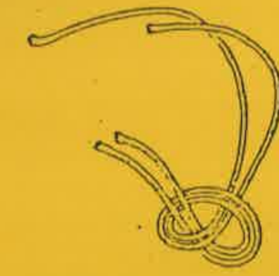
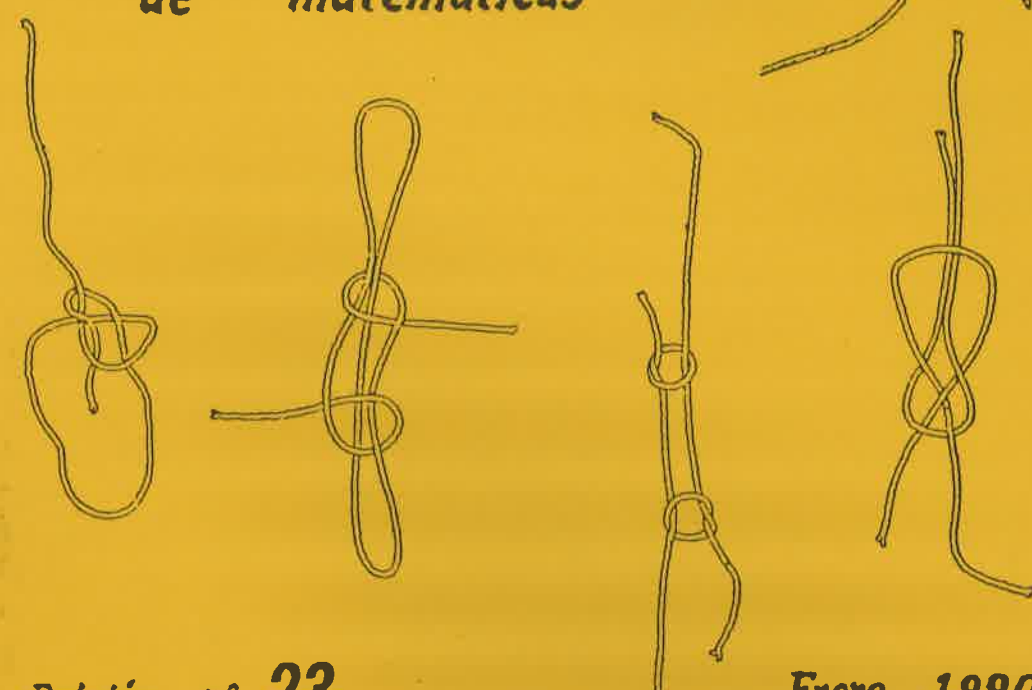




sociedad castellana

Puig Adam


de profesores

de matemáticas



Boletín nº 23

Enero 1990

B O L E T Í N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Enero de 1990 nº 23 (1989-90)

- Toda la correspondencia para la Sociedad deberá dirigirse al

Apartado nº 9479

28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

- La portada presenta una colección de nudos. Como es sabido, el estudio de éstos ha dado lugar a una interesante rama de la Topología.

INDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Francisco Lorenzo Miranda

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Amador Domingo Escribano (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Vicesecretario: Francisco Quesada Cobo

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Jesús Begoña Aina

LA QUINTA DEL 45 EN LA "PUIG ADAM"

Supongo que no pocos de los socios de la "Puig Adam" pertenecen a la *"quinta del 45"* y seguramente que a algunos de ellos, aunque estén muy próximos a mi en el afecto, no los puedo citar nominalmente, por no disponer de datos cronológicos. Sólamente me refiero a los Profesores Lorenzo Miranda y Fernández Biarge, por su íntima relación con la Sociedad (Presidente y ex-presidente).

Prof. Francisco Lorenzo Miranda.

Nació en Boiro (La Coruña), el 21 de Julio de 1924. Estudió el Bachillerato en el Instituto "Arzobispo Gelmírez" de Santiago de Compostela, durante los años 1938 a 1944. Se licenció en Ciencias Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid, el año 1949. Fué profesor auxiliar de Análisis Matemático de la citada Universidad desde 1950 a 1961. Durante los cursos 1961-62 y 1962-63, catedrático, *por oposición* del Instituto "La Rábida" de Huelva. *También por oposición*, catedrático del Instituto "Cervantes" de Madrid, desde el 1 de Julio de 1963 hasta el 30 de Septiembre de 1989, fecha esta última de su jubilación ***anticipada y forzosa***. Profesor auxiliar de Geometría III y Geometría IV en la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense durante los cursos 1965-66 y 1966-67. Profesor de Algebra y Análisis de la Sección de Arquitectura del C. E. U. de Madrid, durante los años 1965 a 1970. Autor, en colaboración, de varios libros de texto y problemas de B.U.P. y C.O.U.. Desde el mes de Marzo de 1988 es Presidente de nuestra Sociedad "Puig Adam".

Prof. Julio Fernández Biarge.

Nació en Zaragoza el 7 de Agosto de 1924. Estudió el Bachillerato en el Instituto "Goya" y las licenciaturas de Ciencias Exactas y Físicas en la Universidad de Zaragoza. Fué profesor contratado de esa Universidad hasta que, en 1947, obtuvo, *por oposición*, la plaza de Profesor Adjunto de Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid. En 1948 leyó su tesis doctoral "Estudio aritmético de los sistemas de divisores de una variedad algebraica", dirigida por el prof. don Pedro Abellanas, y publicada en Memorias de Mat. del Inst. "Jorge Juan" en 1950. Fué catedrático, *por oposición*, del Instituto "San Isidro" de Madrid, desde 1951 hasta 1963. Allí coincidió con don Pedro Puig Adam, con el que colaboró hasta el fallecimiento de éste, en 1960. Por esta época publica varios artículos en "Rev. Mat. Hispano-Americana" y en "Gaceta Matemática". Desde 1952 hasta 1963, fué Jefe del Laboratorio Matemático del Instº "Rocasolano" de Química-Física, del C.S.I.C., dando lugar a numerosas publicaciones en "Anales de la R. Soc. E. de Física y Química" y en diversas revistas extranjeras. En el año 1960 obtiene, *por oposición*, la cátedra de Matemáticas de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales de Madrid. En 1962, el C.S.I.C. le encomendó la dirección del recién creado "Centro de Cálculo Electrónico", en el que trabajó hasta 1971. En ese año se incorporó al departamento de informática de "Astilleros Españoles S.A.", donde realizó tareas de I+D hasta 1984. Desde 1985 fué Director de Departamento en la Universidad Politécnica de Madrid, cesando en 1989 por su *forzada jubilación*. Durante los años 1984 a 1986 fué presidente de nuestra Sociedad "Puig Adam", y desde los primeros números, es "el alma" de su Boletín.

Por la inexorabilidad de la Ley, a los miembros de *"la quinta del 45"* de la Sociedad "Puig Adam", les ha llegado, el psado 30 de Septiembre, la jubilación *anticipada y forzosa*. A todos ellos, los citados nominalmente y los no citados, les transmitimos nuestra más efusiva y cordial felicitación y les deseamos larga y venturosa vida. La Ley de la Función Pública ha sido, y sigue siendo, muy controvertida dentro del ámbito de la Enseñanza y es natural que lo sea, tratándose de una Ley de tan amplio alcance y que afecta a personas muy distintas y que se encuentran en circunstancias muy diversas. Yo, personalmente, creo que habría que distinguir, al menos, dos grupos de Profesores: el primero estaría constituido por aquellas personas que, debido a su fragil salud, a la grave degradación sufrida por la Enseñanza, sobre todo en sus estadios primeros (E.G.B y B.U.P.) están "quemados" para la docencia. Para este honroso grupo de Profesores, la jubilación sería necesaria e inevitable. El segundo grupo estaría formado por aquellos Profesores que, por su floreciente salud (física y psiquica), dedicación, experiencia y especialización, *no necesitan ni merecen la jubilación anticipada y forzosa*. Le será muy difícil a la Administración el poder sustituir a los Profesores de este segundo grupo, sin que se produzca *grave quebranto para la Enseñanza*. Nuestros queridos compañeros Lorenzo Miranda y Fernández Biarge serían próceres del antes citado segundo grupo de Profesores.

J. Ochoa

VIDA DE LA SOCIEDAD

El dia 21 de Octubre, unos treinta socios de esta Sociedad, amigos y admiradores de los profesores Lorenzo Miranda y Fernández Biarge, se reunieron con ellos en una comida de homenaje.

Al final de la misma, se leyeron algunas adhesiones y se les entregó un pequeño recuerdo.

NOTICIAS

La XXVI Olipiada Matemática Española celebrará las pruebas de su Primera Fase en el próximo mes de Enero de 1990.

Horizontes Matemáticos

EXPOSICIÓN ITINERANTE

La *Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas* ha organizado la Exposición Itinerante *"Horizontes Matemáticos"* que en estos meses, está recorriendo las Islas Canarias; la interesante actividad que acompaña a esta Exposición, se debió originalmente a un equipo de investigadores y enseñantes franceses, agrupados en los I.R.E.M. (Institutos para la investigación de la enseñanza de las Matemáticas) y en la A.P.M.E.P. (Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Media), que en 1984 decidieron ofrecer al público una muestra que le permitiera, al que la visditase, aproximarse de forma sencilla a conocimientos científicos, especialmente matemáticos.

La exposición, que pretende la participación activa de los visitantes, persigue varios objetivos:

- Permitir a todo tipo de público, niños y adultos, "hacer matemáticas con placer".
- Favorecer el encuentro entre investigadores y enseñantes y la gran mayoría del público no especialista.
- Mostrar que las Matemáticas son una ciencia en plena evolución.
- Ofrecer a los enseñantes instrumentos pedogógicos variados.

Con el merecido apoyo del Gobierno de Canarias, de los Cabildos insulares y Ayuntamientos, de la Caja de Canarias y de la Unión Eléctrica de Canarias, va montando sucesivamente sus 16 "kioscos" en Santa Cruz de Tenerife, Los Realejos, Adeje, San Sebastián de la Gomera, Valverde del Hierro, Santa Cruz de la Palma, Puerto del Rosario, Arrecife de Lanzarote, San Bartolomé de Tirajana, Galdar y Las Palmas de Gran Canaria. La gira comenzó el pasado mes de Octubre y continuará hasta el de Febrero de 1990.

Los trabajos que se muestran en 7 de los 16 kioscos citados, han sido elaborados en Canarias. La Sociedad Canaria "Isaac Newton" ha editado una GUíA DE LA EXPOSIóN, que ha de resultar muy interesante incluso para los que no tengan la suerte de poder visitarla.

Los temas presentados en los 16 kioscos de la Exposición son los siguientes:

A- Anamorfosis y perspectivas.
B- Nudos.
C- Apilamientos y simetrías.
D- Pavimentos y repeticiones.
E- Curvaturas y superficies.
F- Formas y estructuras.
G- Grafos y caminos.
H- Azar y sondeos.
M- Matemáticas y Física.
P- Puzzles matemáticos
Q- Numeración.
R- Puzzles en el plano.
S- Puzzles en el espacio.
T- Algebra visual. Espejos.
U- Calculus.
V- Calculadoras, ordenadores

TEMAS DE SELECTIVIDAD

Por creerlo de interés para nuestros socios, publicamos, en las páginas siguientes, los temas de MATEMATICAS I y de MATEMATICAS II que fueron propuestos en las pruebas de acceso a la Universidad celebradas en Junio y Septiembre de 1989, en las cuatro Universidades de la Comunidad Autónoma de Madrid.

Como es sabido, la asignatura de *Matemáticas I* es obligatoria para los alumnos de la Opción A y optativa para los de la Opción B, mientras que la de *Matemáticas II* es obligatoria para los alumnos de la Opción C y optativa para los de la D.

Encabezando estos temas, en la hoja entregada a los alumnos en el examen, se advertía:

> El alumno podrá escoger libremente DOS de las cuatro cuestiones presentadas a continuación y dar sus respuestas a las partes a) y b) de que constan las cuestiones escogidas, en el tiempo máximo de hora y media.

En los temas de Matemáticas II se añadía:

> *Caso de que fuese necesario*, el alumno podrá hacer uso de las tablas que aparecen en el reverso de esta hoja.

Reproducimos también las tablas a que se alude en esa observación.

MATEMATICAS I

1ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular $(A^t A^{-1})^2 A$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

b) Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$, se considera la recta r que une los puntos de esa parábola de abscisas $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a la recta r .

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Se extrae una carta al azar de una baraja de 40 cartas. Sea A el suceso de que la carta seleccionada sea un as. Sea B el suceso de que la carta seleccionada sea de oros. Calcular $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ ¿ A y B son sucesos independientes ? Razonarlo.

b) Estudiar y representar gráficamente $y = x^3 - 3x + 2$

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$

b) Se consideran la recta $r \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi)\ 2x + y + mz = n$.
Se pide:
--¿ Para qué valores de m y n , r y π son secantes ?
--¿ Para qué valores de m y n , r y π son paralelos ?
--¿ Para qué valores de m y n , π contiene a la recta r ?

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Explicar cómo puede hallarse el área de un triángulo a partir de las coordenadas de sus tres vértices (en el espacio). Aplicarlo al $A(1,0,1)$, $B(-1,0,0)$, $C(0,2,3)$.

b) Se considera el sistema $\begin{cases} 7x + 9y + 9z = 0 \\ 3x + 2y + mz = 0 \\ x + my - z = 0 \end{cases}$; se pide:
-- Discutir el sistema, según los valores de m .
-- Resolverlo para $m = 5$.

MATEMATICAS I

1ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Dados dos planos de ecuaciones $3x - y + z = 1$ y $x + y - 2z = 0$, hallar un vector cuya dirección sea paralela a ambos. Explicar cómo se ha hecho.

b) Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$, $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,dx$.

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Se tiran dos dados. Sea E el suceso de que la suma de los puntos obtenidos sea impar. Sea F el suceso de que por lo menos uno de los dados muestre un 1. Calcular $P(E \cap F)$ y $P(E \cup F)$.

b) Se consideran las rectas $r \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$, $s \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$. Se pide:
— Estudiar la posición relativa de r y s .
— Hallar la mínima distancia entre ambas.

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Escribir la matriz inversa de la $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprobar que lo es, multiplicándola por la dada.

b) Se da la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{x}$. Comprobar que el segmento de la tangente a dicha curva en el punto $(3, \frac{1}{3})$, comprendido entre los ejes de coordenadas, está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Obtener, simplificado, el desarrollo del determinante $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$.

b) Se consideran la recta $r \begin{cases} x = 0 \\ y = 4z \end{cases}$ y el punto $P(3,4,1)$. Hallar el plano π que contiene a la recta r y al punto P . Calcular la distancia de P a r .

MATEMATICAS I

CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Hallar la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Representar esquemáticamente la gráfica de $y = \frac{e^x}{x}$, determinando para ello sus extremos relativos, si los tiene, sus intervalos de crecimiento o decrecimiento, puntos, límites, etc.

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Dada la función $f(x) = \log \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$, se pide:
- determinar los valores de x para los que está definida.
- hallar su derivada.

b) Se tienen dos urnas del mismo aspecto exterior. La primera contiene 6 bolas blancas y 9 bolas negras. La segunda, 4 bolas blancas y 3 negras. Una persona se aproxima al azar a una de las urnas y extrae una bola. ¿ Cual es la probabilidad de que sea blanca ?

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Hallar el área finita limitada por la curva de ecuación $y = x^2 - 4x$, y el eje $y = 0$.

b) Se consideran la recta $r \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$ y el punto $A\ (0,\ 1,\ 3)$; se pide:
-- Hallar la distancia de A a r .
-- Determinar el plano π que pasa por el punto A y contiene a la recta r .

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Dado el plano de ecuación $x + 2y + 3z = 1$ y el punto $A(1,1,1)$, hallar las coordenadas del pié de la perpendicular trazada desde A a ese plano (o sea la proyección ortogonal de A sobre él).

b) Se considera el sistema $\begin{cases} 5x - 2y - pz = 3 \\ \quad\ - y + z = 1 \\ x - y + z = p \end{cases}$ y se pide:
-- Discutir el sistema según los valores de p .
-- Resolverlo para $p = 2$.

MATEMATICAS I

1ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Las coordenadas de dos puntos distintos $P(p_1,p_2,p_3)$ y $Q(q_1,q_2,q_3)$ satisfacen a un mismo sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Se pide deducir razonadamente:
- Las coordenadas de su punto medio también lo satisfacen.
- El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es nulo.

b) Si P es un punto cualquiera de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, probar que el triángulo formado por la recta OP , la tangente a esa gráfica en el punto P y el eje $y = 0$, es isósceles. (O es el origen de coordenadas).

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Representando con $|x|$ el valor absoluto de x , calcular $\int_{-1}^{3} |x|\,dx$.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide: $\begin{cases} \text{— Calcular el rango de } A . \\ \text{— Hallar la matriz } A^{12} . \end{cases}$

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Razonar por qué la gráfica de la función $y = 2x + \cos x$ no puede presentar extremos relativos.

b) Determinar la recta que pasa por el punto $A(1,-1,0)$ y corta a las rectas:
$r)\ \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$, $s)\ \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) - En una urna hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Hallar la probabilidad de que al extraer dos bolas resulten de la misma paridad.

b) Discutir, según los valores de m , el sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$
Resolverlo, además, para $m = 10$.

MATEMATICAS II

1ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Supongamos que la talla media de una muestra de 300 hombres es de 1,7 m , con una desviación típica de 0,08 m, y que otra muestra de 300 mujeres da como media 1,63 m , con desviación típica de 0,07 m. Calcular la media de la muestra formada por el conjunto de las dos. ¿ Cual de las dos poblaciones puede considerarse más dispersa ?

b) Se considera la función $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$. Estudiar su crecimiento o decrecimiento, extremos relativos y concavidad o convexidad. Dibujar su gráfica.

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Mediante un gráfico, mostrar que no puede haber dos números positivos, x e y, tales que $x + y < 2$, a la vez que $2x + 3y > 6$.

b) Supongamos una distribución normal de media $\mu=50$ y que el 7% de los casos tienen una puntuación por encima de 70. Cuál es la desviación típica? Cuál será la probabilidad de los puntos por debajo de 45?

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Representar gráficamente la función $y = \cos^2 x$.

b) Determinar para qué valores de a , el sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{cases}$ tiene solución única.
Resolverlo además para $a = 0$.

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Un vino tiene 9 % de alcohol y otro 12 % ¿ En qué proporción hay que mezclarlos para que la mezcla tenga 10 % de alcohol ?

b) Una urna contiene 10 bolas blancas, 5 amarillas y 5 negras. Se extrae una bola al azar de la urna y se sabe que no es blanca. ¿ Cuál es la probabilidad de que sea negra ?

MATEMATICAS II

1ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) La temperatura y en grados Fahrenheit (°F) puede ser expresada como una función de primer grado de la temperatura x en grados Celsius (°C). En la escala Fahrenheit, el agua se congela a 32° y hierve a 212° ; en la escala Celsius, se congela a 0° y hierve a 100° . Expresar la temperatura Fahrenheit, y , como una función de la temperatura Celsius, x . Si la temperatura normal del cuerpo humano es de 98,6° F , ¿ a qué temperatura corresponde en la escala Celsius ?

b) La siguiente tabla da las edades en que comenzaron a sentarse los niños de una muestra particular

meses	12	11	10	9	8	7	6	5
frecuencia	1	6	7	14	28	35	21	10

Se pide:
a) Obtener las frecuencias relativas
b) Construir el diagrama de barras
c) Cuál es la mediana?

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Se dan las transformaciones geométricas planas $T(x,y) = (x-y\ ,\ x+y)$, $S(x,y) = (2x-y\ ,\ x+y)$. Escribir las matrices asociadas a S y a T . Escribir la matriz asociada a la transformación compuesta $S \circ T$.

b) Se ha medido el contenido en oxigeno Y, en milg/litro de un lago a una profundidad de X metros , obteniendose los siguientes datos:

X	15	20	30	40	50	60	70
Y	6,5	5,5	5,4	6	4,6	1,4	0,1

y la recta de regresión es $Y-4,22 = (-38,59/360,5)\,[X-40,71]$ Se pide:

a) Coeficiente de correlación , conclusión estadística.

b) Para una profundidad comprendida entre 75 y 80 metros Qué contenido en oxigeno se podria predecir?

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Dibujar una gráfica que exprese un ejemplo de la variación del valor de un solar en función de su extensión, en la que se aprecie que el precio de ese suelo aumenta con la extensión, y otra en la que se observe que el precio disminuye al aumentar la extensión.

b) Se considera la función $z = f(x,y) = 25x + 27y$. Determinar el punto donde la función $z = f(x,y)$ toma su valor máximo, con las siguientes restricciones:
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 85$, $2x + 3y \leq 200$.

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) ¿ Qué transformaciones sufren la media aritmetica y la varianza de una distribución de frecuencias cuando se dividen sus valores por una constante k? Razone la respuesta.

b) Hallar los máximos y mínimos, si los tiene, de la función $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$. ¿ Tiene puntos de inflexión ?

MATEMATICAS II

1ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) La temperatura y en grados Fahrenheit (°F) puede ser expresada como una función de primer grado de la temperatura x en grados Celsius (°C). En la escala Fahrenheit, el agua se congela a 32° y hierve a 212° ; en la escala Celsius, se congela a 0° y hierve a 100° . Expresar la temperatura Fahrenheit, y , como una función de la temperatura Celsius, x . Si la temperatura normal del cuerpo humano es de 98,6° F , ¿ a qué temperatura corresponde en la escala Celsius ?

b) La siguiente tabla da las edades en que comenzaron a sentarse los niños de una muestra particular

meses	12	11	10	9	8	7	6	5
frecuencia	1	6	7	14	28	35	21	10

Se pide:

a) Obtener las frecuencias relativas
b) Construir el diagrama de barras
c) Cuál es la mediana?

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Se dan las transformaciones geométricas planas $T(x,y) = (x-y , x+y)$, $S(x,y) = (2x-y , x+y)$. Escribir las matrices asociadas a S y a T . Escribir la matriz asociada a la transformación compuesta $S \circ T$.

b) Se ha medido el contenido en oxigeno Y, en milg/litro de un lago a una profundidad de X metros , obteniendose los siguientes datos:

X	15	20	30	40	50	60	70
Y	6,5	5,6	5,4	6	4,6	1,4	0,1

y la recta de regresión es $Y-4,22 = (-38,59/360,5)(X-40,71)$ Se pide:

a) Coeficiente de correlación , conclusión estadística.

b) Para una profundidad comprendida entre 75 y 80 metros Qué contenido en oxigeno se podria predecir?

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Dibujar una gráfica que exprese un ejemplo de la variación del valor de un solar en función de su extensión, en la que se aprecie que el precio de ese suelo aumenta con la extensión, y otra en la que se observe que el precio disminuye al aumentar la extensión.

b) Se considera la función $z = f(x,y) = 25x + 27y$. Determinar el punto donde la función $z = f(x,y)$ toma su valor máximo, con las siguientes restricciones: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 85$, $2x + 3y \leq 200$.

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) ¿ Qué transformaciones sufren la media aritmetica y la varianza de una distribución de frecuencias cuando se dividen sus valores por una constante k? Razone la respuesta.

b) Hallar los máximos y mínimos, si los tiene, de la función

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

. ¿ Tiene puntos de inflexión ?

MATEMATICAS II

1ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Hacer una representación gráfica de la función $f(x) = 1 + 4x - x^2$. Hallar los valores máximos y mínimos de $f(x)$ en el intervalo $[-1 , 7]$.

b) Una industria produce piezas con diámetros distribuidos según una Normal de media 0,75 cm. y desviación típica 0,002 cm. Supongamos que el control de calidad exige que las piezas tengan un diámetro entre 0,745 y 0,755 cm. Cualquier pieza con diámetro fuera de este rango es rechazada. Si se examina una muestra de 1000 piezas, cuantas seran rechazadas por término medio ?

2ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Se mezclan vinos de 100 pts/litro , 200 pts/litro y 250 pts/litro . En 100 litros de la mezcla ¿ cuanto debe entrar del más barato, como mínimo, para que el precio de la mezcla no pase de 125 pts/litro ?

b) Consideremos dos sucesos A y B, con probabilidades respectivas $P(A)=0.4$ y $P(B)=0.7$. Determinar los posibles valores del máximo y del minimo de $P(A \cap B)$ y las condiciones en que se consigue cada uno de estos valores.

3ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Si una función es creciente para los valores positivos de la variable y decreciente para los negativos ¿ Qué puede afirmarse de su derivada ? ¿ Por qué ?

b) Consideremos las mesas (rectangulares) cuyas dimensiones no sobrepasen (cada una) 2 m , y entre ellas, las que la suma de su dimensión mayor y el doble de la menor no sobrepase 4 m ; determinar el máximo valor que puede tener el perímetro de éstas.

4ª CUESTION : Dar respuestas razonadas, claras y concisas a las preguntas siguientes:

a) Se hizo un estudio sobre los hábitos de niños de seis y trece años en ver la T.V. El estudio se hizo en base al número de horas de T.V vistas en una semana. Los datos fueron los siguientes:

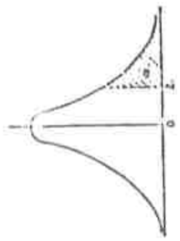
seis años	18	18	19	21	22	22
trece años	15	18	18	22	22	22

¿Qué datos están más dispersos?

b) Calcular una función primitiva de la función $y = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}$.

Distribución normal $N(0, 1)$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,34448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	$0{,}9^{2}0097$	$0{,}9^{2}0358$	$0{,}9^{2}0613$	$0{,}9^{2}0863$	$0{,}9^{2}1106$	$0{,}9^{2}1344$	$0{,}9^{2}1576$
2,4	$0{,}9^{2}1802$	$0{,}9^{2}2024$	$0{,}9^{2}2240$	$0{,}9^{2}2451$	$0{,}9^{2}2656$	$0{,}9^{2}2857$	$0{,}9^{2}3053$	$0{,}9^{2}3244$	$0{,}9^{2}3431$	$0{,}9^{2}3613$
2,5	$0{,}9^{2}3790$	$0{,}9^{2}3963$	$0{,}9^{2}4132$	$0{,}9^{2}4297$	$0{,}9^{2}4457$	$0{,}9^{2}4614$	$0{,}9^{2}4766$	$0{,}9^{2}4915$	$0{,}9^{2}5060$	$0{,}9^{2}5201$
2,6	$0{,}9^{2}5339$	$0{,}9^{2}5473$	$0{,}9^{2}5604$	$0{,}9^{2}5731$	$0{,}9^{2}5855$	$0{,}9^{2}5975$	$0{,}9^{2}6093$	$0{,}9^{2}6207$	$0{,}9^{2}6319$	$0{,}9^{2}6427$
2,7	$0{,}9^{2}6533$	$0{,}9^{2}6636$	$0{,}9^{2}6736$	$0{,}9^{2}6833$	$0{,}9^{2}6928$	$0{,}9^{2}7020$	$0{,}9^{2}7110$	$0{,}9^{2}7197$	$0{,}9^{2}7282$	$0{,}9^{2}7365$
2,8	$0{,}9^{2}7445$	$0{,}9^{2}7523$	$0{,}9^{2}7599$	$0{,}9^{2}7673$	$0{,}9^{2}7744$	$0{,}9^{2}7814$	$0{,}9^{2}7882$	$0{,}9^{2}7948$	$0{,}9^{2}8012$	$0{,}9^{2}8074$
2,9	$0{,}9^{2}8134$	$0{,}9^{2}8193$	$0{,}9^{2}8250$	$0{,}9^{2}8305$	$0{,}9^{2}8359$	$0{,}9^{2}8411$	$0{,}9^{2}8462$	$0{,}9^{2}8511$	$0{,}9^{2}8559$	$0{,}9^{2}8605$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1029	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0651
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00589	0,00866	0,00542
2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00505	0,00494	0,00480
2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,7	0,00356	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00225	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00161	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139

UNA APLICACION DE LOS NUMEROS INDICES

por José V.García Sestafe

Una interesante aplicación de los números índices, quizás poco divulgada en la literatura estadística, es el método que se aplica para evaluar la parte imputable a cada uno de los factores que influyen en la evolución temporal de una determinada magnitud [1].

DEFINICIONES PREVIAS

Sea el conjunto $\mathbf{F} = \{ F_1, F_2, \ldots, F_k \}$ de factores que influyen en la evolución de una cierta magnitud A:

$$A = f(F_1, F_2, \ldots, F_k)$$

siendo f una función cuya expresión se precisará posteriormente.

Designando, respectivamente, con los superíndices 0 y t los valores que toman dichos factores en el período inicial y en el período t-ésimo, se define el <u>índice del efecto del factor</u> F_j (o simplemente <u>índice de F_j</u>) como la razón entre el valor que tomaría A si sólo variase el factor F_j -manteniéndose constantes los restantes factores- y el valor inicial de la referida magnitud o sea

$$I(F_j) := \frac{f(F_1^0, \ldots, F_{j-1}^0, F_j^t, F_{j+1}^0, \ldots, F_k^0)}{f(F_1^0, \ldots, F_{j-1}^0, F_j^0, F_{j+1}^0, \ldots, F_k^0)}$$

En general, se define el <u>índice del efecto de un subconjunto de factores</u>

$$G = \{ F_{g_1}, F_{g_2}, \ldots, F_{g_p} \} \qquad G \subset \mathbf{F}$$

---

[1] G. Calot precisa aún más: "el método puede ser aplicado a dos universos homólogos descritos siguiendo los mismos criterios de clasificación".

(o simplemente índice de **G**) como

$$I(\mathbf{G}) := \frac{f(\mathbf{G}^t, \bar{\mathbf{G}}^o)}{f(F_1^o, F_2^o, \ldots F_k^o)} = \frac{f(\mathbf{G}^t, \bar{\mathbf{G}}^o)}{f(\mathbf{F}^o)}$$

donde $\mathbf{G}^t$ indica el valor, en el período t, de los factores que integren el subconjunto **G** y $\bar{\mathbf{G}}^o$ es el valor, en el período inicial, de los factores que constituyen el subconjunto complementario de **G**.

Siguiendo un lenguaje análogo al del cálculo de probabilidades se define el <u>índice de un subconjunto de factores</u>

$$\mathbf{G} = \left\{ F_{g_1}, F_{g_2}, \ldots\ldots, F_{g_p} \right\}$$

<u>condicionado a otro subconjunto</u>

$$\mathbf{H} = \left\{ F_{h_1}, F_{h_2}, \ldots\ldots, F_{h_q} \right\}$$

(tales que $\mathbf{G}, \mathbf{H} \subset \mathbf{F}$ y card $(\mathbf{G})$ + card $(\mathbf{H}) < k$) como el cociente

$$I(\mathbf{G}/\mathbf{H}) := \frac{I(\mathbf{G},\mathbf{H})}{I(\mathbf{H})}$$

DEPENDENCIA E INTERACCION

Se dice que el subconjunto de factores **G** es <u>independiente</u> del subconjunto de factores **H**, si se cumple

$$I(\mathbf{G}/\mathbf{H}) = I(\mathbf{G})$$

y, por tanto, si **G** es independiente de **H** se cumple

$$I(\mathbf{G},\mathbf{H}) = I(\mathbf{G}) . I(\mathbf{H})$$

y, por tanto,

$$I(\mathbf{H}/\mathbf{G}) = \frac{I(\mathbf{G},\mathbf{H})}{I(\mathbf{G})} = I(\mathbf{H})$$

luego si **G** es independiente de **H**, también **H** lo es de **G**.

Si se cumple

$$I(\mathbf{G}/\mathbf{H}) \neq I(\mathbf{G})$$

se dice que los <u>subconjuntos **G** y **H** son dependientes.</u>

Dados los subconjuntos de factores **G** y **H**, se denomina interacción de ellos a

$$\Gamma(\mathbf{G}, \mathbf{H}) := \frac{I(\mathbf{G},\mathbf{H})}{I(\mathbf{G}) . I(\mathbf{H})} - 1$$

Es evidente que si **G** y **H** son independientes su interacción es nula; si $I(\mathbf{G},\mathbf{H}) > I(\mathbf{G}).I(\mathbf{H})$, esto es, si la acción conjunta de los subconjuntos de factores **G** y **H** es superior a la combinación de sus efectos por separado la interacción es positiva, y negativa, en caso contrario.

El concepto de interacción es generalizable al caso de subconjuntos condicionados.

$$\Gamma(\mathbf{G},\mathbf{H}/\mathbf{J}) = \frac{I(\mathbf{G},\mathbf{H}/\mathbf{J})}{I(\mathbf{G},/\mathbf{J}) \; I(\mathbf{H}/\mathbf{J})}$$

EXPRESION DE LA FUNCION f.

Sean los factores F_1, F_2,.... F_k, que en general serán expresables vectorialmente

$$F_j=(f_{j1},f_{j2},\dots,f_{jn}) \quad j=1,2,\dots,k$$

Diversas consideraciones sobre la función f, monotonía, anulación si uno de los factores es nulo, etc, inducen a tomar como expresión de dicha función

$$f(F_1,F_2,\dots,F_k):=\sum_{i=1}^{n} f_{1i}f_{2i}\cdots f_{ki}$$

prefiriendo la forma multiplicativa a la aditiva.

Definida de esta forma f, se tiene, por ejemplo

$$I(F_1)=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{1i}^{(t)} f_{21}^{(o)}\cdots f_{ki}^{(o)}}{\sum_{i=1}^{n} f_{1i}^{(o)} f_{21}^{(o)}\cdots f_{ki}^{(o)}}$$

donde los superíndices 0 y t indican, respectivamente los valores de las f_{ji} en los períodos inicial y t-ésimo.

De manera análoga, se tendría para un índice condicionado

$$I(F_2/F_1)=\frac{I(F_1,F_2)}{I(F_1)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_{1i}^{(t)} f_{2i}^{(t)}\cdots f_{ki}^{(o)}}{\sum_{i=1}^{n} f_{1i}^{(t)} f_{2i}^{(o)}\cdots f_{ki}^{(o)}}$$

GENERALIZACION DEL INDICE DE FISHER

Sea el índice $I(F_r)$

$$I(F_r)=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_{1i}^{(o)}\cdots f_{r-1i}^{(o)} f_{ri}^{(t)} f_{r+1i}^{(o)}\cdots f_{ki}^{(o)}}{\sum_{i=1}^{k} f_{1i}^{(o)}\cdots f_{r-1i}^{(o)} f_{ri}^{(o)} f_{r+1i}^{(o)}\cdots f_{ki}^{(o)}}$$

Haciendo

$$f_{1i}^{(o)}\cdots f_{r-1i}^{(o)} f_{r+1i}^{(o)}\cdots f_{ki}^{(o)}=g_i^{(o)}$$

ya que sólo depende de los valores en el período inicial, se puede escribir

$$I(F_r)=\frac{\sum_{i=1}^{k} g_i^{(o)} f_{ri}^{(t)}}{\sum_{i=1}^{k} g_i^{(o)} f_{ri}^{(o)}}.$$

que no es otra cosa que un índice de tipo Laspeyres.

Sea ahora el índice $I(F_r/F_s)$:

$$I(F_r/F_s)=\frac{I(F_r,F_s)}{I(F_s)}=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_{1i}^{(o)} f_{2i}^{(o)}\cdots f_{ri}^{(t)}\cdots f_{si}^{(t)}\cdots f_{ki}^{(o)}}{\sum_{i=1}^{k} f_{1i}^{(o)} f_{2i}^{(o)}\cdots f_{ri}^{(o)}\cdots f_{si}^{(t)}\cdots f_{ki}^{(o)}}$$

Si se hace

$$f_{1i}^{(o)}\cdots f_{r-1i}^{(o)} f_{r+1i}^{(o)}\cdots f_{si}^{(t)}\cdots f_{ki}^{(o)}=h_i^{(t)}$$

puesto que depende de los valores de la s-ésima coordenada en el tiempo t, permaneciendo constantes las restantes coordenadas; por tanto se puede escribir

$$I(F_r/F_s)=\frac{\sum_{i=1}^{k} h_i^{(t)} f_{ri}^{(t)}}{\sum_{i=1}^{k} h_i^{(t)} f_{ri}^{(o)}}$$

que es un un índice de tipo Paasche.

Generalizado el concepto de índice ideal de Fisher (media geométrica de índices de Laspeyres y de Paasche), Calot introduce, para dos factores dados F_r y F_s los índices $I^*(F_r)$ e $I^*(F_s)$ que se definen

$$[I^*(F_r)]^2:=I(F_r).\ I(F_r/F_s)$$

$$[I^*(F_s)]^2:=I(F_s).\ I(F_s/F_r)$$

Obsérvese que como

$$I(F_r,F_s = I(F_r).I(F_s/F_r) = I(F_s).\ I(F_r/F_s)$$

se tiene

$$[I(F_r,F_s)]^2 = I(F_r).I(F_s/F_r).I(F_s).I(F_r/F_s) =$$

$$=[I(F_r).I(F_r/F_s)].[I(F_s).I(F_s/F_r)] = [I^*(F_r).I^*(F_s)]^2$$

de donde

$$I(F_r.F_s) = I^*(F_r).I^*(R_3)$$

que indica que el efecto conjunto de los factores F_r y F_s se puede obtener como producto de sus índices ideales.

Por tanto, $I^*(F_r)$ e $I^*(F_s)$ representan, el efecto imputable a cada uno de los factores.

El resultado anterior es generalizable, fácilmente, a dos subconjuntos de factores.

EJEMPLO

Se pretende evaluar el porcentaje imputable a cada uno de los factores que influyen en la variación del número de parados.

Dicho número depende de

- la población potencialmente activa, esto es, de la población española de 16 a 64 años.
- la proporción de activos (ocupados más parados) en cada grupo de edad,
- la tasa específica de paro, que se expresa como cociente del número de parados en cada grupo de edad, dividido por el número de activos del mismo grupo.

El periodo que abarca el estudio es el que media entre el Censo de Población de 1981 (1-3-81) y el Padrón de Habitantes de 1986 (1-4-86). Las cifras se han tomado de las respectivas publicaciones, realizadas por el Instituto Nacional de Estadística.

Los datos utilizados figuran en las tablas siguientes.

Censo 1981 (*)

Grupos de edad	Población Pot. Activa		Población Activa		Parados	
	Varones	Mujeres	Varones	Mujeres	Varones	Mujeres
16 - 19	1325,5	1273,0	712.2	480,3	330,8	247,4
20 - 24	1480,5	1461,7	1030,2	732,3	296,9	225,0
25 - 29	1278,9	1258,5	1213,2	472,4	191,0	81,9
30 - 34	1230,9	1224,4	1196,1	314,1	121,4	32,8
35 - 39	1126,5	1119,3	1092,2	229,4	95,0	17,9
40 - 44	1017,7	1038,3	972,2	190,1	85,0	12,9
45 - 49	1167,4	1193,8	1091,2	214,0	95,3	13,1
50 - 54	1109,1	1156,0	986,9	203,6	87,4	11,8
55 - 59	985,1	1052,9	798,8	173,5	71,2	9,0
60 - 64	722,6	873,9	423,8	108,2	35,8	5,0
	11444,2	11651,8			1409,8	656,8

Padrón 1986(*)

16 - 19	1341,4	1287,6	568,9	412,2	329,7	268,2
20 - 24	1631,9	1573,9	1127,7	782,0	444,8	374,4
25 - 29	1473,7	1446,8	1361,5	720,9	290,6	207,5
30 - 34	1278,9	1265,3	1221,5	484,6	168,2	88,0
35 - 39	1223,5	1221,4	1168,5	353,9	128,0	47,9
40 - 44	1121,1	1122,3	1058,7	267,7	109,9	31,1
45 - 49	995,7	1023,2	914,1	212,3	102,7	22,7
50 - 54	1139,4	1180,5	995,1	224,1	122,9	22,5
55 - 59	1067,8	1137,3	813,4	191,5	119,6	18,7
60 - 64	930,6	1027,5	465,9	127,5	58,4	9,4
	12204,0	12285,8			1874,8	1090,4

(*) Cifras de población en miles

Los cálculos se efectúan por separado para varones y mujeres.

Se designa por

P: número total de parados

P_i: parados en el grupo de edad i-ésimo

PPA: población potencialmente activa.

A_i: número de activos en el grupo i-ésimo

a_i: proporción de activos del grupo de edad i-ésimo, respecto a la población potencialmente activa total

p_i: tasa de paro en el grupo de edad i-ésimo

A continuación se deducen los valores de a_i y p_i

Grupo de Edad	1981				1986			
	a_i		p_i		a_i		p_i	
	Varones	Mujeres	Varones	Mujeres	Varones	Mujeres	Varones	Mujeres
16-19	0,0522	0,0412	0,464	0,515	0,0466	0,0335	0,580	0,651
20-24	0,0900	0,0628	0,288	0,307	0,0924	0,0637	0,394	0,479
25-29	0,1060	0,0405	0,157	0,173	0,1116	0,0587	0,214	0,288
30-34	0,1045	0,0270	0,102	0,105	0,1001	0,0394	0,138	0,182
35-39	0,0954	0,0197	0,087	0,078	0,0957	0,0288	0,110	0,136
40-44	0,0850	0,0163	0,087	0,068	0,0867	0,0218	0,104	0,116
45-49	0,0954	0,0184	0,087	0,061	0,0749	0,0173	0,112	0,107
50-54	0,0862	0,0149	0,089	0,058	0,0815	0,0182	0,124	0,101
55-59	0,0698	0,0149	0,089	0,052	0,0667	0,0156	0,147	0,098
60-64	0,0370	0,0093	0,085	0,046	0,0382	0,0104	0,125	0,074

En lo que sigue, por comodidad de escritura, los valores de cada factor en el periodo final (1986) se notarán con un acento, omitiéndose el superíndice en el periodo inicial (1981); todos los sumatorios se entenderán extendidos desde i = 1 a i= 10.

A partir de la igualdad evidente

$$P = \sum_i P_i = \sum_i PPA. \frac{A_i}{PPA} \cdot \frac{P_i}{A_i} = \sum_i PPA. a_i \cdot p_i$$

se obtienen los distintos índices, que se detallan para el sexo masculino.

$$I(PPA) = \frac{\sum_i PPA'.a_i.p_i}{\sum_i PPA.a_i p_i} = \frac{PPA'.\sum_i a_i p_i}{PPA.\sum_i a_i p_i} = \frac{PPA'}{PPA} = \frac{12204,0}{11444,2} = 1,0664$$

$$I(A) = \frac{\sum_i PPA.a'_i p_i}{\sum_i PPA.a_i p_i} = \frac{\sum_i a'_i p_i}{\sum_i a_i p_i} = \frac{0,1148}{0,1231} = 0,9324$$

$$I(P) = \frac{\sum_i PPA.a_i.p'_i}{\sum_i PPA.a_i p_i} = \frac{\sum_i a_i p'_i}{\sum_i a_i p_i} = \frac{0,1642}{0,1231} = 1,3341$$

$$I(PPA,A) = \frac{\sum_i PPA'.a'_i.p_i}{\sum_i PPA.a_i.p_i} = \frac{PPA'}{PPA} \cdot \frac{\sum_i a'_i p_i}{\sum_i a_i p_i} = I(PPA).I(A) = 0,9943$$

$$I(PPA,P) = \frac{\sum_i PPA' a_i p'_i}{\sum_i PPA. a_i p_i} = \frac{PPA'}{PPA} \cdot \frac{\sum_i a_i p'_i}{\sum_i a_i p_i} = I(ppA).I(P) = 1,4227$$

$$I(AP) = \frac{\sum_i PPA \cdot a'_i p'_i}{\sum_i PPA \cdot a_i p_i} = \frac{\sum_i a'_i p_i}{\sum_i a_i p_i} = \frac{0,1537}{0,1231} = 1,2489$$

$$I(PPA,A,P) = \frac{\sum_i PPA' \cdot a'_i p'_i}{\sum_i PPA \cdot a_i p_i} = \frac{PPA'}{PPA} \cdot \frac{\sum_i a'_i p'_i}{\sum_i a_i p_i} = I(PPA) \cdot I(A,P) = 1,3318$$

$$I(A/P) = \frac{I(A,P)}{I(P)} = 0,9362 \qquad I(P/A) = \frac{I(A,P)}{I(A)} = 1,3394$$

$$r(A,P) = \frac{I(A,P)}{I(A) \cdot I(P)} - 1 = 0,00399$$

$$I^{*}(A) = \sqrt{I(A) \cdot I(A/P)} = 0,9343 \qquad I^{*}(P) = \sqrt{I(P) \cdot I(P/A)} = 1,3368$$

o sea el incremento del 33,18% del número de parados se descompone en 6,64% debido al incremento de la población potencialmente activa, en - 6.57 debido a la distinta distribución por edades de la población activa y en 33.68 debido al incremento de las tasas de paro, esto es, a un crecimiento de la oferta de empleo inferior al experimentado por la población activa.

A continuación se presentan los mismos resultados para la población femenina.

$I(PPA) = 1,0544$; $I(A) = 1,0366$; $I(P) = 1,4895$

$I(PPA,A) = 1,0930$; $I(PPA,P) = 1,5706$; $I(A,P) = 1,5814$

$$I(PPA,A,P) = 1,6674$$

$I(A/P) = 1,0616$; $I(P/A) = 1,5255$; $r(A,P) = 0,0242$

$I^{*}(A) = 1,0491$ $\qquad$ $I^{*}(P) = 1,5074$

Esto es, el crecimiento del número de mujeres en paro ha alcanzado el 66,74% achacable un 5,44% al incremento de la población potencialmente activa, un 4,91% al aumento de las tasas de actividad y un 50,74% al incremento de las tasas de paro.

BIBLIOGRAFIA

CALOT, Gerard. Cours de statistique descriptive. Dunod. 1965.

DUON, Gaston. De la theorie a la practique des indices statistiques. Gautier - Villars. 1955.

FISHER, Irving. The best form Index Numbers. Journal of American Statistical Association. vol. 17. 1921.

GARCIA ESPAÑA, Eduardo y SERRANO SANCHEZ, J.M. Iñigo. Indices de precios de consumo. INE. 1980.

THEIL, H. Best linear Index Numbers of Prices and Quantites. Econometrica. Vol. 29. 1960

Interpretación geométrica de la extensión y contracción de ideales

por Concepción Romo Santos

Introducción

La Geometría Clásica comenzó con la escuela italiana de finales del siglo pasado, en su vertiente geométrica, y continuó, en la algebraica, con la escuela alemana de la primera mitad de este siglo. El éxito principal consiste en vincular las operaciones algebraicas con las geométricas de un modo casi-biunívoco, asociando a cada ideal una variedad. El teorema de los ceros de Hilbert precisa la manera como se hace esta correspondencia.

En este trabajo se proponen ejercicios sobre ampliación y contracción de ideales cuya resolución enseña el manejo de este diccionario algebraico-geométrico. Tratamos de dibujar lo más posible, buscando así la más intuitiva interpretación de la teoría. Bien entendido que los dibujos no muestran sino la parte real de las variedades complejas que consideramos y que, por ello, no pueden ser tomados como modelos seguros para obtener leyes generales.

Ejercicio 1.- En el espacio afín $\mathbb{C}^1$ consideramos la variedad V consistente en toda la recta compleja, cuyo anillo de coordenadas es el anillo de polinomios $A = \mathbb{C}[x_1]$.

Por otra parte, en el espacio afín $\mathbb{C}^2$ consideramos la variedad V^* consistente en la curva de ecuación $x_1+x_2-x_2^3=0$ cuyo anillo de coordenadas es $A^* = \mathbb{C}[x_1,x_2]$, donde x_1,x_2 están ligadas por la condición $x_1+x_2-x_2^3=0$.

Comprobar que A es un subanillo de A^*.

Solución.-

A^* se puede expresar como $A^* = \mathbb{C}[x_1,x_2] \,/\, (x_1+x_2-x_2^3)\,\mathbb{C}[x_1,x_2]$. Para ver que A es subanillo de A^* debemos encontrar un homomorfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow A^*$ que sea inyectivo.

Definimos $\varphi : A \longrightarrow A^*$

$$c \in \mathbb{C} \longrightarrow c + (x_1+x_2-x_2^3)\,\mathbb{C}[x_1,x_2]$$

$$x_1 \longrightarrow x_1 + (x_1+x_2+x_2^3)\,\mathbb{C}[x_1,x_2]$$

φ es homomorfismo de anillos, porque lo hemos definido mediante un generador. Entonces si $\xi = a_p + a_{p-1} x_1 + \dots + a_0 x_1^p \in A$,

$$\varphi(\xi) = \varphi(a_p) + \varphi(a_{p-1})\varphi(x_1) + \dots + \varphi(a_0)\varphi(x_1)^p \in A^* .$$

Veamos que φ es inyectivo

$$\varphi(\xi)=0 \Longrightarrow (a_p+a_{p-1}x_1 + \dots + a_0x_1^p) + (x_1+x_2-x_2^3)\,\mathbb{C}[x_1,x_2]=0 \Longrightarrow a_p+a_{p-1}x_1+\dots + a_0x_1^p \in (x_1+x_2-x_2^3)\,\mathbb{C}[x_1,x_2]$$

Como este polinomio no tiene términos en x_2 y pertenece a un ideal generado por $x_1+x_2-x_2^3$, debe ser $a_{p-1}=\dots=a_0=0$. Como el ideal es propio, $a_p=0$.

Luego $\xi=0$ y por tanto φ es inyectivo.

Nota.- De hecho $\mathbb{C}[t]$ y $\mathbb{C}[x_1,x_2] \big/ (x_1+x_2-x_2^3)\,\mathbb{C}[x_1,x_2]$ son isomorfos, definiendo

$$\varphi : \mathbb{C}[x_1,x_2] \big/ (x_1+x_2-x_2^3)\,\mathbb{C}[x_1,x_2] \longrightarrow \mathbb{C}[t]$$
$$x_1 \longrightarrow t^3-t$$
$$x_2 \longrightarrow t$$

Ejercicio 2.- En el espacio afín $\mathbb{C}^2$ consideramos la variedad V, consistente en todo el plano, cuyo anillo de coordenadas es $A=\mathbb{C}[x_1,x_2]$, x_1,x_2 indeterminadas independientes. Por otra parte, en el espacio afín $\mathbb{C}^3$ consideramos la variedad V^*, consistente en la superficie cilíndrica de ecuación $x_2=x_3^2$, cuyo anillo de coordenadas es $A^*=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$, con la condición $x_2-x_3^2=0$.

Comprobar que A es subanillo de A^*.

Solución.-

Razonamos igual que en el problema anterior.

Ejercicio 3.- En el espacio afín $\mathbb{C}^2$ consideramos la variedad V, consistente en la curva de ecuación $x_1^2+x_2^2=1$, cuyo anillo de coordenadas es $A=\mathbb{C}[x_1,x_2]$ con la condición $x_1^2+x_2^2-1=0$. Por otra parte en el espacio afín $\mathbb{C}^3$, consideramos la variedad V^*, consistente en la superficie cilíndrica de ecuación $x_1^2+x_2^2-1=0$, cuyo anillo de coordenadas es $A^*=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ con la condición $x_1^2+x_2^2-1=0$.

Comprobar que A es subanillo de A^*.

Solución.-

Razonamos como en los dos ejercicios precedentes.

$$A=\mathbb{C}[x_1,x_2] \big/ (x_1^2+x_2^2-1)\,\mathbb{C}[x_1,x_2]$$

$$A^*=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3] \big/ (x_1^2+x_2^2-1)\,\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$$

Definimos $\varphi : A \longrightarrow A^*$

$$c+(x_1^2+x_2^2-1)R_2 \longrightarrow c+(x_1^2+x_2^2-1)R_3$$
$$x_1+(x_1^2+x_2^2-1)R_2 \longrightarrow x_1+(x_1^2+x_2^2-1)R_3$$
$$x_2+(x_1^2+x_2^2-1)R_2 \longrightarrow x_2+(x_1^2+x_2^2-1)R_3$$

Lo primero que debemos comprobar en este caso, a diferencia de los precedentes, es que φ está bien definida, esto es, que no depende de los representantes escogidos.

Veamos, por ejemplo que $\varphi(x_1+(x_1^2+x_2^2-1)R_2)$ está bien definido. Del mismo modo se hace en los otros casos.

Otro representante de la clase $x_1+(x_1^2+x_2^2-1)R_2$ será $(x_1+p(x_1,x_2)\cdot(x_1^2+x_2^2-1))+(x_1^2+x_2^2-1)R_2$.

Entonces:

$$\varphi((x_1+p(x_1,x_2)\cdot(x_1^2+x_2^2-1)+(x_1^2+x_2^2-1)R_2)=\varphi(x_1+(x_1^2+x_2^2-1)R_2)+$$
$$+\varphi(p(x_1,x_2)\cdot(x_1^2+x_2^2-1)+(x_1^2+x_2^2-1)R_2)=x_1+(x_1^2+x_2^2-1)R_3+p(x_1,x_2)\cdot(x_1^2+x_2^2-1)+$$
$$+(x_1^2\cdot x_2^2-1)R_3=x_1+(x_1^2+x_2^2-1)R_3$$

ya que $p(x_1,x_2)\cdot(x_1^2+x_2^2-1) \in (x_1^2+x_2^2-1)R_3$

Veamos que φ es inyectivo

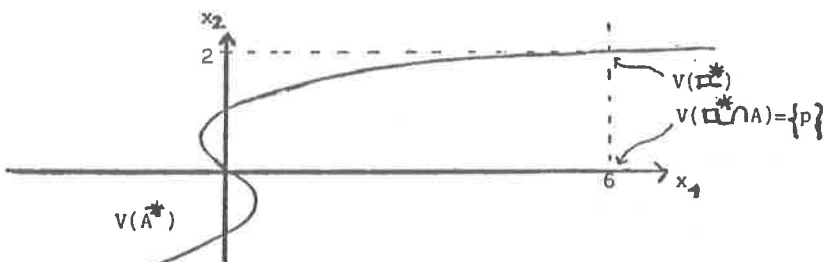
Sea $\xi+(x_1^2+x_2^2-1)R_2 \in A$ tal que $0=\varphi(\xi+(x_1^2+x_2^2-1)R_2)=\xi+(x_1^2+x_2^2-1)R_3$.

Entonces $\psi \in (x_1^2+x_2^2-1)R_3$. Y como $\psi \in R_2$, se tiene que $\psi \in (x_1^2+x_2^2-1)R_3 \cap R_2 = (x_1^2+x_2^2-1)R_2 \Longrightarrow \psi + (x_1^2+x_2^2-1)\, R_2$ es la clase cero en A. Luego φ es inyectivo.

Nota 4.- Si A es subanillo de A^* y $\mathfrak{a}^*$ es un ideal del anillo A^* se verifica que $\mathfrak{a}^* \cap A$ es un ideal del anillo A (El ideal $\mathfrak{a}^* \cap A$ se dice que es contraido del ideal $\mathfrak{a}^*$. Si $\mathfrak{a}^* \cap A = \mathfrak{a}$ se dice que $\mathfrak{a}^*$ yace sobre $\mathfrak{a}$).

Ejercicio 5.- Sean $A = \mathbb{C}[x_1]$, $A^* = \mathbb{C}[x_1,x_2] \big/ (x_1+x_2-x_2^3)\, \mathbb{C}[x_1,x_2]$. Si $\mathfrak{a}^*$ es el ideal $\mathfrak{a}^* = A^*(x_1-6, x_2-2)$ del punto P^* de V^*, comprobar que $\mathfrak{a}^* \cap A = A(x_1-6)$ es el ideal del punto P de V.

Solución.-



$\mathfrak{a}^* \cap A = A(x_1-6)$

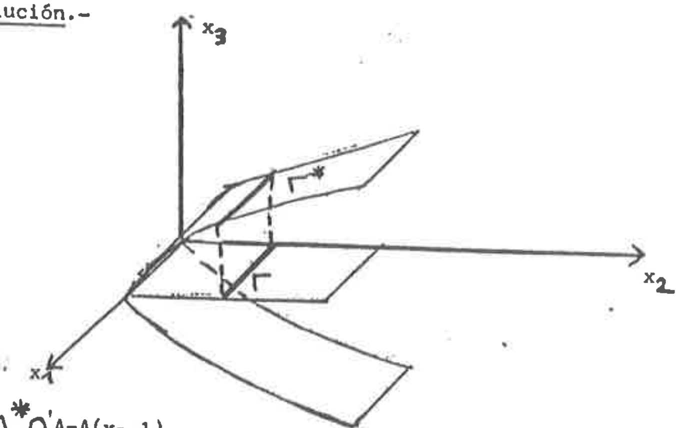
$V(\mathfrak{a}^* \cap A) = V(A(x_1-6)) = \{6\}$

Es decir, P es la proyección de P^* paralela al eje x_2.

Ejercicio 6.- Sean $A = \mathbb{C}[x_1,x_2]$, $A^* = \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3] \big/ (x_2-x_3^2)\, \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$.

Si $\mathfrak{a}^*$ es el ideal $\mathfrak{a}^* = A^*(x_2-1, x_3-1)$ de la subvariedad Γ^* de V^*, comprobar que $\mathfrak{a}^* \cap A = A(x_2-1)$ es el ideal de la variedad Γ de V.

Solución.-



$\mathfrak{a}^* \cap A = A(x_2-1)$

$V(A(x_2-1)) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{C}^2 / \; x_2 = 1\}$ que es la recta Γ dibujada.

$V(\mathfrak{a}^*) = V(A^*(x_2-1, x_3-1)) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{C}^3 \,|\, x_2=1, x_3=1\}$ que también es una recta Γ^*, recta contenida en $V(A^*)$.

Γ es la proyección de Γ^* paralela al eje x_3.

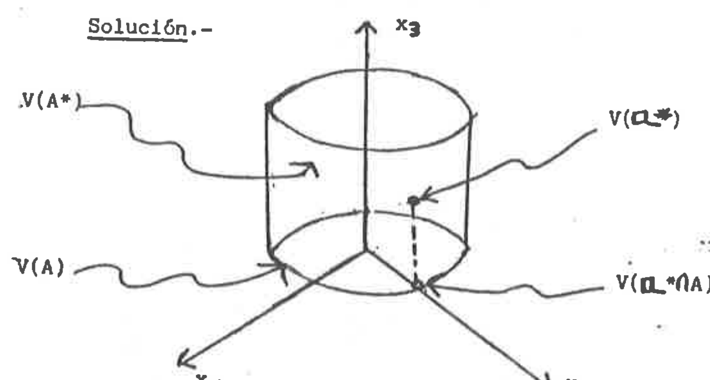
Ejercicio 7.- Sean

$A = \mathbb{C}[x_1,x_2] \big/ (x_1^2+x_2^2-1)\, \mathbb{C}[x_1,x_2]$

y $A^* = \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3] \big/ (x_1^2+x_2^2-1)\, \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$.

Si $\mathfrak{a}^*$ es el ideal $\mathfrak{a}^* = A^*(x_1, x_2-1, x_3-1)$ del punto P^* de V^*, comprobar que $\mathfrak{a}^* \cap A = A(x_1, x_2-1)$ es el ideal del punto P de V.

Solución.-



$P^*=V(\mathfrak{a}^*)=\{(0,1,1)\}$

$P=V(\mathfrak{a}^*\cap A)=V(A(x_1,x_2-1))=(0,1)$ como punto del plano OX_1X_2; es decir, $P=(0,1,0)$ como punto de $\mathbb{C}^3$. Luego P^* se proyecta en P.

Nota 8.- Observese que en los ejercicios anteriores, la subvariedad V definida por el ideal $\mathfrak{a}^*\cap A$ es la proyección sobre V de la subvariedad V^* definida por $\mathfrak{a}^*$ (proyección paralela al eje x_2 en el primer caso y al eje x_3 en los otros dos). Si $\mathfrak{a}^*\cap A=\mathfrak{a}$ se dice que la variedad definida por $\mathfrak{a}^*$ yace sobre la variedad definida por $\mathfrak{a}$.

Nota 9.- Si A es un subanillo de A^* y $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, generado por $f_1,\dots,f_s$, es decir $\mathfrak{a}=A(f_1,\dots,f_s)$ entonces esos elementos generan un ideal de A^* que se representa por $A^*\mathfrak{a}$ es decir, $A^*\mathfrak{a}=A^*(f_1,\dots,f_s)$ y se llama ampliado de $\mathfrak{a}$.

Ejercicio 10.-

Sean $A=\mathbb{C}[x_1]$,

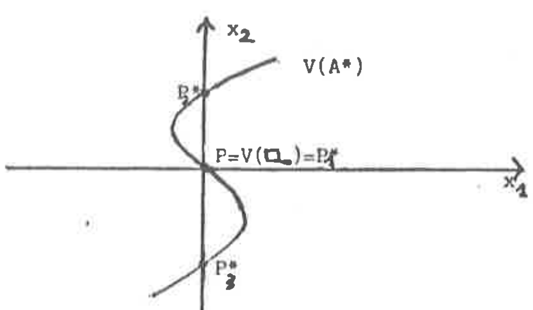
$A^*=\mathbb{C}[x_1,x_2]\Big/(x_1+x_2-x_2^3)\,\mathbb{C}[x_1,x_2]$.

Si $\mathfrak{a}$ es el ideal $\mathfrak{a}=A(x_1)$, del punto P, comprobar que $A^*\mathfrak{a}$ admite la descomposición normal.

$A^*\mathfrak{a}=A^*(x_1,x_2)\cap A^*(x_1,x_2-1)\cap A^*(x_1,x_2+1)$, es decir la variedad $A^*\mathfrak{a}$ consiste en los puntos P_1^*,P_2^*,P_3^* de V^* de coordenadas respectivas $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$.

Solución.-

Primero veamos que se tiene la igualdad del enunciado . Desde luego, como $\mathfrak{a}=A(x_1)$, $A^*\mathfrak{a}=A^*(x_1)$ y $A^*\mathfrak{a}\subset A^*(x_1,x_2)\cap A^*(x_1,x_2-1)\cap A^*(x_1,x_2+1)$



Veamos el otro contenido.

Por comodidad de notación, hagamos $I=(x_1+x_2-x_2^3)\,\mathbb{C}[x_1,x_2]$

$f\in A^*(x_1,x_2)\Longrightarrow f=p_1.x_1+p_2.x_2+I$

$f\in A^*(x_1,x_2-1)\Longrightarrow f=p_3.x_1+p_4(x_2-1)+I$

$f\in A^*(x_1,x_2+1)\Longrightarrow f=p_5.x_1+p_6(x_2+1)+I$

siendo $p_i\in\mathbb{C}[x_1,x_2]$, $1\le i\le 6$

En cualquier caso, $f\in A^*(x_1,x_2)\cap A^*(x_1,x_2-1)\cap A^*(x_1,x_2+1)$ permite escribir $f=g.x_1+h+I$

Veamos que h es múltiplo de x_2, (x_2-1) y (x_2+1),

$f=p_1x_1+p_2x_2+I=x_1(p_1+p_2'x_2)+p_2''x_2+I$, donde p_2' es la parte divisible por x_1 y p_2'' la que no lo es. Por lo tanto $x_2|h$.

Análogamente, $(x_2-1)|h$ y $(x_2+1)|h$.

Luego $f=g.x_1+h'.x_2(x_2-1)(x_2+1)+I=(g\,x_1+I)+(h'x_2(x_2-1)(x_2+1)+I)$.

Ahora bien, $h'x_2(x_2-1)(x_2+1)+I=h'x_2(x_2^2-1)+I=h'(x_2^3-x_2)+I=h'x_1+I$

Así que $f=gx_1+h'x_1+I=(g+h')x_1+I\in A^*(x_1)$

Se tiene la igualdad buscada.

Ejercicio 11.-

Sean $A=\mathbb{C}[x_1,x_2]$,

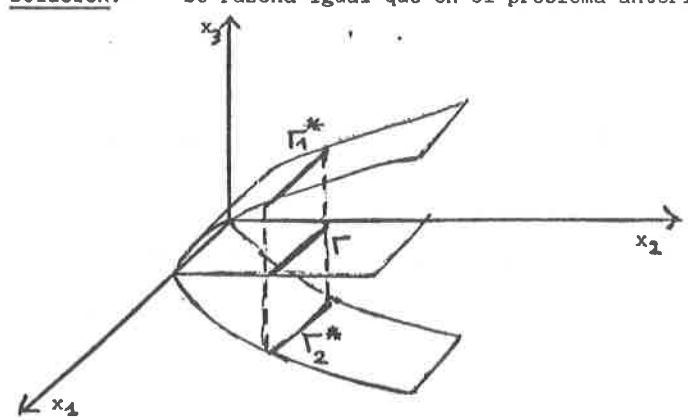
$A^*=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]\Big/(x_2-x_3^2)\,\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$

Si $\mathfrak{a}$ es el ideal $\mathfrak{a}=A(x_2-1)$ de la curva Γ, comprobar que $A^*\mathfrak{a}$ admite la descomposición normal

$A^*\mathfrak{a}=A^*(x_3-1)\cap A^*(x_3+1)$

es decir, la variedad $A^*\mathfrak{a}$ consiste en las curvas Γ_1^* y Γ_2^* de V^* de ecuaciones respectivas $x_2=x_3=1$, $x_2=-x_3=1$

Solución.- Se razona igual que en el problema anterior



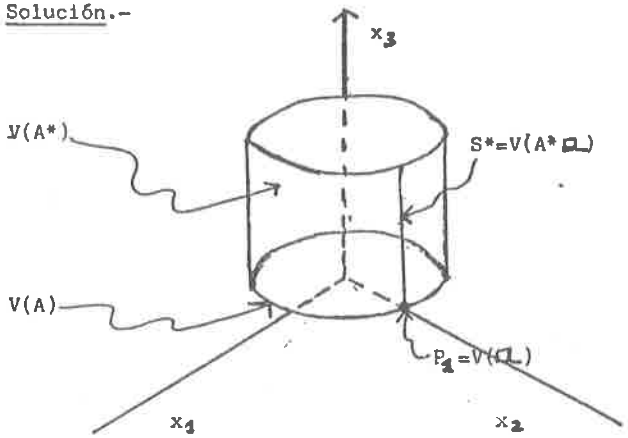
Ejercicio 12.- Sean

$A= \mathbb{C}[x_1,x_2] / (x_1^2+x_2^2-1)\ \mathbb{C}[x_1,x_2]$,

$A^*= \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3] / (x_1^2+x_2^2-1)$,

$P_1=V(\mathfrak{a})$ siendo $\mathfrak{a}=A(x_1,x_2-1)$ ideal del punto P_1 . Comprobar que $A^*\mathfrak{a}$ es el ideal primo $A^*\mathfrak{a}=A^*(x_1,x_2-1)$, es decir, $A^*\mathfrak{a}$ es el ideal de la recta S^* de V^* de ecuaciónes $x_1=0$, $x_2=1$

Solución.-

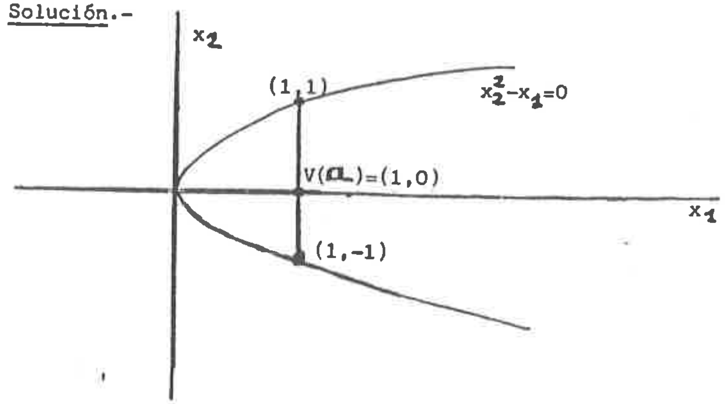


$A^*\mathfrak{a}=A^*(x_1,x_2-1)$ trivialmente. Veamos que este ideal es primo. Desde luego, $(x_1,x_2-1)\ \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ es un ideal primo, ya que está generado por polinomios irreducibles y la variedad que le corresponde también es irreducible.

Además $(x_1,x_2-1)R_3 \supset (x_1^2+x_2^2-1)R_3$, ya que $x_1^2+x_2^2-1=x_1\cdot x_1+(x_2+1)(x_2-1) \in (x_1,x_2-1)R_3$.
Luego $(x_1,x_2-1)R_3 / (x_1^2+x_2^2-1)R_3$ es primo.

Ejercicio 13.- Comprobar, con un contraejemplo, que $\mathfrak{a}$ primo no implica $A^*\mathfrak{a}$ primo.

Solución.-



Sean $A= \mathbb{C}[x_1]$, $A^*= \mathbb{C}[x_1,x_2]$ con la condición $x_2^2-x_1=0$, es decir, $A^*= \mathbb{C}[x_1,x_2] / (x_2^2-1)\ \mathbb{C}[x_1,x_2]$ y $\mathfrak{a}=A(x_1-1)$, $A^*\mathfrak{a}=A^*(x_1-1)$

$\mathfrak{a}$ es primo, porque $V(\mathfrak{a})=\{(1,0)\}$ es irreducible.

$A^*\mathfrak{a}$ no es primo, porque $V(A^*\mathfrak{a})=\{(x_1,x_2)\in \mathbb{C}^2 \mid x_1=1, x_2^2=x_1\}=\{(1,1),(1,-1)\}$, que no es irreducible.

Bibliografía

1) García, Etayo, Romo.- "interpretación geométrica de la teoría de ideales". Departamento de Algebra. Universidad Complutense de Madrid. Madrid 1986.

2) Roanes, E.- "Interpretación geométrica de la teoría de ideales". Publicaciones del Instituto Jorge Juan de Matemáticas del C.S.I.C. Madrid 1977.

LOS GRUPOS DEL TRIANGULO Y DEL RECTANGULO CON LOGO

Por Fernando Lisón

En el boletín número 8 de la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas (Diciembre 85), Roanes y Roanes informatizan en lenguaje LOGO una simulación del grupo de las isometrías que transforman un cuadrado en sí mismo (grupo del cuadrado), que permite familiarizarse con dichas isometrías y su composición.

En el mismo artículo, se sugiere elaborar análogamente los grupos del rectángulo y del triángulo (equilátero), basándose en el hecho de que el subgrupo de las isometrías que conservan el sentido en un n-gono regular es isomorfo al grupo aditivo de las clases residuales módulo n. Este es el objeto del presente artículo.

1. GRUPO DEL TRIANGULO

1.1. Explicación.- Tomando un triángulo equilátero de vértices distinguibles, podemos encontrar seis modos de colocarlo de manera que se superponga a sí mismo (figura 1).

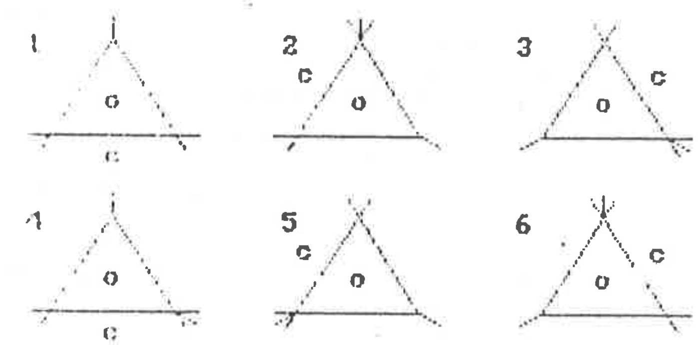


figura 1

Las posiciones 1, 2 y 3 de la figura 1 se obtienen girando alrededor del centro O un número entero de ángulos de 120 grados. Las posiciones 4, 5 y 6 se obtienen efectuando una simetría de eje OC (donde C es el punto medio de un lado determinado), y uno de los giros anteriores.

Las seis isometrías del grupo del triángulo se pueden caracterizar por un par ordenado de números (r , s), tal que r pertenezca al conjunto R = { 0 , 1 , 2 } y s pertenezca al conjunto S = { +1 , -1 }. Los elementos de R definen la posición del punto C mediante el número de ángulos de 120 grados entre OC y la semirrecta vertical hacia arriba de origen O. Los elementos de S definen el sentido en que el triángulo puede ser recorrido desde C, siendo +1 el sentido horario y -1 el antihorario.

En la figura 2 se visualizan las seis isometrías del grupo del triángulo, las cuales se caracterizan en la tabla siguiente:

NOMBRE ABREVIADO	ISOMETRIA	IMAGEN DEL PAR (r,s)
I	Giro de n ángulos de 120° ($n \in \dot{3}$) ó Identidad	(r,s)
J	Giro de m ángulos de 120° ($m \in \dot{3} + 1$)	(r + 1,s)
K	Giro de p ángulos de 120° ($p \in \dot{3} + 2$)	(r + 2,s)
A	Simetría de eje en dirección Noreste desde O	(r + 1,-s), r = 0 (r + 2,-s), r = 1
B	Simetría de eje vertical	(r,-s)
C	Simetría de eje en dirección Noroeste desde O	(r + 2,-s), r = 0 (r + 1,-s), r = 1

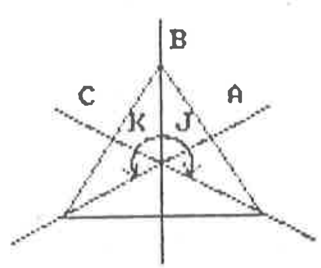


figura 2

El producto de estas isometrías responde a la siguiente tabla de composición:

	I	J	K	A	B	C
I	I	J	K	A	B	C
J	J	K	I	B	C	A
K	K	I	J	C	A	B
A	A	C	B	I	K	J
B	B	A	C	J	I	K
C	C	B	A	K	J	I

1.2. Procedimientos (en ACTI-LOGO)

Los siguientes procedimientos, definidos en ACTI-LOGO, podrían ejecutarse con LCSI-LOGO, utilizando el traductor de Pareja y Reanes, citado en la bibliografía.

```
PARA TRIANGULO
SI :R > 2 [HAZ "R :R - 3]
PONCOLORLAPIZ 3 PONRUMBO :R * 120
SL AV 2 * (RAIZCUADRADA 2700) / 3 BL GD :S * 30
REPITE 3 [GD 120 * :S AV :L] HAZ "C 0
REPITE 3 [HAZ "C :C + 1 PONCOLORLAPIZ :C BL REPITE 2
          [AV :L / 6 GI 120 * :S] AV :L / 6 SL AV :L]
GI 30 * :S RE 2 * (RAIZCUADRADA 2700) / 3
FIN

PARA K
AUXILIAR
HAZ "R :R + 2
TRIANGULO
REGLAS
FIN

PARA C
AUXILIAR
HAZ "S :S * -1
SI :R = 2 [HAZ "R :R + 1]
SI :R = 0 [HAZ "R :R + 2]
TRIANGULO
REGLAS
FIN
```

```
PARA JUEGO.TRI
HAZ "R 0 HAZ "L 60 HAZ "S 1
BP BT OT
TRIANGULO
ES [OBSERVA ESTE TRIANGULO. TIENE UNA SE-]
ES [NAL EN CADA ESQUINA. HAY 6 MODOS DE]
ES [COLOCARLO SOBRE SI MISMO. PIENSALOS]
ESPERA 150
BT
ES [LOS 6 MODOS DE HACERLO SE LLAMAN :]
ES [I, J, K, A, B, C.]
ES [AVERIGUA QUE PASA AL PULSAR UNA DE]
ES [ESAS TECLAS Y RETURN]
FIN

PARA E
BT BP OT
HAZ "R 0 HAZ "S 1
TRIANGULO
REGLAS
FIN

PARA REGLAS
ES [PULSA UNA DE LAS TECLAS :]
ES [I, J, K, A, B, C.]
ES []
ES [PARA FINALIZAR, PULSA F]
FIN

PARA BORRADOR
PONCOLORLAPIZ 0 PONRUMBO 0
AV 2 * (RAIZCUADRADA 2700) / 3 GD 150
REPITE 3 [AV :L REPITE 3 [AV :L / 6 GI 120] GD 120]
GI 150 RE 2 * (RAIZCUADRADA 2700) / 3
FIN

PARA F
REPITE 5 [ES []]
SL PONPOS [-60 20] BL
ES [TODO LO HECHO ES IGUAL QUE SOLO]
BORRADOR
SI Y :S = 1 :R = 0 [HAZ "P [I]]
SI Y :S = 1 :R = 1 [HAZ "P [J]]
SI Y :S = 1 :R = 2 [HAZ "P [K]]
SI Y :S = -1 :R = 0 [HAZ "P [B]]
SI Y :S = -1 :R = 1 [HAZ "P [A]]
SI Y :S = -1 :R = 2 [HAZ "P [C]]
HAZ "R 0 HAZ "S 1
TRIANGULO
ES :P
ES [PARA VOLVER A EMPEZAR PULSA E]
FIN
```

BOLETIN DE INSCRIPCION

D. ______________________________

Dirección particular ______________________________

Código postal ____________ Teléfono ____________

Centro de trabajo ______________________________

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO NUMERARIO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ______________________________

____

para que cargue en mi cuenta num° ______________________________

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1989-90

y siguientes.

____________ de ____________ de 1990

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ____________ Banco ______________________________

____

Ruego abonen con cargo a mi cuenta ____________ de número

____________, los recibos de mi cuota anual en la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: ______________________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado n° 9479 - 28080-MADRID.

SOLICITUD DE ADHESION DE CENTRO

D. ______________________________

como ____________ del Centro ______________________________

____

domiciliado en ______________________________

____________ Código postal ________ Tfno. ____________

SOLICITA LA ADHESION A LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ______________________________

____

para que cargue en la cuenta n° ____________, los recibos correspondientes al curso 1989-90 y siguientes.

____________ de ____________ de 1990

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ____________ Banco ______________________________

____

Ruego abonen con cargo a la cuenta ____________ de número

____________, los recibos de la cuota anual de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: ______________________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado n° 9479 - 28080-MADRID.

```
PARA I
AUXILIAR
TRIANGULO
REGLAS
FIN

PARA B
AUXILIAR
HAZ "S :S * -1
SI :R = 2 [HAZ "R :R + 2]
SI :R = 1 [HAZ "R :R + 1]
TRIANGULO
REGLAS
FIN

PARA A
AUXILIAR
HAZ "S :S * -1
SI :R = 1 [HAZ "R :R + 2]
SI :R = 0 [HAZ "R :R + 1]
TRIANGULO
REGLAS
FIN

PARA AUXILIAR
BT BP SL PONPOS [-60 20] BL
TRIANGULO
SL PONPOS [-15 30]
PONCOLORLAPIZ 3 BL PONPOS [15 30]
PONRUMBO 120 RE 7 AV 7
GI 60 RE 7 AV 7
SL PONPOS [60 20] BL
FIN

PARA J
AUXILIAR
HAZ "R :R + 1
TRIANGULO
REGLAS
FIN
```

1.3. Ejecución

Como el programa está concebido para ser ejecutado sin conocimientos informáticos previos, al escribir JUEGO.TRI (seguido de la tecla RETURN), ofece una breve explicación e invita a observar el resultado de ejecutar una de las isometrías I, J, K, A, B, C.

Se pueden realizar continuamente isometrías que van transformando el triángulo resultante de la isometría anterior, o el original. Para determinar la transformación compuesta de todas las realizadas, basta con pulsar F (y

RETURN).

Pulsando E (y RETURN), se reinicializan las variables del triángulo y se vuelve al comienzo del programa sin mostrar las instrucciones preliminares.

2. GRUPO DEL RECTANGULO

2.1. Explicación.- Análogamente, para un rectángulo de vértices distinguibles, podemos encontrar cuatro modos de colocarlo de forma que se superponga a sí mismo, como indica la figura 3.

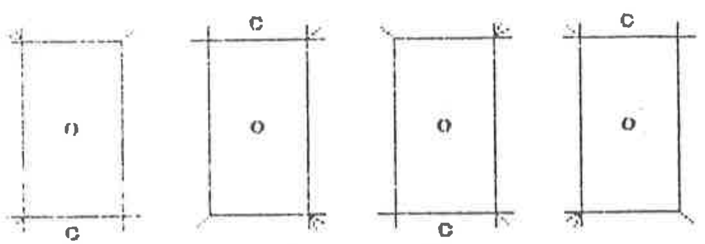


figura 3

Considerando los conjuntos R = { 0 , 1 } y S = { +1 , -1 } podemos caracterizar las cuatro isometrías del grupo del rectángulo según la tabla:

NOMBRE ABREVIADO	ISOMETRIA	IMAGEN DEL PAR (r,s)
I	Giro de n ángulos de 180° (n ∈ 2) ó Identidad	(r,s)
J	Giro de m ángulos de 180° (m ∈ 2 + 1)	(r + 1,s)
A	Simetría de eje horizontal	(r + 1,-s)
B	Simetría de eje vertical	(r,-s)

En la figura 4 se visualizan las isometrías.

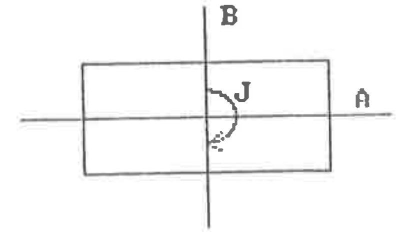


figura 4

La tabla de composición de estas isometrías es la siguiente:

	I	J	A	B
I	I	J	A	B
J	J	I	B	A
A	A	B	I	J
B	B	A	J	I

2.2. Procedimientos (en ACTI-LOGO)

Los siguientes procedimientos, definidos en ACTI-LOGO, podrían ejecutarse con LCSI-LOGO, utilizando el traductor de Pareja y Roanes, citado en la bibliografía.

```
PARA E
BT BP OT
HAZ "R 0 HAZ "S 1
RECTANGULO
REGLAS
FIN

PARA REGLAS
ES [PULSA UNA DE LAS TECLAS 1, J, A, B]
ES [PARA FINALIZAR, PULSA F]
FIN

PARA BORRADOR
PONCOLORLAPIZ 0 PONRUMBO 0
AV :L GD 90 RE :L / 2
REPITE 2 [AV :L REPITE 4 [AV :L / 6 GI 90] SL AV :L / 9 GI 90
          AV :L  /  9 BL RELLENA REPITE 2 [RE :L / 9 GD 90] AV
          :L * 2 REPITE 4 [AV :L / 6 GI 90] SL AV :L / 9 GI 90
          AV :L / 9 BL RELLENA REPITE 2 [RE :L / 9 GD 90]]
AV :L / 2 GI 90 RE :L
FIN
```

```
PARA F
REPITE 5 [ES [ ]]
SL PONPOS [-60 20] BL
ES [TODO LO HECHO ES IGUAL QUE SOLO]
BORRADOR
SI Y :S = 1 :R = 0 [HAZ "P [I]]
SI Y :S = 1 :R = 1 [HAZ "P [J]]
SI Y :S = -1 :R = 0 [HAZ "P [B]]
SI Y :S = -1 :R = 1 [HAZ "P [A]]
HAZ "R 0 HAZ "S 1
RECTANGULO
ES :P
ES [PARA VOLVER A EMPEZAR PULSA E]
FIN

PARA I
AUXILIAR
RECTANGULO
REGLAS
FIN

PARA B
AUXILIAR
HAZ "S :S * -1
RECTANGULO
REGLAS
FIN

PARA A
AUXILIAR
HAZ "R :R + 1
HAZ "S :S * -1
RECTANGULO
REGLAS
FIN

PARA J
AUXILIAR
HAZ "R :R + 1
RECTANGULO
REGLAS
FIN

PARA AUXILIAR
BT BP SL PONPOS [-60 20] BL
RECTANGULO
SL PONPOS [-10 20]
PONCOLORLAPIZ 3 BL PONPOS [10 20]
PONRUMBO 120 RE 7 AV 7
GI 60 RE 7 AV 7
SL PONPOS [60 20] BL
FIN
```



```
PARA RECTANGULO
SI :R > 1 [HAZ "R :R - 2]
PONCOLORLAPIZ 3 PONRUMBO :R * 180
SL AV :L GD 90 * :S AV :L / 2 BL
REPITE 2 [GD  90  *  :S  AV :L * 2 GD 90 * :S AV :L] HAZ "C 0
REPITE 2 [HAZ "C :C + 1 PONCOLORLAPIZ :C BL REPITE 3 [AV :L /
6 GI 90 * :S]
          AV :L / 6 SL AV :L * 2 BL REPITE 4 [AV :L / 6 GI 90
          * :S] SL AV :L / 9 GI  90 * :S AV :L / 9 BL RELLENA
          REPITE 2 [RE :L / 9 GD 90 * :S] SL AV :L]
RE :L / 2 GI 90 * :S RE :L
FIN

PARA JUEGO.REC
HAZ "R 0 HAZ "L 40 HAZ "S 1
BP BT OT
RECTANGULO
ES [OBSERVA ESTE RECTANGULO. TIENE UNA SE-]
ES [ÑAL EN CADA ESQUINA. HAY 4 MODOS DE]
ES [COLOCARLO SOBRE SI MISMO. PIENSALOS]
ESPERA 150
BT
ES [LOS 4 MODOS DE HACERLO SE LLAMAN :]
ES [I, J, A, B. AVERIGUA QUE PASA AL]
ES [PULSAR UNA DE ESAS TECLAS Y RETURN]
FIN
```

2.3. __Ejecución__.- Para ejecutar la simulación de las isometrías del grupo del rectángulo,escribimos JUEGO.REC (seguido de la tecla RETURN). En lo demás, se opera igual que con el grupo del triángulo.

3. BIBLIOGRAFIA

- ABELSON H. y DISESSA A.: Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics. The MIT Press. Londres 1981.
- PAREJA C. y ROANES E.: Traductor automático LOGO inglés LOGO español. Publicaciones Pablo Montesino. Madrid 1989
- ROANES M. y ROANES L.: Grupo del cuadrado con LOGO; Boletín de la Sociedad "Puig Adam". Núm. 8 (dic. 1985).
- ROANES MACIAS, E.: Introducción a la Geometría. Anaya. Madrid. 1980.
- WATT D.: Aprendiendo con LOGO. McGraw-Hill. Madrid. 1984.

Como socio de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín (señalar con unas aspas los que interesen):

3	4	5	9	10	11	13	14	15	16	17	18	19	20	21
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo (20 pts. por número para Madrid y 30 pts. por número para provincias).

Hagan el envío utilizando como dirección la que consigno en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8 y 12 están agotados. De los números 9 y 19 quedan sólo unos pocos ejemplares.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la Sociedad, Apartado 9479 - 28080-MADRID.

DIVERSAS FORMAS DE ESTUDIAR LA SEMEJANZA ENTRE TRIANGULOS EN LA GEOMETRIA ELEMENTAL.

Por Juan Bosco Romero Márquez
Departamento de Algebra y Geometría
Universidad de Valladolid

En esta investigación elemental presentamos diversas formas de construir triángulos semejantes, a partir de dos triángulos dados homotéticos o en posición de Thales, tomando como puntos vértices de estos triángulos, respectivamente, los baricentros de tres cuadriláteros construidos con ellos, y mediante los puntos definidos por la incidencia de las diagonales de dichos cuadriláteros.

De otra parte, dado un triángulo cualquiera se puede construir a partir de él, mediante un giro o rotación de cualquier ángulo, entre 0 y 180, un nuevo triángulo semejante al dado.

Esta experiencia en su parte manipulativa o de construcción geométrica y en la parte más sencilla, fue experimentada con los alumnos de 1º de BUP, y en su aspecto de cálculo algebraico- trigonométrico, con los alumnos de 3º de BUP.

1.- Semejanza de triángulos en posición general mediante un giro.(figura 1).

Establezcamos el siguiente resultado elemental:

Teorema.1-; Sea T(O), ABC, un triángulo plano fijo dado en el plano euclídeo. Con centros los vértices, A,B,y C del triángulo, respectivamente, efectuamos un giro o rotación de ángulo $0 < X < 180°$,en el sentido de las agujas del reloj (o contrario), obteniéndose, las rectas r(A,X), s(B,X) y t(C,X).

Designamos por T (X) el triángulo A'(X)B'(X)C'(X) definido por los siguientes puntos de intersección de los pares de rectas que se indican: A'(X) = r(A,X)   s(B,X), B'(X) = s(B,X)   t(C,X), y C'(X) = s(C,X)   r(A,X).

Entonces, el triángulo A'(X)B'(X)C'(X), es semejante al triángulo ABC y de la misma orientación.

Demostración.- En la figura 1, se dan tres construcciones del triángulo T(X) para tres ángulos cualesquiera, X, cuando este es, respectivamente, un ángulo agudo, recto, u obtuso.Se indica además, la posición en el plano que va a tener el triángulo construido en relación al triángulo inicial.

Para ver que los triángulos T(0) y T(X) son semejantes es suficiente el comprobar que los ángulos correspondientes mediante la transformación hecha, son iguales.

En efecto, un recuento de ángulos, por ejemplo, tomando como base los triángulos ABC y A''B''C'', indicados en la figura, permite obtener, a partir, del triángulo BA''A, y similarmente, para los demás ángulos, que:

$$180 - A'' + A - X + X = 180.$$

De aquí, se deduce de forma inmediata que, A=A''.Con lo que queda demostrado el teorema propuesto.

Observación.- Cuando el ángulo X tiende a cero, es claro, que el triángulo T(X) tiende al triángulo T(0).

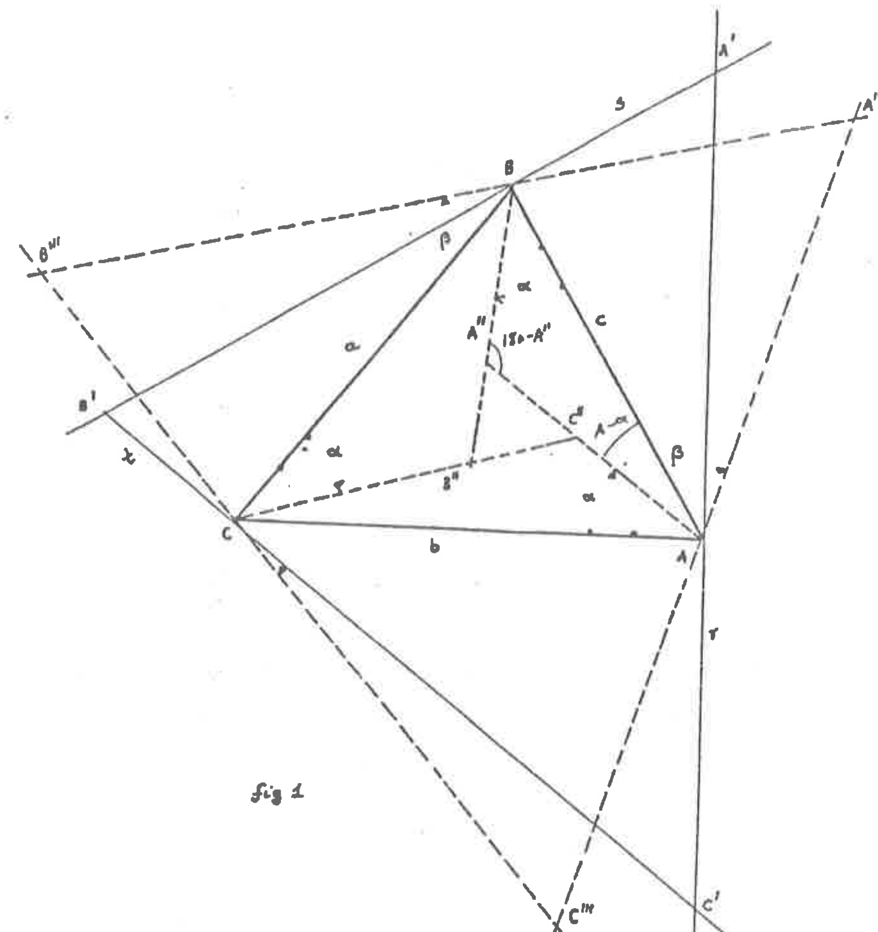


fig 1

De otra parte, cuando X tiende a 180°, el triángulo T(X) tiende al triángulo T(0), es decir, al triángulo ABC.

Con las mismas definiciones y notaciones anteriores que intervienen, en el teorema anterior, y si designamos, por a,b,c y a',b'c', los lados, respectivamente, de los triángulos T(0) y T(X=90°), se puede comprobar por cálculo trigonométrico sencillo, con ciertos triángulos rectángulos que aparecen en la figura 1, que

$$a' = (c/\text{Sen } A) + b \text{ cotg } C \;;$$

$$b' = (a/\text{Sen } B) + c \text{ cotg } A \;;$$

$$c' = (b/\text{Sen } C) + a \text{ cotg } B \;.$$

A título de ejercicio se puede comprobar, además, que:

Las alturas h(A'), h(B') y h(C'), del triángulo A'(X)B'(X)C'(X) son respectivamente, paralelas a los lados BC, CA, y AB, y, recíprocamente, las alturas del triángulo ABC, es decir, h(A), h(B), y h(C) son respectivamente, paralelas a los lados del triángulo A'(X)B'(X)C'(X).

Un buen ejercicio complementario sería calcular todos los elementos geométricos: lados, puntos y rectas notables del triángulo T(X) cuando el ángulo X, fuera agudo u obtuso.

2.- Semejanza de un par de triángulos en posición homotética o de Thales con un nuevo triángulo obtenido mediantes los baricentros de los cuadriláteros determinados por los triángulos dados, y que se definen en el teorema siguiente.(figura 2).

Teorema 2.- Sean ABC y A'B'C' un par de triángulos homotéticos directamente. Sean los puntos A'', B'' y C'', respectivamente, los puntos baricentros o centros de gravedad de los cuadrilatéros BB'C'C, CC'A'A, BB'A'A, Entonces, el triángulo A''B''C'' es inversamente semejante a los triángulos dados.

Más aún, si G, G' y G'' designan respectivamente, los centros de gravedad o baricentros de los triángulos ABC, A'B'C' y A''B''C'', entonces, los puntos G,G' y G" estan alineados o sobre la misma recta.

Una demostración elemental vectorial de este teorema es la siguiente:

Demostración.- Si designamos, respectivamente, por $A \longleftrightarrow a$, $B \longleftrightarrow b$, $C \longleftrightarrow c$; $A' \longleftrightarrow a'$, $B' \longleftrightarrow b'$, $C' \longleftrightarrow c'$; $A'' \longleftrightarrow a''$, $B'' \longleftrightarrow b''$ y $C'' \longleftrightarrow c''$; $G \longleftrightarrow g$, $G' \longleftrightarrow g'$ y $G'' \longleftrightarrow g''$, respectivamente, para los centros de gravedad de los triángulos ABC, A'B'C' y A''B''C'', son los vectores de posición de los puntos que intervienen en el teorema respecto de un origen O, tenemos, que siempre podamos suponer que : a'= ka, b'= kb y c'=kc. donde k es un número real no nulo.

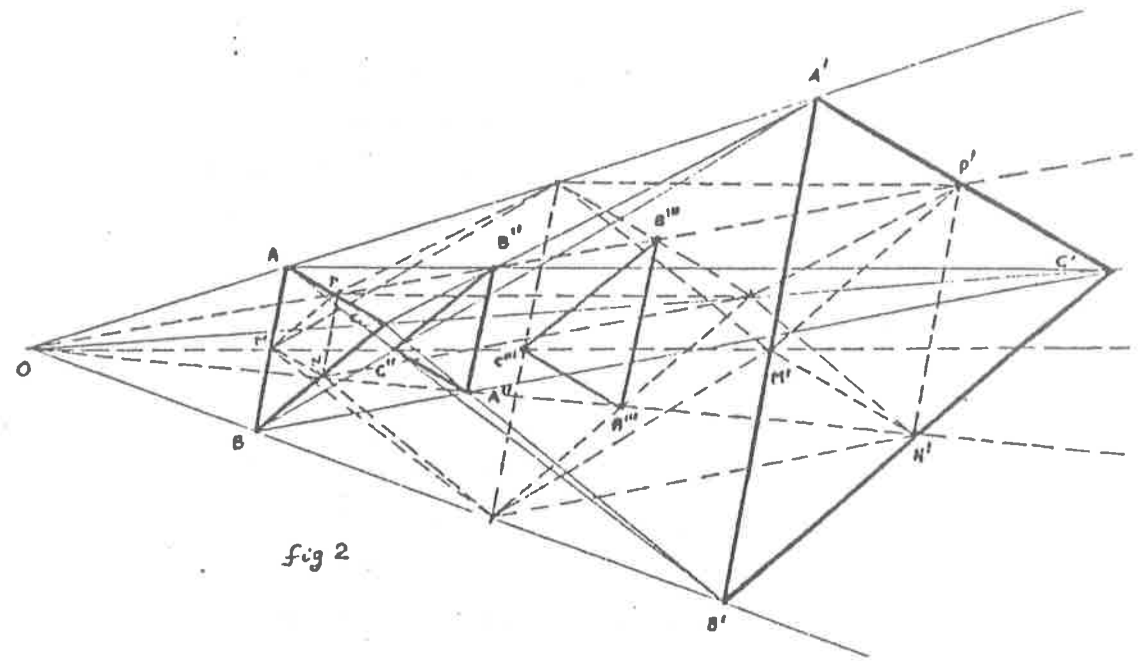


fig 2

De la definición de centro de gravedad de un cuadrilátero tenemos que:

$$A'' \longleftrightarrow a'' = (b+b'+c'+c)/4=(1+k)(b+c)/4;$$

$$B'' \longleftrightarrow b'' = (c+c'+a'+a)/4=(1+k)(c+a)/4; \qquad (1)$$

$$C'' \longleftrightarrow c'' = (b+b'+a'+a)/4=(1+k)(a+b)/4.$$

De otra parte, el cálculo directo siguiente da :

$\overrightarrow{A''B''} = b''-a'' = (1+k)(a-b)/4 = (1+k)\overrightarrow{BA} / 4,$

$\overrightarrow{A''C''} = c''-a'' = (1+k)(a-c)/4 = (1+k)\overrightarrow{CA}/4 ,$

$\overrightarrow{B''C''} = c''-b'' = (1+k)(b-c)/4 = (1+k)\overrightarrow{CB}/4,$

estas relaciones que prueban que, el triángulo A''B''C''es inversamente homotético a los triángulos dados ABC y A'B'C', directamente homotéticos, como queríamos demostrar.

Veamos, ahora, la siguiente afirmación del teorema:

$G'' \longleftrightarrow g'' = (a''+b''+c'')/3 = 1/2\ g + 1/2\ g' = (1+k)/2\ g$,

que se obtienen, al, hacer las sutituciones y las operaciones convenientes en estas expresiones.De aquí, llegamos a que los puntos G,G'y G'' son colineales.

Nota.- Las ecuaciones (1) están definidas aún cuando k es cero, y definen los vértices de un triángulo inversamente homotético al triángulo ABC con razón de semejanza, igual a 1/4.

Problema.- Calcular el área y el perímetro y otros elementos geométricos del triángulo baricéntrico A''B''C'' enunciado en el teorema 2, supuestos conocidos los elementos geométricos correspondientes del triángulo ABC.

3.- Semejanza de un par de triángulos homotéticos directamente con un nuevo triángulo obtenido por los puntos de intersección o incidencia de las diagonales de los tres cuadriláteros mencionados en el teorema 2, y que se enuncia en el teorema siguiente:

Teorema 3.- Sean ABC y A'B'C' dos triángulos dados directamente homotéticos o en posición de Thales.Sean los puntos A'', B'' y C'' definidos como la intersección de las rectas diagonales, de los cuadriláteros BB'C'C, CC'A'A, BB'A'A.Esto, es: A''= BC' CB', B''= AC' CA' y C''= AB' BA'.Entonces, el triángulo A''B''C'' es inversamente homotético a los triángulos dados, ABC y A'B'C'.

Más aún, si G, G' y G'', son respectivamente, los centros de gravedad de los triángulos ABC, A'B'C' y A''B''C'', entonces, G,G' y G'' son colineales, es decir, se encuentran alineados.

Una demostración de este teorema se puede ver en mi artículo (2).

Problema.- Determinar el area y el perímetro y otros elementos geométricos del triángulo A''B''C'', enunciado en el teorema 3,si se suponen conocidos los correspondientes elementos geometricos del triángulo ABC.

Observaciones.-1) Tanto el teorema 2, como el teorema 3, construyen, en cierto sentido, triángulos medios homotéticos a los dos dados: en el teorema 2, el triángulo construido lo ha sido con los baricentros de los cuadriláteros antes mencionados; en el teorema 3, el triángulo construido ha sido por incidencia de las diagonales de los mismos cuadriláteros.

Cuando los dos triángulos son congruentes mediante una homotecia de razón, 1, entonces los dos triángulos de los teoremas 2 y 3 coinciden, ya que, en este caso, los cuadriláteros anteriores son todos paralelogramos.

En ambos casos, pueden ser considerados los triangulos construidos en los teoremas 2 y 3, como triángulos de Varignon, de los dos triángulos homotéticos dados ABC y A'B'C', como se ve en la posición límite de hacer coincidir uno con el otro.

BIBLIOGRAFIA.-

(1) D. Pedoe.: A course of Geometry for colleges and universities.University Press.Cambridge, 1970.

(2) J.B.Romero Márquez.:Semejanza baricéntrica entre triángulos. Para aparecer.,1988.

(3) H.Eves:Estudios de las Geometrías,I,II. .Uteha.México,1969.

(4) S. Dubuc.: Geometrie Plane.P.U.F.Paris,1971.

(5) H.S.M. Coxeter.:Fundamentos de Geometría. Limusa. México,1971.

(6) I.M. Yaglom.:Geometric Transformations,I,II,III. Randon House. New York,1967.

ESTUDIO DEL VOLUMEN DE LA HIPERESFERA

A.Martinez Sanz — I. B Arcipreste de Hita

M.Avilés Sánchez — I. B Calderon de la Barca

En el presente artículo se aborda el cálculo del área y el volumen de una hiperesfera por tres procedimientos distintos, dos de ellos son de tipo analítico y el otro es computacional, e ilustra una de las múltiples aplicaciones del método de Montecarlo en el cálculo de áreas y volumenes, que no sean accesibles por otros procedimientos de cálculo numérico. En este caso tiene sólo interés en cuanto es fácil su generalización a recintos más complicados.

PRIMER METODO ANALITICO

La esfera es el lugar geométrico de los puntos, cuya distancia a un punto fijo es igual a constante.
En espacios de una dimensión la esfera es un par de puntos, en dos dimensiones es un círculo y asi sucesivamente. Desde el punto de vista topológico a la esfera unidimensional se le llama 0-esfera, al círculo 1-esfera y asi sucesivamente.
Convenimos en lo que sigue que S_n es el contenido n-1 dimensional (superficie) de una esfera de radio unidad n dimensional; por ejemplo $S_1=2$, $S_2=2\pi$. Si esto ocurre cuando r=1, en el caso de una esfera de radio r se tendrá que su superficie será $S_n r^{n-1}$ y por tanto su volumen se podrá calcular por el método de integración por "cascaras".

$$V_n=\int_0^R S_n r^{n-1} dr = \frac{S_n R^n}{n};$$ R, radio de la hiperesfera.

Nos falta encontrar una expresión para S_n y lo vamos ha realizar aplicando dos métodos distintos para la integración de la función e^{-r^2} donde $r^2= x_1^2+ x_2^2+\ldots\ldots+ x_n^2$
Cuando integramos una funcion de $r =\left(x_1^2+ x_2^2+\ldots\ldots\ldots+x_n^2 \right)^{1/2}$
el elemento de volumen puede ser $dx_1\ldots\ldots dx_n$
o bien $S_n r^{n-1}dr$.
Tenemos entonces que $\int_0^\infty e^{-r^2} S_n r^{n-1} dr = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2-\ldots-x_n^2} dx_1\ldots dx_n =$
$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^n$

Partiendo de la definición de la funcion gamma de Euler que aparece a continuacion

$$2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2m-1}dr= \int_0^\infty e^{-t}t^{m-1}dt = \Gamma(m);$$ en nuestro caso deducimos

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2\frac{1}{2}-1} dx = \Gamma(\tfrac{1}{2})$$; por tanto tenemos

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^n = \left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^n ; \quad (I)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} S_n\, r^{n-1}dr = S_n \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1}dr = \frac{S_n}{2}\; 2\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2\frac{n}{2}-1} dr = \frac{S_n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

llamando a esta expresión (II) , e igualando (I) con (II) nos queda

$$\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^n = \frac{S_n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$; y como $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{1/2}$; tendremos finalmente

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$; como teníamos que $V_n = \frac{S_n}{n} R^n$, entonces queda

$$V_n = \frac{2\pi^{n/2} R^n}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$; y dado que la funcion Γ verifica la siguiente propiedad ; $\Gamma(k+1) = k\,\Gamma(k)$, aplicandola en nuestro caso queda finalmente que el volumen es igual a

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$; donde R es el radio de la esfera n-dimensional.

SEGUNDO METODO ANALITICO

Este metodo parte de las coordenadas polares para calcular V_1, V_2, V_3,....,V_n y como es obvio hace uso de integrales simples, dobles, triples, etc. Tiene la ventaja de ser mas "natural" que el anterior , aunque al final, como es lógico, van a aparecer semifactoriales o funciones gamma, dependiendo de como queramos que aparezca la expresión final del volumen.

$$V_2=\iint r\,dr\,d\alpha = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\alpha = \pi R^2;$$

$$V_3= \iiint r^2 \operatorname{sen} \alpha\, dr\, d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_0^R r\,dr \int_0^{\pi} d\alpha_1 \int_0^{2\pi} d\alpha_2 = \frac{R^3}{3}\left[-\cos \alpha_1\right]_0^{\pi} 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$V_4= \iiiint r^3 \operatorname{sen}^2\alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 dr\, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = \int_0^R r^3dr \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\alpha_1 d\alpha_1 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\alpha_2 d\alpha_2 \int_0^{2\pi} d\alpha_3 = \frac{\pi R^4}{2};$$

Evidentemente en el caso del cálculo de V_n aparecería una integral

n-dimensional en cuyo cálculo el único problema sera el calcular las integrales de las sucesivas potencias del seno entre $[0,\pi]$.
Esto puede hacerse de dos formas

a) Usando semifactoriales

b) Mediante la funcion Γ

En el caso a) apareceran dos formulas para V segun sea "n" (par o impar)
Si hacemos uso de la funcion Γ veremos que partiendo del método empleado anteriormente para calcular V_1,V_2,V_3 se llega a una fórmula identica que la obtenida con el PRIMER METODO ANALITICO.

a) SEMIFACTORIALES

Para calcular V_n partimos de las siguientes formulas de $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n t\, dt$

$$I=\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n t\, dt = \begin{cases} \text{Si } n \text{ par } I= \dfrac{(m-1)!!\ \pi}{m!!\ 2} \\ \text{Si } n \text{ impar } I= \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \end{cases}$$

Si n es par queda (III)

$$V_n= \int_0^R r^{n-1}dr \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{n-2}\alpha_1 d\alpha_1 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{n-3}\alpha_2 d\alpha_2 \cdots \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\alpha_{n-2} d\alpha_{n-2} \int_0^{2\pi} d\alpha_{n-1} =$$

$$= \left[\frac{(n-3)!!\pi}{(n-2)!!}\right]\left[\frac{(n-4)!!2}{(n-3)!!}\right]\left[\frac{(n-5)!!\pi}{(n-4)!!}\right]\cdots\left[\frac{1!!\pi}{2!!}\right]\left[\frac{0!!2}{1!!}\right].2\pi.\frac{R^n}{n};$$

luego si n=par $\Rightarrow V_n=\dfrac{2^{n/2}\pi^{n/2}R^n}{n(n-2)!!}$;

Si n es impar llegamos a que

$$V_n=\frac{R^n}{n}\left[\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}2\right]\left[\frac{(n-4)!!}{(n-3)!!}\pi\right]\left[\frac{(n-5)!!}{(n-4)!!}2\right]\cdots\left[\frac{1!!}{2!!}\pi\right]\left[\frac{0!!}{1!!}2\right].2\pi= \frac{R^n 2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n(n-2)!!};$$

osea, que el volumen cuando n (impar) $V_n=\dfrac{R^n 2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n(n-2)!!}$;

En el caso b) vamos a emplear la misma técnica que en (III) pero con la siguiente expresión para la integral de una potencia del seno entre $[0,\pi]$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n t \, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{\pi^{1/2}}{2}$$: que aplicado a (III) dara una expresión para la fórmula del volumen coincidente a la que calculamos por el primer metodo analítico.

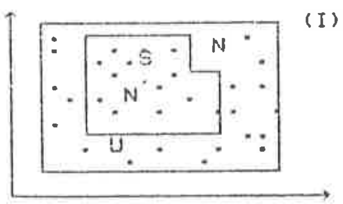
$$V_n = \frac{R^n}{n} \pi^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)} \frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}+1\right)} \pi^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}+1\right)} \ldots \pi^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2\pi =$$

$$\frac{R^n (\sqrt{\pi})^{n-2} \, 2\pi}{n \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{R^n \, \pi^{\frac{n-2}{2}+1}}{\frac{n}{2} \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$ luego el volumen de la esfera n-dimensional es, dada la propiedad de las funciones gamma, igual a

$$\text{(IV)} \qquad V_n = \frac{R^n \, \pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$ que coincide con la fórmula

encontrada por el primer método analítico.

METODO COMPUTACIONAL



(I)

En esencia el método de Montecarlo aplicado al cálculo del área de la figura (S) puede efectuarse de la manera siguiente .

Supongamos que (S) es una figura arbiriá con frontera curvilínea, definida gráfica o analíticamente .Supongamos que dentro de un cuadrado de area (U).

Vamos a tomar (N) puntos aleatorios con la condición de que pertenezcan al cuadrado. Sea N' el numero de puntos que estan en (S). Es evidente que por razones geométricas se verifica la siguiente igualdad. $\frac{S}{U} = \frac{N'}{N}$; luego $S = \frac{N'}{N} U$;

En el caso que nos ocupa se procede como sigue. Se considera que la esfera n-dimensional está dentro de un intervalo n-dimensional Definido por $A= [-R,R]\times[-R,R]\times \ldots \times[-R,R]$. Bastará con crear un algoritmo que realice lo siguiente

a) Generar numeros aleatorios uniformemente distribuidos por el por el intervalo n-dimensional de tal forma que el punto genérico $(x_1,\ldots,x_n)$ pertenezca ha dicho intervalo, lo cual es evidente si $-R \le x_i \le R$ con $1 \le i \le n$.

b) Comprobar si $(x_1,\ldots,x_n)$ verifica $x_1^2+\ldots+x_n^2 \le R$, en cuyo caso pertenece a la esfera.

c) Esta prueba se repite un numero de veces suficiente (1000 en nuestro caso).

d) Se toma la media de los resultados.

PROGRAMA PARA EL CALCULO DEL VOLUMEN DE LA N-ESFERA

El programa ha sido realizado en GW-BASIC. Se da un listado del mismo que tiene suficientes notas aclaratorias para para poderlo seguir con comodidad.

Modificando las lineas 50,145 y 160 el programa puede ser facilmente modificado para calcular otro volumen por el método de Montecarlo. Esta ha sido la razón por la cual se han introducido en el programa las lineas 60,65,70,75,80 y 140 que permiten una fácil adecuación a otro tipo de recinto.

Es evidente que en nuestro caso cuando se nos pidan las coordenadas del intervalo n-dimensional se contestará introduciendo "n" (dimensión de la esfera) pares -R,R, siendo "R" el radio de la esfera.

El programa ha sido realizado en un Tandom PCA20, que viene con una CPU Intel 80286 a 8 MH .

Si se elige N=4 el programa tarda en ejecutarse 3 minutos aproximadamente.

Si se dispone de un compatible PC (8088 o 8086) el tiempo es considerablemente mayor. Para tener una idea del orden de magnitud del tiempo de ejecución, baste saber que en un APPLE II + el programa tarda unos 20 minutos.

```
5 'METODO DE MONTECARLO PARA CALCULAR EL VOLUMEN DE LA ESFERA N-DIMENSIONAL
7 'A(I),B(I) COORDENADAS DEL INTER N-DIMEN CIRCUNSCRITO A LA ESFERA
8 'X(1),..,X(N) COOR DE UN PUNTO INTERIOR AL CUBO N-DIMENSIONAL ELEGIDAS ALEAT
IAMENTE
10 CLS
30 DIM A(20),B(20),X(20)
40 LOCATE 10,20:INPUT "DIMENSION DE LA ESFERA =",N
50 LOCATE 12,20:INPUT "RADIO =",R
60 FOR I=1 TO N
65 LOCATE 14,5:PRINT SPC(70)
70 LOCATE 14,10:PRINT "COORDENADAS DEL INTER N-DIMEN (A(";I;"),B(";I;"))";
75 INPUT A(I),B(I)
80 NEXT I
85 CLS
90 S(0)=0:' EN S(H) SE ALMACENAN LAS SUMAS DE LOS VOLUMENES OBTENIDOS EN LAS I
RACIONES
100 FOR H=1 TO 10
110 J=0:' J ES LA VARIABLE QUE GUARDA LOS PUNTOS QUE PERTENECEN A LA ESFERA
120 FOR K=1 TO 1000:' SE TOMAN 1000 PUNTOS QUE PERTENECEN AL CUBO N-DIMENSIONAL
125 SU=0:' EN "SU" SE GUARDA SU=X(1)^2+....+X(N)^2
130 FOR I=1 TO N
135 RANDOMIZE TIMER:' INICIALIZACION DE LOS NUMEROS ALEATORIOS
140 X(I)=A(I)+(B(I)-A(I))*RND:' EL PUNTO ALEATORIO X(I) PERTENECE AL CUBO
145 SU =SU+X(I)^2
150 NEXT I
160 IF SQR(SU)>R THEN 170:' SI EL PUNTO NO PERTENECE A LA ESFERA SE DESCARTA
165 J=J+1
170 NEXT K
180 VH=(2*R)^N:' VOLUMEN DE CUBO
190 V(H)=(J/1000)*VH:' VOLUMEN DE LA ESFERA
200 PRINT "EL VOLUMEN EN LA ";H;" ITERACION ES V(";H;")=";V(H)
220 S(H)=V(H)+S(H-1)
250 NEXT H
260 V=S(10)/10:' VOLUMEN MEDIO EN LAS 10 ITERACIONES
265 PRINT
270 PRINT "EL VOLUMEN MEDIO ES V=";V
```


PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS DE ALGUNOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LAS RECIENTES OPOSICIONES A PROFESORES AGREGADOS DE INSTITUTOS DE BACHILLERATO, EN DIVERSOS TRIBUNALES

PROBLEMA Nº 1 :

Sean a y b enteros positivos. Demostrar que $\sqrt{2}$ siempre está comprendido entre las dos fracciones:

$$a/b \quad \text{y} \quad (a+2b)/(a+b) \; .$$

¿ Cual de las dos fracciones está más próxima a $\sqrt{2}$?

(Andalucía, 1989).

PROBLEMA Nº 2 :

Sea X un conjunto finito y llamemos

$$k(X) = \sum_{B \in P(X)} (-1)^{\operatorname{card} B}$$

siendo $P(X)$ el conjunto de las partes de X .

Demostrar que $k(X) = 1$ si $X = \emptyset$ si $X \neq \emptyset$.

(Andalucia, 1989)

PROBLEMA Nº 3 :

Sean A , B y C los vértices de un triángulo. Sean A' , B' y C' los puntos medios de BC , CA y AB respectivamente. A todo punto M del plano del triángulo se le hacen corresponder sus simétricos P , Q y R con respecto a A' , B' y C' . Demostrar que las rectas AP , BQ y CR , se cortan en un punto M' .

Estudiar la correspondencia entre M y M' .

(Andalucía. 1989)

PROBLEMA Nº 4 :

Hallar el lugar geométrico de los puntos de corte de las diagonales de todos los paralelogramos que pueden inscribirse en un cuadrilátero dado.

(Madrid, nº 1, 1989)

PROBLEMA Nº 5 :

Se dan los puntos $A(a,0)$ y $B(0,b)$, tales que $a + b = 2d$ (siendo d constante). Sobre AB como diagonal, se construye un cuadrado, cuyos otros dos vértices son C y D . Probar que, al variar a y b , uno de estos vértices se mantiene fijo y hallar el lugar geométrico determinado por el otro.

(Madrid, nº 2, 1988)

PROBLEMA Nº 6 :

Estudiar la naturaleza y, en su caso, hallar la suma, de la serie:

$$\Sigma \ (2n \ / \ (n^3 + 6n^2 + 11n + 6) \ )$$

(n varía desde 1 a ∞).

(Madrid, nº 2, 1988)

PROBLEMA Nº 7 :

Probar que el producto de cuatro números naturales consecutivos no puede ser el cuadrado de un entero.

(Madrid, nº 2, 1988)

PROBLEMA Nº 8 :

Determinar la función f de tal manera que la transformación puntual de ecuaciones

$$u = (x+y).f(x^2-y^2)$$
$$v = y - x$$

conserve las áreas de los recintos.

(Madrid, nº 1, 1989)

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTROS BOLETINES Y DE AQUELLOS PARA LOS QUE TODAVIA NO SE HAN RECIBIDO SOLUCIONES (INDICADOS CON XX)

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números 1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	obs.
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	CME-f2 1984	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finl[a])	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-86(Bogotá)	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2 1986	18	19	20	18	19	19	-	-	-	-	C
	Varios	-	-	-	-	-	-	17	17	11	17	C
10	China y Aust[a]	20	15	21	20	15	{20 21}	20	23	21	-	C
11	OME-f1 1986	13	14	14	14	14	23	20	15/	20	12	C
	OMI-86(Varso[a])	XX	20	12	21	-	-	-	-	-	-	
12	OIM-87(Urug.)	16	14	14	17	15	17	-	-	-	-	C
	OME-f1-Extrem[a]	-	-	-	-	-	-	15	15	15	21	C
13	OME-f2 1987	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1 1987	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2 1988	XX	23	23	XX	23	23	-	-	-	-	
18	OIM-Perú 1988	23	23	23	23	XX	XX	-	-	-	-	
19	OMI-88(Aust[lia]	23	XX	XX	XX	23	XX	-	-	-	-	
20	OME-f1 (1988)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
21	OME-f2 (1989)/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OIM-89 (Cuba)	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
22	OMI-89 (RFA)/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	oposiciones	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	
23	oposiciones	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
CME = Olimpiada Matemática Española - fase 1ª o 2ª.

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlas.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Número y año	Convocado en Boletín	Crónica - Enunciados
I (1983)	1	2, pag 11
II (1984)	3	4, pág 7
III (1985)	5	7, pág 3
IV (1986)	9	10, pág 5
V (1987)	13	15, pág 3
VI (1988)	17	19, pág 17
VII (1989)	20	22, pág 9

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA :

Número y año	Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX (1984)		3, pág 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV (1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61

OLIMPIADA MATEMÁTICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
I (1986) Colombia	8, págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12, págs. 3 y 75
III (1988) Perú	18, págs. 5 y 73
IV (1989) Cuba	21, págs. 11 y 63

OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
XXIV (1983) París	2, pág. 15
XXV (1984) Praga	4, pág. 67
XXVI (1985) Helsinki	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986) Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987) Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX (1988) Australia	19, págs. 23 y 77
XXX (1989) R. F. A.	22, págs. 15 y 73

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 8º del Boletín nº 10

Encontrar los números d que tengan la siguiente propiedad: Si $f(x)$ es una función contínua para $0 \leq x \leq 1$, que cumple $f(0) = f(1)$, existe entonces un t tal que $0 \leq t < t+d \leq 1$ y $f(t) = f(t+d)$.

SOLUCIÓN :

Vamos a comprobar que los números d que cumplen la propiedad anterior son los números de la forma $1/n$, para $n = 1, 2, \ldots$.

I) Sea $d = 1/n$, con n fijo, y sea f una función contínua en el intervalo $[0,1]$, que cumple $f(0) = f(1)$.

Hemos de asegurar la existencia de $t \in [0, 1-1/n]$, tal que $f(t) = f(t+1/n)$, lo que equivale a comprobar que la función $g : [0, 1-1/n] \to \mathbb{R}$, dada por $x \to g(x) = f(x+1/n) - f(x)$, se anula para algún valor de x.

Para cada $i = 0,1,\ldots,n-1$, se tiene que $g(i/n) = f((i+1)/n) - f(i/n)$; si para algún i se cumple $g(i/n) = 0$, hemos llegado al resultado requerido; si, por el contrario, $g(i/n) \neq 0$ para todo $i = 1,2,\ldots,n-1$, como $\sum_{i=0}^{i=n-1} g(i/n) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (f((i+1)/n) - f(i/n)) = f(1) - f(0) = 0$, existirá un i_0 tal que $g(i_0/n).g((i_0+1)/n) < 0$, y en este caso, por ser g una función contínua, podemos asegurar que existe un $t \in (i_0/n, (i_0+1)/n)$, tal que $g(t) = 0$.

II) Vamos a construir para cada $\alpha \in (0,1]$, tal que $\alpha \neq 1/n$, para todo $n = 1,2,\ldots$, una función f contínua en $[0,1]$, que cumpla que $f(0) = f(1)$ y que para todo $x \in [0,1-\alpha]$ sea $f(x) \neq f(x+\alpha)$.

Para un α en las condiciones anteriores existe un único n natural tal que $1/(n+1) < \alpha < 1/n$, luego $n.\alpha < 1 < (n+1).\alpha$. Sea entonces $\beta = 1 - n.\alpha$; se tiene que $0 < \beta < \alpha$.

La función f que prueba que ese d no posee la propiedad ese puede construir así:

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = (-n/\beta).x & , & \text{si } x \in [0,\beta] \\
f(x) = ((1+n)/(\alpha-\beta)).(x-\beta) - n & , & \text{si } x \in [\beta,\alpha] \\
f(x) = f(x-k.\alpha) + k & , & \text{si } x \in [k\alpha,(k+1)\alpha] \\
 & & \text{para } k = 1,2,\ldots,n-1 \\
f(x) = f(x-n.\alpha) + n & , & \text{si } x \in [n\alpha,1] .
\end{array}
$$

Se ha escrito la definición con todos los intervalos cerrados porque, como es fácil comprobar, las dos expresiones que se solapan en los extremos de estos intervalos, coinciden sobre ellos, de lo que se deduce que f es una función contínua en $[0.1]$.

Se tiene además que $f(0) = (-n/\beta).0 = 0$,

$$f(1) = f(1-n\alpha)+n = f(\beta)+n = (-n/\beta)\beta + n = 0 ,$$

luego $f(0) = f(1)$.

Y, por último, es inmediato comprobar, por la construcción de f , que para todo $x \in [0,1-\alpha]$ se tiene

$f(x+\alpha) = f(x) + 1$.

Rafael Bravo de la Parra
I.B. "Alonso Quijano" y
Fac. de Ciencias de la Univ. de Alcalá de Henares

PROBLEMA 6º del Boletín nº 11 :

Sea N un número natural par y consideremos las ternas **(x,y,z)** de números naturales mayores que 1, tales que **N** sea el mínimo común múltiplo de **(x,y,z)** . Hallar **x , y , z** , de modo que sea máximo:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

SOLUCIÓN :

Llamemos T_N al conjunto de las ternas (x,y,z) de números naturales que cumplen $1 < x \le y \le z$ y, a la vez, $mcm(x,y,z) = N$, y designemos con f la función $f(x,y,z) = 1/x + 1/y + 1/z$. Como N es par, $(2,2,N) \in T_N$, y es $F(2,2,N) = 1/2 + 1/2 + 1/N = (N+1)/N > 1$, por lo que cualquiera que sea N (par), hay ternas de T_N que dan a f un valor mayor que 1 . De aquí que si $x \ge 3$, al ser $x \le y \le z$, será $f(x,y,z) \le 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$, y no puede alcanzarse el máximo, que sabemos que ha de ser > 1 . Consideremos, por tanto, el caso $x = 2$: Si $y = 3$, $f(2,3,z) = 5/6 + 1/z$, que sólo es mayor que 1 si $z < 6$; dan valores de f mayores que 1 las ternas $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ y $(2,3,5)$. Si $y \ge 4$, $f(2,y,z) \le 3/4 + 1/z$ que no es mayor que 1 para ningún $z \ge y$. En definitiva, las únicas ternas que pueden dar valor máximo (por tanto > 1) a f son las de la forma $(2,2,z)$ y las tres citadas. Examinemos estas tres:

La $(2,3,3)$ pertenece a T_6 y da $f(2,3,3) = 7/6$; la $(2,2,3)$ también $\in T_6$ y da $f(2,2,3) = 4/3 > 7/6$, por lo que la primera no da el máximo buscado.

La $(2,3,4)$ pertenece a T_{12} y da $f(2,3,4) = 13/12$; la terna $(2,2,12)$ también pertenece a T_{12} y da $f(2,2,12) = 13/12$, el mismo que la otra, por lo que en ambas se alcanza el máximo.

La $(2,3,5)$ pertenece a T_{30} y da $f(2,3,5) = 31/30$; al mismo conjunto pertenecen $(2,2,15)$ y $(2,2,30)$ que dan valores respectivos de f de $16/15$ y de $31/30$. El máximo para T_{30} es, por tanto, de $16/15$, y se alcanza en $(2,2,15)$.

Concluimos así que el máximo buscado se alcanza siempre en ternas de la forma $(2,2,z)$, con excepción del caso $N = 12$, en el que el máximo de f se alcanza en dos ternas: $(2,3,4)$ y $(2,2,12)$. En los restantes casos, si N es múltiplo de 4 , la terna $(2,2,z)$ que pertenece a T_N es $(2,2,N)$ y es la única que da valor de f superior a 1. Si N es par pero no es múltiplo de 4, las únicas ternas de T_N que dan valores de f mayores que 1 , son las $(2,2,N/2)$ y $(2,2,N)$, cuyos valores correspondientes de f

son $(N+2)/N$ y $(N+1)/N$, por lo que el máximo se alcanza en la primera de ellas.

Resumiendo, la terna (con $x \leq y \leq z$) de T_N en que se alcanza el valor máximo de f es:

- Si N es par pero no es múltiplo de 4 , la $(2,2,N/2)$, que da el valor $(N+2)/N$.
- Si N es múltiplo de 4 , pero distinto de 12, la terna $(2,2,N)$, que da el valor $(N+1)/N$.
- Si $N = 12$, hay dos ternas, $(2,2,12)$ y $(2,3,4)$, que dan el mismo valor máximo, 13/12 .

Naturalmente, estas ternas se pueden reordenar prescindiendo de la condición $x \leq y \leq z$.

Argearge.

Recibida otra solución de Rafael Bravo de la Parra

PROBLEMA 2º del Boletín nº 17 :

Sobre una circunferencia se eligen n puntos $(n>3)$ y se numeran desde 1 hasta n en cualquier orden. Diremos que dos puntos no consecutivos a y b están relacionados si en uno de los dos arcos de extremos a y b , todos los puntos están marcados con números menores que las marcas de a y b . Demostrar que el número de pares de puntos relacionados es exactamente $n - 3$.

SOLUCIÓN :

Notemos, en primer lugar, que cualquiera que sea n , el punto marcado con 1 no puede estar relacionado con otro y siempre lo están entre sí los dos que ocupen lugares contiguos a él, a uno y otro lado. Visto ésto, procedamos por inducción:

La propiedad es evidente para $n = 4$; de cualquier manera que se numeren los cuatro vértices de un cuadrilátero, solo el par de opuestos entre los que no está el marcado con 1, es de puntos relacionados.

Supongámosla cierta para n puntos. Habrá $n-3$ pares de ellos relacionados. Si aumentamos el número que corresponde a cada punto en una unidad y añadimos un nuevo punto cualquiera de la circunferencia, marcándolo con el número 1 tenemos $n+1$ puntos numerados del 1 al $n+1$. Los pares que estaban relacionados cuando había n puntos, siguen estándolo ahora, ya que el 1 es menor que cualquiera de las marcas y los que no lo estaban, tampoco lo estarán ahora, con excepción de los dos contiguos al añadido, que antes no lo estaban, por ser contiguos entre sí, y ahora lo están, por lo dicho al principio. El nuevo añadido no está relacionado con ningún otro. El total de pares relacionados ha pasado a ser $n-3+1$, o sea $(n+1)-3$, con lo que la propiedad queda probada por inducción.

Nótese que cualquier conjunto de n vértices, numerados de cualquier manera, puede ser engendrado por renumeraciones y adiciones sucesivas de puntos, en la forma indicada.

Argearge.

Recibida otra solución de José V. García Sestafe

PROBLEMA 3º del Boletín nº 17 :

Probar que los binomios $25x + 31y$, $3x + 7y$ son múltiplos de 41 para los mismos valores de x e y .

SOLUCIÓN :

Para k entero, los valores de x e y que hacen $3x + 7y = 41k$, se pueden obtener de $x = (41k-7y)/3 = 13k - 2y + (2k-y)/3$.

Haciendo $2k - y = 3u$, resulta $y = 2k - 3u$, $x = 9k + 7u$. Por tanto, para cada par de enteros k y u, el binomio $3x + 7y$ toma valores enteros para los valores hallados de x e y , pero además, el binomio $25x + 31y$, para estos valores, resulta $25(9k+7u) + 31(2k-3u) = 41(7k+2u)$ = múltiplo de 41, esto es, el primer binomio es múltiplo de 41 para *todos* los pares de x e y que hacen múltilpo de 41 al segundo par.

De forma similar, todos los pares de valores que hacen $25x + 31y = 41k'$, se obtienen de forma análoga y son $x = 19k' - 31v$, $y = -14k' + 25v$. Para estos valores, $3(19k'-31v) + 7(-14k'+25v) = 41(-k'+2v)$ = múltiplo de 41, o sea, el segundo binomio es múltiplo de 41 para todos los pares de valores que hacen que lo sea $25x + 31y$, luego ambos binomios son múltiplos de 41 para los mismos valores.

OBSERVACIÓN: Como los enteros u, v, k, k' son arbitrarios, si se toma $k' = 7k+2u$, $v = u + 4k$, resulta

$19k'-31v = 19(7k+2u)-31(u+k) = 9k+7u$

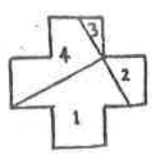
$-14k'+25v = -14(7k+2u)+25(u+4k) = 2k-3u$,

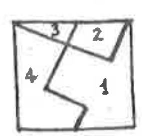
que comprueba el resultado hallado.

José V. García Sestafe

PROBLEMA 5º del Boletín nº 17 :

Es muy conocido el rompecabezas consistente en descomponer una cruz en cuatro partes con las que se pueda componer un cuadrado, y suele darse la solución mostrada en la figura. Probar que existe una infinidad de soluciones distintas. ¿ Alguna de ellas da lugar a cuatro partes iguales ?

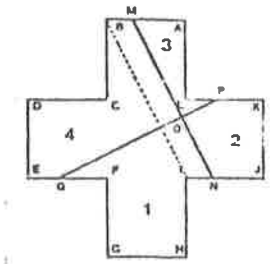




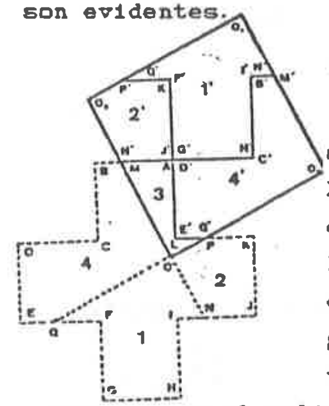
SOLUCIÓN :

Designando por a la anchura de los brazos de la cruz y admitiendo que $AB = BC = CD = \ldots = KL = LA$, se tiene que el lado l del cuadrado buscado será tal que $5a^2 = l^2$, de donde $l = a\sqrt{5}$. En al primera figura se

tiene $\overline{BI} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$, luego *cualquier* segmento paralelo o perpendicular a BI, limitado por los lados de la cruz (como, por ejemplo, los segmentos MN y PQ) tiene una longitud igual al lado del cuadrado buscado.

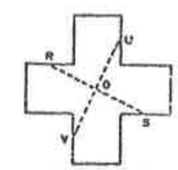


Por otra parte, las igualdades $LP = EQ$, $PK = QF$, $MA = NJ$ e $IN = BM$ son evidentes.



En la segunda figura se puede apreapreciar la construcción del cuadrado. La traslación del vector $\overrightarrow{NM} \sim \overrightarrow{O'O_2}$ convierte al polígono O'PKJN en el polígono $O_2P'K'J'N'$, o abreviadamente, el polígono (2) en el (2'). Análogamente, el polígono (4), mediante la traslación de vectores $\overrightarrow{QP} \sim \overrightarrow{O'O_4}$ se convierte en el polígono (4') y el vector $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} \sim \overrightarrow{OO_4} + \overrightarrow{O_4O_3}$, convierte el polígono (1) en el (1'), con lo que queda construido el cuadrado. Es obvio que existe una infinidad de soluciones, puesto que existe una infinidad de segmentos como el MN.

Si los dos segmentos de la longitud $a\sqrt{5}$ se toman incidentes con el centro O de la cruz (figura tercera) resultan las cuatro partes iguales, superponibles mediante giros de centro O y ángulo $\pi/2$. Además de la solución de la figura, existe la simétrica respecto a uno de los ejes de la cruz.



J.V. García Sestafe

PROBLEMA 6º del Boletín nº 17 :

Calcular, para cualquier valor entero del parámetro t, soluciones enteras de la ecuación

$$y^2 = x^4 - 22x^3 + 43x^2 + 858x + t^2 + 10452(t+39) \quad .$$

(Ver "corigenda" en el Boletín nº 19).

SOLUCIÓN :

La ecuación dada, completando cuadrados, se puede escribir en la forma:

$$y^2 = (x^2 - 11x - 39)^2 - 1521 + (t + 5226)^2 - 26903448$$

o bien

$$y^2 = (x^2 - 11x - 39)^2 + (t + 5226)^2 - 26904969 \quad ,$$

que se puede escribir

$$y^2 - (x^2 - 11x - 39)^2 = (t + 5226)^2 - 5187^2 \qquad [A]$$

o bien $\quad (y + x^2 - 11x - 39)(y - x^2 + 11x + 39) =$

$$= (t + 10413)(t + 39) \qquad [B]$$

de donde se puede obtener, por ejemplo,

$$y + x^2 - 11x - 39 = (t + 10413)\lambda$$

$$y - x^2 + 11x + 39 = (t + 39)/\lambda \ ;$$

Para obtener soluciones enteras para todo valor entero de t, necesariamente $\lambda = 1$, o sea:

$y + x^2 - 11x - 39 = t + 10413$; $y - x^2 + 11x + 39 = t + 39$

de donde $y = t + 5226$;

$x^2 - 11x - 39 = 5187$; $x = 78$ ó $x = -67$.

de [B] también se puede obtener

$y + x^2 - 11x - 39 = t + 39$; $y - x^2 + 11x + 39 = t + 10413$

que proporciona raices imaginarias. De [A] también se puede deducir $y^2 - (t + 5226)^2 = (x^2 - 11x - 39)^2 - 5187$, de donde, de forma similar, $y = x^2 - 11x - 39$, $t + 5226 = \pm 5187$, lo que da $t = - 5226 \pm 5187$, que no proporciona raices enteras para todo valor de t, puesto que t resulta ser determinado.

En consecuencia, las soluciones enteras, para todo valor entero de t son $x = 78$, $y = t + 5226$ $(t \in Z)$

$x = -67$, $y = t + 5226$ $(t \in Z)$.

J. V. García Sestafe

PROBLEMA 1º (Boletín nº 18)

Las medidas de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y las longitudes de las alturas del mismo triángulo también están en progresión aritmética. Demuestre que el triángulo es equilátero.

Solución

Sean a, b, c los lados, $B+\alpha$, B, $B-\alpha$ los ángulos y $h-d$, h y $h+d$ las respectivas alturas. Se tienen que cumplir:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(B+\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen}(B-\alpha)} \quad \text{y} \quad a(h-d) = b \cdot h = c(h+d)$$

de donde

$$(h-d)\operatorname{sen}(B+\alpha) = h \operatorname{sen} B = (h+d)\operatorname{sen}(B-\alpha)$$

o bien

$$\frac{h-d}{h} = \frac{\operatorname{sen}(B+\alpha)}{\operatorname{sen} B} \ ; \quad \frac{h+d}{h} = \frac{\operatorname{sen}(B-\alpha)}{\operatorname{sen} B}$$

Sumando, simplificando por h y transformando la suma en producto

$$\frac{2 \operatorname{sen} C \cos \alpha}{\operatorname{sen} B} = 2; \quad \text{como } B \neq 0, \ \cos \alpha = 1 \longrightarrow \alpha = 0$$

luego $d = 0$, y por tanto el triángulo es equilátero.

José V. García Sestafe, (Madrid).

Recibidas otras soluciones de Carlos J. Pérez Jiménez y de Mª del Carmen Castro Merino.

PROBLEMA 2ª (Boletín nº 18)

Sean a, b, c, d, p y q números naturales no nulos que verifican:

$ad - bc = 1$ y $\frac{a}{b} > \frac{p}{q} > \frac{c}{d}$. Demuestre:

i) $q \geq b + d$

ii) Si $q = b + d$, entonces $p = a + c$.

Solución

Si $\frac{a}{b} > \frac{p}{q} > \frac{c}{d}$, siempre existen dos números naturales λ y μ, tales que

$$\frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d} = \frac{p}{q} \longrightarrow \frac{\lambda}{\mu} = \frac{dp - cq}{aq - bp}$$

donde $dp - cq > 0$ ya que $\frac{p}{q} > \frac{c}{d}$ y $aq - bp > 0$ puesto que $\frac{a}{b} > \frac{p}{q}$.

Supongamos $\frac{p}{q}$ irreducible y tomemos λ y μ primos entre sí. Entonces, teniendo en cuenta $ad - bc = 1$, que expresa que a y d son primos con b y c, se tiene que $\frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d}$ es irreducible, pues si no lo fuese, por ejemplo, si λ tendría un divisor común con c y d, éstos no serían primos entre sí, en contra de $ad - bc = 1$.

Luego, $$\frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d} = \frac{p}{q}$$

por ser irreducibles ambas fracciones

$$q = \lambda b + \mu d \geq b + d$$

(el igual sólo se cumple si $\lambda = \mu = 1$).

Si $q = b + d \longrightarrow \lambda = \mu = 1$ y $p = a + c$.

Si $\frac{p}{q}$ no es irreducible para que $\lambda a + \mu c = p$ y $\lambda b + \mu d = q$, λ y μ no son primos entre sí y entonces sólo se cumplirá $q > b + d$.

Jose V. García Sestafe, (Madrid).

PROBLEMA 3ª (Boletín nº 18)

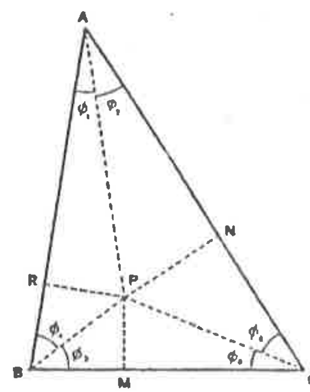
Demuestre que entre todos los triángulos cuyos vértices distan 3, 5 y 7 de un punto dado P, el que tiene mayor perímetro admite a P como su incentro.

Solución

Sean en la figura PA = 7, PB = 3, PC = 5. El perímetro se puede expresar:

$$2p = AR + RB + BM + MC + CN + NA = 7\cos\phi_1 + 3\cos\phi_4 + 3\cos\phi_3 +$$
$$+ 5\cos\phi_6 + 5\cos\phi_5 + 7\cos\phi_2$$

con la condición $\sum_{i=1}^{6} \phi_i = 2\pi$



El máximo de 2 p se puede hallar eliminando ϕ_6, pero es más cómodo utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange

$$\psi = 7(\cos\phi_1 + \cos\phi_2) + 3(\cos\phi_3 + \cos\phi_4) +$$
$$+ 5(\cos\phi_5 + \cos\phi_6) + \lambda(\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4+\phi_5+\phi_6 - 2\pi)$$

De aquí,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\phi_1} = -7 \text{ sen } \phi_1 + \lambda; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\phi_2} = -7 \text{ sen } \phi_2 + \lambda$$

de donde, o bien $\phi_1 = \phi_2$ o bien $\phi_1 = \pi - \phi_2$ que es absurdo. Análogamente $\phi_3 = \phi_4$ y $\phi_5 = \phi_6$. Como $d^2\psi < 0$, ya que ϕ_i (i = 1,2.. .. 6) es menor que $\frac{\pi}{2}$, se trata de un máximo, esto es el máximo del perímetro se obtiene si AP, BP y CP son las bisectrices interiores de $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$, luego P es el incentro.

José V. García Sestafe, (Madrid).

Recibida otra solución de Mª Carmen Castro Merino.

PROBLEMA 4ª (Boletín nª 18)

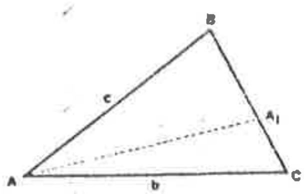
Sea ABC un triángulo cuyos lados son a, b, c. Se divide cada lado del triángulo en n segmentos iguales. Sea S la suma de los cuadrados de las distancias de cada vértice a cada uno de los puntos de división del lado opuesto distintos de los vértices. Demuestre que:

$$\frac{S}{a^2 + b^2 + c^2}$$

es un número racional.

Solución

Sea A_i el i-ésimo punto de división del lado BC. Se tendrá:



$$\overline{AA}_i^2 = b^2 + a^2 \frac{i^2}{n^2} - 2\,b\,a\,\frac{i}{n}\cos C$$

Sumando

$$\sum_{i=1}^{n-1} \overline{AA}_i^2 = (n-1)\,b^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \frac{a^2}{n^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}.2\,a\,b\cos C$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{n-1} \overline{AA}_i^2 = (n-1)\,b^2 + \frac{(2n-1)\;n(n-1)}{6}\,\frac{a^2}{n^2} - 2\,\frac{n(n-1)}{2n}\,a\,b\cos C =$$

$$= (n-1)\,b^2 = \frac{(2n-1)\;(n-1)}{6n}\,a^2 - (n-1)\,a\,b\cos C$$

Por tanto, siendo B_i y C_i los puntos de división i-ésimos en los lados b y c, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\overline{AA}_i^2 + \overline{BB}_i^2 + \overline{CC}_i^2) = (n-1)\;(a^2+b^2+c^2) + \frac{(2n-1)\;(n-1)}{6n}\,(a^2+b^2+c^2) -$$

$$- (n-1)\cdot(a\,b\cos C + a\,c\cos B + b\,c\cos A)$$

Pero, aplicando el teorema del coseno a los tres lados y sumando

$$2\,(b\,c\cos A + a\,c\cos B + a\,b\cos C) = a^2 + b^2 + c^2$$

Sustituyendo

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} (\overline{AA}_i^2 + \overline{BB}_i^2 + \overline{CC}_i^2) = (a^2+b^2+c^2)\;\frac{(n-1)\;(5n-1)}{6n}$$

y por tanto,

$$\frac{S}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(n-1)\;(5n-1)}{6n}$$

que es racional, ya que $n \in N$.

José V. García Sestafe, (Madrid).

Recibidas otras soluciones de Carlos J. Pérez Jiménez y de Mª Carmen Castro Merino .

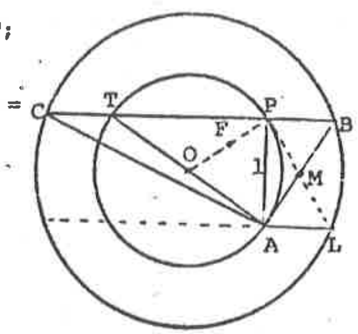
PROBLEMA 1 (Boletín nª 19)

Se consideran dos circunferencias concéntricas y coplanares de radios R y r (R r). Sea P un punto fijo de la circunferencia menor y B un punto variable de la circunferencia mayor. La recta BP vuelve a cortar a la circunferencia mayor en el punto C. La perpendicular l a BP por P vuelve a cortar a la circunferencia menor en el punto A (si l es tangente a la circunferencia en P, entonces A = P).

i) Determine el conjunto de valores de $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

ii) Determine el lugar geométrico descrito por el punto medio de AB.

Solución



i) $BC^2 = (2PB + PT)^2 = 4PB^2 + PT^2 + 4PB \cdot PT;$

$CA^2 = (PT + TC^2 + PA^2 = (PT + PB)^2 + PA^2 =$
$= PT^2 + PB^2 + 2PT \cdot PB + PA^2;$

$AB^2 = PB^2 + PA^2$

Sumando resulta:

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 = 6PB^2 + 2PT^2 + 2PA^2 + 6PB \cdot PT = 6PB \cdot (PB + PT) + 8r^2 = 6PB \cdot PC + 8r^2 = 6(R^2 - r^2) + 8r^2 = 6R^2 + 2r^2$$

($PB \cdot PC$ es la potencia de P respecto de la circunferencia mayor y es igual a $R^2 - r^2$).

ii) Trazando por A la paralela AL a PB se tiene: $PM = \frac{1}{2} PL$; por tanto, el lugar geométrico de M (punto medio de AB) es la circunferencia homotética de la circunferencia grande en la homotecia de centro P y razón $\frac{1}{2}$; su centro es el punto medio F de PO, y su radio $\frac{1}{2}$.

F. Lorenzo.

Recibida otra solución de José V. García Sestafe.

PROBLEMA 5 (Boletín nª 19)

En el triángulo rectángulo ABC, sea D el pie de la altura correspondiente a la hipotenusa BC. Sean K y L los puntos de intersección de la recta determinada por los incentros de los triángulos ABD y ACD con los lados AB y AC respectivamente. Las áreas de los triángulos ABC y AKL se denotan por S y T respectivamente. Demuestre que $S \geq 2T$.

Solución

La demostración se hará en cuatro partes:

(I) Si el triángulo rectángulo es isósceles, se verifica

$$S_1 = 2T_1 \qquad \text{(Fig. 1)}$$

(II) En cualquier caso, la recta LK forma ángulos de 45° con los catetos AB y AC, es decir

$$AL = AK \qquad \text{(Fig. 2)}$$

(III) Si ABC es rectángulo no isósceles de área S; H el punto de intersección de la bisectriz del ángulo BAC con la hipotenusa BC; B_1C_1 la perpendicular a AH por H, y S_1 el área del triángulo isósceles AB_1C_1; entonces es

$$S_1 < S \qquad \text{(Fig. 3)}$$

(IV) Si K_1, L_1 son las intersecciones de la recta determinada por los incentros de los triángulos AB_1H y AC_1H con AB_1 y AC_1 respectivamente; T_1 el área del triángulo AK_1L_1 y T el área del triángulo AKL; entonces es

$$T < T_1 \qquad \text{(Fig. 4)}$$

(I) ABC es triángulo rectángulo isósceles. Si I y J son los incentros de los triángulos ABD y ACD respectivamente, la recta IJ es, evidentemente, paralela a BC y AM = AD'; por tanto,

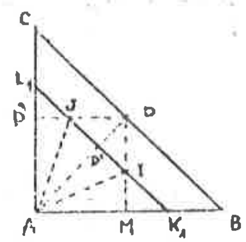


FIGURA 1

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{AD}{AM} = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$$

Si S_1 es el área de ABC y T_1 la de AK_1L_1 resulta:

$$\frac{S_1}{T_1} = \left(\frac{AD}{AD'}\right)^2 = 2$$

o sea,

$$\underline{S_1 = 2T_1}$$

(II) ABC es un triángulo rectángulo no isósceles. I y J son los incentros de los triángulos ABD y ACD respectivamente. Sean B' y C' las intersecciones de las bisectrices ID y JD con AB y AC respectivamente. Puesto que el ángulo JDI es recto, la circunferencia de diámetro B'C' pasa por A y D.

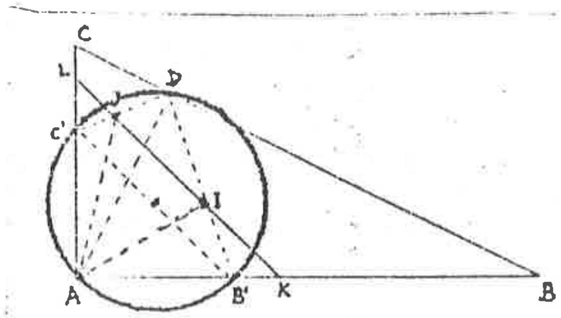


FIGURA 2

La recta DA es bisectriz del ángulo JDI, luego A es el punto medio del arco B'AC' y en consecuencia es AB' = AC'.

De las propiedades de las bisectrices se deduce:

$$\frac{JD}{JC'} = \frac{AD}{AC'} \; ; \quad \frac{ID}{IB'} = \frac{AD}{AB'}$$

dividiendo estas dos igualdades, y teniendo en cuenta que AB' = AC', resulta:

$$\frac{JD}{JC'} \cdot \frac{IB'}{ID} = \frac{AB'}{AC'} = 1 \implies \frac{JD}{ID} = \frac{JC'}{IB'} \implies \frac{JD + JC'}{ID + IB'} = \frac{JD}{ID} \implies$$

$$\implies \frac{C'D}{B'D} = \frac{JD}{ID}$$

de donde se deduce el paralelismo de IJ y C'B', es decir,

$$\underline{AK = AL}$$

(III) Sea ABC un triángulo rectángulo no isósceles; H, el punto de intersección de la bisectriz del ángulo BAC con la hipotenusa BC. B_1C_1, la perpendicular a AH por H; S_1 el área del triángulo rectángulo isósceles AB_1C_1, y S la del triángulo ABC.

Evidentemente, el área del triángulo B_1HB es mayor que la del triángulo C_1HC, y por tanto

$$\underline{S_1 < S}$$

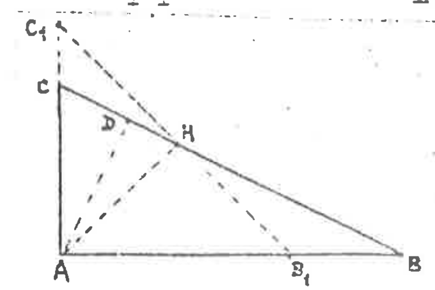


FIGURA 3

(IV) Sean J e I los incentros de los triángulos ADC y ADB respectivamente; G, el punto de intersección de la bisectriz AG del ángulo CAP con JD. B_1C_1, la perpendicular a AH por H, siendo H la intersección de BC con la bisectriz de BAC; y P la intersección de JD con B_1C_1.

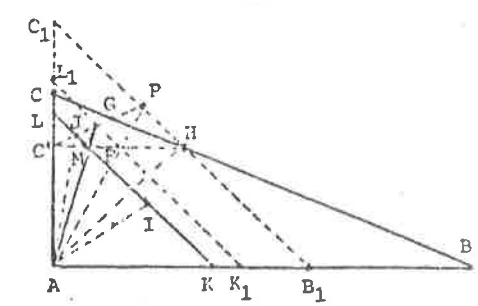


FIGURA 4

Puesto que AJ es bisectriz de CAD y AG lo es de CAP, el punto G está en el segmento JP. Sea M la intersección de

JI con la bisectriz HC' del ángulo AHC_1 y F el incentro del triángulo AHC_1. Se tiene

$$\frac{MC'}{MH} = \frac{JC'}{JP} < \frac{GC'}{GP} = \frac{AC'}{AP} < \frac{AC'}{AH} = \frac{FC'}{FH}$$

De $\frac{MC'}{MH} < \frac{FC'}{FH}$ se deduce que F está en el segmento MH. Por tanto, el área T_1 del triángulo AK_1L_1 es mayor que el área T de AKL. De los apartados anteriores se deduce

$$S > S_1 = 2T_1 > 2T$$

En consecuencia, se tiene en todos los casos

$$S \geq 2T \quad \text{(c.q.d.)}$$

F. Lorenzo.

Recibida otra solución de José V. García Sestafe.