Boletín nº 21

mayo 1989

SOCIEDAD CASTELLANA 'PUIG ADAM' DE PROFESORES DE MATEMATICAS

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Mayo de 1989 n° 21 (1988-89)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en

Ronda de Atocha, 2 (INBAD)

- Toda la correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado n° 9479

28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

- La portada conmemora el segundo centenario del nacimiento de Augustin Louis CAUCHY, que se celebra este año.

INDICE Pag.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Francisco Lorenzo Miranda

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Amador Domingo Escribano (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Vicesecretario: Francisco Quesada Cobo

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Jesús Begoña Aina

ASAMBLEA GENERAL DE NUESTRA SOCIEDAD

Como estaba anunciado, el día 15 de Abril, en el Instituto "Cervantes" de Madrid, tuvo lugar nuestra Asamblea General de 1989.

Siguiendo el orden del día, tras ser aprobada el acta de la sesión anterior, el Presidente hizo un informe de las actividades desarrolladas, centrando su atención en el Boletín, por cuya preparación felicitó al Profesor Fernández Biarge, y en el próximo Concurso de Problemas, que se celebrará el día 17 de Junio, probablemente en el Instituto "Beatriz Galindo". Informó asimismo de la existencia de un fondo bibliográfico donado por la familia de Puig Adam y de otro cedido por la extinguida Editora Nacional. Informó también sobre unas gestiones relativas a unos cursos que se iban a celebrar en Argentina por el centenario de Rey Pastor.

Seguidamente, el tesorero, Profesor Aizpún presentó las cuentas de la Sociedad, que fueron aprobadas.

Se debatió a continuación el punto referente a la "conveniencia o no" de que nuestra Sociedad se integre en una Federación Estatal de Sociedades de Profesores de Matemáticas. El Presidente dió lectura a una carta que envió al director de redacción de la revista **SUMA** (que publica la Federación), con motivo de la aparición en su número 1 de una mención de nuestra Sociedad como integrante de la Federación, sin que en ningún momento se hubiesen negociado las condiciones de esa integración. Leyó también la respuesta a esa carta, contenida en el número 2 de la revista citada. El Profesor Aizpún relató el desarrollo que habían llevado las conversaciones para la formación de dicha Federación, y que él había aplazado la incorporación de nuestra Sociedad hasta que lo hubiese acordado la Asamblea General. El Presidente propuso su cese en el caso de producirse la integración en la Federación, en cuya conveniencia no cree. La decisión fué suspendida hasta otra Asamblea, por deconocimiento total de la carga económica que representaría para nuestra Sociedad la incorporación a la Federación, y si ésta podía realizarse con independencia de la suscripción a la Revista, teniendo en cuenta que solamente la cuota de suscripción a ella es ya superior a la que estamos pagando como socios de nuestra Sociedad.

El Profesor Fernández Biarge señaló las dificultades que, a partir de Septiembre, fecha de su jubilación, puede encontrar en la preparación y el montaje de los números de nuestro Boletín, ya que dejará de contar con el valioso apoyo de los medios de reprografía que amablemente le brinda la E.T.S. de Ingenieros Navales. El Profesor García Sestafe se ofreció a colaborar con él en esta tarea y la Asamblea le agradeció el gesto.

Se sometió a la Asamblea la renovación de los cargos directivos que correspondía según los Estatutos, acordándose nombrar vicepresidente de Toledo al Profesor Amador Domingo Escribano y bibliotecario al profesor Jesús Begoña Aina. Se agradecen los servicios prestados por los salientes y la Junta Directiva queda, en consecuencia, tal como aparece en la página 2 de este Boletín.

Se sugirió la concesión de premios a los que remiten soluciones a los Problemas Propuestos de nuestro Boletín, pero se dejó el tema pendiente para la próxima Asamblea, levantandose a continuación la sesión.

RECORDAMOS LA CONVOCATORIA DE NUESTRO

«VII CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS»

Convocado por:

La Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas y el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras.

B A S E S

PRIMERA

Podrán participar los alumnos de B.U.P. y F.P. de los Centros de Albacete, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara, Madrid, Segovia y Toledo. Los de F.P.1 lo harán con los de primero de B.U.P., los de 1° de F.P.2 con los de segundo de B.U.P. y los de 2° o 3° de F.P.2, con los de tercero de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas del Concurso se realizarán en Madrid, en la segunda quincena del mes de Junio (probablemente el sábado, 17 y consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles).

TERCERA

Se concederán diplomas para los mejores de cada nivel, acompañados de los premios correspondientes.

CUARTA

Aquellos Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de dos en cada uno de los tres niveles) deberán realizar la preinscripción antes del día 20 de Mayo de 1989., dirigiéndose por carta a esta Sociedad, apartado de Correos nº 9.479, 28080 - Madrid. En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. (Envíen la carta sin certificar).

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos Centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales en las que se haga constar el curso en que están matriculados en el año académico 1988-89 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

= = = = = = = =

XXV OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

FASE FINAL

Como anunciabamos en el número anterior de nuestro Boletín, las pruebas de la Segunda Fase de la ***XXV Olimpiada Matemática Española***, correspondiente al curso 1988-89, han tenido lugar los pasados dias 3 y 4 de Febrero. Como en los años precedentes, esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matematica Española* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*.

A esta Fase Final han concurrido un total de 47 aspirantes, seleccionados por los distintos distritos donde se realizó la Primera Fase, con un máximo de tres por cada uno de ellos. Los tres ganadores de la Primera Fase en el distrito canario realizaron las pruebas de la Fase Final en su Universidad y los seleccionados por las restantes Universidades, las realizaron en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid, todos simultaneamente y con los mismos ejercicios.

Las pruebas, como es tradicional en esta Segunda Fase, consitieron en la resolución de seis problemas, tres en cada una de las dos sesiones de cuatro horas, que tuvieron lugar en dias consecutivos. En nuestra sección de **Problemas Propuestos**, en este mismo Boletín, pueden verse los enunciados de esos problemas.

El Jurado, tras examinar y valorar los ejercicios presentados, se reunió el pasado 21 de Febrero, e hizo públicos los nombres de los aspirantes mejor clasificados. Se asignó a cada particpante una puntuación de cero a diez puntos por problema, con lo que había una posibilidad teórica de obtener **60 puntos**.

Al igual que en los años precedentes, el nivel medio mostrado por los participantes no fué muy alto, lo que revela que aún no se ha generalizado una preparación sistemática de equipos olímpicos de Matemáticas, tal como ya es habitual en otros paises. No obstante, sobre ese nivel medio bastante bajo, destacaron netamente algunas individualidades, como se aprecia en las puntuaciones conseguidas. Los seis aspirantes mejor clasificados son los siguientes:

1º **Vicente MUÑOZ VELAZQUEZ**, del I. B. "Dionisio Aguado", de Fuenlabrada (Madrid). 39 puntos

2º **Enrique** GARCÍA LÓPEZ, del Liceo Francés de Barcelona. ... ... 35 puntos

3º **Alberto GARCÍA MARTÍNEZ**, del Colegio "Nª Sª del Recuerdo", de Madrid.. ... ... 26 puntos

4º **Cristina** DRAPER **FONTANALES**, del Colegio "Sierra Blanca" de Málaga ... ... 23 puntos

5º **Leandro MARÍN MUÑOZ**, del Colegio "La Merced" de los HH. Maristas de Murcia... 22 puntos

6º **Javier PORTELA LEMOS**, del Colegio de la "Compañía de María" de Vigo.. ... ... 17 puntos

A estos seis, siguieron, empatados a 15 puntos, Jordi CASAS PLÁ, del Colegio "San Juan Bosco" de Horta (Barcelona), Juan Manuel GARCÍA LÓPEZ, del I.B. "Sandoval y Rojas" de Aranda de Duero (Burgos) y José Antonio SUAREZ PUENTE, del Colegio "Santo Domingo de Guzmán" de Oviedo.

Es muy probable que los equipos que representarán a España en la Olimpiada Matemática Internacional que se celebrará próximamente en Alemania Federal y en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, que organizará este año Cuba, se formen esencialmente con los citados anteriormente.

Debemos recordar que el campeón de esta Fase Final, Vicente MUÑOZ VELAZQUEZ, fué el primer clasificado del Distrito de Madrid, y también *recibió el primer premio del concurso de problemas de nuestra Sociedad, como alumno de 3º de B.U.P., en Junio de 1988* . Una vez más comprobamos que los premiados en nuestros concursos suelen figurar, junto con otros procedentes de fuera de nuestro ámbito geográfico, entre los mejores clasificados en las diversas Olimpiadas

Damos la enhorabuena a los ganadores y a los Centros que se han esforzado en su preparación y deseamos que tengan una destacada actuación cuando participen representando a España en las próximas Olimpiadas Internacionales.

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlos.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Número y año	Convocado en Boletín	Crónica - Enunciados
I (1983)	1	2, pag 11
II (1984)	3	4, pág 7
III (1985)	5	7, pág 3
IV (1986)	9	10, pág 5
V (1987)	13	15, pág 3
VI (1988)	17	19, pág 17
VII (1989)	20	

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA :

Número y año	Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX (1984)		3, pág 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV (1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61

OLIMPIADA MATEMATICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
I (1986) Colombia	8, págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12, págs. 3 y 75
III (1988) Perú	18, págs. 5 y 73
IV (1989) Cuba	21, págs. 11 y 63

OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL :

Número, año y lugar		Crónica y enunciados en Boletín nº
XXIV (1983)	París	2, pág. 15
XXV (1984)	Praga	4, pág. 67
XXVI (1985)	Helsinki	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986)	Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987)	Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX (1988)	Australia	19, págs. 23 y 77

4a OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICA
La Habana, Cuba * Abril 8 al 16 de 1989

La **4ª Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas** se ha desarrollado el La Habana (Cuba), del 8 al 16 de Abril de 1989. En ella han participado 15 paises, si bien dos de ellos (Honduras y Panamá) lo han hecho como observadores, sin equipo. Los 13 restantes fueron: Argentina, Bolivia, Brasil, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, España, Méjico, Perú, Puerto Rico, Uruguay y Venezuela, con un total de 50 alumnos participantes (ya que cada pais competía con un equipo de cuatro, excepto Brasil que solo llevó dos).

Se propusieron seis problemas, en dos sesiones, de cuatro horas y media cada una. Cada problema se calificaba de cero a diez puntos, por lo que la máxima puntuación alcanzable era de 60 puntos. Sus enunciados pueden verse en la sección de PROBLEMAS PROPUESTOS de este mismo Boletín.

El primer clasificado fué el brasileño **Carlos de Araujo Moreira**, con 56 puntos. (Recordemos que en los dos años anteriores lo fueron españoles: Fernando Galve, en Perú, con 59 puntos y Calos Ueno, en Uruguay, con 60). Se otorgaron 5 medallas de oro, 9 de plata y 15 de bronce.

La Delegación Española estuvo integrada por los profesores **María Gaspar** y **Francisco Bellot**, y por los alumnos siguientes:

-- **Ramón Esteban Romero**, de Valencia, que obtuvo 38 puntos y **medalla de plata**.

-- **Vicente Muñoz Velazquez**, de Fuenlabrada (Madrid), con 37 puntos y **medalla de plata**. Fué el ganadorde la Olimpiada **Española** de este año y también ganó el concurso de nuestra Sociedad en el 1988.

-- **Enrique García López**, de Barcelona, con 28 puntos y **medalla de bronce**. Qudó en 2º lugar en la Española de este año.

-- **Fernando Martínez Puente**, de Burgos, con 18 puntos.

Aunque la Olimpiada es una competición individual, a nivel extraoficial siempre se realiza una clasificación por equipos. El total de 130 puntos obtenidos por el equipo español, lo colocan en cuarto lugar, detrás de Colombia, Cuba y Méjico.

La O. E. I. *(Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura)*, patrocinadora y verdadera mecenas de las Olimpiadas Iberoamericanas, organizó, junto con el Ministerio de Educación de Cuba, el Primer Simposio Iberoamericano de **Enseñanza de las Matemáticas**, previo a la realización de la Olimpiada, en el que participó, en representación de nuestro pais, el profesor **José del Rio**, director del I. C. E. de la Universidad de Salamanca, así como **dña. Amelia Gómez**, subdirectora de becas del M. E. C. interesada en conocer de cerca los problemas de la organización de una Olimpiada, ya que, como es sabido, España será la sede de la próxima.

NOTICIAS

CURSOS DE VERANO SOBRE GEOMETRIA Y FISICA MATEMATICA

Patrocinados por la Universidad de Coimbra y por la Universidad de Salamanca y parcailmente financiados por el Buseau Erasmus, se desarrollarán estos Cursos en Figueira da Foz (Portugal), del 19 al 30 de Junio de 1989.

El Curso "Métodos Geométricos en Física Matemática: Una Introducción", tendrá lugar del 19 al 30 de Junio y el de "Geometría y Física (Geometría de las Teorias "Gauges") del 26 al 30 de Junio. En este último participarán los profesores R. Catenacci (de la U. de Trieste), J. E. Marsden (de la U. de Cornell) y C. Reina (del SISSA - Trieste).

El comité organizador está compuesto por los profesores P.L. García Pérez y A. Pérez Rendón, de Salamanca y A. Ribeiro Gomes y J. M. Nunes da Costa, de Coimbra.

III CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE LA DIDACTICA DE LAS CIENCIAS Y DE LAS MATEMATICAS

Promovido por la Revista de Investigación y experiencias didácticas "ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS" y por el ICE de la Univesitat Autònoma de Barcelona, se celebrará este Congreso en Santiago de Compostela, del 21 al 23 de Septiembre de 1989. Puede solicitarse información al citado ICE, en Bellaterra--08193 (Barcelona).

I CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA (SEVILLA)

Organizado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", se celebrará en Sevilla, del 24 al 30 de Septiembre de 1990, el I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Cuenta con el apoyo de la Conferencia Interamericana de Educación Matemática y de la Asociación Portuguesa de Profesores de Matemáticas. Puede solitarse información a la citada Sociedad "THALES"

JORNADAS DE ESTUDIOS DE LA A. P. M. E. P.
PARIS, 1989

La"Association des Professeures de Mathématiques de l'Enseignement Public" celebrará sus Jornadas de Estudios del 28 de Octubre al 31 de Octubre de 1989 en París (Barrio Latino). Tendrán por tema "Matemáticas en revolución". Puede obtenerse información en A.P.M.E.P. Régionale Ile-de-France 26, rue Duméril - 75013 - PARIS . Tno.: (1) 45 35 43 05 .

CENTRO DE PROFESORES DE CIUDAD REAL

Este Centro de Profesores ha realizado unas JORNADAS para Profesores y Alumnos "En Torno a las Matemáticas", del 24 al 28 de Abril de 1989, incluyendo una exposición de Material Didáctico, concursos y las actuaciones de los profesores A. Aizpún, S. Herrero Pallardo, Ana Elvira, M. Adán y G. Fernández García.

GRAFO

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas · ISAAC NEWTON ·

La Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton" ha iniciado la publicación del BOLETIN DE INFORMACION Y COMUNICACION " G R A F O " , que mensulamente recogerá las noticias y convocatorias de interés para los socios y servirá de voz para que éstos puedan difundir sus opiniones e ideas encaminadas a la mejora de la Enseñanza de las Matemáticas.

La Revista " N U M E R O S " , de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, ha publicado su primer número monográfico (nº 18 de la Revista) en el mes de Diciembre último, destinado a distintos aspectos de la proporcionalidad en la enseñanza de las matemáticas.

SEGUNDO CENTENARIO DEL NACIMIENTO DE CAUCHY

Se celebra este año el segundo centenario del nacimiento de Augustin-Louis CAUCHY, en plena revolución francesa. Nos unimos a esta conmemoración publicando su efigie en la portada de este Boletín.

SUMA

REVISTA SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

EDITADA POR LA FEDERACION ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE MATEMATICAS Y POR LA SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACION MATEMÁTICA "THALES" .

Han llegado a nuestras manos los números 1 y 2 de esta Revista, que nace con la Federación Española de Sociedades de Matemáticas. Con una presentación de gran calidad, portada a todo color, y numerosas figuras y fotografías incluidas en su texto, que viene acompañado de curioso material pedagógico, contiene interesantes artículos, en su mayor parte orientados a la didáctica de las Matemáticas en EGB.

En la reseña de nuestra Asamblea General, publicada en este mismo boletín pueden varse los acuerdos adoptados sobre la posibilidad de que nuestra Sociedad se integre en la mencionada Federación. En el número 2 de SUMA aparece reproducida la carta que nuestro Presidente dirigió al de la Federación y la respuesta que, en forma de carta abierta, da la Redacción de SUMA. Reproducimos aquí una y otra:

Estimado colega:

Tengo conocimiento de que en el número 1 de la revista SUMA de la que eres Director (en funciones), editada por la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, se incluye a la Sociedad Castellana «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas entre las que componen la citada Federación (página 2). Puesto que la Sociedad «Puig Adam» no se ha pronunciado ni en un sentido ni en otro sobre el particular, te ruego una rectificación en el próximo número de dicha revista, y al mismo tiempo te agradeceré una aclaración escrita del mencionado error.

Un saludo,
Francisco Lorenzo Miranda,
Presidente.

Nota de la Redacción

Durante las reuniones mantenidas para la constitución de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, siempre estuvo presente, con voz y voto, el entonces tesorero de la Sociedad Castellana de Profesores de Matemáticas «Puig Adam». Por su proximidad a determinados organismos oficiales, sitos en Madrid, se encargó de los trámites para su legalización y por su prestigio y edad se le eligió presidente en funciones. A la vista de estos hechos quienes hacemos esta revista no dudamos, ni un solo instante, que la Sociedad «Puig Adam» era miembro fundador de la Federacion, y en el núm. 1 de SUMA así lo hicimos constar, en la página de créditos.

Hoy nos vemos en la obligación de rectificar, como nos pide en su carta, su presidente, D. Francisco Lorenzo Miranda.

Como consecuencia, y en tanto en cuanto no se produzca un pronunciamiento favorable a su inclusión en la Federación, los socios de la SCPM «Puig Adam» que deseen recibir la Revista SUMA deberán suscribirse a ella. Quede, por nuestra parte, aclarado el asunto.

La suscripción a esta revista cuesta 2.500 pts por un año (3 números) a los particulares y 3.000 pts a los Centros. Para más información, dirigirse al Aptdo. 1017 , 18080-GRANADA.

¿ GEOMETRÍA DEL ESPACIO ?

por Julio Fernández Biarge

DESDE EUCLIDES

La Geometría fué considerada desde la antigüedad como una disciplina cuyo referente era el "espacio de lo real". Aunque todos admitían que los puntos, rectas, planos, de que trataba la Geometría eran idealizaciones, no dudaban de que procedían directamente de lo que nos ofrecía la realidad, y que los razonamientos geométricos conducirían inevitablemente a resultados acordes con los que podían ser comprobados en ella.

Parecía admitirse que la creación era obra de un Dios geómetra, cuyas leyes descubríamos al aprender Geometría, lo que aseguraba la imposibilidad de una contradicción entre lo creado y nuestros teoremas. Todavía no se tenía, además, el concepto de ciencia experimental, con su sistema de teorías, comprobaciones y refutaciones, tal como lo concebimos hoy día, y nadie podía pensar seriamente en someter a comprobación experimental lo que la fuerza de la razón imponía como seguro.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

En esa situación, cualquier progreso en el desarrollo de la Geometría que hiciese más firme su fundamentación, solo podía contribuir a aumentar la confianza en la fuerza de sus conclusiones y en la infalibilidad de sus predicciones sobre la realidad. Por ello, la introducción de los métodos analíticos por **Descartes**, ya en el siglo XVII, que permitía establecer una fundamentación aritmética de la Geometría, no podía inquietar a nadie.

No obstante, el método analítico para el desarrollo de la Geometría presentaba un aspecto cuya transcendencia tardó a apreciarse en toda su gravedad. Nos referimos al número de dimensiones del Espacio. El espacio tridemensional al que se estaba habituado era ya tan solo un caso particular de los que podía generar la teoría. Podían construirse geometrías de espacios de cualquier número de dimensiones ¿ Por qué las conclusiones de la tridimensional eran acordes con la realidad y no había manera de interpretar como reales las de la Geometría del espacio de cuatro o más dimensiones ? ¿ Acaso la determinación del número de dimensiones del espacio real debía ser objeto de investigación experimental ?

El éxito de las aplicaciones de la Geometría tri-dimensional y el repetido fracaso en dar una interpretación real a las de más dimesiones, parecía dejar bien sentado que la realidad "es tridimensional". Pero quedaba probado que podía haber distintas geometrías y que sólo una de ellas se mostraba adecuada para describir la realidad. Aun admitiendo que la realidad no podía defraudar las conclusiones de nuestro razonamiento deductivo, quedaba al menos el problema de si los postulados de los que arrancaba el razonamiento, se deducían necesariamente de la observación de la realidad. Pero en el siglo XVII, cuando podían haberse planteado estos problemas en forma inquietante, los conceptos de resultado empírico y de comprobación experimental, estaban todavía en formación.

Así no se vaciló, en vista del éxito de la Geometría Euclídea tridimensional para describir la realidad de nuestro mundo próximo, en generalizar este resultado, atribuyendo a la propia realidad los atributos del espacio abstracto de esa Geometría: La

realidad resultaba ser (aunque no se expresase en esos términos) ilimitada, infinita, homogénea, isótropa, y admitía los grupos de transformaciones de congruencia, de congruencia directa y de semejanza.

EL CONOCIMIENTO PURO A PRIORI

En el siglo XVIII, las ideas de **Kant**, expuestas primero en su *Dissertatio* y después en la *Crítica de la Razón Pura*, introdujeron un punto de vista que modificaba esencialmente el planteamiento de las cuestiones mencionadas. En esta nueva visión, el espacio adquiere una significación totalmente nueva en relación con la experiencia. Para Kant "*El espacio no es un concepto empírico extraído de experiencias externas*"; "*...es una necesaria representación a priori que sirve de base a todas las representaciones*"; "*El espacio no representa ninguna propiedad de las cosas,...es decir, ninguna propiedad inherente a los objetos mismos*". El espacio constituye así un conocimiento a priori, mediante el cual puede el hombre tener percepciones externas; éstas *presuponen* el espacio, no lo *crean*. Dice **Kant**:

> *"Sólo podemos hablar de espacio desde el punto de vista humano. ... No podemos juzgar si las intuiciones de otros seres pensantes están sometidas a las mismas condiciones que limitan nuestra intuición y que tienen para nosotros validez universal"*.

Cuando **Kant** habla de Geometría, se refiere a la geometría de ese espacio que es intuición pura del ser humano. Era la única geometría que conocía, y no podemos interpretar sus palabras con los significados que han adquirido en las matemáticas actuales. De los axiomas dice que "*son principios sintéticos a priori, puesto que son inmediatamente ciertos*", lo cual sería una insensatez si se tomasen las palabras en el sentido que les damos actualmente. Si conocía alguna alternativa a la geometría euclídea a la que se refiere siempre, era acaso la de más de tres dimensiones que le ofrecía el método de **Descartes**. No obstante, en sus *Prolegómenos*, dice:

> *Que todo el espacio tiene tres dimensiones y que, en absoluto, no puede tener más, será construido sobre el juicio de que sobre un punto no puede trazarse más que tres líneas en ángulo recto; pero esta proposición no puede ser probada por conceptos sino que se funda, inmediatamanete en la intuición, y en la intuición pura* a priori, *porque es apodícticamente cierta; ...*

Los axiomas no basados en la intuición pura, de nuestras geometrías de hoy, no serían considerados por **Kant** como de la Geometría del Espacio a que se refiere en sus escritos. Pero no tuvo oportunidad de aclarar ésto, puesto que en su época no se concebía otro tipo de geometría.

La filosofía de **Kant** desplaza completamente el problema que nos habíamos planteado antes, de si la adopción de una geometría para describir la realidad es una cuestión empírica que atañe a la Física experimental; aunque ello no se vió así en su tiempo, el problema se desdobla en dos: Uno de psicología, que estudiará lo que son intuiciones puras para el hombre y cuales son las que pueden realmente considerarse como tales; la solución de este primer problema determinaría cuales eran los postulados imprescindibles para que una geometría fuese aceptable para la descripción humana de los datos que nos proporcionan los sentidos; otro problema posterior, de caracter empírico, consistirá en decidir cómo se deberían efectuar las mediciones que proporcionan valores numéricos de longitudes y ángulos, para que éstos se correspondiesen con las previsones de la geometría adoptada.

El primer problema se creía resuelto, en forma acrítica, con la geometría euclídea tridimensional. El segundo no se podía plantear todavía en el estado en que se encontraban las ciencias experimentales en el siglo XVIII, cuando se creía ingenuamente que

las mediciones actuaban directamente sobre la realidad, en la que ya se daban las relaciones geometricas que la medición no hacía sino dar a conocer al experimentador.

LAS GEOMETRíAS NO-EUCLíDEAS

En la primera mitad del siglo XIX aparecen en escena las geometrías no euclídeas por obra de **Gauss**, **Lobachevski**, **Bolyai** y **Riemann**, entre otros. El trabajo de estos matemáticos fué recibido con grandes recelos y graves malentendidos. Aunque inicialmente se formularon para espacios de dos dimensiones, era inmediata su generalización a tres. Había ya una gran familia de geometrías tridimensionales para elegir, con las mismas virtudes desde el punto de vista del rigor lógico de su construcción. ¿ Por qué iba a ser la euclídea la adecuada para la descripción de la imagen que el hombre se forma del Universo ?

Además, lo malo era que no se trataba de elegir entre tres geometrías, *elíptica*, *euclídea* e *hiperbólica*, claramente diferenciadas, sino en escoger entre una gama contínua de geometrías entre las cuales la euclídea era un simple caso particular, si bien singular, o por mejor decir, *degenerado*. Y esto, limitándonos tan solo a las homogéneas (de curvatura constante). Si la geometría euclídea resultaba buena para nuestra experiencia inmediata, también resultaban igualmente buenas otras elípticas o hiperbólicas que localmente eran indiscernibles de la euclídea dentro de la aproximación que podíamos alcanzar en nuestras mediciones. No obstante, las conclusiones globales tales como la relativa a la finitud del espacio, eran completamente distintas en unas y otras. La intuición pura, el conocimiento a priori a que se refería **Kant**, conducía sin duda a una geometría que tenía que ser métrica y tridimensional, pero ¿ necesariamente euclídea ? No quedaba enteramente claro que fuese así.

LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Poco después del establecimiento de las geometrías no-euclídeas, gracias a los trabajos de **Monge**, **Poncelet**, **Chasles**, **Staudt**, **Steiner** y otros, tuvo lugar, en el siglo XIX, la introducción de la *Geometría Proyectiva*, primero como una simple ampliación de la euclídea, mediante la adición de los elementos impropios, pero después como una construcción matemática autónoma, con fundamento axiomático propio.

Cayley demostró que tanto la geometría euclídea como muchas no euclídeas podían considerarse como derivadas de la proyectiva mediante la adopción de un "*absoluto*" del espacio (el denominado *círculo absoluto* del plano impropio en el caso de la euclídea tridimensional). En un exceso de optimismo llegó a decir: *"La geometría proyectiva es toda la geometría"*. Pero ello mostraba que los postulados del espacio proyectivo, más los de existencia del absoluto (que de ninguna manera podían considerarse como fiel enunciado de conocimientos a priori), permitían construir una geometría adecuada para la descripción de la realidad, sin que por ello se le ocurriese a nadie atribuir existencia física a los puntos impropios o al circulo absoluto. Quedaba así al descubierto la falacia de atribuir a la realidad todas las propiedades globales de una geometría, porque ésta haya tenido éxito en su descripción local.

Además, el *principio de dualidad*, consecuecia inmediata de los propios postulados (no deducible de ellos en la propia geometría, sino en la metageometría que los analiza desde fuera del sistema) nos permite no decidir si los puntos, rectas y planos de esos postulados corresponden respectivamente a los puntos, rectas y planos de nuestra intuición, o bien a los planos, rectas y puntos

de ella, hasta el momento de introducir el absoluto del espacio, en el que se rompe la dualidad.

EL PROGRAMA DE ERLANGEN

Las diversas geometrías que se estaban creando, no se disputaban entre si la validez, sino que eran igualmente aceptables desde el punto de vista formal. Fué **Felix Klein** el que, en un discurso pronunciado en 1872, que se difundió mundialmente con el nombre de *Programa de Erlangen*, dió una nueva visión de la naturaleza de esas geometrías. **Klein** centraba su atención, no en los elementos (puntos, rectas,...) de una geometría, sino en las propiedades de su grupo de transformaciones fundamentales, que es el que realmente la caracterizaba. La geometría estudiaba los invariantes en ese grupo de transformaciones. Esta idea completaba e iluminaba los resultados de **Cayley**, permitía una clasificación satisfactoria de las geometrías y ha tenido una influencia decisiva en la creación de las más modernas teorías físicas.

Después de la introducción de tal variedad de geometrías, todas con igual coherencia lógica, ¿ Qué quedaba de la filosofía de Kant relativa al conocimiento a priori ? Quedaba al menos su parte crítica, que negaba el que las propiedades geométricas fuesen atributos de las cosas en sí. Quedaba también esclarecida la naturaleza de la intuición pura y su caracter humano, definiendo cómo el hombre podía representar con ella las sensaciones recibidas del exterior. Era dudoso, en cambio, que el espacio de esa intuición correspondiese exactamente al espacio abstracto de la geometría euclídea y seguro que la Física no necesitaba ya que sus conceptos fundamentales fuesen representables en la intuición pura, además de ser expresables mediante modelos matemáticos abstractos.

LA MEDICIÓN

Mientras los matemáticos hacían progresar de manera tan notable la Geometría, los físicos iban comprendiendo la complejidad de los conceptos que entrañaba la experimentación, incluso en el caso particular de la medición de longitudes y ángulos.

La operación de medir exigía la existencia de una unidad de medida, de la posibilidad de una operación de desplazamiento de esa unidad, que por definición se mantenía siempre "igual", y de señalar en el objeto de la medición la parte ocupada por la unidad desplazada. La hipótesis de que la unidad de medida se mantiene "igual" en la operación, no es una simple definición, sino que entraña una especie de condición de invariancia, que asegura que la coincidencia de la unidad desplazada con el objeto de la medida o una determinada parte de él no depende del "camino", o sea de la cadena de desplazamientos empleada. Tampoco era fácil definir en términos experimentales, previos a la interpretación geométrica, los "divisores" de la unidad, o subunidades, necesarios para proseguir el proceso de la medición.

Las medidas, o resultados de las mediciones, han de interpretarse en una geometría métrica. En principio suponemos que ésta es euclídea. Si consideramos un triángulo de la realidad y medimos las longitudes de dos de sus lados, encontrándolas iguales, confiamos en que al efectuar las medidas de sus ángulos opuestos, encontraremos también valores iguales, porque así nos lo dice nuestra geometría euclídea.

Lo verdaderamente sorprendente de ese resultado es que se haya tardado tantos siglos en considerarlo sorprendente. ¿ Dónde está su evidencia ? En cierto modo podría entenderse como una comprobación experimental que avalaba (ya que no demostraba) la validez de la geometría euclídea empleada, al menos dentro de la

escala de tamaños y precisión de los procesos de medida empleados. Pero igualmente podría pensarse que avalaba el método experimental de efectuar las mediciones de las longitudes y ángulos. O mejor sería concluir que lo que avala es la adecuación de ese método de medir a la interpretación euclídea de los resultados, y que no podemos sustraernos a la dificultad de justificar por separado unos procedimientos de medición y una característica de la geometría adoptada.

EL GRUPO DE LAS SEMEJANZAS

Si la geometría se supone euclídea, nos encontramos con una diferencia fundamental entre las mediciones de ángulos y de longitudes. Mientras las primeras cuentan con una unidad intrínseca, la vuelta completa, cuya cuarta parte es el ángulo recto, las segundas exigen la adopción previa de una unidad de medida. No es posible definir tal unidad en términos geométricos. La geometría euclídea admite el grupo de las semejanzas, que hace que la unidad de medida de longitudes, necesaria para convertir los datos geométricos en numéricos (incluso la introducción de coordenadas), sea ajena a la propia geometría.

El admitir el grupo de las semejanzas, es una buena cualidad de la geometría euclídea, en relación con nuestra intuición pura, que nos obliga a admitir la posibilidad de construir cubos, esferas, etc., del tamaño que deseemos. En cambio, en cuanto nos salimos de la escala de tamaños habitual para el hombre, este grupo de transformaciones es totalmente indeseable. Es evidente para cualquier físico, que no podemos considerar un átomo de hidrógeno de tamaño arbitrario.

La realidad introduce en nuestra geometría una unidad de medida, que no puede describirse en términos geométricos. Aunque no supongamos que los electrones pueden considerarse como bolitas, el radio del electrón es una longitud que interviene en diversas teorías. Si en un experimento se crea un electrón en un lugar determinado ¿ No es sorprendente que resulte del mismo radio que los demás, cuando en ese lugar no hay ninguna unidad de longitud natural a que referir su longitud ?

Resulta así que la geometría adecuada a la Física no es la euclídea, con su grupo de semejanzas, sino acaso la euclídea dotada de una unidad de medida singular, privilegiada, invariante en el grupo de las congruencias, pero que elimina el grupo de las semejanzas. Después de Klein, una geometría es esencialmente lo que sea su grupo de transformaciones fundamentales: Por tanto, tal geometría ya no es euclídea. Las otras geometrías no-euclídeas homogéneas, elípticas o hiperbólicas, no admiten el grupo de las semejanzas. No hay triángulos semejantes; al ir aumentando las longitudes de los lados de un triángulo, cambia el valor de la suma de sus ángulos, de modo que puede definirse una unidad natural de longitud en cada punto del espacio, del mismo modo que hay una unidad natural para los ángulos. Esta unidad está íntimamente relacionada con el radio de la curvatura del espacio (con la interpretación que hoy día tenemos de estas geometrías).

En vista del hecho indudable de que existen longitudes "patrones" naturales (como el citado radio del electrón), parece razonable afirmar que *la geometría euclídea es la menos adecuada para la descripción del mundo físico*, ya que las no-euclídeas, homogéneas o no, no necesitan de la artificial y difícil introducción de una unidad patrón ubicua; el "radio de curvatura del espacio" en cada punto (o algo más complicado si falta la isotropía necesaria para definirlo), hace ese papel. No tenemos tal recurso en la geometría euclídea.

EL SÓLIDO RÍGIDO

El proceso de medida de longitudes está basado en la existencia de sólidos rígidos, con los que construir nuestras reglas, a ser posible, graduadas. Hacemos nuestras reglas de un metal (el platino iridiado tiene buena fama) y confiamos en que estos instrumentos satisfacen la condición de invarianza a que nos referíamos antes. Ello, a pesar de la experiencia en contrario: Sabemos que si tenemos dos reglas gemelas y nos llevamos una a un lugar cálido, al traerla caliente, junto a su compañera, ya no hay coincidencia. Conocemos el fenómeno de la dilatación, y lo eliminamos exigiendo una temperatura determinada para las mediciones o efectuando la oportuna corrección.

Pero lo curioso es que el fracaso no se debía a la dilatación, sino a la inercia térmica de la regla, que permitía juntar una regla caliente con otra fría. Si hubiese una temperatura en cada punto, y la regla la alcanzase inmediatamente al situarse en él, las reglas se dilatarían o contraerían, pero reglas gemelas que coincidiesen exactamente en un lugar del espacio, seguirían coincidiendo si se juntaban en otra parte, con independencia de por dónde se había llevado cada una a ese sitio.

Si el experimentador es capaz de medir temperaturas y conoce las leyes de la dilatación, pudiendo, por tanto, corregir las mediciones realizadas con estas reglas, se supone que sus mediciones confirmarán las previsiones de la geometría euclídea. Pero si decide aceptar "por definición" las medidas proporcionadas por sus reglas, podrá hacerlo sin inconsecuencias, ya que éstas satisfacen a las condiciones de invariancia citadas antes, pero los resultados no serán acordes con los previstos por la geometría euclídea; por ejemplo, la determinación experimental de la razón de longitudes de la circunferencia al diámetro, en un círculo con la periferia fría y el centro caliente, daría valores mayores que π.

Puede haber otros "campos" en el espacio que, al igual que las temperaturas del ejemplo anterior, afecten a las reglas de medir cuando las desplazamos, dilatándolas o contrayéndolas (según sentenciaría quien conociese el fenómeno) en forma imposible de averiguar mediante mediciones efectuadas con las propias reglas, aunque cambiaría la geometría aplicable. Queda claro que la solución del problema de determinar la geometría adecuada para la descripción de los resultados de nuestras mediciones de longitudes y ángulos depende de qué sea lo que consideremos como sólidos rígidos.

La adopción de longitudes de onda de determinadas luces como patrones de medida, en lugar de los sólidos rígidos, entraña problemas parecidos y añade el nuevo de por qué los dos métodos de efectuar las mediciones son concordantes, difícil de explicar si ambos no se refieren a alguna carcaterística ubicua del espacio, tal como su curvatura en cada punto.

Incluso las propiedades globales del espacio dependen sustancialmente de los métodos empleados para las mediciones. Consideremos como ejemplo la parábola de ecuación $y = x^2$ situada en el plano euclídeo, y el espacio P de una sola dimensión constituido por esa línea. La métrica inducida en P por la del plano, hace de P un espacio infinito. Consideremos, en cambio, que adoptamos una unidad de medida que en cada punto de P sea igual al radio de curvatura de la parábola. Es inmediato que con ese convenio, la longitud de un arco de la parábola resulta ser igual al ángulo que forman las tangentes en sus extremos, y el espacio P resulta tener longitud total igual a π, y en consecuencia, es finito.

LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA

Ya en nuestro siglo, las revolucionarias teorías de **Einstein** conocidas con el nombre de *relatividad restringida* afectaron profundamente al problema que nos ocupa, denunciando nuevas dificultades en el problema de la medición de una longitud. Se trata de que para comprobar que dos reglas son iguales, como se sabía, hay que llevarlas una junto a otra y ver si coinciden sus extremos, pero naturalmente, *en el mismo instante*; es decir, había que asegurarse de la simultaneidad de las comprobaciones de coincidencia. Pero resulta que la comprobación experimental de la simultaneidad de sucesos que ocurren en puntos distantes es un problema muy delicado. Equivale al de poner de acuerdo dos relojes situados en esos puntos, problema fácil para un observador que pueda mandar señales lumniosas de uno al otro. Lo malo es que el método proporciona resultados distintos según sea el movimiento del observador. Lo que para uno es simultáneo, no lo es para otro, y así no hay manera de efectuar la medición de una longitud en forma independiente del observador que la realiza.

El hecho de que la luz se propague a velocidad tan grande, en relación con las velocidades que solemos considerar, hace que a efectos prácticos, no tengan repercusión importante las consideraciones anteriores, y podamos seguir efectuando mediciones, sin que nos preocupe mucho la citada exigencia de simultaneidad; pero conceptualmente, la noción misma de longitud, independiente del observador, queda destruida sin remedio. En las mediciones es preciso tener en cuenta el tiempo, y si queremos obtener resultados independientes del movimiento (uniforme) del observador, debemos medir "*intervalos de universo*", en un universo de cuatro dimensiones constituido por el espacio-tiempo, pero cuyas coordenadas espaciales y temporal, no pueden separase en forma independiente del observador.

EL ESPACIO-TIEMPO

Si deseábamos alcanzar una visión clara de los conceptos implicados en nuestro problema de la geometría del espacio, nada podíamos desear menos que la necesidad de introducir el tiempo en nuestras argumentaciones. El concepto de tiempo es el más escurridizo de los que podemos encontrar. Aparte de tratarse de otra de las intuiciones puras de que nos habla **Kant**, queda el problema de su medición. Ni siquiera podemos materializar la unidad de medida en un "patrón" que podamos desplazar, ni podemos sumar intervalos de tiempo no consecutivos. ¿ Cómo podemos llamar magnitud a eso ? ¿ Qué significado puede tener decir que dos intervalos de tiempo son iguales ?

La medición del tiempo se encomienda a los relojes; éstos están basados en las regularidades observadas en ciertos fenómenos físicos. Durante milenios, el reloj adoptado como patrón ha sido el proporcionado por el movimiento de rotación de nuestro planeta, a pesar de que sabemos que nos basta levantar un dedo para variar el momento de inercia de la Tierra y, en consecuencia, su velocidad angular (aunque muy poco, ciertamente). Los relojes basados en oscilaciones mecánicas o eléctricas, se comportan en perfecta sincronía con ese patrón. En la mecánica teórica aparece un misterioso parámetro *t*, que asimilado a las indicaciones de cualquiera de esos relojes, da a sus conclusiones una interpretación en perfecta correspondencia con los resultados de la experiencia. No deja de ser sorprendente, pero estamos habituados a aceptarlo como evidente.

Hoy dia, se han generalizado otros relojes, como los atómicos, basados, por ejemplo, en la supuesta regularidad de una descomposición radioctiva, y en cualquier caso, en la supuesta regularidad con que se produce algún otro fenómeno disipativo. Es un misterio el por qué estos relojes parecen estar exactamente de

acuerdo con los que proporcionan las regularidades de la mecánica. No hay una razón clara que justifique este acuerdo entre procesos de origen tan diferente (irreversibles unos y reversibles otros, además), e incluso es posible que ese acuerdo sea sólo aproximado, para tiempos no muy largos, y que sus indicaciones vayan teniendo distintos significados y distinto comportamiento, por ejemplo, a medida que el Universo se expande. Si llega a comprobarse que la identidad de comportamiento de los relojes basados en ambos principios es absoluta, habría que buscar una explicación profunda a ese resultado, de la misma manera que la sorprendente igualdad de las masas inercial y gravitatoria, fué un enigma hasta que ambos conceptos quedaron unificados en la teoría general de la relatividad.

LA RELATIVIDAD GENERAL

La integración del tiempo, junto con el espacio, en un universo de cuatro dimensiones, se consumó definitivamente después de la introducción por **Einstein** de su *teoría general de la relatividad*. El aparato matemático requerido para el desarrollo de la teoría, la *geometría diferencial*, había sido elaborado ya por **Riemann** y muy desarrollado con anterioridad para el estudio de las superficies. En su teoría, las propiedades geométricas del espacio-tiempo aparecían como protagonistas. El propio concepto de masa aparecía tan identificado con esas propiedades geométricas, que podía interpretarse que era una simple manifestación de ellas, o si se prefería, la causa que las determinaba. La gravitación y la inercia aparecían como dos aspectos de las mismas propiedades geométricas y toda la mecánica celeste quedaba reducida a pura geometría.

Por supuesto, la geometría del espacio-tiempo no podía ser euclídea, ni siquiera homogénea. Su curvatura variaba con la presencia de masas (o si se prefiere, su curvatura variable se manifestaba como una distribución de masas). Las propiedades globales del espacio no quedaban determinadas a priori. Podía tratarse de un universo finito o infinito, estático, en expansión o en contracción, y había medios de determinar experimentalmente estas propiedades, aunque las observaciones necesarias se presentaban como muy difíciles. De este estudio se ocupó la *Cosmología*. El nuevo aparato matemático, tan satisfactorio conceptualmente y para el planteamiento de los problemas cosmológicos, se presentó como enormemente complicado para abordar los problemas más sencillos de la mecánica celeste; confirmaba los resultados de la mecánica de **Newton** con gran aproximación para el sistema solar, y en los pocos casos en que daba resultados algo diferentes, las observaciones astronómicas de gran precisión daban siempre la razón a la Relatividad General.

En la formulación de **Einstein** de su relatividad general, se asimilaba el espacio-tiempo a una variedad de Riemann de cuatro dimensiones, en la que la métrica venía determinada por una forma $ds^2 = \Sigma\ g_{ij}\ dx_i\ dx_j$ (con signatura + - - -), donde las diez componentes del tensor simétrico g_{ij} son funciones de las coordenadas curvilíneas adoptadas. Las propiedades de curvatura del espacio vienen dadas por el tensor de *Riemann-Christoffel*, del que, por contracción de índices, se deduce el tensor de *Ricci*, R_{ij}, simétrico, cuyos diez elementos son expresiones diferenciales. La teoría de la relatividad general, en su primera versión, planteaba las ecuaciones diferenciales $R_{ij}=0$, y establecía que los movimientos de los puntos materiales, en virtud de la gravitación, venían descritos por las geodésicas del espacio (en particular, aquellas para las que $ds=0$, describían el movimiento de la luz). En una versión posterior, las ecuaciones fueron sustituidas por las $R_{ij} = \lambda g_{ij}$, donde λ es la llamada *constante cósmica*. (En realidad, no había mucho donde elegir, pues como demostró **Cartan**, estas ecuaciones son las únicas que, siendo de segundo orden y lineales

respecto a las derivadas segundas, satisfacen a los principios de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento). Esta modificación tenía consecuencias muy importantes: El espacio resultaba ser finito y aparecía el fenómeno de la expansión del Universo, que se comprobó mediante la observación de los espectros de las galaxias.

EL MÉTODO EPISTEMOLÓGICO

Las hipótesis anteriores eran de apariencia tan arbitraria como complicada, y tenían aspecto de poder ser sustituidas por otras, si la experiencia lo aconsejaba. **Sir A. Eddington** buscaba la confirmación de su idea de que la mayor parte de las leyes de la Física, que pomposamente solían llamarse *Leyes de la Naturaleza (si no todas)*, eran directamente deducibles del examen atento de la manera de hacer las observaciones (como la ley de que la media de las puntuaciones obtenidas con n dados se estabiliza en un valor de 3,5 al crecer n, procede más del mecanismo de obtención de la media aritmética que de que ocurra algo real con los dados, como no sea que estén sometidos al puro azar; la media cuadrática daría otro valor límite). En su "*Filosofía de la Ciencia Física*", ponía el ejemplo del ictiólogo que estudiaba los animales que recogía del océano con sus redes. Lo que no era susceptible de ser capturado con la red, no era objeto, según él, de la ictiología, sino de la meta-ictiología, que no le interesaba en absoluto. Encontró la ley experimental que afirmaba que todos los animales de la ictiología tenían más de 6 centímetros; podía haberse ahorrado las experiencias y haber examinado con atención sus redes.

Eddington denominaba *Método Epistemológico* a la búsqueda de estas leyes deducidas del examen profundo de nuestros métodos de medida. Siguiendo su análisis, la métrica del espacio en el entorno de un punto, viene dada por el tensor métrico g_{ij} antes citado, pero ¿ De dónde tomamos la unidad de medida ? No tenemos otra ubicua más que la que nos brinda la curvatura del espacio, cuyas propiedades resume el tensor de Ricci, R_{ij} . Por consiguiente, la igualdad $R_{ij} = \lambda\ g_{ij}$, no representa otra cosa que la afirmación de que las medidas de distancias en el espacio-tiempo se efectúan tomando como unidad la suministrada en cada punto por la curvatura del espacio. No se necesita experiencia alguna para afirmarlo, (aunque sí haría falta, si se quisiese determinar el valor de la constante cósmica λ). De esta simple consideración se deduce por tanto, la ley general de la gravitación, (inercia incluida) y por añadidura la de la repulsión cósmica. En "*La Expansión del Universo*", dice:

> *Una vez admitido que existe en todas partes un radio de curvatura dispuesto a servir de patrón de medida y que las distancias en el espacio están expresadas directa o indirectamente en función de este patrón, la ley de gravitación se deduce sin más suposiciones y se restablece la existencia de la constante cósmica λ, con la correspondiente fuerza de repulsión cósmica. Basada de este modo en una necesidad fundamental del espacio físico, la posición de la constante cósmica me parece inexpugnable y aun cuando la teoría de la relatividad caiga en descrédito, la constante cósmica será el último baluarte que se rinda. El renunciar a la constante cósmica desmoronaría los cimientos del espacio.*

No todos participaban del entusiasmo de **Eddington** por esta constante. **G. Gamow** escribe que *"Einstein creía que la introducción del término cosmológico fué el mayor desacierto que cometió en toda su vida, pero una vez introducida por él, la constante cosmológica levanta su horrible cabeza una y otra vez"*.

Nunca la Física había adquirido una expresión tan reducida a la Geometría, y en cierto modo, con una reducción *a priori*. Pero una vez más, las propiedades de esa Geometría no son atributo de la realidad, sino de nuestros propios métodos de acercarnos a ella. Es como un renacimiento de **Kant**, pero con la diferencia de que la representación geométrica requerida por la Física, viene

dada, no por nuestra intuición pura, sino por el método de construir tal representación.

LAS TEORÍAS UNIFICADAS

El éxito de los físicos relativistas al encontrar una representación geométrica, tan simple conceptualmente, tanto de la teoría de la gravitación, como de la fuerza de repulsión cósmica, les indujo inmediatamente a tratar de generalizar su teoría de modo que abarcase también las otras fuerzas encontardas en la Física, principalmente la electromagnética; se quería encontrar una *teoría del campo unificado* que condensase en una ecuación, y a ser posible en una interpretación geométrica, todos los fundamentos de la física teórica.

Los primeros éxitos en este sentido se debieron a los audaces trabajos de T. F. E. **Kaluza**, que consiguió una teoría unificada que daba cuenta a la vez de los fenómenos gravitatorios y de los electromagnéticos. Tambien esta teoría reducía estos fenómenos a pura geometría. Lamentablemente para los deseosos de mantener el nexo entre el espacio de la Física y el de nuestra intuición, ese espacio-tiempo era de *cinco dimensiones*. Una de ellas no se nos manifestaba directamente en los fenómenos ordinarios, porque el espacio estaba tan curvado en su dirección, que se "arrollaba" en ciclos de menos de 10^{-18} cm. No obstante, las partículas con masa o carga eléctrica adquirían movimientos representados por geodésicas del espacio de cinco dimensiones, aunque esos movimientos solo se manifestaban en cuatro (incluido el tiempo). Esta teoría, aparte de no dar cuenta de las otras fuerzas de la Física, tropezó con serios obstáculos, pero fué el origen de una gran diversidad de teorías unificadoras, que siguen desarrollándose hoy dia, pero ya a la luz de la mecánica cuántica.

LA MECÁNICA CUANTICA

Mientras los físicos relativistas y los cosmólogos trataban de dar una fundamentación geométrica a la física entera, los físicos que se ocupaban de las partículas elementales y de los fenómenos subatómicos parecían dispuestos a demoler cualquier teoría con soporte geométrico. Creían en la existencia de los electrones, pero les negaban el derecho a tener una posición y una velocidad determinadas. La expresión "coordenadas de un electrón" solo tenía significado en condiciones muy especiales. Todo lo más podía hablarse de la probabilidad de encontrar ese electrón en un punto de determinadas coordenadas, en un experimento concreto. De ninguna manera podía atribuirse a un electrón el atributo de ser extenso, de modo que un electrón no podía ser una cosa, en sentido ordinario. Además, para un electrón determinado, podía determinarse su *spin*, como una extraña coordenada más, con solo dos valores, y cualquier tentativa de conseguir una imagen fiel de esta propiedad, asequible a nuestra intuición pura, resultará vana, si no engañosa. Análoga situación se producía con las restantes partículas.

Los físicos de la mecánica cuántica utilizaban el espacio, por supuesto, para situar en él los aparatos, macroscópicos, por definición, con lo que se hacían las experiencias, y para que en él se propagasen, ateniendose a ciertas ecuaciones diferenciales, ondas de una función imaginaria que informaban, en forma probabilística, acerca de los resultados que se obtendrían en mediciones posteriores. Lo que parecía ser el objeto de su estudio, las partículas elementales y sus interacciones, apenas podía decirse que "estuviesen" en el espacio, o al menos en punto determinado de él, en un preciso instante. Por supuesto que operaban siempre con fenómenos que se desarrollaban en escala atómica. En esas condiciones, el problema de si el espacio utilizado era euclídeo o no, carecía de importancia.

Aunque se desvaneció pronto el sueño de describir todos los fenómenos físicos a través de unas pocas partículas elementales, ya que éstas proliferaron en forma desesperante, tanto en las teorías como en las experiencias, al menos creció poco el repertorio de las fuerzas que las hacían interaccionar, manteniéndose en la gravitatoria (quizás con la de repulsión cósmica), la electromagnética, la nuclear fuerte y la nuclear débil, siendo escasos los intentos de ampliar esta lista. A los físicos que las estudiaban les siguió tentando el conseguir una reducción a la geométría de estas fuerzas y en los últimos años han aparecido multitud de teorías, con un complicado soporte matemático basado en los últimos avances de la geometría diferencial, del estudio de los grupos de simetría y de los espacios fibrados. Destacan las teorías de la *supergravedad* y las de las *cuerdas* y *supercuerdas*. En las primeras, se precisa un espacio-tiempo de *once dimensiones*. Alguna teoría de cuerdas exigía un espacio-tiempo de 26 dimensiones; las de supercuerdas se desarrollan en espacios de *diez dimensiones*. Queda mucho por investigar en estas teorías, pero queda claro que el espacio-tiempo de cuatro dimensiones resulta insuficiente para soportarlas.

CONCLUSIÓN

La conclusión que podemos sacar de lo anterior es que la palabra *espacio* se usa con significados muy diferentes, según las ocasiones. Tenemos, por una parte, los espacios abstractos creados por los geómetras, a través de sistemas de axiomas, en cierto modo arbitrarios, con el único condicionamiento del rigor lógico exigible a toda construcción axiomática. Si de los diversos espacios geométricos que pueden crearse así, los geómetras muestran preferencias por algunos y consideran otros como carentes de interés, ello obedece a razones de índole más cercana a la estética que a la lógica, que pueden cambiar con el paso del tiempo. Las eventuales aplicaciones físicas que se encuentren para una geometría podrán influir ocasionalmente en que ésta se considere como interesante. El espacio euclídeo tridimensional es tan solo uno de los muchos a los que los geómetras han dedicado sus trabajos, aunque tiene el mérito de haber sido el primero, con milenios de ventaja respecto a los demás.

Tenemos, por otra parte, el espacio de nuestra intuición, que nos descubrió **Kant**, y que debiera ser objeto de estudio por los psicólogos, más que por los matemáticos, por tratarse de una característica humana, mediante la que podemos acceder a formarnos una representación de lo que percibimos a través de nuestros sentidos. Localmente, ese espacio es tridimensinal, métrico y prácticamente euclídeo, simplemente porque la geometría euclídea se desarrolló por abstracción a partir de esa intuición. Pero hoy sabemos que hay una infinidad de geometrías que localmente dan idénticos resultados y en cambio presentan propiedades globales muy diferentes, por lo que es abusivo atribuir al espacio de nuestra intuición las propiedades globales del euclídeo, en particular, por lo que se refiere a su característico grupo de las semejanzas.

Por último, tenemos los variados espacios con los que distintas teorías físicas de corte geométrico, intentan modelizar los fenómenos observables, como una alternativa satisfactoria a la desagradable introducción de fuerzas de distintos tipos que actúan a distancia entre las partículas. Hace mucho tiempo que se vió que era necesario prescindir de la exigencia de que ese espacio fuese intuible.

Por supuesto que los espacios que utilizan las modernas teorías físicas, están escogidos entre los que, con apariencia caprichosa, han generado previamente los geómetras, si bien también, contadas veces, se usan algunos "mandados a hacer de encargo". La mayor parte de las teorías geométricas de la Física

han utilizado espacios que habían sido estudiados años antes por matemáticos puros.

El espacio de nuestra intuición pura no ha desaparecido como un accidente que, en alguna época histórica, introdujo confusión en nuestros conceptos geométricos. Permanece hoy en la forma de una exigencia para que una teoría física pueda ser considerada como una descripción comprensible de lo observado. Por extraño a nuestra intuición que sea el espacio geométrico utilizado por la teoría, debe reducirse al tridimensional localmente casi euclídeo, cuando se aplica al mundo de las dimensiones humanas (en tamaños y velocidades), llamadas "macroscópicas" por los físicos mecano-cuánticos y "locales" por los cosmólogos. Los propios dispositivos experimentales deben estar construidos a esta escala y descritos, por tanto, en términos del espacio y del tiempo de nuestra intuición pura. Lo que ha conducido a reiterados fracasos es el tratar de extrapolar las propiedades de este espacio y de este tiempo a la descripción de los fenómenos que se observan, tanto a escala atómica como cósmica, o en los que intervienen grandes velocidades.

Después de ésto, cuando usemos la habitual denominación **"Geometría del Espacio"**, seremos conscientes de su ambigüedad y de la profundidad de los problemas que encierra su interpretación.

SOBRE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Por José A. Fernández Viña
Catedrático de la Universidad de Murcia

Nos limitaremos a considerar sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, para fijar las idéas.

APLICACION DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BANACH

Sea f una función de dos variables definida en R^2 y con valores en R^2 y sean f_1, f_2 sus dos componentes respecto de la base canónica de este espacio de modo que $f(x, y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Supongamos que f_1 y f_2 admiten derivadas parciales acotadas en valor absoluto por un número M con $0 < M < 1/2$. Entonces el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(x, y) \\ y = f_2(x, y) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

tiene una solución y solamente una en R^2.

En efecto, aplicando el teorema de los incrementos finitos, será:

$$f_1(x,y) - f_1(x',y') = (x - x')\, D_1 f_1(\xi,\eta) + (y - y')\, D_2 f_1(\xi,\eta)$$

de donde

$$|f_1(x,y) - f_1(x',y')| \le (|x - x'| + |y - y'|).M$$

cualesquiera que sean los puntos (x,y), (x',y') de R^2. Análogamente,

$$|f_2(x,y) - f_2(x',y')| \leq (|x-x'| + |y-y'|).M$$

Luego

$$|f_1(x,y) - f_1(x',y')| + |f_2(x,y) - f_2(x',y')| \leq 2M(|x-x'| + |y-y'|)$$

es decir,

$$||f(x,y) - f(x',y')||_1 \leq 2M \; ||(x,y) - (x',y')||_1$$

y como $0 < 2M < 1$, esto prueba que $f:R^2 \to R^2$ es una aplicación contractiva respecto de la norma $|| \; ||_1$. Por el teorema de Banach (1922) existe en R^2 un único punto fijo para f, o sea un punto (x_0, y_0) tal que

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= f_1(x_0, y_0) \\ y_0 &= f_2(x_0, y_0) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

como queríamos demostrar.

Ejemplo.- Consideremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} (x+y) \\ y &= \tfrac{1}{3} \cos (x-y) \end{aligned}\right\}$$

Se reconoce inmediatamente que aquí podemos tomar $M = \frac{1}{3}$ así que este sistema tiene solución única en R^2.

Nota: Como es bien sabido la solución (x_0, y_0) puede aproximarse con cuanta precisión se desee mediante la sucesión de valores

$$(x_1,y_1), \quad (x_2,y_2) = f(x_1,y_1), \quad (x_3,y_3) = f(x_2,y_2), \ldots$$

APLICACION DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BROUWER

Sea f una aplicación de R^2 en R^2 continua y acotada. Existe entonces un conjunto K compacto y convexo de R^2 tal que $f(R^2) \subset K$ por lo cual podemos considerar la aplicación continua $f:K \to K$. En virtud del teorema de Brouwer (1910) existe al menos un punto (x_0, y_0) en K que es fijo para f, es decir, que verifica (2), siendo por tanto una solución del sistema (1).

Este teorema no afirma nada sobre la unicidad de la solución de (1) ni es constructivo en el sentido de la Nota anterior.

Ejemplo.- Consideremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4} \operatorname{sen}^3 (x+y) \\ y &= 1 + \tfrac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} (x-y) \end{aligned}\right\}$$

Es claro que

$$|f_1(x,y)| \leq \tfrac{1}{4} \qquad\qquad |f_2(x,y) - 1| \leq \tfrac{\pi}{3}$$

de modo que podemos tomar el conjunto compacto y convexo

$$K = \left\{ (x,y) \in R^2; \quad |x| \leq \tfrac{1}{4}, \quad |y-1| \leq \tfrac{\pi}{3} \right\}$$

El sistema tiene al menos una solución (x_0, y_0) en K.

Nota: Obsérvese que la hipótesis de que f esté definida y sea acotada en R^2 constituye una simplificación, pero no es necesaria; bata con tener una aplicación continua f de un conjunto compacto y convexo en sí mismo.

Esta situación se nos ofrece en el ejemplo siguiente.

Ejemplo.- Probemos que existe un número real $\lambda > 0$ tal que el sistema

$$\left.\begin{array}{l} s = \lambda\, e^x(\cos y + \operatorname{sen} y) \\ y = \lambda\, e^x(\cos y - \operatorname{sen} y) \end{array}\right\}$$

admite al menos una solución

De las ecuaciones del sistema se deduce inmediatamente que

$$x^2 + y^2 = 2\lambda^2\, e^{2x}$$

Supongamos que

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

entonces es $-1 \leq x \leq 1$ y por tanto

$$2\lambda^2\, e^{2x} \leq 2\lambda^2\, e^2$$

así que tomando   tal que

$$0 < \lambda < 1/e\sqrt{2}$$

conseguiremos que sea

$$f_1(x,y)^2 + f_2(x,y)^2 \leq 1$$

donde $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ son los segundos miembros de las ecuaciones del sistema. Como la función $f = (f_1, f_2)$ es continua y aplica el círculo

$$K = \{(x,y) \in R^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(que es compacto y convexo) en sí mismo, resulta que para los citados valores de λ el sistema propuesto tiene al menos una solución.

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN DE INSCRIPCION

D. ____

Dirección particular ______________________________

Código postal ____________ Teléfono ____________

Centro de trabajo ________________________________

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO NUMERARIO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ____________________

____

para que cargue en mi cuenta numº ____________________

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1988-89 y siguientes.

____________ de ________ de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ____________ Banco ______________________

____

Ruego abonen con cargo a mi cuenta __________ de número ________________, los recibos de mi cuota anual en la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: ______________________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SOLICITUD DE ADHESION DE CENTRO

D. ____

como ______________ del Centro ________________

____

domiciliado en ____________________________________

______________ Código postal ________ Tfno. ________

SOLICITA LA ADHESION A LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ____________________

____

para que cargue en la cuenta nº __________________, los recibos correspondientes al curso 1988-89 y siguientes.

____________________de ________de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ____________ Banco ______________________

____

Ruego abonen con cargo a la cuenta ________ de número ________________, los recibos de la cuota anual de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: ______________________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.

CASO EN QUE UNA DE LAS ECUACIONES ES LINEAL

En este caso lo procedente es despejar de la ecuación lineal una de las incógnitas en función de la otra y sustituirla en la ecuación no lineal, aplicando a la ecuación resultante el teorema de Brouwer o el de Banach.

Ejemplo.- Consideremos el sistema

$$x = y - 1$$

$$x = 1 + \frac{1}{2} \text{ sen } (y - 1)$$

De la primera ecuación despejamos la y; sustituyendo en la segunda se obtiene la ecuación no lineal

$$x = 1 + \frac{1}{2} \text{ sen } x$$

A esta ecuación se le aplica el teorema de Brouwer tomando como conjunto compacto y convexo $K = [1/2,\ 3/2]$ y la función $f(x)$ igual al segundo miembro de la ecuación. También se puede aplicar el teorema de Banach que nos da la unicidad de la solución x en dicho intervalo. La incógnita y será entonces un punto del intervalo $[-1/2,\ 1/2]$.

EL METODO DE LA PENDIENTE PARA EL AJUSTE DE LA CURVA LOGISTICA

Por José V. García Sestafé

1. EXPOSICION DEL METODO

En un artículo anterior se presentó un proceso de recurrencia para el ajuste de la curva logística o autocatalítica. En el presente trabajo se presenta otro método que, como el anteriormente citado, permite determinar los cuatro parámetros, sin ninguna hipótesis inicial, mediante un ajuste mínimo-cuadrático bietápico.

La idea intuitiva de este método es expresar la pendiente de la curva en cada punto, como función de la ordenada del punto, esto es, determinar una ecuación de la forma $y' = f(y)$; las posibles asíntotas se obtendrían de $y' = 0$, o sea serían las raíces de $f(y) = 0$.

Sea la logística de ecuación

$$y = c \frac{a}{1 + b\, e^{-ht}} \quad , \quad c = y_0 , \quad c + a = y_1$$

Tomando logaritmos neperianos y derivando, se obtie- en

$$\frac{y'}{y-c} = \frac{b\, h\, e^{-ht}}{1 + b\, e^{-ht}} \qquad [I]$$

y como

$$1 + b\, e^{-ht} = \frac{a}{y-c}$$

sustituyendo en [I]

$$\frac{y'}{y-c} = h(1 - \frac{y-c}{a})$$

que se puede escribir

$$y' = -\frac{h}{a}y^2 + h(\frac{2c}{a} + 1)\ y - hc(\frac{c}{a} + 1)$$

Haciendo

$$-\frac{h}{a} = \alpha;\ h(\frac{2c}{a} + 1) = \beta;\ -hc(\frac{c}{a} + 1) = \gamma \qquad [II]$$

como (B.3, Anexo II) (*)

$$\left|\frac{\partial(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{\partial(a,\ h,\ c)}\right| = \frac{h^2}{a^2} \neq 0$$

basta ajustar por mínimos cuadrados el polinomio

$$y' = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$$

a la nube de puntos $(y_i,\ y'_i)$, donde se suponen conocidos los valores de y'_i, problema que se resuelve en el apartado 2.

Eliminando a y h en las ecuaciones [II] se obtiene

$$\alpha c^2 + \beta c + \gamma = 0 \qquad [III]$$

que confirma la idea intuitiva expuesta al principio. Si la logística es ajustable a los datos (**) se debe cumplir $\alpha<0$, $\gamma<0$ (véanse ecuaciones II) y $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$; por tanto [III] admite

(*) Con esta notación se indica el apartado correspondiente en la cita bibliográfica.

(**) Si los últimos valores observados presentan un crecimiento exponencial ($y'' > 0$) en general, no es ajustable una logística (B.3. Anexo V).

dos raíces reales, distintas y positivas c_1 y $c_2 (c_1 < c_2)$ tales que

$$c_2 - c_1 = \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha} = \sqrt{(\frac{\beta}{\alpha})^2 - 4\ \frac{\gamma}{\alpha}} = a$$

que indica que las dos asíntotas son

$$y = c_1\ ,\qquad y = c_2 = c_1 + a$$

Si no se cumple que $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, o que α y β no sean ambos negativos, la logística no es ajustable a la nube de puntos dada. Esto no quiere decir que no se puedan fijar arbitrariamente dos asíntotas y, sobre ellas, ajustar por cualquiera de los métodos, la correspondiente curva; es obvio apreciar que esta forma de proceder falsea los resultados y puede carecer, totalmente, de valor predictivo.

Una vez obtenidas las asíntotas, h se podría obtener de las ecuaciones [II], pero es preferible calcular, simultáneamente, los parámetros h y b, para lo cual, se efectúa el cambio de variable

$$Y = \ln\left(\frac{a}{y-c} - 1\right)$$

y se ajusta una recta $Y = A + Bt$ a la nube de puntos $(t_i,\ Y_i)$. Como

$$Y = \ln b - ht \longrightarrow h = -B,\quad b = e^A$$

quedan perfectamente determinados los cuatro parámetros.

2. CALCULO DE LA PENDIENTE

Para poder realizar el primer ajuste mínimo cuadrático es necesario conocer el valor de y'_i en el punto (t_i, y_i); los datos se suelen obtener de los Censos de Población, pero, como el distanciamiento de éstos en el tiempo no es constante(*) los habituales métodos de interpolación -que presuponen intervalos iguales- no son aplicables; por este motivo se ha adoptado el método de las diferencias divididas (B.1 ó B.5).

Para cada tres puntos consecutivos de abscisas t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, se interpola un parábola de segundo grado

$$y = f(t_{i-1}) + (t - t_{i-1})\ f_1(t_{i-1}, t_i) +$$
$$+ (t - t_{i-1})\ (t - t_i)\ f_2(t_{i-1}, t_i, t_{i+2})$$

donde

$$f_k(t_{i-1}, t_i, \ldots, t_{i+k-1})$$

representa la diferencia dividida de orden k, correspondiente a los puntos de abscisas citadas.

Derivando y haciendo $t = t_i$, se obtiene

$$y'_i = (t_i - t_{i-1})\ f_2(t_{i-1}, t_i. t_{i+1}) + f_1(t_{i-1}, t_i)$$

que proporciona la pendiente en el punto de abscisa t_i. Otro procedimiento, también basado en las diferencias divididas, puede verse en (B.6).

(*) En España, los Censos Oficiales han tenido lugar, los dos primeros en 21-5-1957 y en 25-12-1860; a partir de aquí, y con fecha 31-12 en 1877, 1887, 1897 y todos los años múltiplos de 10, hasta 1970. De ahora en adelante se celebrarán los años terminados en 1 y con fecha variable. El de 1981 se realizó el 1 de marzo (B.4).

3. EJEMPLO

Parece necesario indicar, antes de desarrollar algún ejemplo, que la adaptación de una logística (o de un arco de logística) a una serie de datos observados, e inclusive su valor predictivo, se verifican para un determinado intervalo de tiempo que se acostumbra denominar "ciclo cultural", entendiendo que "ciclo cultural" no corresponde al sentido vulgar en que generalmente se utiliza esta expresión, sino que engloba las características estructurales, tecnológicas, sociales y dinámicas que determinan la evolución de la población en el referido período (B.4, Ap. 4).

Para la aplicación del método de recurrencia es necesario disponer de datos equidistantes en el tiempo, aunque esta restricción se puede obviar realizando las interpolaciones pertinentes; por otra parte, hay que tener presente que, como se utiliza un número par de datos, en ocasiones se puede perder información.

El método de la pendiente no está sometido a estas restricciones, por lo cual es aplicable siempre que se disponga de un suficiente número de datos. Por este motivo, se ha preferido incluir una aplicación de este método(*), que abarca el período 1940-1981; aproximadamente en la década 1940-1950 se estima que se inició un "ciclo cultural", en el cual se admite que todavía está inmersa la población española. El ámbito poblacional del ejemplo que se presenta corresponde a las provincias que integran la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas.

Los datos utilizados (que corresponden a la población de derecho de las referidas provincias) y el cálculo de la pendiente para cada año se esquematiza en el siguiente cuadro:

(*) Aplicaciones del método de recurrencia se pueden ver en B.3, Anexo 4.

Año	t_i	$y=f(t_i)$	$f_1(t_{i-1},t_i)$	$f_2(t_{i-1},t_i,t_{i+1})$	$y' = f'(t_i)$
1930	-20	2989,6	-	-	-
1940	-10	3348,8	35,92	-0,111	34,81
1950	0	3685,9	33,71	1,646	50,17
1960	10	4352,2	66,63	1,484	81,47
1970	20	5315,3	96,31	-0,085	95,46
1975	25	5790,5	95,04	-2,594	82,07
1981	30,17	6145,5	68,66	-4,486	45,47
1986	35,25	6260,7	22,68	-	-

donde $f(t_i)$ representa la población considerada en el instante t_i y $f_1(t_{i-1},t_i)$ y $f_2(t_{i-1},t_i,t_{i+1})$, respectivamente, las diferencias divididas primeras y segundas. Obsérvese que para no perder información, se han tomado los datos de 1930 y del Padrón de 1986 (realizado con fecha 1 de abril) para el cálculo de y'.

Ajustando, por mínimos cuadrados,

$$y' = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$$

a la nube de puntos (y_i, y_i') se obtiene

$$y' = -2,7509 \ 10^{-6} \ y^2 + 0,2697 \ y - 565,4326$$
$$(-5,37) \qquad\qquad (5,54) \qquad (-5,11)$$

donde los valores escritos entre paréntesis son los correspondientes valores de la t de Student, que, en valor absoluto exceden a $t_0 = 3,18$ con 3 grados de libertad al nivel de significación del 5%; por otra parte, el coeficiente de determinación es $R^2 = 0,922$ y el valor de la F de Snedecor es $F = 17,84$, que supera a $F_{2,3} = 9,55$ (al 5%).

La ecuación $\alpha^2 + \beta c + \gamma = 0$, proporciona para los valores hallados de α, β, γ,

$$c_1 = 3037,6597 \qquad y \qquad c_2 = 6766,6193$$

de donde

$$a = c_2 - c_1 = 3728,9526$$

Efectuando el cambio de variable

$$Y_i = \ln\left(\frac{a}{y_i - c} - 1\right)$$

y ajustando una recta a la nube (t_i, Y_i), se obtiene

$$Y = 1,5014 - 0,10034 \ t$$
$$(28,17) \qquad (-35,52)$$

valores de t que exceden al valor $t_0 = 2,78$, con 4 grados de libertad al nivel del 5%; por otra parte, el coeficiente de correlación resulta ser $p = 0,9984$, lo cual indica la calidad del ajuste lineal realizado, del cual se obtiene

$$h = -0,10034 \ t, \qquad b = e^{1,5014} = 4,4879$$

Por tanto, la ecuación de la logística buscada es

$$y = 3037,66 + \frac{3728,96}{1 + 4,4879 \ e^{-0,10034 \ t}}$$

Las diferencias entre los valores observados y_i y los valores estimados (mediante la ecuación hallada) $\hat{y}_i$, se indican en porcentaje sobre y_i en la tabla siguiente

AÑO	%	AÑO	%
1940	0,88	1970	0,91
1950	0,85	1975	0,37
1960	2,18	1985	0,73

La adaptación del ajuste se aprecia observando que, salvo en el año de 1960, el porcentaje de desviación es inferior a la unidad.

Un indicador sintético de la calidad del ajuste viene dado por el denominador "índice de bondad" (B.2) que se define

$$I = 1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}$$

y que, como es sabido, indica mayor nivel de adaptación cuanto más próximo está de la unidad.

Para el ejemplo presentado se obtiene

$$I = 0{,}998$$

que comprueba la calidad del ajuste bietápico realizado, dentro del actual ciclo cultural.

Utilizando el resultado obtenido se podrían establecer las predicciones de población:

para 1990, $t = 40 \longrightarrow y_{40} = 6467$ miles de personas

para 2000, $t = 50 \longrightarrow y_{50} = 6659$ miles de personas

admitiendo que dichos años se encuentren dentro del ciclo cultural iniciado en la década de los años cuarenta.

4. BIBLIOGRAFIA

1. Alcaide Inchausti, A. y García Sestafé, J.V.; "Ampliación de Matemáticas para Economistas". Unidad Didáctica 2. U.N.E.D. 1977.

2. García España, E. y Sánchez Crespo, J.L.; "Estadística Descriptiva". I.N.E. 1961.

3. García Sestafé, J.V.; "La Curva Logística". Documentos de Trabajo. I.N.E. 1988.

4. García Sestafé, J.V.; "El Censo de Población. Económicas y Empresariales". Cuaderno 21. U.N.E.D.

5. Guelfond, A.O.; "Calcul des Différences Finies". Dunod. 1963.

6. Keyfitz, N.; "Introduction to the Mathematics of Population". Addison-Wesley. 1968.

RESEÑAS DE LIBROS

VIAJES POR EL TIEMPO Y OTRAS PERPLEJIDADES MATEMATICAS, por Martin GARDNER. Editorial LABOR. Barcelona, 1988. 294 páginas.

La Editorial Labor nos ofrece, para nuestro deleite, un nuevo libro de *Martin GARDNER*. Es verdaderamante increible que un autor tan prolífico como éste, del que ya cococemos tantas obras (ésta es la duodécima colección basada en sus artículos publicados en *Scientific American*), pueda sorprendernos con las novedades y originalidades de otra mas. Cuando se conoce la extraordinaria calidad de los libros anteriores (ver la reseña de nuestro Boletín nº 17), se piensa que no es posible que siga manteniendo ese nivel, a menos que caiga en repeticiones. Pero no es así; en *Viajes por el Tiempo* nos proporciona un nuevo repertorio de entretenimientos matematicos originales, divertidos y en su mayoria, con un trasfondo teórico que no se sospecha al comenzar su lectura.

El libro toma su título del tema de su primer capítulo, dedicado a los escritos de ficcion basados en la *Máquina del Tiempo*, y al análisis de las paradojas a que dan lugar las situaciones descritas en ellos. Tan bien documentado como sabroso.

Los capítulos 2 a 4, están dedicados a disposiciones de figuras sobre el plano, como *Hexas y estrellas*, y *Tangrams* , con propiedades curiosísimas. En los 5 y 6 se consideran juegos en los que intervienen relaciones no transitivas y otros de naipes que dan lugar a interesantes problemas combinatorios. Los 7 y 8 tratan de máquinas de composición musical y de *Arte Anamórfico*, excursión por temas artísticos muy documentada, en temas generalmente poco conocidos. El capítulo 9 presenta ocho problemas realmente apasionantes, de los que no solo da sus soluciones, sino jugosos comentarios.

En muy notable y divertido el capítulo 10, que trata de las inocentadas que *M. Gardner* incluyó en un *Scientific American* de 1975; es un alarde de imaginación y buen humor que fué tomado en serio por muchos. El capítulo 11, sobre *el poliedro de Csaszar*, es un ejemplo precioso sobre el isomorfismo existente entre problemas aparentemente no relacionados. El 12 estudia la estructura matemática de algunos juegos sencillos. El 13 y el 14 están dedicados a varios tipos de mosaicos y el 15 expone la construcción de curiosos mapas del mundo. En el capítulo 16 se plantean y resuelven curiosos problemas breves. En los 17 y 18 se dan nuevos aspectos de los conocidos problemas de cuadrados y cubos mágicos y de empaquetamiento de bloques. El 19 es un sabroso comentario sobre inducción y probabilidad. El 20 estudia los problemas que dan lugar a los *números de Catalan*. El 21 describe diversas amenidades con una calculadora y el último capítulo estudia los "*problemas de plantación*", o colocación de puntos siguiendo alineaciones.

En resumen, un libro con el que el lector aficionado a las matemáticas puede enriquecer sus ideas, a la vez que disfruta con su lectura.

J. F. B.

PENSAR MATEMATICAMENTE, por John MASON, Leone BURTON y Kaye STACEY. Ministerio de Educación y Ciencia y Editorial Labor. Barcelona, 1988. 218 páginas.

El Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, junto con la Editorial Labor, están poniendo al alcance de los lectores españoles las traducciones de obras interesantísimas, relacionadas con las Matematicas, de reciente aparición en otros paises, como la de *P. J. Davis y R. Hersh*, que comentábamos en el número anterior de este Boletín. En la de *J. Mason y L. Burton* que comentamos hoy, se trata del proceso mental que lleva a la solución de los problemas a los que se les puede aplicar el modo de pensar matemático.

Aunque la solución de un problema matemático, una vez obtenida, se presente en forma de razonamiento deductivo, el proceso mental que ha conducido a su obtención, es de naturaleza muy distinta; por eso la presentación de colecciones de problemas resueltos contribuye poco a desarrollar la habilidad para la resolución de otros problemas nuevos. En este libro se trata precisamente de esa manera de *pensar matemáticamente* que conduce a encontrar la solución de un problema. No teorizando sobre psicología, sino enfrentando al lector con problemas bien escogidos e induciéndole a una introspección de las actividades mentales que ha de realizar para resolverlos.

La amplia colección de problemas que utiliza para ilustrar la manera de *pensar matematicamente* sobre ellos, esta muy bien escogida, ordenada por grados de dificultad creciente y presentada en forma amena. El autor trata, a lo largo de todo el libro, de dialogar con el lector, motivándole para que formule hipótesis, las discuta, las someta a prueba y las razone, hasta llegar, no sólo a la solución del problema propuesto, sino a concebir sus posibles generalizaciones.

Como dicen los autores, *Pensar Matemáticamente* es un libro para usar mas que para leer. Va dirigido a los estudiantes y su objetivo es servir de manual para desarrollar la capacidad de razonamiento matemático. Pero los profesores pueden encontrar en él muchas ideas útiles para contribuir al desarrollo de esa capacidad en sus alumnos, con una metodología bien definida y con un inmenso material para trabajar sobre él.

J. F. B.

PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA SEGUNDA FASE DE LA XXV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (FEBRERO DE 1989)

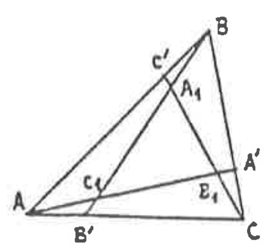
Problema 1º:

El programa de una asignatura consta de n preguntas y el examen de la misma consiste en la exposición de una de esas preguntas, sacada al azar. Un alumno se sabe sólamente una pregunta, pero se le permite realizar hasta n exámenes. Expresar en función de n la probabilidad que tiene de aprobar. ¿ Crece o decrece al aumentar n ? Determinar su límite cuando n tiende a infinito. ¿ Cual es la máxima cota inferior de las probabilidades obtenidas para todos los valores de n ?

Problema 2º:

Sobre los lados AB, BC y CA de un triángulo ABC se toman respectivamente los puntos C', A' y B', de tal modo que

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = r \quad .$$



Las rectas AA', BB', y CC' determinan un triángulo $A_1B_1C_1$. Determinar el área de este triángulo, si se conocen r y el área S de ABC.

Problema 3º:

Demostrar que

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot \ldots \cdot\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Problema 4º:

Probar que tanto el número 1989 como todas sus potencias, 1989^n, pueden escribirse como suma de dos cuadrados de números naturales, al menos de dos maneras diferentes

----

Problema 5º:

Sea D el conjunto de los números complejos que pueden escribirse en la forma $a + b\sqrt{-13}$, donde a y b son enteros. El número $14 = 14 + 0\sqrt{-13}$ puede expresarse como producto de otros dos números de D así: $14 = 2 \cdot 7$. Expresar 14 como producto de números pertenecientes a D, de todos los modos posibles.

Problema 6º:

Demostrar que dados arbitrariamente siete números reales se cumple siempre la siguiente propiedad:

" *Se pueden escoger dos de ellos,* a *y* b, *tales que*

$$\sqrt{3}\,|a - b| < |1 + ab| \quad . \text{"}$$

Poner un ejemplo de seis números reales tales que no tengan esa propiedad.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA 4ª OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Problema 7°

Determinar todas las ternas de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} X + Y - Z &= -1 \\ X^2 - Y^2 + Z^2 &= 1 \\ -X^3 + Y^3 + Z^3 &= -1 \end{aligned}$$

Problema 8°

Sean x, y, z, tres números reales tales que $0 < x < y < z < \frac{\pi}{2}$

Demostrar la desigualdad:

$$\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{sen} x \cos y + 2 \operatorname{sen} y \cos z > \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 2z$$

Problema 9°

Sean a, b, c, las longitudes de los lados de un triángulo.

Probar que:

$$\left| \frac{a - b}{a + b} + \frac{b - c}{b + c} + \frac{c - a}{c + a} \right| < \frac{1}{16}$$

Problema 10°

La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, es tangente a los lados AC y BC en los puntos M y N respectivamente. Las bisectrices de A y B intersecan a MN en los puntos P y Q respectivamente. Sea O el incentro del triángulo ABC.

Probar que $\overline{MP} \cdot \overline{OA} = \overline{BC} \cdot \overline{OQ}$

Problema 11°

Sea la función f definida sobre el conjunto $\{1;2;3;\ldots\}$ por:

$f(1) = 1$; $f(2n+1) = f(2n) + 1$; $f(2n) = 3\,f(n)$

Determinar el conjunto de valores que toma f.

Problema 12°

Mostrar que hay una infinidad de pares de números naturales que satisfacen la ecuación:

$$2x^2 - 3x - 3y^2 - y + 1 = 0$$

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTROS BOLETINES Y DE AQUELLOS PARA LOS QUE TODAVIA NO SE HAN RECIBIDO SOLUCIONES (INDICADOS CON XX)

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números										obs.
		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2 1984	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finlª)	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-85(Bogotá)	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2 1986	18	19	20	18	19	19	-	-	-	-	C
	Varios	-	-	-	-	-	-	17	17	11	17	C
10	China y Austª	20	15	21	20	15	20 21	20	XX	21	-	*
11	OME-f1 1986	13	14	14	14	14	XX	20	15/	20	12	*
	OMI-86(Varsoª)	XX	20	12	21	-	-	-	-	-	-	*
12	OIM-87(Urug.)	16	14	14	17	15	17	-	-	-	-	C
	OME-f1-Extremª	-	-	-	-	-	-	15	15	15	21	C
13	OME-f2 1987	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1 1987	XX	XX	21	18	XX	XX	XX	XX	-	-	
17	OME-f2 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
18	OIM-Perú 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
19	OMI-88(Austlia	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
20	OME-f1 (1988)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
21	OME-f2 (1989)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	/XX	XX	XX	XX	*
	OMI-89 (Cuba)	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	*

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OME = Olimpiada Matemática Española - fase 1ª o 2ª.

Obs. C = Completada la publicación de soluciones
* = Esperamos especialmente de nuestros socios el envío de soluciones a estos problemas señalados con XX .

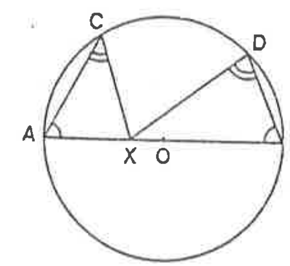
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 3ª (Boletín nº 10)

D y C son dos puntos de una semicircunferencia de diámetro AB. Sea X un punto cualquiera de AB. Probar que:

$$\operatorname{tg} ACX \cdot \operatorname{tg} BDX = \operatorname{tg} BAC \cdot \operatorname{tg} ABD$$

Solución



Sea $AX = d$ y $XB = 2r-d$. En el triángulo ACB, $AC = 2r \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - A) = 2r \cos A$ y en el triángulo ADB, $BD = 2r \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - B) = 2r \cos B$.

Por el teorema del seno en el triángulo ACX:

$$\frac{\operatorname{sen} C}{d} = \frac{\operatorname{sen}(C+A)}{2r \cos A}$$

que se puede escribir

$$\frac{\operatorname{tg} C}{d} = \frac{1}{2r}(\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A)$$

o bien

$$\operatorname{tg} C \cdot \frac{2r-d}{d} = \operatorname{tg} A \qquad [I]$$

Análogamente en el triángulo BDX

$$\frac{\operatorname{sen} D}{2r-d} = \frac{\operatorname{sen}(D+B)}{2r \cos B} \; ; \quad \frac{\operatorname{tg} D}{2r-d} = \frac{1}{2r}(\operatorname{tg} D + \operatorname{tg} B)$$

o bien,

$$\operatorname{tg} D \cdot \frac{d}{2r - d} = \operatorname{tg} B \qquad [II]$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades [I] y [II] se obtiene el resultado

$$\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} D = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B$$

José V. García Sestafé.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 6 (Boletín nº 10)

La mantisa $\{x\}$ de x se define como el mínimo número no negativo tal que $x - \{x\}$ es un entero. (Por ejemplo, $\{1,6\} = 0,6$; $\{\pi\} = \pi - 3$.

Probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \{(2+\sqrt{3})^n\} = 1$$

Damos otra solución de este problema. (Una distinta fué publicada en el Boletín nº 20)

Sea $a_n = (2+\sqrt{3})^n$ y $b_n = (2-\sqrt{3})^n$ su conjugado.

Como $(2-\sqrt{3}) < 1$, $(2-\sqrt{3})^n < 1$

$$\{b_n\} = b_n \to 0$$

Además por ser conjugados a_n y b_n, $a_n + b_n$ es un entero, luego $\{a_n\} + \{b_n\} = 1$ (no puede ser 0, pues $b_n > 0$).

Como $\{b_n\} \to 0$, $\{a_n\} \to 1$.

F.O. Alonso.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 9ª (Boletín nº 10)

En cada recuadro de una tabla $n \times n$ (o sea de n filas y n columnas hay escrito un número. Sabiendo que dos cualquiera de las filas de la tabla son diferentes, demostrar que en la tabla hay una columna tal que si se omite, la tabla que queda, tampoco tiene filas iguales.

(Nota: Las filas 1, 1, 2, 7, 5 y 1, 1, 7, 2, 5 formadas con los mismos números en distinto orden, se consideran diferentes, es decir, no iguales).

Solución

Si no fuese cierto el resultado del enunciado, para cada columna K habría al menos una pareja de filas i_K, j_K tales que la matriz obtenida suprimiendo esa columna K tendría iguales las filas i_K, j_K, es decir, con la notación habitual de las matrices:

$$a_{i_K r} = a_{j_K r} \quad \text{para} \quad r = 1, 2, \ldots, K-1, K+1, \ldots n \qquad (1)$$

por tanto se podría seleccionar una familia de n parejas de filas tales como

$$(i_1, j_1), \quad (i_2, j_2) \ldots (i_n, j_n)$$

que cumplieran (1).

Pero con la hipótesis del enunciado, es decir, que no haya dos filas iguales en la matriz inicial, esto es imposible.

Para probarlo veremos primero que:

(P) Si hemos seleccionado, para distintas columnas, las parejas (a,b), (b,c), (c,d) ... (r,s), no es posible, seleccionar para una nueva columna la pareja (a,s).

Como no interviene para nada el orden de filas ni de columnas, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que para los m-1 primeras columnas hemos seleccionado, respectivamente, las m-1 parejas (1,2), (2,3), (3,4) ... (m-1,m); entonces en la columna m-ésima tenemos $a_{1m} = a_{2m}$ (pues en las filas 1^a y 2^a solo son distintas a_{11} y a_{21}), $a_{2m} = a_{3m}$ (pues en las filas 2^a y 3^a solo son distintas a_{22} y a_{32}), etc., hasta $a_{m-1,m} = a_{mm}$, es decir, todos los elementos en esta columna m-ésima son iguales entre sí hasta la fila m y suprimiendo la columna m-ésima no pueden resultar iguales la fila 1^a y la m-ésima, si no lo eran ya.

Con esto se puede probar ahora que:

Si tenemos escogidas m parejas para m columnas (m = 1, 2,...n), el número de filas distintas que aparecen en ellas es superior a m.

En efecto, para m = 1 tenemos una pareja (i_1 j_1) y dos filas distintas i_1, j_1.

Siendo cierto para m, al pasar a m+1 añadimos una sola pareja y dos filas de las cuales solo una como máximo, según P, puede coincidir con las que ya teníamos.

Entonces nunca podemos tener seleccionados n parejas pues entre todas las filas que aparezcan en ellas no puede haber más de n.

F.O. Alonso.

- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 14 (Boletín nº 11)

En el plano se da un conjunto finito de puntos con coordenadas enteras. ¿Es siempre posible colorear algunos de los puntos del conjunto en rojo y los puntos restantes en blanco, de modo que, para cualquier línea recta L paralela a uno u otro de los ejes coordenados, el valor absoluto de la diferencia entre el número de puntos blancos y el número de puntos rojos en L, no sea mayor que 1?

Justifique su respuesta.

Solución

La respuesta es afirmativa y hay que considerar los casos:

1) Sobre cada recta paralela a los ejes coordenados (incluídos los propios ejes) existe, a lo sumo, un único punto del conjunto dado. En este caso, la proposición es trivial.

2) Existe, al menos, una recta paralela a los ejes o uno de los propios ejes coordenados, sobre la que existe un único punto perteneciente al conjunto dado. En este caso, la proposición se demuestra por inducción: Sea n el cardinal del conjunto de puntos. Evidentemente, para n = 1, 2, 3, la proposición es cierta. Suponemos que lo es para todo $n \leq N$ y la demostramos para n = N+1. Si en el conjunto de puntos dado prescindimos del único punto situado sobre una cierta paralela a los ejes, punto que suponemos existente, tendremos un subconjunto del conjunto dado de cardinal n = N, para el que, por la hipótesis inductiva, la proposición en estudio es válida. Si coloreamos de cualquier color el punto elegido, resulta que para el conjunto inicial, de cardinal n = N+1, la proposición también es válida y, por tanto, queda demostrada.

3) Sobre cada paralela a los ejes coordenados existen, al menos, dos puntos del conjunto dado. En consecuencia, existen ternas del conjunto de puntos dado que cumplen las condiciones: $Q_1(i, j)$, $Q_2(i, k)$, $Q_3(s, j)$, $j \neq k$, $i \neq s$. También en este caso la demostración de la proposición se hace por inducción. Con la misma notación que en II y las mismas condiciones iniciales, si del conjunto de puntos dado suprimimos los tres puntos restantes será: $n = N - 2$ y, por la hipótesis inductiva, existirá, al menos, un coloramiento de puntos para el que se verifique que la proposición a demostrar, si, manteniendo dicha coloración coloreamos los puntos Q_2, Q_3 de un mismo color y el punto Q_1 del color contrario, la coloración de los $N+1$ puntos del conjunto posee la propiedad deseada.

J. Lobo.

Otra solución: José V. García Sestafé.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 10 (Boletín nº 12)

Dados 100 puntos del plano tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados, se consideran todos los triángulos que tienen vértices en tales puntos. Demostrar que no más del 70% de dichos triángulos son acutángulos (tienen sus tres ángulos agudos).

Solución

I. Dados cuatro ángulos convexos α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ tales que $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 2\pi$, al menos uno de ellos es no agudo. En efecto, si los cuatro fuesen agudos $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i < 2\pi$ en contra de lo supuesto.

II. Dados tres ángulos convexos β_i $(i = 1, 2, 3)$, tales que $\sum_{i=1}^{3} \beta_i = 2\pi$, al menos dos de ellos son no agudos. En efecto, si hubiese dos agudos β_1 y β_2, el tercero $\beta_3 > \pi$ en contra de lo supuesto de que eran ángulos convexos.

III. Dados cuatro puntos en el plano, no habiendo tres alineados, de los $\binom{4}{3}$ triángulos que se pueden formar con dichos puntos como vértices, al menos uno no es acutángulo. Se pueden presentar dos configuraciones:

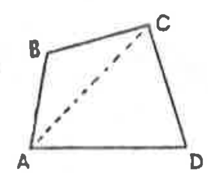


Figura 1

a) Los cuatro puntos forman un cuadrilátero convexo (fig. 1); como $A + B + C + D = 2\pi$ y los cuatro ángulos son convexos, por I uno de los ángulos al menos no es agudo, el B por ejemplo, y entonces el triángulo ABC no es acutángulo.

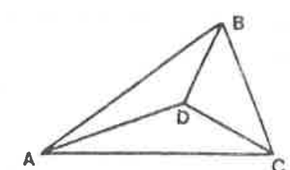


Figura 2

b) Tres de los puntos forman un triángulo y el cuarto es interior a dicho triángulo (fig. 2); los tres ángulos ADB, BDC y CDA son convexos y su suma es 2π, luego, por II, al menos dos de ellos son no agudos y se pueden formar al menos dos triángulos no acutángulos.

IV. Dados cinco puntos en el plano, no alineados tres de ellos, de los $\binom{5}{3}$ triángulos que se pueden formar con ellos como vértices al menos tres no son acutángulos. Se puede presentar tres configuraciones:

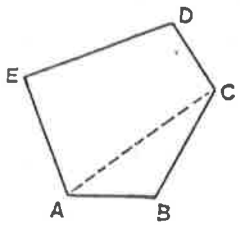


Figura 3a

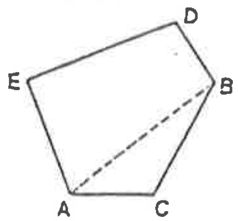


Figura 3b

a) los cinco puntos forman un pentágono convexo; entonces es inmediato comprobar que al menos dos de los ángulos del pentágono son no agudos, pues si hubiese cuatro agudos el quinto sería mayor que π en contra de la hipótesis: sean, para fijar ideas, A y B (fig. 3a y 3b) los ángulos no agudos, entonces en el cuadrilátero ACDE (si A y B eran contiguos) o en el ABDE (sino lo eran), por I existe al menos un tercer ángulo (distinto de A y de B) que es no agudo.

b) Cuatro puntos forman un cuadrilátero convexo y el quinto es un punto interior; entonces al menos un ángulo del cuadrilátero ABCD es no agudo y por otra parte, trazada una diagonal (en las figs. 4a y 4b la DB), supuesto que E / DB, de los ángulos AED, DEB y BEA, por II, al menos dos de ellos son no agudos; si E DB de los ángulos AED y AEB uno al menos no es agudo, sucediendo lo mismo con los ángulos de vértice E, DEC y CEB, luego existen al menos tres ángulos no agudos que dan lugar, por lo menos, a tres triángulos no acutángulos.

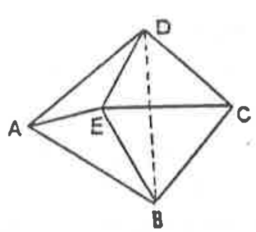


Figura 4a

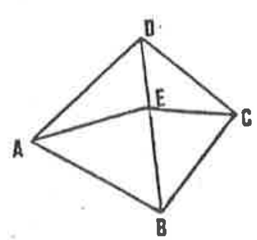


Figura 4b

c) Tres puntos forman un triángulo y los otros dos son interiores a dicho triángulo (fig. 5). Aplicando II a los ángulos de vértices D y E se obtiene que al menos existen cuatro ángulos no agudos, que darán lugar a otros tantos triángulos no acutángulos.

V) Como el número total de triángulos es $\binom{100}{3}$, cada uno de estos triángulos pertenece a

$$\binom{100}{5} : \binom{100}{3} = k$$

configuraciones distintas de cinco puntos o sea en las $\binom{100}{5}$ configuraciones se forman $k \cdot \binom{100}{3}$ triángulos, cada uno repetido k veces. De los 10 triángulos de cada configuración, al menos hay 3 no acutángulos, o sea el tanto por ciento de no acutángulos será, al menos

$$\frac{3 \cdot \binom{100}{5}}{10 \cdot k \binom{100}{3}} \cdot 100 = 30\%$$

y por consiguiente, el tanto por ciento de los acutángulos será, a lo sumo del 70%.

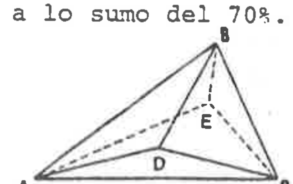


Figura 5

José V. García Sestafe.

PROBLEMA 2ª (Boletín nª 13)

Probar que para todo número natural $n > 1$, es:

$$1\sqrt{\binom{n}{1}} + 2\sqrt{\binom{n}{2}} + 3\sqrt{\binom{n}{3}} + \ldots + n\sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1}\cdot n^3}$$

Solución

Sean los vectores

$$a = (1, 2, 3, \ldots, n) \quad y \quad b = \left(\sqrt{\binom{n}{1}}, \sqrt{\binom{n}{2}}, \sqrt{\binom{n}{3}}, \ldots, \sqrt{\binom{n}{n}}\right)$$

como es sabido, $a\cdot b \leq |a|\cdot|b|$. Pero,

$$|a| = \sqrt{1^2+2^2+\ldots+n^2} = \sqrt{\frac{(2n+1)\ n(n+1)}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{3}}$$

$$|b| = \sqrt{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}} = \sqrt{2^n - 1}$$

Luego,

$$1\sqrt{\binom{n}{1}} + 2\sqrt{\binom{n}{2}} + 3\sqrt{\binom{n}{3}} + \ldots + n\sqrt{\binom{n}{n}} \leq \sqrt{2^n-1}\sqrt{\frac{1}{2}\ \frac{2n^3+3n^2+n}{3}} =$$

$$= \sqrt{2^{n-1}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\cdot\frac{1}{2}\ \frac{2n^3+3n^2+n}{3}}$$

Pero para $n > 1$, $n^3 > \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{2n^3+3n^2+n}{3}$, puesto que

$$\frac{n^3}{3} - n^2 - \frac{n}{3} + \frac{1}{2^n}\left(\frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{n}{3}\right) > 0$$

En efecto, para $n = 2$ y $n = 3$ se comprueba directamente y para $n \geq 4$

$$\frac{n^3}{3} - n^2 - \frac{n}{3} > 0$$

(ya que la función $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x}{3}$ es positiva y creciente para $x > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Luego,

$$\sqrt{2^{n-1}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{2n^3+3n^2+n}{3}} < \sqrt{2^{n-1}\ n^3}$$

y en definitiva

$$\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{\binom{n}{i}} < \sqrt{2^{n-1}\ n^3}$$

José V. García Sestafe, (Madrid).

PROBLEMA 3° : (Boletín n° 13)

Un triángulo dado se descompone en n triángulos tales que:

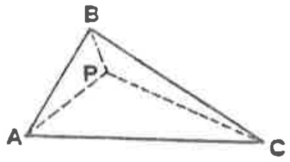
- Dos cualesquiera de ellos no tienen puntos interiores comunes.
- La unión de todos ellos es el triángulo dado.
- Todo segmento que es lado de uno de los n triángulos es también lado de otro de ellos o bien lado del triángulo dado.

Llamaremos s al número total de lados (contando cada uno una sola vez aunque pertenezca a dos triángulos) y v al número total de vértices (contando cada uno una sola vez aunque pertenezca a varios triángulos).

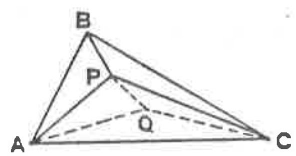
Probar que, siendo n un número impar cualquiera, hay descomposiciones del tipo descrito, de un triángulo dado, en ese número de triángulos y todas tienen el mismo número v de vértices y el mismo número s de lados. Expresar v y s en función de n. Probar que si n es par, no hay tales descomposiciones.

Solución:

Sea el triángulo ABC de la Figura 1. Se cumple $n = 1$, $s = 3$, $v = 3$. Tomando un punto P en el interior del triángulo, unido con los vértices resultan 3 triángulos;



se tiene ahora $n = 3$, $s = 6$, $v = 4$. De una forma general, tomemos un nuevo punto Q en el interior de los triángulos formados (Figura 2). El triángulo APC se sustituye por los triángulos AQP , AQC y CQP , esto es, al aumentar en una unidad el número de vértices, el número de triángulos lo hace en 2 y el de aristas en 3. Después de tomar h



puntos en el interior del triángulo, los triángulos se habrían incrementado en 2h y en 3h los lados; luego en total habrá

$$n = 1 + 2h \quad , \quad s = 3 + 3h \quad , \quad v = 3 + h$$

apreciándose que se cumple

$$n + v = s + 1$$

que recuerda formalmente la expresión del teorema de Euler de los poliedros. Es inmediato comprobar que como $1 + 2h$ es siempre impar, no existe ninguna descomposición en número par de triángulos.

Por otra parte, como cada lado, salvo los del triángulo original, es común a dos triángulos, se tiene que

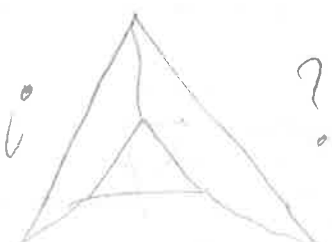
$(s - 3).2 + 3 = 3n$, de donde

$$s = \frac{3}{2}(n + 1)$$

y como $v = s - n + 1$, resulta $v = \frac{n + 5}{2}$

José V. García Sestafe (Madrid)

De esta forma
cada triangulito lo
contamos 3 veces
por eso ponemos 3n

¿  ?

PROBLEMA 4ª (Boletín nº 13)

Siendo a y b dos números arbitrarios, hallar la solución de:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (ax+by)^2 \leq a^2x + b^2y \end{cases}$$

Problema análogo para

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (ax+by)^4 \leq a^4x + b^4y \end{cases}$$

Solución

1ª) Hagamos $ax + by = t$, que con $x + y = 1$, proporciona

$$x = \frac{t-b}{a-b} \qquad y = \frac{a-t}{a-b}$$

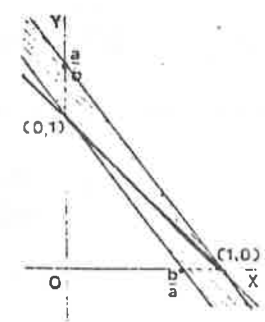
Sustituyendo en la inecuación

$$t^2 \leq (a+b)t - ab; \quad t^2 - (a+b)t + ab \leq 0$$

Como $t^2 - (a+b)t + ab = 0$ admite por raíces a y b (suponemos en lo que sigue $a > b$), $t^2 \leq (a+b)t - ab$ se cumple para $b \leq t \leq a$, o sea el sistema equivale a los dos sistemas

$$\begin{cases} ax + by \geq b \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by \leq a \\ x + y = 1 \end{cases}$$



Ambos sistemas proporcionan como solución el segmento de extremos (0,1) y (1,0).

2°) Con el mismo cambio anterior se obtiene

$$t^4 \leq (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)\,t - ab(a^2 + ab + b^2)$$

La ecuación

$$t^4 - (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)\,t + ab(a^2 + ab + b^2) = 0$$

admite las raices $t = a$ y $t = b$, pudiéndose escribir

$$(t - a)(t - b)(t^2 + (a+b)t + a^2 + ab + b^2) = 0 \quad ;$$

como $t^2 + (a+b)t + a^2 + ab + b^2 = 0$ sólo admite raices imaginarias, la desigualdad

$$t^4 \leq (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)\,t - ab(a^2 + ab + b^2)$$

se cumple si $b \leq t \leq a$, que conduce a la misma solución anterior: El segmento de extremos (0,1) y (1,0).

José V. García Sestafe (Madrid)

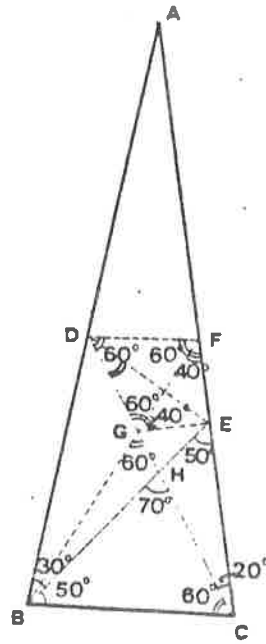
PROBLEMA 5ª (Boletín nº 13)

En un triángulo ABC, D es un punto tomado en el lado AB y E un punto tomado en el lado AC, y se cumplen las siguientes condiciones:

$$\widehat{ABE} = 30°, \quad \widehat{EBC} = 50°, \quad \widehat{ACD} = 20°, \quad \widehat{DCB} = 60°$$

Se pide determinar el valor del ángulo EDC.

Solución



Sea el triángulo de la figura. Se dibuja DF paralela a BC. El triángulo $\widehat{BGC}$ es, evidentemente, equilátero, luego GC = BC; el $\widehat{BCE}$ es isósceles, puesto que $\widehat{EBC} = \widehat{BEC} = 50°$, por tanto BC = CE. Luego CE = GC y el triángulo $\widehat{CGE}$ es también, isósceles; $\widehat{EGC} = \widehat{GEC} = \frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°$. Por otra parte $\widehat{FGE} = 180° - \widehat{DGF} - \widehat{EGC} = 180° - 60° - 80° = 40°$ y $\widehat{GFE} = 180° - \widehat{FBC} - \widehat{FCB} = 180° - 60° - 80° - 40°$; por tanto, FGE es isósceles y como $\widehat{DFG}$ es equilátero, los triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{DEG}$ son iguales, luego DE $\perp$ GF, esto es DE es la altura del triángulo equilátero $\widehat{DFG}$; por tanto,

$$\widehat{EDC} = \frac{1}{2}\,\widehat{FDC} = 30°$$

José V. García Sestafe, (Madrid).

PROBLEMA 6ª (Boletín nº 13)

Para todo entero positivo n se define el polinomio

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1$$

Se pide:

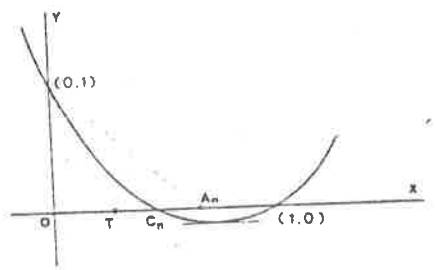
a) Probar que la ecuación $P_n(x) = 0$ (para cada valor de n) tiene una raíz y sólo una en el interior del intervalo (0, 1).

b) Llamando c_n a la raiz considerada en el apartado anterior, determinar $\lim_{n \to \infty} c_n$.

Solución

a) La gráfica de la función $p_n(x)$, que es incidente con los puntos (0, 1) y (1, 0), admite un mínimo en el punto de abscisa

$$m_n = \left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$



punto en el que se anula

$$p_n'(x) = (n+2)\ x^{n+1} - 2$$

y

$$p_n''(x) = (n+2)(n+1)\ x^{n} > 0 \quad \text{si} \quad x > 0$$

Como $0 < n_n < 1$ y para $x > m_n$, $p'(x) > 0$, $p(m_n) < 0$. Luego, por la continuidad de $p(x)$ existe un $c_n < m_n$ en que $p_n(c_n) = 0$, que es único, ya que $p_n'(x) < 0$, si $0 \le x < (\frac{2}{n+x})^{1/n+1}$.

b) Sea T el punto en que la tangente a $p_n(x)$ en (0,1) corta a OX: $T(\frac{1}{2}, 0)$ y sea A_n el punto en que la cuerda incidente con (0, 1) y el mínimo, corta OX: $A_n(\frac{n+2}{2n+2}, 0)$. Como la abscisa de c_n está comprendida entre las de T y de A_n,

$$\frac{1}{2} < c_n < \frac{n+2}{2n+2}$$

y como $\lim \frac{n+2}{2n+2} = \frac{1}{2}$,

$$\lim c_n = \frac{1}{2}$$

Jose V. García Sestafe, (Madrid).

PROBLEMA 4ª (Boletín nº 15)

Pruebe que no existe una función (aplicación) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $f(f(n)) = n + 1987$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots,n\}$.

*****

NOTA: Lamentamos que en nuestro Boletín nº 15 apareciera este enunciado con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en lugar de $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, debido a la mala calidad de la fotocopia de donde se tomó. La solución que incluimos a continuación corresponde al enunciado corregido, que coincide con el propuesto en la O.I.M. de Cuba.

Solución

Si existiese tal función, sería inyectiva:

$$f(n) = f(m) \Longrightarrow f(f(n)) = f(f(m)) \Longrightarrow n + 1987 = m + 1987 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n = m$$

Sea a_0, $a_1, \dots, a_{1986}$ una reordenación de 0, 1, 2, ..., 1986 de manera que:

$$0 \le f(a_0) < f(a_1) < \dots < f(a_{1986})$$

Vamos a probar que $f(a_{1986}) < 2\cdot 1987$. Supongamos lo contrario, $f(a_{1986}) \ge 2\cdot 1987$; sea $a = f(f(a_{1986}) - 2\cdot 1987)$, entonces,

$$f(a_{1986}) = f(a) + 1987 = f(f(f(a))) = f(a+1987)$$

Por inyectividad,

$$a_{1986} = a+1987 \ge 1987$$

lo cual es una contradicción.

Sea i el índice que hace que

$$f(a_i) = \max\{f(a_n)/f(a_n) < 1987\}$$

y sean $R = \{a_{i+1},\dots, a_{1986}\}$, $S = \{a_0,\dots, a_i\}$, (R podría ser vacío).

Si $a_r \in R$, como $f(a_r) \le f(a_{1986}) < 2\cdot 1987$, existe un a_s tal que $a_s = f(a_r) - 1987$, entonces:

$$f(f(a_s)) = a_s + 1987 = f(a_r) \Longrightarrow f(a_s) = a_r$$

además como $a_r < 1987$, $a_s \in S$.

Entonces se tiene que $f^{-1}: R \to S$ está bien definida y es inyectiva $\Longrightarrow$ Card R $\le$ Card S, como

$$\text{Card } R + \text{Card } S = 1987 \Longrightarrow \text{Card } S \ge 994 \Longrightarrow i \ge 993$$

Consideremos el conjunto $\{a_0,\dots, a_i, f(a_0),\dots, f(a_i)\}$. Consta de más de 1987 números todos ellos menores que 1987. Vamos a ver que no hay dos iguales con lo que se llega a una contradicción.

$$f(a_l) = f(a_k) \Longrightarrow a_l = a_k$$

$$f(a_l) = a_k \Longrightarrow f(f(a_l)) = f(a_k) \Longrightarrow f(a_k) = a_l + 1987 \ge 1987$$

contradicción con que

$$f(a_k) < 1987$$

Fernando Chamizo Lorente
(3º de C. Matemática de la U. Autónoma de Madrid).

- ¤ - ¤ - ¤ -

PROBLEMA 5ª (Boletín nº 15)

Si $n \ge 3$, probar que existen en el plano n puntos tales que la distancia entre dos de ellos es irracional, pero el área del triángulo definido por cualesquiera tres de ellos es racional.

Solución

Se pueden construir una infinidad de conjuntos de n puntos que cumplan con las condiciones del enunciado. Por ejemplo, tomando los puntos

$$P_1(0, \sqrt{2});\quad P_2(0, 3\sqrt{2});\quad \dots;\quad P_R(0, (2k-1)\sqrt{2})$$

$$Q_1(2\sqrt{2}, 0:\quad Q_2(4\sqrt{2}, 0);\quad \dots;\quad Q_h(2h\sqrt{2}, 0),\quad k+h=n$$

es obvio que

$$d(P_i, P_j) = (2j-1)\sqrt{2} - (2i-1)\sqrt{2} = 2(j-i)\sqrt{2}$$

$$d(Q_iQ_j) = 2j\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = 2(j-i)\sqrt{2}$$

y en general

$$d(P_i, Q_j) = \sqrt{2(2i-1)^2 + 8j^2} = \sqrt{2(4i^2 + 4j^2 - 4i + 1)}$$

que es irracional, ya que $4(i^2 + j^2 - i) + 1$ siempre es impar.

Sin embargo, el área de cualquier triángulo $P_RP_iQ_1$ es

$$S = \frac{1}{2}\, \overline{P_iP_R} \cdot \overline{OQ_1}$$

donde O es el origen.

Como $\overline{P_iP_R} = 2(k-i)\sqrt{2}$ y $\overline{OQ_1} = 21\sqrt{2}$, se tiene

$$S = 41(k-i)$$

que es racional.

Análogo resultado se obtiene para un triángulo $P_k Q_i Q_1$.

Jose V. García Sestafe (Madrid).

PROBLEMA 6ª (Boletín nª 15)

Sea n un número natural mayor o igual que 2. Demuestre que si $k^2 + k + n$ es primo para todo entero k, con $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$, entonces $k^2 + k + n$ es primo para todo entero k, con $0 \leq k \leq n-2$.

Solución

Sea $f(k) = k^2 + k + n$; el problema se reduce a probar que si el conjunto $f(0), f(1), \ldots, f(n-2)$ contiene números compuestos y $f(m)$ es el primero de ellos, entonces debe ser $m < \sqrt{\frac{n}{3}}$.

Sea p el factor primo más pequeño de $f(m)$, se cumple que $p \leq \sqrt{f(m)}$.

Sean,

$$A_0 = f(m) - f(0) = m(m+1)$$

$$A_1 = f(m) - f(1) = (m-1)\ (m+2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{m-1} = f(m) - f(m-1) = 1(2m)$$

Si $p \geq 2m+1$, entonces

$$2m+1 \leq \sqrt{f(m)}$$

$$4m^2 + 4m+1 \leq m^2+m+n$$

$$3m^2 + 3m+1 \leq n$$

$$3m^2 \leq n$$

$$m \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$$

entonces basta demostrar que el caso $p < 2m+1$ no puede ocurrir.

Si,

$$p < 2m+1 \Longrightarrow p\,|\,(2m)! \Longrightarrow p\,|\,A_0\ A_1 \ldots A_{m-1} \Longrightarrow \exists A_i \,/\, p\,|\,A_i$$

como, $f(0), \ldots, f(m-1)$ son primos,

$$p\,|\,(f(m) - f(i)) \Longrightarrow p\,|\,f(i) \Longrightarrow f(i) = p$$

Como $p \leq \sqrt{f(m)}$, $f(i) \leq \sqrt{f(m)}$, además $f(0) \leq f(i)$ y $f(n-2) \geq f(m)$, por tanto:

$$f(0) \leq \sqrt{f(n-2)}$$

$$n \leq \sqrt{n^2-2n+2}$$

$$2n \leq 2$$

$$n \leq 1$$

En contradicción con $n \geq 2$.

Fernando Chamizo Lorente

(3ª de C. Matemática de la U. Autónoma de Madrid).

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 3ª (Boletín nº 16)

Se considera el conjunto C

$$C = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots\}$$

que se obtiene a partir del 1 tomando los números de cuatro en cuatro. Un número es "primo en C" si no se puede expresar como producto de números de C, menores que él.

a) Comprobar que 4389 es un número de C que puede descomponerse al menos de dos formas distintas en producto de dos números "primos en C".

b) Hallar otro número perteneciente a C que tenga esa propiedad.

Solución

Los números de C son de la forma $4n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Observemos que:

$$(4n+1)\,(4m+1) = 16mn + 4n + 4m + 1 = 4(4mn + n + m) + 1$$

o sea,

$$(4n+1)\,(4m+1) \in C$$

$$(4n+3)\,(4m+3) = 16mn + 12n + 12m + 9 = 4(4mn + 3n + 3m + 2) + 1 \in C$$

a) Como $4389 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$ y además 3, 7, 11 y 19 son de la forma $4n+3$, las posibles descomposiciones de 4389 en "factores primos en C" son

$$4389 = (3 \cdot 7)\,(11 \cdot 19) = 21 \cdot 209$$

$$4389 = (3 \cdot 11)\,(7 \cdot 19) = 33 \cdot 133$$

$$4389 = (3 \cdot 19)\,(7 \cdot 11) = 57 \cdot 77$$

b) Cualquier número de la forma

$$(4n_1+1)\,(4n_2+1)\,\ldots\,(4n_k+1)\,(4m_1+3)\,(4m_2+3)\,\ldots\,(4m_h+3)$$

donde $h = \dot{2}$ admite descomposiciones en C. Por ejemplo,

$$7818045 = 17 \cdot 15 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43$$

Jose V. García Sestafé, (Madrid).

Recibida otra solución de Carlos José Pérez Jiménez

Como socio de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín (señalar con unas aspas los que interesen):

3	4	5	9	10	11	13	14	15	16	17	18
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo (20 pts. por número para Madrid y 30 pts. por número para provincias).

Hagan el envío utilizando como dirección la que consigno en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8 y 12 están agotados. De los números 9 y 19 quedan sólo unos pocos ejemplares.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la Sociedad, Apartado 9479 - 28080-MADRID.