. Estos seres podrían, por ejemplo, encontrar la distancia más corta entre dos puntos (todo en su habitat superficial), o trazar sus "circunferencias" y, en fin, hacerse su geometría. ¿Podrían estos seres saber algo acerca de la *naturaleza del espacio bidimensional* en el que viven?. En efecto, la métrica de su espacio les puede decidir si su espacio es "plano" (tal bandera ondeando al viento), o si tiene curvatura, y si ésta es constante o es variable (si es constante y positiva vivirán sobre una esfera. El radio de la misma será una unidad absoluta de longitud, o sea, propia de su universo).

Hacia 1825 dirigía C.F. Gauss importantes trabajos de geodesia. Sin duda fueron ellos los que le llevaron a plantearse la cuestión apuntada: *Investigar lo que pueda saberse de la naturaleza de una superficie partiendo exclusivamente de las medidas tomadas sobre ella, sin referencias extrínsecas.*

Esta investigación cristalizó en una obra decisiva titulada *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827).

Imaginemos trazados sobre la superficie S dos sistemas de líneas u y v tales que por cada punto de la superficie pase precisamente una línea de cada sistema que son las coordenadas de Gauss de tal punto. Así como en la geometría cartesiana del plano euclídeo el elemento diferencial de distancias se expresa por la fórmula pitagórica

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

en el sistema de coordenadas u, v, sobre la superficie S es

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

donde E, F, G son funciones de u, v que definen la métrica de la superficie S. Y Gauss muestra cómo la geometría intrínseca de la superficie S depende y está determinada por la forma cuadrática

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

a la que justamente se llama "forma fundamental" de S.

ESPACIOS DE RIEMANN

Bernhard Riemann (1826-1866), fue un matemático absolutamente genial, que proporcionó a varios campos de las Matemáticas ideas que todavía hoy siguen desarrollándose. En 1854 fue nombrado encargado de curso en la Universidad de Göttingen, lo que le obligaba a desarrollar ante un tribunal una lección sobre uno de los tres temas que el candidato sometía a la facultad. En el tribunal estaba Gauss, de quien Riemann había sido discípulo: la elección de Gauss fue para el tercero de estos temas: *Hipótesis que sirven de fundamento a la Geometría.* Hoy se la tiene por la más profunda y trascendente de las tesis de matemáticas que se hayan escrito nunca y sin duda era Gauss el único capaz de apreciarla en todo su valor. Se trata de un resumen de varias ideas profundas, más que de un trabajo listo para publicarse, y Riemann lo guardó para prepararlo, pero su prematura muerte le impidió hacerlo. Fue J.W. Dedekind (1831-1916) quien encontró el manuscrito entre los papeles de Riemann y lo hizo publicar en 1866.

En lo que hace a la Geometría métrica, Riemann no la limita a espacios de 2 ó 3 dimensiones, sino la concibe en un espacio de n coordenadas (x_1, x_2, ... x_n); y así como vimos que Gauss derivaba la Geometría intrínseca de una superficie de la fórmula fundamental

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

del mismo modo, Riemann deduce toda la geometría de su espacio de una forma cuadrática definida positiva

$$ds^2 = \Sigma g_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad i, j = 1, 2, ..., n:$$

donde las g_{ij} son funciones de las x_1, x_2, ..., x_n.

Este espacio tendrá, en particular, una curvatura en cada punto. Refiriéndonos a un espacio de tres dimensiones, si su curvatura es constante nula, se tiene la geometría euclídea, si es constante negativa se tiene la geometría de Lobatchevski, si es constante positiva se tiene una geometría nueva (de Riemann) donde las rectas coplanarias son siempre secantes, no hay paralelas: puede ejemplarizarse en la geometría sobre una superficie esférica donde las circunferencias máximas hacen de "rectas"; la suma de los ángulos de un triángulo es ahora mayor que dos rectos.

Una de las observaciones de Riemann en su tesis es la distinción entre ilimitado e infinito, que no son ideas sinónimas. Un ejemplo simple: cualquier arco de circunferencia puede prolongarse más allá de sus límites, es ilimitado, pero esto no lleva al infinito. En espacios de Riemann de más dimensiones la cuestión no es tan intuitiva, pero se mantiene: *un espacio ilimitado puede ser finito.*

La concepción de Riemann ha tenido particular fortuna como adecuada a la expresión matemática de la relatividad restringida (1905) y de la relatividad generalizada (1916). La relatividad restringida de Einstein, en la interpretación de Minkowski (1909), corresponde a la naturaleza de un espacio cuatridimensional donde hay una constante c, tal que

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

es invariable cuando cambiamos de sistema de referencia durante un movimiento uniforme. En la relatividad generalizada se identifican los efectos de la gravedad con los de la curvatura en un espacio de Riemann definido por una forma cuadrática

$$\Sigma g_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad i, j : : 1, 2, 3, 4.$$

Se dice a veces (¿exageradamente?) que esto equivale a geometrizar la física. En todo caso la relatividad de Einstein supone el último capítulo de las cosmologías clásicas. En el último medio siglo el progreso matemático es la topología de las variedades multidimensionales, ha permitido concepciones, como las supercuerdas, los espacios retorcidos, etc., en los límites ya de las posibilidades de nuestra intuición. Sin embargo, o mucho me equivoco, o el aserto de Gauss sigue válido: *sabemos muy poca cosa, o verdaderamente nada, de la naturaleza del espacio.* No hay en este juicio nada minorante o peyorativo para la inmensa admiración que la ciencia moderna merece. Por el contrario, significa que nuestra ciencia posee también aquella preciada cualidad que para todo hombre estudioso es tan deseable y sosegante: *saber bien a dónde se llega y de dónde no se pasa.*

SOBRE ANALISIS NO ESTANDAR

por **Manuel Suárez Fernández**

CAPITULO I : UN POCO DE HISTORIA

Poner en tela de juicio la existencia de números ilimitadamente grandes (o ilimitados) e ilimitadamente pequeños (o infinitésimos), es algo que ocurre desde los primeros tiempos del Cálculo Infinitesimal, en el cual, sus descubridores, **Newton** y **Leibniz**, los utilizaron frecuentemente, si bien informalmente o con un formalismo a todas luces incompleto y poco claro.

Surgieron así imprecisiones e inconsistencias que con el paso del tiempo se hicieron más notorias; ello dió lugar a que, en nombre del rigor, **Cauchy** y otros matemáticos fueran prescindiendo de los números ilimitados e infinitésimos y por fin, **Weierstrass** y algunos de sus discípulos, hacia 1870, lograron un Análisis Infenitesimal en el que no se mencionaban para nada tales números ilimitadamente grandes o pequeños, sustituidos por el moderno concepto de límite.

El rigor del método de **Weierstrass** fué ganando adeptos con rapidez entre los matemáticos, pero ello resultó bastante más lento y parcial entre los físicos, ingenieros, etc., muchos de los cuales, en la actualidad, prefieren sufrir la falta de rigor, a dejar de razonar con los intuitivos infinitésimos.

Quedaba un problema pendiente: Conseguir un Analisis Infinitesimal con numeros infinitésimos e ilimitados, a la vez que construido con rigor. En tal sentido, el mas significativo redescubridor de los numeros ilimitadamente grandes y pequeños es **Abraham Robinson**. Su primera publicación en la que los considera es de 1961, y al nuevo método de calculo lo titula *"Non Standard Analysis"*.

Hubo, no obstante, otros orígenes de las *"ideas no estandar"*. **Skolem** (cuyo nombre figura en el trabajo de **Robinson** antes mencionado), **Löwenhein** y **Hilbert**, entre otros, observaron que el formalismo en uso permitía no sólo el modelo estandar (o clásico) de los números naturales, sino también modelos no estandar en los que, además de los números de la sucesión determinada por el proceso intuitivo de contar { 0 , 1 , 2 , ... }, había otros elementos que se consideraban no deseados, escapados de la vigilancia del legislador. Lo deseado era, claro está, que el único conjunto, salvo isomorfismo, que verificase los axiomas de **Peano** fuese el que llamamos "sucesión determinada por el proceso intuitivo de contar".

El merito de **Robinson** fué el de acertar a ver como positivo lo que, antes de él, había sido visto como negativo. Es decir, el de acertar a ver que se podía aprovechar, en lugar de lamentar, el hecho de que con el formalismo en uso, además de los números naturales de la referida sucesión determinada por el proceso intuitivo de contar, a los que llamamos *"estandar"* (*"clásicos"* o *"intuitivos"*), existiesen otros números naturales, a los que llamamos *"no estandar"*, completando dicho formalismo para distinguir entre unos y otros (entre *estandar* y *no estandar*) y así utilizarlos para volver al Análisis Infinitesimal de los intuitivos y prácticos números ilimitadamente grandes y pequeños de los primeros tiempos, pero formulado con rigor.

El nuevo Análisis despierta curiosidad entre los matemáticos y lógicos, pero entusiasmo tan sólo en un número reducido de ellos, presumiblemente a causa de la notable complicación de su fundamentación lógica; **Robinson** es su figura más relevante hasta su muerte en 1974. Sus trabajos muestran un enorme esfuerzo por promover el **Análisis No Estandar**, reformulando temas clásicos como topología, sucesiones, series, derivadas, diferenciales, integrales, teoría de la medida, espacios e **Hilbert**, etc., dando así a conocer la elegencia y sencillez de las demostraciones no estandar. En 1966 soluciona con **Bernstein** un problema abierto sobre espacios de **Hilbert** y aplica sus métodos a la Física (Mecánica Cuántica) y a la Economía.

En 1967 tiene lugar el primer coloquio internacional de Anális No Estandar al que, como principal aportación, figuran los trabajos de **Robinson**, y en 1977 comienza una segunda época con la publicación, en el *Bulletin of the American Mathematical Society*, del artículo de **Edward Nelson** titulado *"Internal set theory"*, en el que la fundamentación lógica del Análisis No Estandar es mucho más sencilla que la de **Robinson** y la de otros matemáticos y lógicos. **Nelson**, en ese artículo, dice que la "internal set theory" se presta principalmente a ser aplicada a la Teoría de Probabilidades, cosa que él y sus discípulos realizan, y a la Mecánica Cuántica, mediante el estudio de perturbaciones de ecuaciones diferenciales, lo que vienen haciendo matemáticos de Strasbourg y de Mulhouse, alentados por **George Reeb**.

- - - - -

Mi experiencia personal sobre coordinación interdisciplinal entre profesores de Matemáticas que son matemáticos y profesores no matemáticos, por ejemplo, de Física, con el fín de que los alumnos hayan visto en clase de Matemáticas ciertas cuestiones (generalmente de Análisis Infinitesimal) cuando las necesiten para la Física, es que no funciona.

Sin perjuicio de otras causas de tal experiencia negativa, creo que una esencial es que el Análisis Infinitesimal de las asignaturas de Matemáticas impartidas por matematicos, es el Análisis Estandar (clásico o de Weierstrass), que todo lo fundamenta en el concepto de límite, con el formalismo del ϵ, por lo que su comunicación a la clase resulta demasiado lenta para el fin referido. Por ello, cuando se requiere explicar Análisis Infinitesimal a los alumnos, para ser utilizado con cierta urgencia en clase de Física, acostumbran a ser los profesores no matemáticos de Física quienes salvan la situación proporcionando a los alumnos algunas sencillas e intuitivas ideas, si bien faltas de formalismo y, en consecuencia, de rigor, utilizando los infinitésimos.

Sobre Análisis Infinitesimal sin o con infinitamente grandes e infinitamente pequeños (es decir, sin o con ilimitados e infinitésimos) y coordinación interdisciplinar entre profesores matemáticos y profesores físicos, con el propósito manifestado, el profesor **Jaques Harthoug** de la *Universidad Luis Pasteur* de Strasbourg (cuyos trabajos fundamentalmente versan sobre Mecánica Cuántica), en su artículo publicado en *"La Recherche"* (número 148 de Otubre de 1983) con el título de *"L'Analyse Non-Standard"*, entre otras cosas, dice lo siguiente:

*"Las matemáticas que habeis aprendido en el Instituto y en la Universidad tienen un gran defecto: eluden completamente toda consideración de escala de tamaño; por ejemplo, para ellas, no hay ninguna diferencia cualitativa entre números tales como 1/100 , 10^{-100} , 10^{-1000} . Esta laguna proviene de que estas matemáticas, o más precisamente, el cálculo infinitesimal que inducen, está todo fundamentado sobre el concepto de límite. Antes de trabajar en términos de límites, los matemáticos recurrían a los infinitamente pequeños y a los infinitamente grandes (**Guillaume de l'Hôpital, Leibniz,...**); es el fracaso de todas las tentativas de teorización de estos infinitamente pequeños lo que ha llevado a **d'Alambert y Lagrange**, y después a **Weierestrass y Dedekind**, a retirarlos en beneficio del concepto moderno de límite, considerando este hecho como remedio a ese mal que era la falta de rigor. La incapacidad de distinguir órdenes de tamaños diferentes es un efecto secundario de este remedio. No se puede, seriamente, tenerlo en el olvido. En efecto, las matemáticas tienen en nuestra cultura un campo de aplicación muy vasto: el físico o el ingeniero las practican tanto como el matemático. Pero en las ciencias de la naturaleza, la consideración de órdenes de tamaños diferentes y comparables es de la máxima importancia; para el físico y el ingeniero, el remedio es bastante peor que el mal.*

Un desgraciado divorcio... Y es así que después de más de un siglo, y de manera aún más flagrante en los últimos cuarenta años, el divorcio es consumado: de un lado los matemáticos puros que persiguen sus propios problemas en su torre de cristal y de otro los físicos que, ignorando a D'Alembert y sobre todo a Weierstrass y Dedekind, continúan practicando el cálculo de los infinitamente pequeños y burlándose de este rigor matemático, a sus ojos puramente ideológico.

Este divorcio es hoy tan aceptado como una fatalidad, que se le tiene olvidado; ello no es menos flagrante. Yo me acuerdo por ejemplo de ésto: hace una decena de años, unos físicos habian encomendado a un matemático un curso de análisis matemático para aplicar a la Física y yo he podido comprobar su furor cuando ellos se apercibieron de que los primeros meses de este curso habian servido solamente para demostrar la fórmula de Stokes (que ellos demostraban con sus infinitamente pequeños, en cinco minutos), cuando los estudiantes ignoraban sin embargo los métodos matemáticos más indispensables. Pueden creerme ¡ Allí, nunca más se repitió aquello ! En adelante, los cursos de matemáticas para físicos se encomendaron a físicos. En cuanto a la frustración que de ello resulta, se la exorciza con una profusión de discursos oficiales exaltando la coordinación interdisciplinar y la apertura. No se puede impedir, cuando se contempla esta situación, el encontrarla extraña y paradójica. ... "

- - - - - -

Es mi propósito publicar en distintos números de este Boletín de la *Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, una serie de artículos, de los cuales éste es el primero, sobre Análisis No Estandar (lo que da nombre a la serie) y en particular sobre la *"Internal Set Theory"* de **Nelson**, procurando justificar la posibilidad de modelos no estandar con el actual formalismo de las Matemáticas y los nuevos principios (es decir, axiomas) que considera, definiendo en términos no estandar un conjunto de conceptos básicos del Analisis Infinitesimal y comparando dichas definiciones con las correspondientes estandar, comenzando en el proximo artículo con con una sucinta exposición de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, con el axioma de elección, para terminar con unas sugerencias sobre cómo, quizás y a título de ejemplo, definir un modelo no estandar con el fin de utilizarlo en el Analisis Infinitesimal de las Enseñanzas Medias y primeros cursos de la Universidad.

- - - - - - -

BIBLIOGRAFÍA:

Bayod, José M. y Masa, Concepción. *"Por que y como introducir el Análisis No Estandar a nivel elemental en la Universidad"*. Fac. de Ciencias. Univ. de Santander.

Harthong, Jacques. *"L'analyse non-standard"*. La Recherche, nº 148. Oct. 1983.

Nelson, Edward. *"Internal Set Theory: a new approach to non-standard analysis"*. Bulletin of the Amer. Math. Soc. Vol. 83. Number 6. Pag. 1165-1198. Noviembre, 1977.

Reeb, Georges. *"La Mathématique Non Standard, vieille de soixante ans ?"*. Univ. Louis Pasteur. Dépt. de Mathématiques Institut de recherche mathématique avancée. Strasbourg. 1

---- *"La Mathématique Non Standard, vieille de soixante ans ?"* . Cahiers de Topologie el Geometrie differentielle. Vol XXII - 2. 1981. Dépt. de Mathématiques. U. L. P. Strasbourg.

---- *"Intuitionisme, Formalisme, Mathématique Non Standard et Infinitesimaux"*. Dépt. Mathématiques U.L.P. J.R.M.A. Strasbourg.

Robinson, Abraham. *"Non standard analysis"* Amsterdam. North-Holland. 1966.

Salanskis, J. M. *"L'analyse non standard et la tradition de l'infini"*. Revue d'histoire des sciences. Tome XLI - 2, Abril, Junio, 1988.

- - - - - - - - - -

Como socio de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín *(señalar con unas aspas los que interesen)*:

3	4	5	9	10	11	13	14	15
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

16	17	18	19	20	21	22	23
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo *(20 pts. por número para Madrid y 30 pts. por número para provincias)*.

Hagan el envío utilizando como dirección la consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8 y 12 están agotados. De los números 9 y 19 quedan sólo unos pocos ejemplares.

Si desea acogerse a este ofrecimiento recorte o copie este cupón y envíelo a la *Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Apartado 9479 - 28080 - MADRID.*

UNA AXIOMATICA PARA EL PLANO

Fidel Higuera Garrido

Desde mis estudios de licenciatura, he sentido una gran atracción por la Geometría Axiomática, encuadrada en el contexto matemático-filosófico de los fundamentos, de la distinción cada vez más nítida entre la mera descripción del mundo físico y la desnudez de la verdad matemática, que no precisa de ninguna referencia a lo real y que en conocida frase de Einstein

"En la medida en que se refieren a la realidad, las leyes de la Matemática no son ciertas; y en la medida que son ciertas, no se refieren a la realidad".

He seguido con mucho interés la evolución del pensamiento matemático desde la primera organización deductiva de la Matemática griega que ha llegado a nosotros y que constituye el punto de partida para toda elaboración científica: "Los Elementos" de Euclides. El profesor Abellanas hace una interesante y razonada consideración de la matemática de Los Elementos, como fotografía de la infancia de nuestra matemática actual: en ella ya están presentes todos los rasgos (léase problemas fundamentales) de la matemática de hoy.

Los reiterados esfuerzos para demostrar que el V Postulado de Euclides, estimulan el sentido crítico de los matemáticos posteriores y la comprobación de lo erróneo de las demostraciones, va estableciendo una cadena de propiedades equivalentes. Son de un particular interés los resultados de Saccheri que, pese a su falsedad final, proporcionan un importante punto de partida para los estudios siguientes: las conocidas hipótesis del ángulo recto, agudo y obtuso. Con ellas, llegará Lobachewski, a una de las primeras formulaciones de Geometría no euclídea. Los trabajos de Bolyai y Gauss principalmente, a la vez que presentan, desde otros puntos de vista, Geometrías no euclídeas, van abriendo una importante vía de despegue de la Matemática con el mundo físico; Beltrami, al presentar un modelo de Geometría no euclídea, contenido en el marco de la euclídea, dará la garantía final para el conocimiento total de las Geometrías no euclídeas, como un capítulo más de las construcciones matemáticas.

Esta situación lleva a un deseo cada vez más sentido de precisar los conceptos básicos y formularlos con una gran independencia de su indudable valor como descripción del mundo físico. En el último tercio del siglo XIX, Pasch plantea, como un capítulo cero de su libro "Lecciones de Geometría Moderna", un conjunto de axiomas que le garantice la solidez de sus estudios geométricos posteriores.

Autores como Kennedy discuten la prioridad del trabajo axiomático de Pasch sobre el de Peano, éste último menos conocido por la dificultad de su lectura.

Hilbert, en sus "Fundamentos de la Geometría", proporcionará la gran construcción de la Geometría axiomática, punto de referencia obligado para cualquier otra construcción. En su obra, además del deliberado intento por despojar a sus axiomas de toda vinculación con el mundo físico, se plantea por primera vez el problema de la compatibilidad del sistema y el de la indepencia de sus cinco grupos de axiomas. La compatibilidad, a la vista del Teorema de Gödel, la "resolverá" del único modo posible: estableciendo su solidaridad con un modelo suficientemente "fiable": la aritmética de los números reales. Consecuente con este planteamiento, demostrará la independencia de cada grupo creando modelos que verifiquen todos los axiomas salvo los del grupo que se contrasta.

Una interesante serie de trabajos, tales como los de Pieri, Veblen, Moore, Birkhoff, Moulton, Maclane y Huntington, etc. dan testimonio del interés que la Geometría axiomática suscita en el mundo de la Matemática.

Al margen de esta intencionalidad axiomática, pero siempre desde la preocupación por el análisis de los elementos geométricos, estudié con gran interés el gran trabajo de Descartes, donde se plantea ya claramente la traducción de los conceptos geomètricos al mundo más asequible y potente de los números y de lo algebraico.

Las relaciones entre la Geometría y el Algebra, tratadas en un lenguaje axiomático por Baer, fundieron mis dos centros de interés. En su Memoria, Baer, tras una necesaria descripción axiomática del plano, pretende fundamentalmente poner de relieve una serie de equivalencias entre propiedades algebraicas y geométricas. El detallado estudio de este trabajo de Baer, de lectura muy laboriosa, juntamente con algunas aportaciones personales, constituyeron mi Tesina de Licenciatura.

En el mismo año de la publicación del trabajo de Baer, E. Artin publica otro donde se aprecia una línea análoga, aunque con una intencionalidad mas claramente axiomática. A partir de un conjunto de axiomas de formulación geométrica, llega a la construcción de un cuerpo (en principio totalmente arbitrario) y a la introducción de coordenadas con los elementos de ese cuerpo. Esto es, se llega a "afinizar" la Geometría, asignando a cada punto, una vez elegido un sistema de referencia, un par ordenado de elementos del cuerpo, y considerando cada recta como el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación lineal con coeficientes en el cuerpo señalado.

Con posterioridad Artin, completaría su estudio

estableciendo las equivalencias entre propiedades del cuerpo base y propiedades geométricas del plano afín construido sobre él.

Pues bien el principal objeto de este trabajo será la obtención de unos resultados previos elementales que nos permitirán posteriormente la obtención de un plano afín.

Sean dos conjuntos, uno de "puntos" y otro de "rectas" y una relación binaria entre un punto dado P y una recta dada l, "P está(situado) sobre l" ($P \in l$); esta relación puede ser verdadera o falsa para el par formado por P y l.

Todos los axiomas pueden ser expresados en términos de esta relación. Sin embargo también utilizaremos expresiones equivalentes a la relación binaria con el objeto de aligerar el lenguaje, como "P pertenece a l", o, "l contiene a P", o, "l pasa por P". Si P está a la vez sobre l y m, podemos decir que l y m se encuentran en P, y si P es el único punto sobre l y m diremos que "l y m se cortan en P", o que "P es la intersección de l y m".

Definición 1

Sean l y m dos rectas tales que $l = m$, o bien que ningún punto esté a la vez sobre l y m; entonces decimos que l y m son paralelas, y escribimos $l \parallel m$. Si l y m no son paralelas escribimos $l \nparallel m$.

Si $l \nparallel m$, entonces existe al menos un punto P a la vez sobre l y m.

AXIOMA I

Dados dos puntos distintos P y Q existe una y sólo una recta l tal que P está sobre l y Q está sobre l. Escribimos $l = P + Q$.

Si $l \nparallel m$, existe exactamente un punto P a la vez sobre l y m. En efecto, si existieran dos puntos, el axioma I llevaría a $l = m$ y, por tanto, $l \parallel m$.

AXIOMA II

Dados dos puntos distintos A y B alineados existe un tercero C que no pertenece a la recta $A + B$.

Este axioma no asegura la existencia de tres puntos no alineados al no asegurar la existencia de dos puntos distintos.

Definición 2

Una aplicación biyectiva f entre los puntos del plano se denomina alineación respecto a un punto R si

a) $f^2 = 1$, $f \neq 1$

b) $R^f = R$ (R es el único punto fijo de f)

c) Si P, Q, T son puntos distintos alineados P^f, Q^f, T^f están también alineados.

d) Para todo P del plano $R \in P + P^f$

Nótese que en la geometría euclídea ordinaria las alineaciones se corresponden con las simetrías centrales.

AXIOMA III

Para todo par de puntos alineados existe una alineación que los intercambia.

Definición 3

Una correspondencia entre rectas se llama relación de ortogonalidad si

0.1 Para cada recta a existe una $b \neq a$ tal que a es ortogonal a b.

0.2 a es ortogonal a b si y sólo si b es ortogonal a a.

0.3 Si a es ortogonal a b, entonces $a \parallel a'$ es condición necesaria y suficiente para que a' sea ortogonal a b.

0.4 Las alturas de un triángulo concurren en un punto.

Si a y b son ortogonales escribiremos $a \perp b$.

AXIOMA IV

Existe una relación de ortogonalidad entre las rectas del plano.

Teorema 1

Por un punto exterior a una recta existe una única paralela.

Demostración

Sean P y r un punto y una recta dados, entonces por el axioma IV existe una recta s, $s \neq r$, tal que $s \perp r$ y Q tal que $Q \in s$ y $Q \in r$ pues s y r no son paralelas.
Se presentan dos casos

1) $P \in s$
Entonces, existe un único punto R centro de la alineación f que intercambia P y Q, por el axioma II, existe M tal que $M \notin P + Q$, entonces :

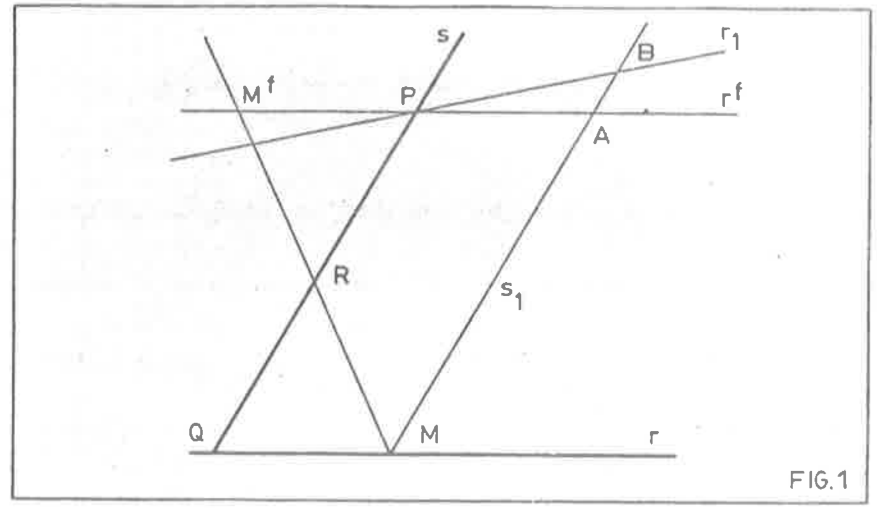


FIG. 1

a) $M \in r$ (Ver fig 1). $r^f = P + M^f$, si $r^f \nparallel r$, tiene un punto en común con ella y este punto será fijo. Como R es el único punto fijo de f, resulta que $r^f = P + M^f = P + R = s = P + Q$, y entonces Q sería punto fijo, contradicción que lleva a que $r^f \parallel r$.

Si existe otra paralela r_1 por P a r, resulta que considerando el mismo razonamiento para M y s que para P y r, existe una recta s_1 que contiene a M y es paralela a s. s_1 es ortogonal a r_1 y a r^f, pues lo es a r y las corta en dos puntos distintos A y B. De aquí se deduce que las alturas del triángulo PAB se cortan en dos puntos distintos A y B, lo que contradice 0.4.

b) $M \notin r$.
Entonces si $P + M$ es paralela a r (ver fig. 2), como por M existe una única paralela a $P + Q$, por los resultados del parágrafo anterior, esta paralela s_1 será ortogonal a $P + M$, y a r_1, siendo r_1 una segunda paralela a r que pasa por P y distinta de $P + M$. Si A es la intersección de s_1 y r_1, el triángulo PMA tampoco verifica 0.4.

Si $P + M$ no es paralela a r, existirá un punto de intersección de ambas, que llamaremos T y estaremos en las hipótesis de a).

2) $P \notin s$
Entonces existe un único punto R que es el centro de la alineación f que intercambia P y Q, por el axioma II, existe un punto $M \notin P + Q$. Se presentan tres casos :

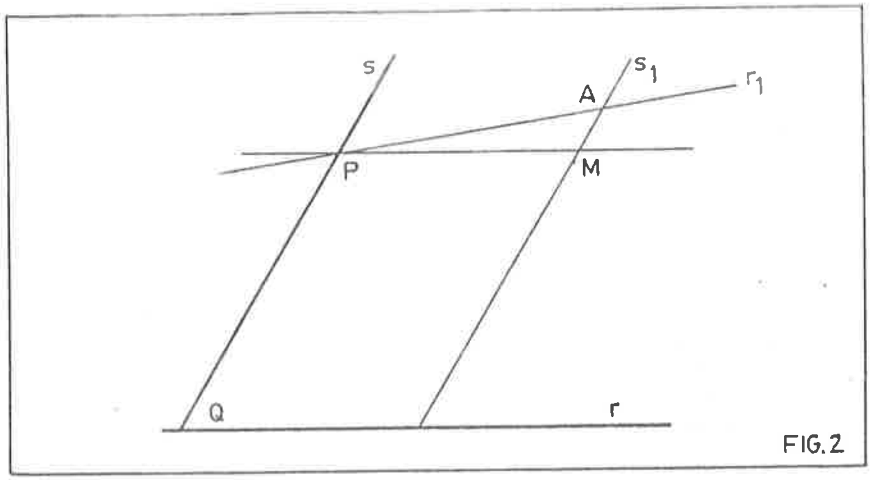


FIG. 2

a) Si $M \in r$ (ver fig. 3), $P + M^f$ es paralela a r, segùn razonamientos anteriores, y es única pues si existiera otra r_1, considerando el punto A intersección de la recta $P + M^f$ con s, y B intersección de r_1 con s, resultaría que el triángulo PAB no cumpliría 0.4.

b) Si $M \in s$, entonces $P + M$ puede ser paralela a r y sería única por el mismo razonamiento final del apartado a), o no sería paralela y cortaría en un punto M' a r, con lo cual estaríamos en las hipótesis de a).

c) Si $M \notin s$ y $M \notin r$, podría ser que $P + M$ fuera paralela a r y sería única por los mismos razonamientos anteriores, o bien cortaría a r en un punto M' y estaríamos en las hipótesis de a).

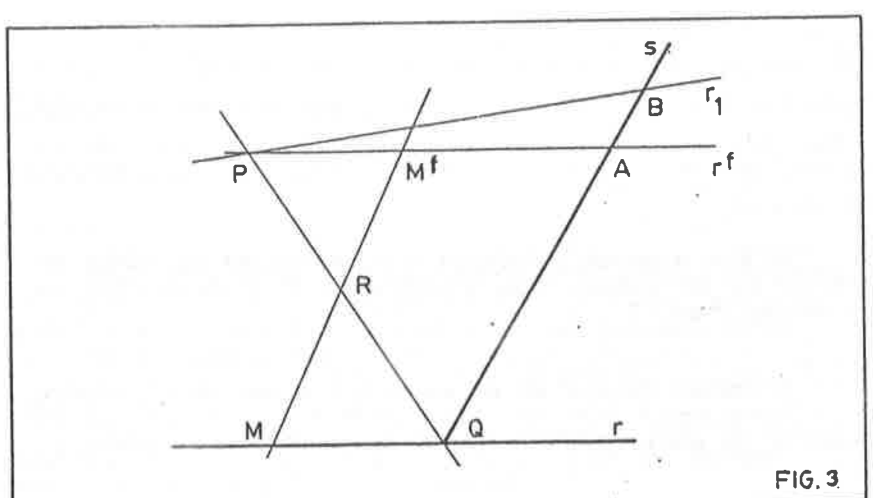


FIG. 3

Teorema 2

El paralelismo es una relación de equivalencia.

Demostración

Esta relación es evidentemente reflexiva y simétrica. Para establecer la transitividad, supongamos $l_1 \| l_2$ y $l_2 \| l_3$. Si no existe ningún punto a la vez sobre l_1 y l_3 entonces $l_1 \| l_3$. Si existe un punto P a la vez sobre l_1 y l_3, entonces $l_1 = l_3$ por el Teorema 1 y entonces l_1 l_3.

Definición 4

Una clase de equivalencia de rectas paralelas se llama haz de rectas paralelas.

Teorema 3

Si existen tres haces distintos π_1, π_2 y π_3 de rectas paralelas, entonces todo haz π contiene el mismo número de rectas, y este número es igual al número de puntos sobre toda recta dada.

Demostración

Sean l una recta de π_1 y m una recta de π_2. Tenemos que $l \not\| m$ y, por tanto, existe un único punto P situado en l y m. Por otra parte, sea Q un punto cualquiera de l. Existe exactamente una recta $m' \| m$, es decir una recta m' de π_2, tal que Q está sobre m'. Tenemos así una correspondencia biunívoca entre los puntos de l y las rectas de π_2; el número de puntos de l es el mismo que el número de rectas de π_2. Hemos establecido pues el resultado siguiente: Dados dos haces distintos, cada recta de uno de los haces contiene tantos puntos como rectas hay en el otro haz. Si π es un haz cualquiera, es ciertamente distinto de al menos dos de nuestros haces. Por ejemplo $\pi \neq \pi_1$ y $\pi \neq \pi_2$. el número de puntos de una recta de π_1 es igual al número de rectas de π, así como al número de rectas de π_2, y el teorema resulta fácilmente.

Corolario 1

Existen al menos tres haces distintos de rectas paralelas.

Demostración

Puesto que el axioma II asegura la existencia de tres puntos A, B y C no alineados en el caso de que A y B lo estuvieran , las rectas $A + B$ y $A + C$ no son paralelas, si no (puesto que contienen a A) serían iguales y C estaría sobre $A + B$. Por la misma razón resultaría que $A + B \neq B + C$ y $A + C \neq B + C$.

Corolario 2

Si f es una de las alineaciones que se postulan en el axioma III respecto a un punto R, entonces para todo par de puntos P y Q del plano se verifica que $P + Q \parallel P^f + Q^f$.

Demostración

Sean P y Q dos puntos distintos cualesquiera del plano, y f la alineación respecto a un punto R, entonces:

1) Si $R \in P + Q$, $R \in P^f + Q^f$, y como $R \in P + P^f$ y $R \in Q + Q^f$, resulta que $P + Q = P^f + Q^f$ y $P+Q \parallel P^f + Q^f$.

2) Si $R \notin P + Q$, entonces como $R \in P + P^f$ y $R \in Q + Q^f$ las rectas $P + P^f$ y $Q + Q^f$ tienen un único punto común R ya que si tuvieran un segundo punto común serían la misma recta y estaríamos en el primer caso. Entonces $P + Q$ y la recta $P^f + Q^f$ son paralelas puesto que si tuvieran un punto común, éste sería fijo y distinto de R, lo que no puede ser.

Corolario 3

Si f es una alineación se verifica que si R es su centro y P y Q dos puntos que intercambia f, existen puntos S y T no en $P + Q$ tales que $P + S \parallel Q + T$ y $P+T \parallel Q+S$ y R, S y T están alineados.

Demostración

Sea S un punto cualquiera del plano no en $P + Q$ y $T = S^f$, entonces resulta que R, S y T están alineados y $P + S \parallel Q + T$ y $P + T \parallel Q + S$ por el corolario 2.

Teorema 4

La alineación que intercambia dos puntos cualesquiera del plano es única.

Demostración

Supongamos dos puntos del plano P y Q tales que

$P \neq Q$ y sean f y f' dos alineaciones distintas de centros R y R' respectivamente que intercambian P y Q. Sea S un punto cualquiera del plano no en $P + Q$. Según el corolario 3, $T = S^f$ y $T' = S^{f'}$ son tales que $P + T \parallel Q + S$ y $P + T' \parallel Q + S$, lo que implica que $P + T \parallel P + T'$ y que $P + T = P + T'$; por otro lado $P + S \parallel Q + T$ y $P + S \parallel Q + T'$, lo que implica que $Q + T = Q + T'$, y puesto que $P+T \neq Q+T$ resulta que $T = T'$, $S^f = S^{f'}$ y $f = f'$.

Teorema 5

Las diagonales de un paralelogramo no son paralelas.

Demostración

Sean A, B, A', B', los vértices de un paralelogramo tal que $A + B \parallel A' + B'$ y $A + B' \parallel A' + B$ y f la alineación que intercambia A y A', cuyo centro R pertenece a $A + A'$ siendo esta última una diagonal. Como $A + B' \parallel A' + B'^f$ y $A' + B' \parallel A + B'^f$, se deduce que $A + B'^f = A + B$ y $A' + B'^f = A' + B$ y entonces $B'^f = B$, y en consecuencia $R \in B + B'$.

Corolario 4

Las diagonales de todos los paralelogramos que tienen una diagonal común a todos ellos se cortan en un mismo punto.

Demostración

Según el teorema 5 el punto de intersección es el centro de la alineación que intercambia los vertices de la diagonal común.

Teorema 6

Si $ABCD$ es un paralelogramo tal que $A + B \parallel D + C$ y $A + D \parallel B + C$, si F es un punto en $A + D$ tal que $B+D \parallel C + F$ (ver fig. 4) , entonces $F = A^j$, siendo j la alineación de centro D.

Demostración

Notemos por L el punto común de las rectas $A + B$ y $C + F$ (no pueden ser paralelas pues si no, existirían dos paralelas a $C + F$ por B); y por K el punto unívocamente determinado tal que $A + K \parallel F + L$ y $F + K \parallel A + L$. Además, sean $M = (A+K)(C+D)$, $N = (F+K)(B+D)$, $R = (D+F)(C+N)$, $S = (B+C)(D+L)$, y $T = (A+D)(B+M)$.

Sea f la alineación que intercambia C y D. Esta alineación intercambia B y F, y L y N (corolario 4) por tanto $C + N \,||\, L + D$. Sea g la alineación que intercambia B y D. Esta alineación intercambia C y A , y L y M, lo que prueba que $D + L \,||\, M + B$. La transformación gf manda C sobre B y N sobre M, y transforma toda recta en otra paralela, ya que f y g tienen esta última propiedad.

De aquí $B + C$ y $M + N$ son rectas fijas por gf. En efecto, para todo punto X de $B + C$, $X + C$ se transforma en una paralela a $X + C$, y como $X^{gf} + C^{gf} = X^{gf} + B$, esta última tiene que ser $B + C$ y $X^{gf} \in B + C$.

Análogamente para $M + N$. Si estas rectas no son paralelas, tendrían un punto común W, y W sería punto fijo de gf. Entonces $W^{gf} = W$ y $W^{g} = W^{f}$, y se seguiría del teorema 4 que $f = g$. Pero esto es imposible pues implicaría que $B = C$. Hemos mostrado que $B + C \,||\, M + N$.

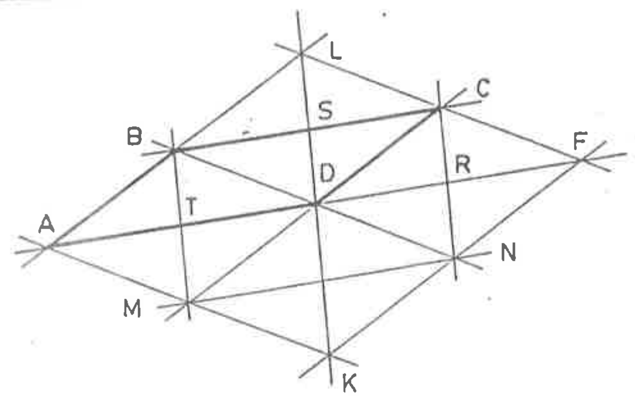


FIG.4

Existe finalmente una alineación h que intercambia D y M, intercambia A y N y además B y K. De aquí, por lo anterior, $B + M \,||\, D + K$. Por tanto $D + L$ y $D + K$ son rectas paralelas y en consecuencia, D, L y K son puntos alineados y $AKFL$ es un paralelogramo cuyas diagonales se encuentran en D, lo que prueba que $F = A^{j}$, siendo j la alineación de centro D.

Teorema 7

Si P y Q son dos puntos distintos y R la alineación que los intercambia. Si P', Q', y R'son puntos alineados y existen tres rectas diferentes paralelas p, q y r tales que $P + P' = p$, $Q + Q' = q$, y $R + R' = r$, entonces R'es el centro de la alineación que intercambia P' y Q'.

Demostración

Se efectuará en una serie de apartados:

1) Supongamos que $P = P'$, $R \neq R'$ y $Q \neq Q'$, $R + R' \,||\, Q + Q'$. Luego existe un solo punto T tal que $T + P' \,||\, R + Q'$ y $T + Q' \,||\, P + R$. Es consecuencia del corolario 4 que T, R y R' están alineados y además que $T + R' \,||\, Q + Q'$, luego R' es el centro de la alineación que intercambia P' y Q', según el teorema 6.(Ver fig. 5).

2) Supongamos ahora que $P + Q \,||\, P' + Q'$, entonces $P+Q'$ tendrá un punto común con $R + R'$que llamaremos M. Por lo demostrado en 1) M es el centro de la alineación que intercambia P y Q', y en consecuencia R' es el centro de la alineación que intercambia P' y Q' .

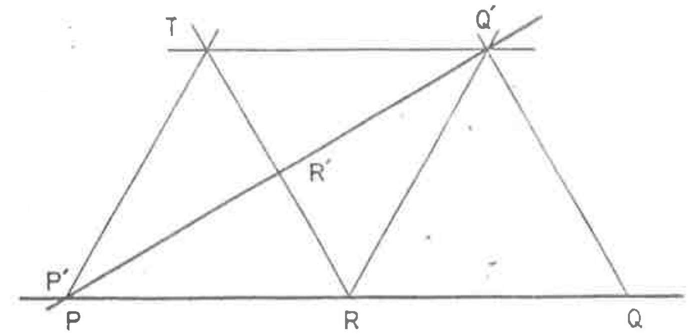


FIG.5

3) Supongamos ahora que $P + Q$ es no paralela a $P' + Q'$, y $P \neq P'$, entonces sea w la recta paralela a $P' + Q'$ que pasa por Q. Entonces el punto wr es centro de la alineación que intercambia wp y Q por 1); y R' es el centro de la alineación que intercambia P' y Q' .

Definición 5

Una aplicación biyectiva t entre los puntos del plano se llama traslación si

a) $X + X^{t} \,||\, Y + Y^{t}$ en el caso de que X e Y no son puntos fijos de t.

b) $X + Y \,||\, X^{t} + Y^{t}$ para $X \neq Y$.

Si la traslación t es distinta de la identidad, entonces las rectas paralelas a las que se refiere la condición a) forman el mismo haz de rectas paralelas.

Es inmediato que una traslación con un punto fijo es la identidad. Asimismo dos traslaciones son iguales si existe un punto que es transformado por ambas traslaciones en el mismo punto. Las traslaciones forman un grupo T. Este grupo es conmutativo si existen traslaciones con diferentes direcciones.

Teorema 8

El producto de dos alineaciones es una traslación, y el producto de tres alineaciones es una alineación.

Demostración

Si f es el producto de un cierto número de alineaciones, entonces se cumple la propiedad b). Si el punto P no es un punto fijo por f, entonces la recta $P + P^f$ es fija por f, ya que es enviada por f a una recta paralela que pasa por P^f.

Si r y s son alineaciones, se sigue del teorema 4 que la existencia de uń punto fijo de rs implica que $r=s$ ya que si $W^{rs}= W$, $W^r = W^s$ y además que $rs = 1$.

Pero si rs no tiene punto fijo, entonces se sigue del resultado del primer párrafo de la demostración que todas las rectas $P + P^{rs}$ son paralelas por ser rectas fijas y no tener puntos fijos, lo que demuestra que rs es una traslación.

Si t es una traslación y r es una alineación respecto a un punto R, y si P es un punto, entonces $P+P^t \,||\, P^{rt} + (P^{rt})^t$, por a) y $P + P^{rt} \,||\, P^t + (P^{rt})^t$, por b). Esto implica que $P^r = P^{trt}$ (pues P^t y P^{rt} son los extremos de la diagonal del paralelogramo y el trnasformado de P por r tiene que ser el otro extremo de la diagonal, es decir, P^{trt}), o también $r = trt$, además $r^2 = 1$; y ahora es fácil demostrar que rt es una alineación. En efecto, rt es biyección pues es composición de biyecciones, y además,

a) Si $r = trt$ se verifica que $r^2 = rtrt = (rt)^2 = 1$, si $r \neq 1$, entonces $rt \neq 1$.

b) Si P y Q son dos puntos distintos, entonces $P + Q \,||\, P^t + Q^t$, como r es una alineación $P^t + Q^t \,||\, P^{rt} + Q^{rt}$, y por tanto, $P + Q \,||\, P^{rt} + Q^{rt}$, con lo que se cumple la condición de que rt transforma puntos alineados en puntos

alineados, y toda recta en una paralela. De aquí se deduce inmediatamente que $R \in P + P^{rt}$ para todo P del plano.

c) Bastará, por fin, calcular el centro de la alineación rt. Para ello, bastará demostrar que P, Q, P^{rt} y Q^{rt} son los vértices de un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en un punto que será el centro de la alineación (ver fig. 6)

Ya hemos visto que $P + Q \,||\, P^{rt} + Q^{rt}$. Veamos que $Q + P^{rt} \,||\, P + Q^{rt}$, con lo que habremos terminado. Pero $Q + P^{rt} \,||\, Q^t + P^{trt} = Q^t + P^r \,||\, Q^{rt} + P^{r^2} = Q^{rt} + P$.

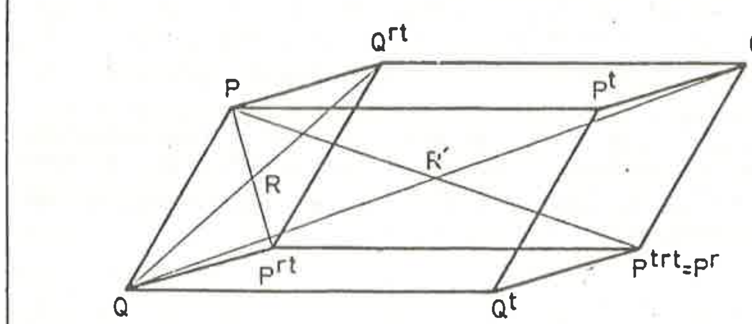


FIG.6

En consecuencia, hemos demostrado también que $t^{-1} = r^{-1}tr$ con lo que se verifica el siguiente hecho

Corolario 5

Si R es el grupo generado por las alineaciones, entonces T es un subgrupo de índice 2 en R, y T es abeliano.

Una consecuiencia inmediata de los teoremas 4 y 8 es el importante resultado siguiente

Corolario 6

Existe para todo par de puntos distintos alineados una alineación que los intercambia si, y sólo si, el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo.

Demostración

1) Si para todo par de puntos distintos alineados existe una alineación que los intercambia, por el teorema 4 esa alineación es única y en consecuencia, existe una única alineación para cada R del plano que tiene R como centro.

Bastará con probar quer para todo par de puntos distintos P y Q del plano existe una traslación t tal que $Q = P^t$. Pero como existe una alineación r tal que $P^r = Q$, si R es el centro de esta alineación, entonces existen sendas alineaciones r_1 y r_2 tales que $R = P^{r_1}$ y $R^{r_2} = Q$ en consecuencia $t = r_2 r_1$ y por tanto, T es simplemente transitivo.

2) Si el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo, sean P y Q dos puntos distintos, sea R el centro de una alineación r. Si $Q = P^r$ hemos terminado. Si $Q = P^r$ entonces $Q + P \parallel Q^r + P^r$, y además $Q + P^r \parallel Q^r + P$. Entonces, por ser el grupo de las traslaciones simplemente transitivo, existe una traslación t que transforma P^r en Q, es decir $P^{rt} = Q$ y, por tanto, $Q^{rt} = P$ y rt es la alineación buscada.

BIBLIOGRAFIA

1) ARTIN, E. "Geometric Algebra". Intesciencie Publishers, Inc. New York (1966)

2) BAER, R. "The fundamental Theorems of elementary Geometry". Transanctions of the American Mathematical Society. Vol. 56 (1944) p. 94.

3) DESCARTES, R. "La geometrie". L' Arefppi. Nantes. (1984).

4) HIGUERA, F. "Construcción axiomática con base en las alineaciones" Tesis Doctoral. UCM. (1989).

5) HILBERT, D. "Grundlangen der Geometrie" 7th. ed. Leipzig and Berlin (1930)

6) LOBACHEWSKI "La teoría de las paralelas"(1866).

7) PEANO, G. "I principi di geometria localmente esposti". (1889).

RESEÑA DE LIBROS

EL SUEÑO DE DESCARTES (El mundo según las Matemáticas), por Philip J. DAVIS y Ruben HERSH. Editado conjuntamente por el M.E.C. y Ed. LABOR, S.A., 1989.

En este libro, de 228 páginas, se tratan cuestiones relacionadas con el impacto que las matemáticas producen al ser utilizadas en la naturaleza o en los múltiples y diversos aspectos de las actividades humanas, es decir, lo que suele llamarse "Matemática Aplicada", en cuyo desarrollo juega hoy un papel fundamental el ordenador.

Los autores formulan preguntas tales como: *¿ Qué es la experiencia informática ?, ¿ De qué modo afecta la informatización del mundo a la calidad física e intelectual de la civilización ?, ¿ Cual ha sido la influencia del ordenador a la hora de acercar formulaciones matemáticas abstractas a las aplicaciones prácticas ?, ¿ Es posible matematizarlo todo ?, ¿ Habrá algo en el mundo que no pueda jamás llegar a ser materia de una teoría matemática ? ...*

Otras preguntas entrarían en lo que se podría llamar filosofía de la informática: *¿ Qué hace veraz a un cómputo ? ¿ Por qué se ha de creer lo que diga un ordenador ?, ¿ Qué hace que sea bueno o malo, bello o feo ?, ¿ Por qué son utilizadas las matemáticas ? ...*

De estos y otros apasionantes temas hablan los autores a lo largo del libro, que es una colección de ensayos independientes, inspirados en artículos, conferencias o entrevistas. Su lectura requiere diversos niveles de conocimientos matemáticos que van desde el popular al profesional, pero carece de tecnicismos, por lo que resulta amena y fácil.

Los autores, en el prefacio, animan a los lectores a hojear el libro, al azar, y leer aquellos párrafos que despierten su interés. Esta es también nuestra recomendación.

Damos a continuación los títulos de los diferentes capítulos y un breve resumen de su contenidos:

1. **Este mundo matematizado.**
   El sueño de Descartes. Los límites de las matemáticas. ¿ Estaremos axfisiándonos en cifras ?
2. **La tiranía social de los números**
   Matemáticas y retórica. Las matemáticas y la política social. La informatización del amor.
3. **Cognición e informática.**
   Las funciones descriptiva, predictiva y prescriptiva de las matemáticas aplicadas. Tres significados de informática. ¿ Qué finalidad tiene el cálculo científico ?
4. **Perspectivas a través del tiempo.**
   Del tiempo y las matemáticas. La irrazonable eficacia de los ordenadores.
5. **Matemáticas y ética.**
   La matemática platónica traba conocimiento con la filosofía platónica de la religión: una metáfora ética. El ordenador piensa. Una interpretación al modo medieval. Las matemáticas y el fín del mundo.
6. **Significados personales.**
   Las matemáticas y la realidad impuesta. La abstracción matemática.
7. **Colofón**

La bibliografía que ofrece el libro es extensísima.

F. L. M.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA FASE PRIMERA DE LA VIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PROBLEMA 1º:

Sin resolver la ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$,expresar la suma de los cubos de sus raices en función de los coeficientes a , b y c .

PROBLEMA 2º:

Sean dos ángulos α y β tales que $0 < \alpha < \beta < \pi/2$; demostrar que: $\dfrac{\text{sen } \alpha}{\alpha} > \dfrac{\text{sen } \beta}{\beta}$ $\dfrac{\text{tg } \alpha}{\alpha} < \dfrac{\text{tg } \beta}{\beta}$

PROBLEMA 3º:

Demostrar que si las longitudes a , b , c de los lados de un triángulo satisfacen a la condición $a^2 = b^2 + bc$, el ángulo A opuesto a a es doble del ángulo B , opuesto al b .

PROBLEMA 4º:

Determinar el conjunto de los numeros n tales que el número

$$7^n . n + 4n + 1$$

sea divisible por 8 .

PROBLEMA 5º:

Si la descomposición en factores primos de un número n es $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$, se llama *indicador* de ese número y se representa con $\phi(n)$, el producto $a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)c^{\gamma-1}(c-1)\ldots$.

Determinar todos los números impares cuyo indicador sea el mismo que el de 1990.

PROBLEMA 6º:

En una circunferencia se consideran n puntos $P_1,\ldots,P_n$, que la dividen en n arcos iguales: P_1P_2 , P_2P_3 , ..., $P_{n-1}P_n$, P_nP_1 . Fijado un número natural r , $r < n$, y partiendo de P_1 , se trazan cuerdas: P_1P_{1+r} , $P_{1+r}P_{1+2r}$, $P_{1+2r}P_{1+3r}$, ... (donde $P_{j+n} = P_j$ para cualquier número natural j). Razonar cual será el número de cuerdas que han de ser trazadas para volver al punto P_1 , por primera vez. Después, calcularlo para $n = 360$ y $r = 42$.

PROBLEMA 7º:

Hallar tres números naturales en progresión aritmética de razón 2 , tales que la suma de sus cuadrados sea un número de cuatro cifras iguales.

PROBLEMA 8º:

Sea ABC un triángulo arbitrario. Las bisectrices exteriores en A y B se cortan en C' . Sean a' , b' , c , los lados del triángulo ABC' , opuestos respectivamente a A , B y C' .

Expresar el cociente b/b' en función de las razones trigonométricas de A , B y C .

- - - - - - - - -

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 3º (Boletín nº 19)

Sea f la función cuyo dominio es el conjunto de los enteros estrictamente positivos definida por

$$f(1) = 1 \quad , \quad f(3) = 3 \quad , \quad f(2n) = f(n) \quad ,$$

$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n) \quad , \quad f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n) \quad ,$$

para todo n .

Determine el número de enteros estrictamente positivos n , menores o iguales que 1988, tales que $f(n) = n$.

Solución:

Vamos a demostrar que la imagen de un número escrito en base 2 es otro número, escrito en base 2, con las cifras colocadas en orden inverso. Veamos algunos casos:

$p = 1$: $f(1) = f(1_{(2}) = 1 = 1_{(2}$

$p = 2$: $f(2) = f(10_{(2}) = 1 = 01_{(2}$

$f(3) = f(11_{(2}) = 3 = 11_{(2}$

$p = 3$: $f(4) = f(100_{(2}) = f(2) = 1 = 001_{(2}$

$f(5) = f(101_{(2}) = 2f(3) - f(1) = 5 = 101_{(2}$

$f(6) = f(110_{(2}) = f(3) = 3 = 011_{(2}$

$f(7) = f(111_{(2}) = f(4) = 1 = 0001_{(2}$

$p = 4$: $f(8) = f(1000_{(2}) = f(4) = 1 = 0001_{(2}$

$f(9) = f(1001_{(2}) = 2f(5) - f(2) = 9 = 1001_{(2}$

....

Sea p el número de cifras binarias. Lo haremos por inducción: Supongamos que se verifica para todo número de cifras binarias inferior a p . Sea $1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p(2}$ un número de p cifras binarias ($\epsilon_i \in \{0,1\}$). Distinguiremos tres casos:

1º) La última cifra binaria es cero; $f(1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-1}0_{(2}) = f(10_{(2} \cdot 1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-1(2}) = f(1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-1}) =$ (por la hipótesis de inducción) $= \epsilon_{p-1}\epsilon_{p-2}\ldots\epsilon_3\epsilon_21_{(2}$.

2º) Las dos últimas cifras binarias son 01 ; entonces

$f(1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2}01_{(2)}) = f(100_{(2)} \cdot 1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2(2)} + 1_{(2)}) =$

$= 10_{(2)} \cdot f(10_{(2)} \cdot 1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2(2)} + 1_{(2)}) + f(1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2(2)}) =$

$= 10_{(2)} \cdot f(1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2}1_{(2)}) - f(1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2(2)}) =$

$= 10_{(2)} \cdot 1\epsilon_{p-2}\ldots\epsilon_3\epsilon_2 1_{(2)} - \epsilon_{p-2}\epsilon_{p-3}\ldots\epsilon_2 1_{(2)} =$

$= 1\epsilon_{p-2}\ldots\epsilon_3\epsilon_2 10_{(2)} - \epsilon_{p-2}\epsilon_{p-3}\ldots\epsilon_2 1_{(2)} =$

$= 2^{p-1} + \epsilon_{p-2}2^{p-2} + \epsilon_{p-3}2^{p-3} + \ldots + \epsilon_2 2^2 + 1.2$

$\qquad - (\epsilon_{p-2}2^{p-3} + \epsilon_{p-3}2^{p-4} + \ldots + \epsilon_2.2 + 1) =$

$= 2^{p-1}+\epsilon_{p-2}(2^{p-2}-2^{p-3})+\epsilon_{p-3}(2^{p-3}-2^{p-4})+\ldots+\epsilon_2(2^2-2)+2-1 =$

$= 2^{p-1} + \epsilon_{p-2}2^{p-3} + \epsilon_{p-3}2^{p-4} + \ldots + \epsilon_2.2 + 1 =$

$= 10\epsilon_{p-2}\epsilon_{p-3}\ldots\epsilon_2 1_{(2)}$, que es lo que queríamos ver.

3º) Las dos últimas cifras binarias son 11 :

$f(1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2}11_{(2)}) = f(100_{(2)} \cdot 1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2} + 11_{(2)}) =$

$= 11_{(2)} \cdot f(10_{(2)} \cdot 1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2}) + 10_{(2)} \cdot f(1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2}) =$

$= 11_{(2)} \cdot f(1\epsilon_2\epsilon_3\ldots 1_{(2)}) - 10_{(2)} \cdot f(1\epsilon_2\epsilon_3\ldots\epsilon_{p-2(2)}) =$

$= 11_{(2)} \cdot 1\epsilon_{p-2}\ldots\epsilon_3\epsilon_2 1_{(2)} - 10_{(2)} \cdot \epsilon_{p-2}\ldots\epsilon_3\epsilon_2 1_{(2)} =$

$= 1\epsilon_{p-2}\ldots\epsilon_3\epsilon_2 10_{(2)} + 1\epsilon_{p-2}\ldots\epsilon_3\epsilon_2 1_{(2)} - \epsilon_{p-2}\ldots\epsilon_3\epsilon_2 10_{(2)} -$

$= (2^{p-1} + \epsilon_{p-2}2^{p-2} + \ldots + \epsilon_3 2^3 + \epsilon_2 2^2 + 1.2) +$

$+ (2^{p-2} + \epsilon_{p-2}2^{p-3} + \ldots + \epsilon_3 2^2 + \epsilon_2 2^2 + 1)$

$\qquad - (\epsilon_{p-2}2^{p-2} + \ldots + \epsilon_3 2^3 + \epsilon_2 2^2 + 1.2) =$

$= 2^{p-1} + 2^{p-2} + \epsilon_{p-2}.2^{p-3} + \ldots + \epsilon_3.2^2 + \epsilon_2.2 + 1 =$

$= 11\epsilon_{p-2}\ldots\epsilon_3\epsilon_2 1_{(2)}$.

Con esto queda probado que la imagen de un número escrito en base 2, es otro número escrito con las mismas cifras en orden inverso, también en base 2 .

Los números que verifican las condiciones del enunciado ($f(n) = n \leq 1988$) serán los números capicúas escritos en base 2, menores que $1988 = 11111000100_{(2)}$ (tiene 11 cifras).

Cálculo del número NC(p) de números capicúas, escritos en base 2, de p cifras ($p \leq 10$):

1^{er} caso: p = par ; $NC(p) = \frac{1}{2}VR_{p/2,2} = 2^{p/2}/2 = 2^{(p-2)/2}$.

2º caso: p = impar; serán los mismos de antes multiplicados por dos, pues en el centro puedo poner el 0 ó el 1 ; es decir, NC(2q+1) = 2.NC(2q) .

Así: Nº de números capicúas de 10 cifras o menos= $\sum_{p=1}^{10} NC(p) =$

$= 1 + 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^3 + 2^4 + 2^4 =$

= 2(1+2+4+8+16) = 62. El número de capicúas de 11 cifras menores que $11111000100_{(2)}$ = nº de capicúas de 11 cifras - 2 = $2^5 - 2 = 30$ (los dos mayores que $11111000100_{(2)}$ son: $11111011111_{(2)}$ y $11111111111_{(2)}$). El número de números menores que 1988 que cumplen f(n) = n es 62 + 30 = 92 .

Miguel Angel Cabezón Ochoa

- - - - - - - - - -

PROBLEMA 4º (Boletín nº 19)

Demuestre que el conjunto de los números reales *x* que satisfacen

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

es unión de intervalos disjuntos cuyas longitudes suman 1988

Solución:

Haciendo F(x) = (x-2)(x-3)...(x-70)+2(x-1)(x-3)...(x-70)+ + ... +k(x-1)...(x-(k-1))(x-(k+1))...(x-70)+ ...

... +70(x-1)(x-2)...(x-69) , y poniendo P(x) = (x-k), la condición del enunciado se escribe

$F(x)/P(x) - 5/4 \geq 0$, o bien $[4F(x) - 5P(x)]P(x) \geq 0$.

La ecuación que se obtiene tomando sólo el signo igual, admite evidentemente las raices $x_i = i$ ($i = 1,2,\ldots,70$). Suprimidas estas raices, la ecuación que resulta:

$$\phi(x) = 4F(x) - 5P(x) = 0$$

que es de grado 70, admite una raiz en cada uno de los intervalos (1,2), (2,3) , ... , (69,70) y (70,+∞), ya que:

Para $x = 1$, $\phi(1) = 4F(1)-5P(1) = 4(-1)(-2)\dots(-69) - 0 < 0$,

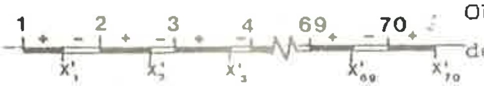
Para $x = 2$, $\phi(2) = 4.2.1.(-1)\dots(-68) - 0 > 0$,

....

Para $x = 70$, $\phi(70) = 4.70.69.\dots.2.1 - 0 > 0$,

Para $x \to +\infty$, $\lim \phi(x) = -\infty$, puesto que el coeficiente del término de mayor grado es negativo.

Luego, como $\phi(x)$ toma valores de signo contrario en los extremos de cada uno de los intervalos abiertos (1,2),(2,3), ...,(69,70) y (70+∞), en cada uno admitirá un número impar de raices; como el grado es 70, admite una y sólo una raiz real en cada uno de los intervalos.



Observando la figura, el conjunto de valores de x que verifican la inecuación es la unión de los intervalos cerrados (y disjuntos) señalados en la figura, puesto que es donde $\phi(x).P(x) > 0$.

La suma de las longitudes de dichos intervalos es (véase figura) $L = (x'_1-1)+(x'_2-2)+(x'_3-3)+\dots+(x'_{69}-69)+(x'_{70}-70) =$ $= \Sigma x'_i - (1+2+3+\dots+70) = \Sigma x'_i - S$.

Pero $\Sigma x'_i$ es la suma de las raices de la ecuación $\phi(x)=0$. Recordando las fórmulas de Cardano, la suma de las raices de la ecuación $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n = 0$, es $s = -a_1/a_0$. Basta obtener en la ecuación $\phi(x) = 0$, los coeficientes de los términos en x^{70} y en x^{69} . El de x^{70} es, evidentemente, -5 ; el de x^{69} es $4(1+2+\dots+70)-5(-1-2-\dots-70) = 4S + 5S = 9S$.

Luego la suma de las raices es $\sigma = - 9S/(-5) = 9S/5$ y como $S = 1+2+\dots+70 = 2485$, la suma de las longitudes de los intervalos será $l = 9S/5 - S = 4S/5 = 1988$, c.d.d.

J.V. García Sestafe (Madrid)

Otras soluciones de: F. O. Alonso y de M.A. Cabezón Ochoa.

PROBLEMA 1 (Boletín nº 20)

Sea n un número par divisible por un número primo mayor que su raiz cuadrada. Probar que ni n ni n^3 pueden expresarse como producto de dos impares consecutivos aumentando en una unidad pero tanto n^2 y n^4 se puede expresar de esa forma.

Solución

Veamos en qué casos la ecuación

$$(2K + 1).(2K - 1) + 1 = n^t$$

tiene solución, siendo $K,t \in N$ y n el número dado:

$$4K^2 - 1 + 1 = n^t \iff 4K^2 = n^t \iff 2K = \sqrt{n^t}$$

Casos:

a) Si t es par, t es de la forma $t = 2a$ ($a \in N$) y por tanto

$$2K = n^{2a/2} \iff 2K = n^a$$

teniendo la ecuación solución natural porque, al ser n un número par, es divisible por 2.

b) Si t es impar resulta $2K = \sqrt{n^{2a+1}}$

$$2K = \sqrt{n^{2a}\, n}$$

$$2K = n^a \, . \, \sqrt{n} \qquad (1)$$

Pero sabemos que n es divisible por un número primo p tal que $\sqrt{n} < p$, luego $n < p^2$; esto quiere decir que en la descomposición factorial de n no puede figurar el número primo más de una vez.

Por tanto deducimos que $\sqrt{n}$ es irracional. Esto nos lleva a ver que la ecuación (1) no es posible pues un número natural no puede ser expresado de forma irracional.

Así probamos, aunque de forma más generalizada, lo pedido en el enunciado.

Marco Castrillón López
(I.B. "Avda. de los Toreros" Madrid)

Recibidas otras soluciones de: F. Alvarez H. (Madrid), Amparo Ortega (Valencia) y J.V. García Sestafe (Madrid).

PROBLEMA 3 (Boletín nº 20)

Se disponen los números enteros del 1 al n^2 formando una matriz cuadrada en esta forma

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & n^2 \end{pmatrix}\right\}$$

Se escoge arbitrariamente un número de la matriz, suprimiendo después la fila y la columna donde está; en la matriz que queda se repite el proceso, continuando así hasta que queda un solo número. Hallar la suma de este último número y de todos los escogidos sucesivamente. Probar que esta suma no depende de las elecciones realizadas.

Solución

Los números de la matriz puede escribirse también de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} n \\ \text{filas} \end{array}\left\{\underbrace{\begin{array}{ccccc} (0n)+1 & (0n)+2 & (0n)+3 & \dots & (0n)+n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & n+n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 2n+n \\ \vdots & & & & \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & (n-1)n+n \end{array}}_{n \text{ columnas}}\right.$$

La suma que se debe hallar constará de n sumandos, sin que ninguno de ellos pertenezca a la fila o columna de algún otro, por lo qué habrá uno, y sólo uno, de cada fila o columna.

La suma será, por lo tanto, la de los n primeros términos de dos progresiones aritméticas: una, de diferencia n y primer término 0; la otra, de diferencia 1 y primer término 1.

Suma de los n primeros términos de la primera progresión

$$S_n = \frac{0 + (n-1).n}{2} . n = \frac{n^2(n-1)}{2}$$

Suma de los n primeros términos de la segunda progresión

$$S'_n = \frac{1+n}{2} . n = \frac{(n+1)\ n}{2}$$

Suma pedida:

$$S = S_n + S'_n = \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{(n+1)\ n}{2} = \boxed{\frac{n^3 + n}{2}}$$

Juan Lahoz García
(3º de BUP, I.B." Avda de los Toreros" Madrid)

Recibidas otras soluciones de: Amparo Ortega (Valencia), J.V. García Sestafe (Madrid) y F. Alvarez H. (Madrid).

Problema 5° (Boletín nº 20)

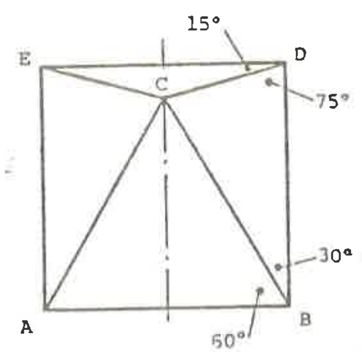
En el interior de un cuadrado ABDE se toma el punto C tal que CDE sea un triángulo isósceles con ángulos de 15°en D y E. ¿Que clase de triángulo es ABC ? Justifica la respuesta.

Solución

Respuesta: El triángulo ABC es equilátero.

Justificación de la respuesta: Puesto que todos los cuadrados son semejantes, basta demostrar que:

"Si en el interior de cualquier cuadrado ABDE se construye el triángulo equilátero ABC , el punto C cumple las condiciones del enunciado ".



Efectivamente:

1°. El vértice C del triángulo equilátero pertenece a la mediatriz de AB y ED , luego el triángulo ECD es isósceles.

2°. El triángulo CBD también es isósceles por construcción (AB = CB = DB) y su ángulo en B es de 30° (complementario de uno de los del triángulo equilátero), luego, sus otros dos ángulos en C y D son de 75°.

3°. Lo anterior evidencia que el triángulo isósceles ECD tiene sus ángulos iguales en D y E de 15° (pues el de vértice D es complementario de uno de los 75° del triángulo CBD) , c. s. q. d.

D. Corbella Barrios y F. Quesada Cobo (Madrid)

Recibidas otras soluciones de: José Alvaro Domínguez (3º de BUP; I.B. "Avda. de los Toreros"), Mercedes Rico (Madrid), F. Alvarez H. (Madrid) y J.V. García Sestafe (Madrid).

PROBLEMA 7º (Boletín nº 20)

Calcular el valor máximo de la función $f(x) = \prod_{k=0}^{7} |x-k|$ en el intervalo $[3 , 4]$.

Solución (procedimiento a):

Para todo $x \in [3,4]$,

$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(4-x)(5-x)(6-x)(7-x)$; haciendo el cambio $x = a + 7/2$, con $a \in (-½ , ½)$, resulta: $f(a+7/2) =$

$$= \frac{(7+2a)(5+2a)(3+2a)(1+2a)(1-2a)(3-2a)(5-2a)(7-2a)}{2^8} =$$

$$= \frac{(7^2-4a^2)(5^2-4a^2)(3^2-4a^2)(1-4a^2)}{256}$$

Como todos estos paréntesis son positivos, el valor máximo de la expresión anterior se obtiene para $4a^2 = 0$, $a = 0$. Dicho valor es $(49 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 1)/2^8 = \boxed{11025/256}$.

Solución (procedimiento b):

Restringiendo el estudio de la funcion f al intervalo [3,4], que es el que nos interesa, podemos escribir lo siguiente:

$f(x) = (x-0)(x-1)(x-2)(x-3)(4-x)(5-x)(6-x)(7-x)$;

$Lf(x)=L(x-0)+L(x-1)+L(x-2)+L(x-3)+L(4-x)+L(5-x)+L(6-x)+L(7-x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-0} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-7}$$

Llamando $M(x)$ al 2º miembro, resulta $f'(x) = M(x)f(x)$;

Extremos relativos: $f'(x) = 0$ da $M(x)f(x) = 0$;

Si ha de ser $f(x)=0$, no hay solución en $(3,4)$;

Si $M(x) = 0$, se ve claramente que la única solución en $(3 , 4)$ es $x = 3,5$:

$x \in (3 , 3,5)$, $M(x)>0$ y $f(x)>0$, $f'(x)>0$, f creciente.

$x \in (3,5 , 4)$, $M(x)<0$ y $f(x)>0$, $f'(x)<0$, f decreciente.

En definitiva el valor máximo se obtiene para $x = 3,5 = 7/2$ y es $7.5.3.1.1.3.5.7/2^8 = \boxed{11025/256}$.

Solución (procedimiento c):

Al observar la función $f(x) = \prod_{k=0}^{7} |x-k| = |\prod_{k=0}^{7} (x-k)| =$ $= |(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)| = |g(x)|$, vemos que para todo $x \in (3, 4)$, la expresión que hemos llamado $g(x)$ consta de 4 factores positivos y 4 negativos, por lo que para todo $x \in [3, 4]$ es $g(x) \geq 0$. Esto nos permite afirmar que para todo $x \in [3, 4]$ es $f(x) = g(x)$. El problema equivale, por tanto, a hallar el valor máximo de $g(x)$ en $[3, 4]$.

Consideremos los intervalos $[k, k+1]$ $(k = 0,1,2,3,4,5,6)$. Como en cada uno de ellos se cumplen evidentemente (g es polinómica y $g(k) = g(k+1) = 0$) las hipótesis del teorema de Rolle, la función g' tiene que anularse, al menos una vez, en cada uno de los 7 intervalos; pero como $g'(x)$ es una función polinomica de grado 7, no puede tener más de 7 raices, por lo que g' se anula una y sólo una vez en cada uno de los intervalos. Ahora bien, si g' sólo se anula para un valor de $(3, 4)$, éste tiene que ser 3,5 , pues la gráfica de g es simetrica respecto a la recta $x = 3,5$ (ya que $g(3,5+h) = g(3,5-h)$). Como además $g(3) = g(4) = 0$ y $g(x)>0$, para todo $x \in (3, 4)$, necesariamente ha de tratarse de un máximo. El valor pedido es, en definitiva, $f(3,5) = \boxed{11025/256}$.

Victor Manuel Sánchez, Oscar Castillo,
Juan Lahoz y Marco Castrillón
I.B. "Avenida de los Toreros" Madrid
Recibidas otras soluciones de F. Alvarez H.
y de J. V. García Sestafe

- - - - - - - - - -

PROBLEMA 109 (Boletín nº 20)

Calcular

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}\ dx}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}$$

Solucion:

La inspección de las gráficas de $\ln(9-x)$ y $\ln(3+x)$ aconseja trasladar el problema: $x=t+3$; $dx=dt$

Queda $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\ln(6-t)}}{\sqrt{\ln(6-t)}+\sqrt{\ln(6+t)}}\,dt$

Que los radicales conmuten unos con otros al cambiar t por -t, quedando el denominador D invariable lleva a verificar la imparidad de

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{\ln(6-t)}}{\sqrt{\ln(6-t)}+\sqrt{\ln(6+t)}} - \frac{1}{2}$$

En efecto:

$\varphi(t)+\varphi(-t) = \frac{\sqrt{\ln(6-t)}}{D} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\ln(6+t)}}{D} - \frac{1}{2} = \frac{D}{D} - 1 = 0$, con lo cual $\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt = 0$.

Ahora bien,

$$0 = \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\ln(6-t)}}{\sqrt{\ln(6-t)}+\sqrt{\ln(6+t)}}\,dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dt$$

como la última integral es 1, se sigue que también es 1 la integral propuesta.

F. Alvarez H. (Madrid)
Recibidas otras soluciones de J. V. García Sestafe
y Victor M. Sánchez González

PROBLEMA 1º (Boletín nº 21)

El programa de una asignatura consta de *n* preguntas y el examen de la misma consiste en la exposición de una de esas preguntas, sacada al azar. Un alumno se sabe sólamente una pregunta, pero se le permite realizar hasta *n* examenes. Expresar en función de *n* la probabilidad que tiene de aprobar. ¿ Crece o decrece al aumentar *n* ? Determinar su límite cuando *n* tiende a infinito. ¿ Cual es la máxima cota inferior de las probabilidades obtenidas para todos los valores de *n* ?

Solución:

La probabilidad de aprobar en el primer examen es $1/n$; la de aprobar en el segundo, habiendo suspendido el primero es $(1 - 1/n).1/n$; la de aprobar en el n-ésimo, habiendo suspendido los anteriores, es $(1 - 1/n)^{n-1}.1/n$. La probabilidad de haber aprobado la asignatura de n preguntas es

$$P_n = \frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \dots + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

La sucesión $a_n = (1-\frac{1}{n})^n$ es creciente; en efecto, como

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n^3} + \frac{(n+1)(n+2)}{6n^5} + \dots > 1 + \frac{1}{n} ,$$

se tiene $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} > 1+\frac{1}{n}$ $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(1+n)}$

de donde $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(1+n)} \Longrightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

esto es, a_n es creciente y como $a_n < 1$, P_n es decreciente.

Si $n \to \infty$, $\lim P_n = 1 - e^{-1} = 1 - 1/e$,

y como P_n es constantemente decreciente, $1 - 1/e$ será el valor de la máxima cota inferior de todas las probabilidades.

J.V. García Sestafe (Madrid)

PROBLEMA 3º (Boletín nº 21)

Demostrar que $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot \dots \cdot\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$

Solución:

Consideremos $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100}$

$B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\dots\cdot\frac{98}{99}$

y las equivalencias $a/b < (a+1)/(b+1) \iff ab+a<ba+b \iff a < b$. Según ésto, $AB = 1/100$ y $A < B$, luego $A < 1/(100A)$; $100A^2 < 1$; $A < 1/10$.

Por otra parte, comparando las expresiones:

$$A = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{8}\cdot \dots \cdot\frac{97}{96}\cdot\frac{99}{98}\cdot\frac{1}{100}$$

$$C = \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot \dots \cdot\frac{98}{97}\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{1}{100} ,$$

vemos que $3/2 > 4/3$, $5/4 > 6/5$, $7/6 > 8/7$, ... , $99/98 > 100/99$ y $1/100 \geq 1/100$, lo que nos permite afirmar que $A > C$. Como además se cumple que $A.C = 1/200$, resulta en definitiva que $a > 1/(200A)$, es decir, $A^2 > 1/200$, o sea $A > \frac{1}{10\sqrt{2}}$ c. d. d.

Victor Manuel Sánchez (Madrid)

Recibida otra solución de J.V. García Sestafe (Madrid)

PROBLEMA 6º (Boletín nº 21)

Demostrar que dados arbitrariamente siete números reales se cumple siempre la siguiente propiedad:

"Se pueden encontrar dos de ellos, a *y* b *tales que*

$$\sqrt{3}\,|a - b| < |1 + ab| \quad ."$$

Poner un ejemplo de seis números reales que no tengan esa propiedad.

Damos dos soluciones de este problema. Primera:

Designemos con J al intervalo abierto $(-\pi/2\ ,\ \pi/2)$, cuyos puntos se pueden identificar como los de una semicircunferencia, de modo que el número de radianes de un arco de ésta sea el valor absolúto de la diferencia de los números de J que representan sus extremos.

Consideremos la aplicación biyectiva entre J y $\mathbf{R}$, $\phi \leftrightarrow x$ dada por $x = \operatorname{tg} \phi$. Si $a, b \in \mathbf{R}$, y sus imágenes en J son α y β , la condición $\sqrt{3}\,|a-b| < |1+ab|$ equivale a la relación entre las imágenes $\sqrt{3}\,|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta| < |1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta|$ que es lo mismo que $\sqrt{3}\,|\operatorname{tg}(\alpha - \beta)| < 1$, o sea, $|\operatorname{tg}(\alpha - \beta)| < \operatorname{tg}(\pi/6)$, es decir, $|\alpha - \beta| < \pi/6$.

Por tanto, equivalente a lo que se trata de probar es que: "*dados 7 puntos en J, siempre se pueden encontrar dos de ellos ,* α *y* β *, tales que* $|\alpha - \beta| < \pi/6$ " pero esto es evidente, pues los 7 puntos dividen a la semicircunferencia en 8 partes, y los radianes de las 6 que quedan entre dos de esos puntos, sumarán menos de π , por lo que alguna de ellas deberá de tener menos de $\pi/6$ radianes. Queda probado lo deseado.

Si ϕ cumple $\pi/6 < \phi < \pi/5$, dos números escogidos entre los 6 de J : $-5\phi/2$, $-3\phi/2$, $-\phi/2$, $\phi/2$, $3\phi/2$, $5\phi/2$, difieren siempre en $\pi/5$ o más o sea en más de $\pi/6$. Por

tanto, el ejemplo pedido puede formarse con los valores de las tangentes de esos números.

Argearge

Recibida otra solucion parecida de J.V. García Sestafe

Segunda solución:

Dados 7 números reales, al menos cuatro de ellos son no negativos o al menos cuatro de ellos son no positivos. Haremos la demostración para al menos cuatro no negativos; esta demostración servirá *mutatis mutandi*, para cuatro no positivos, con lo que quedará terminada la demostración.

Sea $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$, con $a_i \in \mathbf{R}$, tal que ninguna pareja de ellos cumpla la condición del enunciado. Se tendrá: $a_2 = a_1 + h$, $h \geqslant 0$ y $\sqrt{3}\,|a_2 - a_1| \geqslant |1 + a_1a_2|$; $\sqrt{3}\,h \geqslant 1 + a_1^2 + a_1h$; $(\sqrt{3} - a_1)h \geqslant 1 + a_1^2$, luego $a_1 < \sqrt{3}$ y $h \geqslant (1+a_1^2)/(\sqrt{3}-a_1)$. Como $(\sqrt{3}\,|a_3 - a_2| \geqslant |1 + a_2a_3|$, se tendrá $a_2 < \sqrt{3}$, luego $a_1 + (1+a_1^2)/(\sqrt{3}-a_1) \leqslant a_1 + h = a_2 < \sqrt{3}$; $a_1\sqrt{3} - a_1^2 + 1 + a_1^2 < 3 - \sqrt{3}a_1$; $2a_1\sqrt{3} < 2$; $a_1 < 1/\sqrt{3}$.

Si hacemos lo mismo con a_2, a_3, a_4, se tendrá $a_2 < 1/\sqrt{3}$, luego $a_2 - a_1 < 1/\sqrt{3}$, pero $a_2 - a_1 = h > (1+a_1^2)/(\sqrt{3}-a_1)$ y por tanto $1/\sqrt{3} > (1+a_1^2)/(\sqrt{3}-a_1)$; $\sqrt{3} - a_1 > \sqrt{3} + \sqrt{3}a_1^2$; $0 > a_1 + \sqrt{3}a_1^2$, que es una contradicción; por tanto, alguna pareja deberá cumplir la condición del enunciado, c. q. d.

Un ejemplo de seis números que no tienen la propiedad citada es:

$$-2\sqrt{3}\ ,\ -5\sqrt{3}/9\ ,\ -\sqrt{3}/7\ ,\ \sqrt{3}/6\ ,\ 3\sqrt{3}/5 \ \text{ y } \ 7\sqrt{3}/3\ .$$

María Jesús Vilar Rubio

(Valdecilla-Solares. Cantabria)

- - - - - - - - - - - -

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTROS BOLETINES Y DE AQUELLOS PARA LOS QUE TODAVIA NO SE HAN RECIBIDO SOLUCIONES (INDICADOS CON XX)

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	obs.
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2 1984	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	6	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finlª)	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-85(Bogotá)	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2 1986	18	19	20	18	19	19	-	-	-	-	C
	Varios	-	-	-	-	-	-	17	17	11	17	C
10	China y Austª	20	15	21	20	15	{20 21}	20	23	21	-	C
11	OME-f1 1986	13	14	14	14	14	23	20	15/	20	12	C
	OMI-86(Varsoª)	XX	20	12	21	-	-	-	-	-	-	
12	OIM-87(Urug.)	16	14	14	17	15	17	-	-	-	-	C
	OME-f1-Extremª	-	-	-	-	-	-	15	15	15	21	C
13	OME-f2 1987	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1 1987	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2 1988	XX	23	23	XX	23	23	-	-	-	-	
18	OIM-Perú 1988	23	23	23	23	XX	XX	-	-	-	-	
19	OMI-88(Australia)	23	XX	24	24	23	XX	-	-	-	-	
20	OME-f1 (1988)	24	XX	24	XX	24	XX	24	XX	XX	24	
21	OME-f2 (1989)/	24	XX	24	XX	XX	24 /	XX	XX	XX	XX	
	OIM-89 (Cuba)	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
22	OMI-89 (RFA)/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	oposiciones	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	
23	oposiciones	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
24	OME-f1 (1990)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OME = Olimpiada Matemática Española - fase 1ª o 2ª.