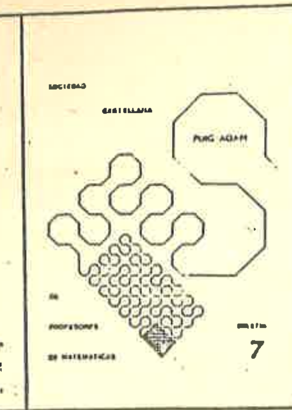
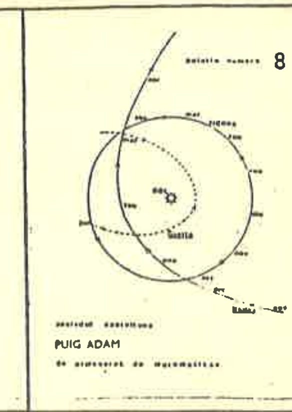
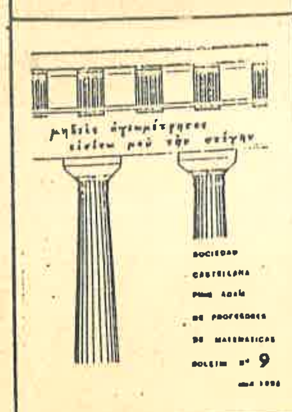
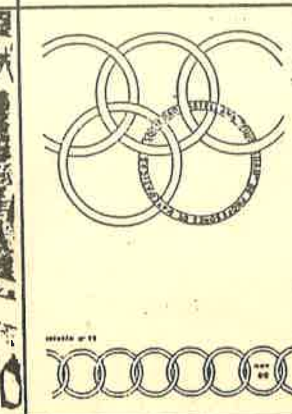
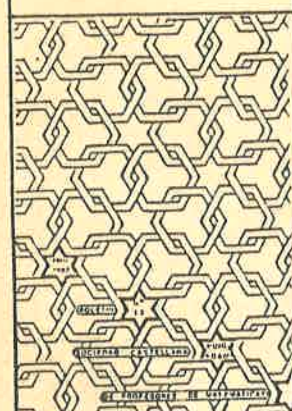
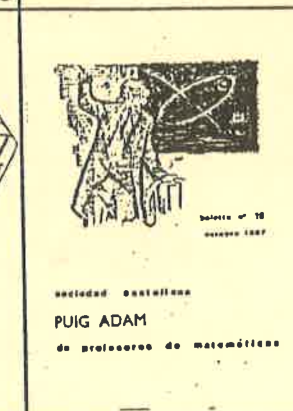


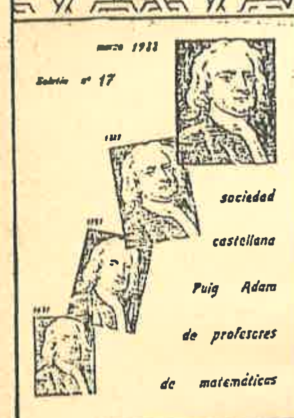


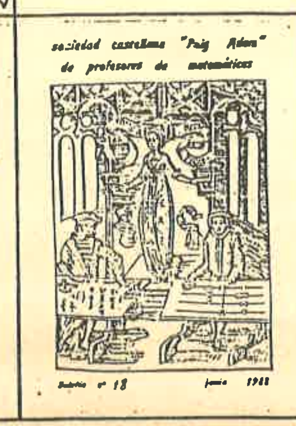


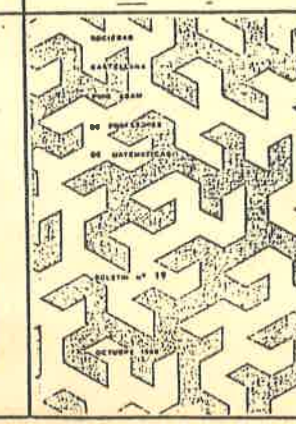








BOLETIN Nº

20

febrero 1989

sociedad castellana
PUIG ADAM
de profesores
de matemáticas

B O L E T Í N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Febrero de 1989 nº 20 (1988-89)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en Ronda de Atocha, 2 (INBAD)

- Toda la correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla).

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge
José R. Pascual Ibarra

- La portada conmemora la publicación del número 20 de nuestro Boletín, reproduciendo las portadas de los quince anteriores.

VEANSE LAS CONVOCATORIAS INCLUIDAS EN ESTE NÚMERO DEL BOLETIN

INDICE Pág.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y CENTROS ADHERIDOS A LA MISMA. NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Francisco Lorenzo Miranda

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Vicesecretario: Francisco Quesada Cobo

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

EDITORIAL

Dª MARIA LUISA ALVAREZ HERRERA

Ya prácticamente terminado este número del Boletín nos llega una triste notica. A las 10:15 h de la mañana del día 17 de enero fallecía en su casa de Madrid la viuda de don Pedro Puig Adam. Noticia que necesariamente ha de figurar en primer lugar del Boletín; no sólo, y ya sería bastante, por tratarse de la esposa de don Pedro, sino porque doña Mª Luisa era también una entusiasta miembro destacada de la Sociedad. Conservaba ordenados todos los ejemplares publicados del Boletín en su biblioteca junto a los mejores libros de su marido

Se ha dicho que una buena parte de la obra de un hombre se debe a lo que sea la compañera de su vida. Doña Mª Luisa, fué en frase de don Pedro, la *mujer que cuida de mi fatiga sin medir la hora*. Los libros de bachillerato que don Pedro escribió se los leía a su mujer para recibir su opinión. Las conferencias que había de pronunciar, una vez escritas, se las leía también, y ella en ocasiones le señalaba posibles mejoras de redacción.

Mª Luisa era canaria. Había nacido en Santa Cruz de Tenerife el día 30 de enero de 1897; el próximo día 30 habría cumplido, por tanto, los 92 años de edad. Su padre, don Arturo, en segundas nupcias, tuvo dos hijos, Arturo y Mª Luisa, que muy pronto, por motivos de trabajo, traslada su residencia a Barcelona. Arturo hijo, y Pedro son compañeros de bachillerato, y unidos fuertemente por sus aficiones musicales. Esto lleva a Pedro al conocimiento de Mª Luisa, también música e intérprete notable de los músicos clásicos románticos. Surge el noviazgo y, por fin, el matrimonio el día 13 de abril de 1925, cuando ya doctor, Puig es profesor auxiliar de la Universidad de Madrid.

Muerto don Pedro en 1960, la vida de Mª Luisa es más triste que otra cosa, agarrada a los recuerdos de su esposo, y suavizada por sus hijas Emilita y Marisa, que le dan unos nietos y bisnietos que son la alegría de Mª Luisa.

Hace doce años una mañana al despertar llama a su muchacha para decirle que no funcionaba la luz eléctrica. Mª Luisa está ciega. Rápidamente se la traslada a Barcelona y en la clínica Barraquer confirman que el accidente no tiene solución. Desde entonces la única diversión de Mª Luisa es rezar y tocar al piano piezas de su marido, esperando, decía, que Dios los reúna para renaudar su felicidad, circunstancia que ha tenido lugar felizmente después de 29 años de espera.

VEA LA
CONVOCATORIA
DE NUESTRA
ASAMBLEA
GENERAL

Y LA CONVOCATORIA DE NUESTRO VII CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS EN LAS PÁGINAS 6 Y 7

CONVOCATORIA DE LA ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE 1989

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente a 1989, para el día 15 de abril de este año, a las 11 h 30 m, en primera convocatoria y a las 12 h en segunda, en el Instituto "Cervantes", calle de Embajadores 70, de Madrid, con el siguiente

"ORDEN DEL DIA"

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la asamblea anterior.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad, y la colaboración con el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados de Madrid.

3. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

4. Conveniencia o no de que la Sociedad Castellana "Puig Adam" se integre en la proyectada Federación Estatal de Sociedades de Profesores de Matemáticas. (Se recuerda a los socios que el "Anteproyecto de Estatutos" de la citada Federación está publicado en el Boletín nº 17 de nuestra Sociedad).

5. Elección de los cargos directivos, cuya renovación establecen los estatutos: Vicepresidentes de Madrid, Ciudad Real, y Guadalajara; Secretario y Bibliotecario.

6. Ruegos y preguntas.

VII CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

Convocado por:
La Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas y el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras.

B A S E S

PRIMERA

Podrán participar los alumnos de B.U.P. y F.P. de los Centros de Albacete, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara, Madrid, Segovia y Toledo.Los de F.P.1 lo harán con los de primero de B.U.P., los de 1º de F.P.2 con los de segundo de B.U.P. y los de 2º o 3º de F.P.2, con los de tercero de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas del Concurso se realizarán en Madrid, en la segunda quincena del mes de Junio (probablemente el sábado, 17 y consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles).

TERCERA

Se concederán diplomas para los mejores de cada nivel, acompañados de los premios correspondientes.

CUARTA

Aquellos Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de dos en cada uno de los tres niveles) deberán realizar la preinscripción antes del día 20 de Mayo de 1989, dirigiéndose por carta a esta Sociedad, apartado de Correos nº 9.479, 28080 - Madrid. En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. (Envíen la carta sin certificar).

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos Centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales en las que se haga constar el curso en que están matriculados en el año académico 1988-89 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

= = = = = = = =

El Servicio de Publicaciones del Ministerio de Cultura ha concedido a nuestra Sociedad unos interesantes lotes de libros procedentes de la desaparecida EDitora Nacional.

La Junta Directiva, en nombre de todos los socios, agradece esta concesión a las autoridades del citado Ministerio.

N O T I C I A S

XIV JORNADAS HISPANO-LUSAS DE MATEMATICAS

Las XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas tendrán lugar en la Universidad de La Laguna entre los días 5 y 9 de Junio (ambos incluídos) de 1989). Las conferencias y comunicaciones de que constará el programa se distribuirán en las siguientes secciones:

I. Algebra.

II. Análisis Matemático.

III. Geometría y Topología.

IV. Estadística e Investigación Operativa.

V. Análisis Numérico, Computación y Matemática Aplicada.

VI. Didáctica e Historia de las Matemáticas.

El Comité Organizador de las XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas ha elegido como sede el Puerto de la Cruz, ciudad turística del norte de la isla de Tenerife, y ha difundido la "Primera Circular" con este anuncio. En una segunda, que se remitirá próximamente se informará sobre las actividades científicas y sobre los actos sociales previstos, así como sobre la forma de presentación de comunicaciones. Las personas interesadas deberán dirigirse a:

Comisión Organizadora
XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna
LA LAGUNA (Tenerife) - ESPAÑA

GACETA MATEMATICA

2.ª Serie,
Volumen 1, Número 1

Hemos recibido el primer número de la nueva serie de " GACETA MATEMATICA ", editado por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas y la Real Sociedad Matemática Española. Celebramos la reanudación de esta publicación, tras un largo paréntesis, y deseamos que recoja los éxitos que merece la calidad de sus redactores y colaboradores.

Publican trabajos en este primer número E. Roanes Lozano, J. Cabezas Corchero y L. Hernández Encinas, R. Edward Clark, Fernando Bombal, L. Fernández Pérez, Wilfred Reyes, F. Bellot, J. Arregui, y M^{a}P. Bujanda. Se da amplia información sobre Olimpiadas Matemáticas y una gran coleccion de enunciados de problemas.

Reproducimos a continuación el Indice de este primer número:

PRIMER ENCUENTRO DE MATEMATICAS PARA EL PROFESORADO MADRILEÑO

El Centro Madrileño de Investigaciones Pedagógicas, en colaboración con la Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma de Madrid y de la Dirección Provincial del M.E.C. ha organizado el PRIMER ENCUENTRO DE MATEMATICAS PARA EL PROFESORADO MADRILEÑO, que se celebrará entre los días 10 y 26 de Enero de 1989.

En este Encuentro están previstas diversas actividades como la Exposición "Horizontes Matemáticos" del Museo de la Ciencia y de la Industria de París, talleres para grupos de alumnos organizados por los CEPs de Madrid y el Programa de Nuevas Tecnologías, conferencias, mesas redondas, etc. El objetivo básico es poner en contacto al profesorado con lAS NUEVAS APORTACIONES EN LA Didáctica de las Matemáticas. Se presentarán las "Experiencias de Aula" por parte de los Grupos de Trabajo o personas que deseen comunicar sus ideas o experiencias.

- - - - -

41° ENCUENTRO INTERNACIONAL DE LA C.I.E.A.E.M.

La Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques anuncia su 41° Encuentro Internacional, que se celebrará en Bruselas, del domingo 23 de Julio al sábado 29 de Julio de 1989. Las reuniones tendrán lugar en la Universidad Libre de esa capital. Las lenguas de trabajo serán el francés y el inglés. El tema del Encuentro será :

"Rôle et conception des programmes de mathématique"

Puede solicitarse información a:

Jacqueline VANHAMME
rue Firmin Martin, 2
B-1160 Bruxelles
Belgique

PRUEBA INTERNACIONAL PARA ESCOLARES DE 13 AÑOS

El Departamento de Educación y la Fundación Nacional de la Ciencia de los E.E.U.U. han organizado una serie de pruebas internacionales en las que han participado 24000 estudiantes de 13 años de E.E.U.U., Canadá, Reino Unido, Irlanda, Corea del Sur y España. Se trataba, en el fondo, de valorar los frutos de la política educativa norteamericana, ante la aparición de opiniones que la calificaban de fracasada; la prueba ha contribuido a respaldar esas opiniones.

En las pruebas científicas, los españoles quedaron por debajo de los surcoreanos, británicos y canadienses anglófonos, pero por encima de los norteamericanos, irlandeses y canadienses francófonos. En las de Matemáticas, los españoles ocuparon el tercer lugar, por debajo de los surcoreanos y canadienses anglófonos, y por encima de los restantes; los E.E.U.U. ocuparon el último puesto.

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlos.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA :

OLIMPIADA MATEMATICA IBERO-AMERICANA :

OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL :

XXV OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PRIMERA FASE

La Primera Fase de la *XXV Olimpiada Matemática Española*, correspondiente al curso 1988-89, ha tenido lugar en el distrito de Madrid, como en la mayor parte de ellos, los pasados dias 11 y 12 de Noviembre de 1988.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*. Como es sabido, a la primera fase pueden concurrir los alumnos matriculados en C.O.U. o F.P.2. Los tres primeros clasificados de cada distrito, además de tener opción a una beca para seguir los estudios de Licenciado en Matemáticas, pueden participar en la fase final, en la que se proclaman los tres ganadores, que reciben los correspondientes galardones y suelen formar parte de los equipos que representan a España en la Olimpiada Matemática Internacional y en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

En el Distrito de Madrid, las pruebas de la Primera Fase se realizaron en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Concurrieron a ellas alrededor de 80 alumnos, y se realizaron en dos sesiones de cuatro horas, consistiendo en la resolución de cuatro problemas en cada una.

El Jurado se reunió el dia 18 de Noviembre y puntuó a los participantes asignándoles hasta 10 puntos por problema, con lo que cada uno podía obtener un máximo de 80 puntos. Los tres primeros clasificados fueron los siguientes:

1º Vicente MUÑOZ VELAZQUEZ, del I. B. "Dionisio Aguado", de Fuenlabrada ... ...54 puntos
2º Alberto GARCÍA MARTÍNEZ, del Colegio "Nª Sª del Recuerdo", de Madrid... ... ...50 puntos
3º Ignacio ROMERO OLLEROS, del Colegio "Nª Sª del Recuerdo", de Madrid... ... ...47 puntos

Muy próximo a éstos quedó Pablo NIETO ACOSTA, también del Colegio Nª Sª del Recuerdo, con 46 puntos, y con algunos menos, Francisco Javier LEÓN COBOS, del Colegio L.A.E., Patrik JUSTEL HALLOUIN y Fahmy THIERY, ambos del Liceo Francés y José María FONT HERNÁNDEZ, del Colegio de Huérfanos de la Armada. Los restantes participantes no llegaron a alcanzar los 35 puntos.

Debemos recordar que el primer clasificado del Distrito, Vicente Muñoz Velazquez, recibió el primer premio del concurso de problemas de nuestra Sociedad, como alumno de 3º de B.U.P., en Junio de este año, y José Mª Font fué premiado en 1986 y en 1988, como alumno de 1º y de 3º, respectivamente.

Como en años anteriores, el trabajo dedicado por algunos Centros a la formación de un grupo de alunnos destacados, se ha visto recompensado por las buenas puntuaciones conseguidas en bloque, aunque no todos hayan alcanzado alguno de los primeros puestos. Para las Olimpiadas sucesivas, sugeriríamos que también se hiciese pública una clasificación por equipos, que dejaría constancia de esta meritoria labor. También este año ha

habido participantes que han acudido a la prueba sin la menor preparación, como se ha puesto de manifiesto en sus resultados, lo que no es razonable teniendo en cuenta el caracter olímpico de la competición: Así, unos treinta participantes no han llegado a obtener 4 puntos, de los 80 alcanzables.

Como indicación de la dificultad relativa que los distintos problemas han tenido para los participantes, damos a continuación números aproximadamente proporcionales a las sumas de las puntuaciones obtenidas por todos ellos en cada problema:

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
18	19	7	6	25	12	8	1

Nuestros lectores podrán formar su juicio personal sobre la dificultad de cada uno de esos problemas, ya que reproducimos sus enunciados en la sección de PROBLEMAS PROPUESTOS de ese Boletín.

Damos la enhorabuena a los ganadores y a los Centros que se han esforzado en su preparación y les alentamos para que tengan una destacada actuación en la segunda fase.

La Fase Final de esta Olimpiada tendrá lugar simultáneamente en Madrid y en las Islas Canarias, con los mismos problemas, en el mes de Febrero de 1989. Confiamos en que de ella salga un equipo que represente dignamente a España en la Olimpiada Internacional de Matemáticas de 1989, que se celebrará en Alemania Federal.

III OLIMPIADA IBEROAMERICANA MATEMATICA

En la reseña sobre la III Olimpiada Iberoamericana Matemática, publicada en nuestro pasado número 18, se deslizaron algunas inexatitudes que conviene corregir, por lo que los dos primeros párrafos de la página 6, que comienzan "La organización del certamen...", *deben ser sustituidos por los siguientes:*

La organización del certamen ha sido compartida por el Ministerio de Educación del Perú, regido por la Profesora Mercedes Cabanillas y la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, representada por su Secretario General, Dr. Simón Romero, el Director de Educación, Dr. Jorge Cavodeassi y el Delegado en Perú, Dr. César Granda, con la colaboración del Prof. José Javier Etayo Gordejuela.

Los alumnos españoles han sido acompañados por los Profesores María Gaspar Alonso-Vega y Francisco Bellot Rosado. También viajó a Perú la Asesora Técnica de la Dirección General de Renovación Pedagógica del Ministerio de Educación y Ciencia, doña María Jesús Luelmo Verdú.

\- - - - - -

OLIMPIADA IBEROAMERICANA MATEMATICA DE 1990

Según nuestras noticias, está previsto que la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas correspondiente al año 1990 se celebre en España.

\- - - - - -

CENTENARIO DE REY PASTOR

Se conmemoró durante 1988 el centenario del nacimiento de don Julio Rey Pastor, en cuyo homenaje se han organizado distintos actos por parte de las instituciones a las que estuvo vinculado.

En Logroño, ciudad de su nacimiento, se celebró, del 3 al 7 de octubre, el II Simposio sobre Julio Rey Pastor, llamado "del Centenario" y organizado por el Colegio Universitario de La Rioja, conjuntamente con el Instituto de Estudios Riojanos y con la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y las Técnicas. Intervinieron, entre otros, los profesores españoles A. de Castro, N. Cuesta, A. Dou, E. García Camarero, M. Hormigón y J. Sánchez Ron, y se contó también con la colaboración de U. d'Ambrosio, de Brasil; T.F. Glick, de los Estados Unidos; F. L. Ortiz, de la Gran Bretaña y M. Otero, de Uruguay.

El día 2 de noviembre la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de la que fué miembro numerario, celebró igualmente un acto de homenaje en el que se hizo la presentación de una obra, "Selecta", editada por la Fundación del Banco Exterior, y que recoge los trabajos más significativos de Rey Pastor en los campos del Análisis, Algebra y Matemática aplicada, comentados por don Sixto Ríos, en Geometría y Topología, con comentarios de don Luis A. Santaló, y en Historia y Filosofía de la Ciencia Española, con un estudio de don Ernesto García Camarero. Un prólogo del Presidente de la Academia, don Angel Martín Municio abre el libro.

En esta sesión conmemorativa glosaron los distintos aspectos de la figura de Rey Pastor los señores Rodríguez-Salinas, sobre "Rey Pastor, maestro"; Ríos García, "Rey Pastor, investigador"; Santaló, "Rey Pastor en Hispanoamérica", y Trillas, "Rey Pastor, lenguaje y lógica", cerrando el acto el Presidente Sr. Martín Municio.

También la Facultad de Matemáticas, de la que había sido catedrático, celebró una sesión de homenaje el día 18 de noviembre, con intervención, seguida de coloquio, de los profesores Ríos, Rodríguez-Salinas y García Camarero, y se descubrió una placa conmemorativa en el aula donde pronunció sus lecciones. La Facultad tiene el proyecto de editar en facsimil la tesis doctoral que Rey Pastor leyó en 1909 y cuyo original, escrito de su mano, ha sido encontrado en la biblioteca del C.S.I.C.

Se han celebrado también actos en la Argentina y se ha editado en Inglaterra microfilmada la obra completa del eximio matemático español.

El profesor Rodríguez-Salinas ha tenido la amabilidad, que mucho le agradecemos, de atender nuestra solicitud y cedernos un amplio resumen de la semblanza que compuso para su intervención en la Academia y que publicamos a continuación.

JULIO REY PASTOR, EL MAESTRO

Por Baltasar Rodríguez-Salinas
De la Real Academia de Ciencias

Lo más importante de Rey Pastor es que fué un gran maestro. Era inherente a él, de modo que lo fué también cuando no pretendía serlo. Y es que ser maestro es una de las cosas más importantes y nobles que se pueden ser. Y por ello este nombre debe ser querido y nunca se debe renunciar a él. Rey Pastor bien lo estimaba. En su Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias, así decía:

"Desventurado maestro llamó Rodó al que no diga como el Bautista, al anunciar a quien vendría después: "El debe crecer, yo ser disminuído". Desventurados maestros los que adoptan la máxima opuesta, porque en sus ciegas ansias de fama perenne, no aciertan a ver que la posteridad dicta sus fallos con examen impersonal de las obras, sin oir los alegatos de sus autores. Desventurados porque al subordinar el progreso de la patria a la conservación de su prestigio personal, pretendiendo invertir las leyes naturales, concitan contra sí todos los espíritus juveniles, amantes de la renovación".

"Desventurados, sí, pero no maestros, dulcísima palabra que Cristo se asignó, para que ningún hombre se la atribuyera sin poseer alguna de sus excelsas virtudes. Maestro quiere decir generosidad y sacrificio, y en su túnica inconsútil no caben repliegues de egoísmo".

Su discípulo predilecto, Ricardo San Juan, refiriéndose a su recuerdo personal de Rey Pastor bien decía: *"La personali-*

dad del maestro se percibe por su trato como por sus escritos; y aún sobre éstos, es interesante la impresión personal que producen en un lector por modesto que sea".

Maestro es un grado superior a investigador, porque para ser buen maestro es necesario ser investigador y como decía Rey Pastor: *"La investigación es cuestión de caer en un buen taller y con un buen maestro".*

San Juan así dice: *"Lo que se es, lo que se quiere ser y lo que los demás creen que se es, son cosas diferentes, y la cuantía de su coincidencia determina la intensidad de la personalidad"; creo que lo dijo Unamuno, pero la procedencia no importa. Rey Pastor fué lo que quiso ser, y todos supimos lo que era. Amaba la verdad y la exponía con meridiana claridad. Lo cual es magnífico en la Ciencia, pero puede acarrear en la vida las filias y las fobias que despertó D. Julio. Estas casi siempre por motivos fútiles. Recuerdo* -continuaba diciendo San Juan- *que al no llegar el calor de la calefacción al último piso, solicitó en la Junta para Ampliación de Estudios, que ocupaba todo el edificio de Medinaceli, una estufa corriente". "Hay un proyecto de instalar nueva calefacción", -le dijeron-. "Eso está bien, pero un proyecto no calienta" -contesto-"* (R. San Juan. Rev.Mat.Hispano-Americana, 22 (1962), p. 68).

Recuerdo que San Juan también decía: *"El buen maestro no busca su lucimiento personal, sino la eficacia".* Es seguro que esto lo aprendió de su maestro Rey Pastor.

No puede ser buen maestro quien no ama ni valora a sus maestros. Rey Pastor no fué una excepción. Supo rendir homenaje a los tres máximos "importadores de la ciencia" de nuestro siglo XIX, Echegaray, Toorja y García de Galdeano. Sucedió a Torroja en el sillón de esta Academia, y en el acto de su recepción hizo grandes elogios de él. Hay unas palabras que pueden resumir su opinión de D. Eduardo Torroja Caballé: *"Fué sabio, fué justo, fué bueno"*, dijo en su discurso. El ciclo de confe-

rencias que dió en febrero y marzo de 1915, titulado Introducción a la Matemática Superior, se lo dedicó a su querido maestro D. Zoel García de Galdeano, llamándole "esforzado paladín de la Matemática Moderna en España". Palabras sobre D. Zoel que podemos considerar acertadas y bien justas los que hemos contemplado su obra en Zaragoza. Así Rey elogiaba de García de Galdeano su gran erudición y el que en aquella época, que algunos profesores no conocían bien los libros corrientes, leyera artículos de Revistas y sostuviera que para investigar era imprescindible la lectura de las contribuciones matemáticas en sus fuentes originales.

Los elogios de Rey Pastor no se limitaron a Echegaray, Torroja y Garcia de Galdeano. También rindió homenaje a la labor inteligente, aunque modesta, de los verdaderos matemáticos. De manera muy especial recuerdo cómo Rey Pastor, demoledor de ídolos de barro, defendía (en 1956) al único matemático español que a fines de siglo pasado había publicado notas en revistas extranjeras de primera línea, a saber, D. Ventura Reyes Prósper, diciendo: *"La generosa exuberancia hispánica, disculpable por la patriótica sed que todos sufrimos de compatriotas famosos, se apresurará a calificar de "genio" a ese matemático precursor; calificativo que haría sonreír a cualquier profesor ultrapirenaico al medir fríamente el valor absoluto de las ingeniosas notas elementales firmadas por nuestro colega toledano; pero mal juez será siempre el que interprete en abstracto los hechos del frío sumario escrito, sin interesarse por el caso concreto del encausado, con todo su entorno de circunstancias vitales; y así resulta en este caso, que quien sería fríamente calificado como profesor corriente y "normal", juzgado fuera de aquí, es, en verdad "genial", precisamente por ser "normal fuera", y por tanto excepcional "aquí dentro"; por ser distinto de todos sus colegas y por parecerse a los hombres de otro mundo más que a los del propio".*

Como buen logroñés amaba bien a España y lo demostró en muchas ocasiones. Es muy corriente que algunos conferenciantes se lamenten del atraso científico y matemático de España. Confieso que ésto me ha irritado mucho sobre todo al observar que casi siempre el conferenciante no había hecho nada para remediarlo. Y por eso me ha hecho la impresión que tales afirmaciones eran motivadas nada más que por colocarse superiormente por encima de los que han hecho algo, aunque sea poco. Es claro que al que no ha hecho nada le interesa hacer ver que los demás tampoco lo han hecho. Algo parecido pasa con los que han hecho algo pero dicen que antes de ellos no se ha hecho nada, sin tener en cuenta lo que otros han hechos y están haciendo, entre ellos, Rey Pastor. D. Julio en su discurso de apertura en la Universidad de Oviedo dijo: "*España no ha tenido nunca una cultura matemática moderna*". Algunos pueden no estar conforme con ello; pero el comportamiento de Rey Pastor es bien diferente al de esos conferenciantes y de algunos autores de artículos. Rey Pastor tercia en la polémica sobre la ciencia en España con toda la audacia que le dan sus veinticinco años y con toda la autoridad de su ya consagrada reputación. ¿Cuál fue su posición? Primero, lo que todavía no se había hecho, pese a tanto y tanto discurso, estudiar y valorar las obras de los matemáticos españoles del Renacimiento y de los siglos posteriores; luego, sin ponerse a indagar demasiado en las distintas causas del atraso, tratar de ponerle remedio, poniendo manos a la obra al fundar en 1915 el Laboratorio y Seminario matemático en la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (Julio Rey Pastor matemático, Instituto de España, pág. 173).

Más tarde, el 21 de julio de 1961, en el discurso de contestación a Sixto Ríos como nuevo miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Rey Pastor dice: "*Hace justamente medio siglo que emprendí el análisis de la discutida obra de los matemáticos españoles del siglo XVI, llegando tras ímproba labor a conclusiones nada halagadoras en cuanto al hecho triste que saltaba a la vista; pero pero no pesimistas, como lo eran las posiciones asumidas por Echegaray y Menéndez Pelayo, que siendo de raíces antagónicas, coincidían en su desesperanza de florecimiento de una matemática española por incógnito maleficio social; opinión compartida resignadamente por nuestros matemáticos más prestigiosos (Torroja, Terradas, Vegas, Alvarez Ude) y que fué sostenido filosóficamente con acentos diversos, por nuestros más egregios pensadores: Unamumo con displicencia expresada en frase famosa y Ortega con dolida expresión, atribuyendo la falta de filósofos hispanos originales a la penuria de ciencia y, en especial, de Matemática*".

El desarrollo de la Matemática en España en los últimos años prueba que Rey Pastor estaba en lo cierto.

Sin entusiasmo no se puede hacer nada, por eso causan pena los que trabajan a la fuerza y naturalmente sin rendimiento. El entusiasmo produce éxito y alegría. La pasión que ponía Rey Pastor en sus luchas, deseaba verla también en los demás, como acicate para el progreso general. En el discurso inaugural del año 1932 en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales decía: "*Un sabio sin vocación apasionada, incapaz de sentir el latido heróico que acompaña a toda creación, es un alma en pena, como un sacerdote sin fe*".

Rey Pastor, entre el investigador y el erudito, siempre eligió al primero. Esto lo hizo en todas las oposiciones en que intervino. "*Ser matemático -decía- no es conocer la matemática creada por otros, sino contribuir a resolver sus problemas y ayudar a su desarrollo con ideas originales*". No obstante, los eruditos y de manera general todos los demás que se dedican a la matemática, creo que pueden ser también útiles si actúan y se utilizan inteligentemente. Pero es injusto que se prescinda de los creadores en actividades matemáticas que se llevan a todos los honores y recompensas. He de decir que ésto me causa el mismo efecto que esos recaudadores de donativos y limosnas que se llevan todo el mérito, cuando el verdadero mérito reside en los que contribuyen.

Para un maestro los discípulos son los más importantes. Por ello, cuida sus clases que tenían el don de no aburrir y de ser instructivas. Practicaba la frase, hoy indiscutible, de que "enseñar es elegir". No se puede dar de todo. Fué un verdadero sembrador de ideas. No se cansaba de repetir y predicar con el ejemplo, de que el profesor debía enseñar a investigar, difundir la matemática en formación y estar siempre en el frente de onda del progreso. Rey Pastor tenía ansias de discípulos. Gozaba cuando les veía interesarse en los problemas, y sufría cuando atraídos por quehaceres más productivos abandonaban la matemática. Los discípulos, hijos espirituales, continúan el ser del maestro. No hay duda sobre la generosidad de D. Julio con sus discípulos: generosidad espiritual, repartiendo ideas, y generosidad material, ofreciendo siempre su incondicional ayuda económica si hacía falta.

Por aspectos superficiales podía parecer Rey Pastor apegado a las cuestiones económicas, pero fué siempre generoso como lo demostró en otras ocasiones como cuando sufragó la publicación de la Revista Matemática Hispano-Americana y cuando costeó los gastos que ocasionó el funcionamiento de la Real Sociedad Matemática Española según el artículo IX de sus estatutos de 1919.

Su concepto de las relaciones maestro-alumno lo expresaba así: "*Todo maestro teme al fracaso, porque la producción escrita tiene vida efímera, y sin discípulos que prolonguen la vida espiritual, única que vale, el fracaso pedagógico es sinónimo de muerte. Es, por el contrario motivo de satisfacción porque lo es de esperanza -las únicas que nuestro ministerio nos depara en compensación de tantas ingratitudes y pedanterías jactanciosas- el ser superado por algún discípulo: porque en su obra revivirá una porciúncula de nuestro ser. Vencer a sus discípulos significa morir, ser vencido por ellos, es a la vez revivir y renacer. Nunca mejor recordado -para expresar la alegría del maestro que se siente superado por sus discípulos- por el viejo romance de Bernardo: ¡Si no vencí reyes moros, engendré quien los venciera!*".

Sin duda, en España, fueron dos sus discípulos predilectos: Ricardo San Juan y Sixto Ríos. A ellos precisamente me dirigió D. Esteban Terradas cuando yo, en el Bachillerato, deseaba aprender a investigar. El impacto causado por su maestro en ellos merece recordarse.

San Juan, en 1962, así escribe: "*Era el día de Santo Tomás de Aquino cuando hablé la primera vez con D. Julio. Me acerqué a la puerta del tradicional caserón de San Bernardo, donde entonces estaba la Facultad de Ciencias para preguntarle si por la tarde explicaría su curso original sobre "Análisis correlativo de series de Dirichlet e integrales determinantes", como llamábamos a la de Laplace, siguiendo la nomenclatura de Pincherle. La pregunta estaba justificada: en aquellos tiempos de la República no se suspendían oficialmente las clases el día del patrón de los estudiantes, y sólo se conseguían con eso violentas reyertas de la F.U.E. y del S.E.U. Dijo Rey Pastor: "Yo no doy clase, pero ahora podemos hablar de matemáticas, porque cuando se encuentra alguien que se interesa por estas cosas, hay que 'cazarle a lazo'". Me aproveché bien de su ofrecimiento. Le pregunté cuantas dudas me habían quedado al estudiar su Análisis Algebraico y su Teoría de Funciones Reales*". (Rev. Mat. Hispano-Americana, 22 (1962), 60-93). No podemos extendernos contando la impresión que causó en Rey este encuentro como lo comentó él en la contestación al ingreso de San Juan en la Real Academia de Ciencias. Pero sí diremos que dijo, refiriéndose a este encuentro: "*Aquella mañana venturosa quedó inscrita entre mis días felices. ¡Por fin -dije para mí- entre tantas centenas de alumnos, un discípulo!*

También Sixto Ríos describió así con entusiasmo juvenil su primer encuentro con D. Julio: "*Siento una honda y respetuosa emoción al recordar en esta solemne ocasión al que fué primero de mis maestros, D. Julio Rey Pastor. Conservo el más vivo recuerdo de mi encuentro con D. Julio allá por los años treinta, cuando siendo yo estudiante de la licenciatura, asistí a una Conferencia suya en el Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios, modestamente instalado en la calle Santa Teresa. Volví a casa emocionado. Había visto y oído a un gran matemático al que conocía por el estudio de sus libros y ahora me brindaba su amistad, proponiéndome un problema. No dormí aquella noche hasta resolverlo y, al día siguiente, Rey Pastor dejó a un lado visitas más importantes que la mía para atenderme y escuchar los detalles de mi solución. Iba a ser mi primer artículo* *en la Rev. Matemática Hispano-Americana. En los breves días pasados, desde que había conocido al maestro, me había inoculado el virus de la investigación y ya me consideraba un discípulo suyo. Algo especial tenía aquel hombre que lo distinguía de muchos otros Profesores con los que yo había convivido más y seguido un curso y otro, a pesar de lo cual, la huella que en mí habían dejado no podía compararse con la lograda por D. Julio en pocos días"* (Rey Pastor maestro de Matemáticas, Rev. R. Acda. de Ciencias, 1962, pág. 461).

Yo no puedo resistirme tampoco de expresar el impacto que causó D. Julio en mí. Creo que puedo considerarme discípulo suyo a través de San Juan y de sus obras. Esto lo avala una nota en el discurso de ingreso de Sixto Ríos en la Real Academia de Ciencias. En esta nota aparece la siguiente lista de discípulos de Rey Pastor: Babini, Balanzat, Barral, Biggeri, Calderón, Castro, Corominas, Cuesta, Dou, Durañona, Frenkel, González Domínguez, Lamenza, Marsicano, Massera, Puig, Raimondi, Ríos, Sagastume, Salinas, San Juan, Santaló, Shäfer, Sunyer Balaguer, Teixidor, Toranzos, Trejo, Valeiras, Vignaux, Villamayor y Zoroa.

Siempre recordaré la enérgica defensa con la que Rey Pastor logró hacerme catedrático de Análisis Matemático 4ª y 5ª de la Universidad de Zaragoza con el auxilio de Araujo y Linés. Nobleza obliga y por ello he puesto todo mi entusiasmo en este discurso, lo cual ha sido fácil por la calidad de su obra, sus brillantes ideas y sus muchos méritos. He de decir una cosa que nunca he dicho, que fué esa conducta de D. Julio la que me movió a hacer el propósito, que comuniqué al bedel Herrero, que actuaría siempre rectamente y con justicia en todos mis actos. Herrero lo puso en duda por su experiencia, pero puede decir que si no lo he cumplido ha sido contra mi voluntad.

Dos amigos míos, Fernando Presas y Miguel Gaviña, me proporcionaron cuando yo tenía alrededor de quince años, entre otros libros, varias obras de Rey. Entre ellas se encontraban el Análisis Algebraico, el Algebra, la Teoría de Funciones Reales y sus conferencias en el Ateneo sobre Introducción a la Matemática Superior. Me causaron deleite y gran impresión por su clara exposición y rigor. Luego más tarde, D. Leoncio González Calzada, me puso en contacto con Terradas y éste, como hemos dicho, con Ríos y San Juan. D. Leoncio, profesor también de Santaló en el Instituto de Gerona, conmigo fue en el Instituto de Alcalá de Henares, fué el que me orientó a oir conferencias como la del Prof. Fréchet sobre funciones casi periódicas.

Pero mi encuentro personal con D. Julio tuvo lugar mucho más tarde, cursando yo en la Universidad, con motivo de una conferencia que dió sobre cartografía. Me dijo que ya me conocía por San Juan y estuvo hablando conmigo interesándose de mis cosas y prestándome gran atención.

La bondad pasiva no me atrae porque lo importante es hacer el bien y no dejar de hacerlo. Por eso prefiero temperamentos fuertes como D. Julio que no esquivaba los problemas y los atacaba de frente. El entusiasmo que ponía Rey Pastor en todo lo que trataba y vivía invita a seguirlo con personalidad propia. que es como él hubiese querido. Rey Pastor con su generosidad es un ejemplo a seguir. Como él dijo de D. Eduardo Torroja, también se puede decir de él: *"Fué sabio, fué justo, fué bueno"*.

Inauguración del Aula Puig Adam en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid

El pasado día 10 de Octubre, en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid, a las 12 horas, tuvo lugar un acto académico para inaugurar el aula Puig Adam en el mencionado Centro.

Con asistencia de S.M. el Rey de España, del Ministro de Educación y Ciencia, del Rector de la Universidad Politécnica de Madrid y de otras autoridades académicas, se desarrolló un entrañable acto al final del cual, en una de las aulas de la Escuela, donde D. Pedro Puig Adam impartió sus clases, se descubrió una lápida conmemorativa, dando el nombre del ilustre profesor a la misma.

De entre las intervenciones habidas cabe destacar la del Director del Centro Ilmo. Sr. D. Luis Ortiz Berrocal, discípulo de D. Pedro Puig Adam por partida doble: como antiguo alumno de la Escuela que actualmente dirige y como estudiante de la Facultad de Ciencias Matemáticas.

Le agradecemos desde aquí las facilidades que nos ha dado para poder disponer de su intervención, permitiendo que la pudiéramos reproducir en este Boletín y le felicitamos por su intervención, cuyo contenido íntegro sigue a continuación.

Hay que lamentar que el texto escrito sólo refleje su contenido, ya de por sí muy valioso, y que no recoja también la forma extraordinaria en que fue transmitido a la concurrencia por el ponente.

Las opiniones recogidas después del acto eran unánimes al respecto.

Palabras del Ilmo. Sr. D. Luis Ortiz Berrocal, Director de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid.

Señor:

Por tercera vez se honra esta casa recibiendo la visita de vuestra augusta persona. Fue la primera con motivo del acto solemne de nombrar doctores "honoris causa" a los Premios Nobel profesores Mössbauer, y Leo Esaki y al Marqués de Suances. En la segunda nos presidisteis la clausura de la II Conferencia Internacional de modelos numéricos aplicados. En esta tercera hemos solicitado vuestra presencia para honrar la memoria de un maestro insigne, que también lo fue de Vuestra Majestad: el profesor D. Pedro Puig Adam.

Hemos querido hacerlo de una forma íntima y sencilla. Dejando su nombre escrito en los muros de uno de esos recintos modestos y recoletos, que son las aulas universitarias. La misma en que resonó su voz amable, afectiva; la misma en que dia tras dia impartió sus lecciones. Hemos pensado, Majestad, que no hay mejor monumento para un maestro, que el aula, el lugar de encuentro cotidiano con el objeto directo de su trabajo y esfuerzo, que son sus alumnos; el lugar donde se ejerce el noble oficio de enseñar y el grato deber de aprender.

D. Pedro acudía al aula con fiel asiduidad y rigurosa puntualidad. Cada mañana cruzaba el vestíbulo y recorría los pasillos de esta casa con su andar pausado, sin prisas, sin agobios. Gustaba definirse como marino de agua mansa y esa mansedumbre creaba a su alrededor una atmósfera de paz y sosiego, tan importante para el desarrollo del trabajo intelectual. Decía que **"cuando se concibe la vida como servicio, el tiempo ya no es caudal propio, sino ajeno"**. Su vida fue, efectivamente, un permanente servicio a los demás y su tiempo, su precioso tiempo, nos lo dio amplia, generosamente, sin regateos, para enriquecernos con su pensamiento y con su palabra.

Resulta dificil trazar en pocas palabras los rasgos característicos de la rica personalidad del Profesor Puig Adam. Pero si hemos de condensar en una sola cuanto de él podría decirse no dudamos en afirmar que Puig Adam fue un maestro. El hizo de ese magisterio la razón de su vida. Es más, me atrevería a decir que D. Pedro enseñaba siempre, porque resultaba imposible acercarse a él sin aprender algo, como imposible resulta acercarse al fuego sin recibir su calor.

Siempre recordaré con grata alegría sus magistrales clases en esta Casa, en el que habría de ser, por deseos del destino, su último curso académico. Así como sus clases de metodología de las matemáticas, que recibí ese mismo año como alumno de la Facultad de Ciencias matemáticas, impartidas en un marco que hace imposible caer en la retórica: en las aulas de su querido Instituto S. Isidro. Clases, verdaderamente inolvidables. ¡Cuánta ternura con los alumnos de los primeros cursos de bachillerato, a los que acariciaba el flequillo a la par que les guiaba para que llegaran a obtener por sí mismos los teoremas! Tuve la gran suerte de acompañarle con frecuencia después de estas clases desde el Instituto hasta su casa. Siempre me pareció corto el tiempo que paseábamos desde la calle de Toledo a la de Atocha, tan corto que en más de una ocasión se prolongó en su propia casa. Sentía que ese breve trato con él había representado para mi aprender mucho.

Rechazaba el concepto de enseñanza como mera transmisión de conocimientos. Su magisterio iba más allá, mucho más allá. Decia que "preparar es hacer autómatas, formar es hacer hombres". Estas palabras suyas nos deben invitar a la reflexión a quienes trabajamos en la Universidad de hoy. Ciertamente que en la Universidad se debe investigar, se deben preparar profesionales competentes, se han de transmitir con eficacia los conocimientos que han de beneficiar a la comunidad. Pero también hay que educar, también hay que formar hombres integrales que sean savia renovadora y perfeccionadora de nuestra sociedad. Y esta misión de la Universidad -forzoso es reconocerlo-, se hace cada vez más dificil. La masificación, la dificultad del contacto humano, la carga de funciones administrativas, la crisis de vocaciones docentes son obstáculos que, en mayor o menor grado, impiden conseguir este objetivo.

En el curso 1.948-1.949, con motivo de un cambio de plan de estudios, se concentró en primer curso un número de alumnos superior a lo habitual. Eran ochenta. Al iniciarse el curso, D. Pedro anunció con cierta tristeza: "Nos encontramos ante una promoción excesivamente numerosa. Aunque la solución no es buena, no queda más remedio que dividir la clase en dos grupos de 40 alumnos. Esperemos que esto no vuelva a ocurrir". Hoy tenenos en algunas asignaturas de primer curso 1.000 alumnos matriculados, repartidos en 9 grupos.

Respecto al equilibrio de las típicas actividades universitarias, enseñanza e investigación, y su adecuada compatibilización merecen ser recordadas sus palabras, impregnadas siempre de su habitual modestia: "En el dominio de la estricta creación matemática debiera ceder esta cátedra a varios de mis colegas de la Academia y de la Universidad. En cambio no la cedo a nadie en preocupación por el problema educativo, sin despreciar por ello la investigación. Un investigador puede, acaso, despreocuparse de los procesos de enseñanza. Un profesor, en cambio, tiene que haber creado para saber estimular la creación entre sus alumnos, ya que enseñar no es transmitir, sino guiar procesos de aprendizaje".

Nadie como él soñó en la renovación de la actividad docente. Precisamente él, cuyas lecciones magistrales eran caricia para el oido y luz para la inteligencia; él, que sabia divulgar desde la tarima y descubrir el pensamiento en la mirada de cada uno de sus alumnos, soñaba con una enseñanza conducida por métodos activos, en la que el profesor pierde su protagonismo para convertirse en mero animador del trabajo, fomentando el desarrollo de la imaginación y la creatividad. Sabia que la evolución no era fácil y suspiraba por ese ideal. "¡Cuánto camino habría que recorrer -decía- hasta llegar a la clase taller, a la cátedra sin estrado, a la cátedra sin cátedra, en la que el profesor sin lugar especial para sí, está, sin embargo, en todas partes!".

Es erróneo pensar que el proceso educativo termina con la enseñanza primaria y secundaria, reservándose la Universidad para la difusión del saber a un nivel superior, a unos estudiantes que ya han alcanzado la madurez y a los que hay que facultar para el ejercicio de una profesión. Es ésta una hipótesis demasiado cómoda. La acción educativa tiene que prolongarse en las aulas universitarias. Porque educar es conducir, rectificar continuamente el rumbo, descubrir aptitudes, enseñar a pensar y a decidir, fomentar la comunicación entre los hombres, en suma, según lo definía Puig Adam: "Educar es, en el fondo, cultivar a un tiempo el conocimiento de lo verdadero, la voluntad de lo bueno y la sensibilidad de lo bello".

Debe alarmarnos la falta de vocaciones para llevar a cabo tan alta misión. En un mundo impregnado de pragmatismo, con tentadoras ofertas para los jóvenes brillantes, que a-

bandonan las aulas universitarias, la enseñanza se ofrece como una llamada casi estrictamente vocacional. D. Pedro Puig Adam sintió esa llamada y la siguió con absoluta fidelidad. ¡Qué duda cabe que ello le impuso sacrificios, le exigió renuncias y demandó de él una entrega generosa al servicio de los demás!. Pero este ideal consagró su vida, una vida extraordinariamente llena, cuya plenitud trasciende en el recuerdo emocionado de cuantos tuvimos la suerte de conocerle.

Su afán de saber fue más allá de la matemática. Espíritu insaciable, sintió curiosidad por toda clase de conocimientos y se lamentaba de las limitaciones que le impedian llegar a abarcar los más lejanos y amplios horizontes de la ciencia y de la cultura. "¡Cuántas veces he sentido -expresó el mismo- como una envidia de los siglos aquellos de Grecia, del Renacimiento, en los que, sobre la cuna de la ciencia y el arte, era posible abarcar, en una vista intensa, vastos panoramas de conjunto!". Esta inquietud la trasmitía constantemente a sus alumnos a quienes aconsejaba: "Sed un poco aprendices de todo, para vuestro bien, y, al menos, maestros de algo, para bien de los demás".

Y para nuestro bien fue D. Pedro maestro en poner la matemática al servicio de la técnica. En varias ocasiones manifestó que su mayor preocupación como profesor de esta Escuela era descubrir qué matemática habría de necesitar el técnico del futuro. Esta preocupación le llevó a adentrarse en temas avanzados de cibernética y computación automática, siendo plenamente consciente de que estaba asistiendo al nacimiento de una nueva era, en la que hoy estamos plenamente inmersos y para la que con una penetrante visión de futuro formó a sus estudiantes de ingeniería.

Estos rasgos apresurados han pretendido lo imposible: trazar la semblanza de un hombre extraordinario. Sirva la dimensión de su figura como excusa de la torpeza con que lo he hecho. Hoy más que unas palabras, palpita en nuestro corazón el cariño filial al profesor de fina sensibilidad, sincera modestia y profunda fe.

En esta Casa, Señor, procuramos mantener la luz que él irradió y el espíritu de servicio, que nos infundió. En nuestro quehacer de cada dia se desarrolla nuestra vida entre el recuerdo de los maestros que nos enseñaron a aprender y la convivencia con los discípulos entre los que aprendemos a enseñar, según sus propias palabras.

Gracias, Señor, por habernos acompañado. Tened la seguridad que, sin vuestra presencia, hubiera faltado en este acto un alumno muy querido por D. Pedro.

Muchas gracias.

MODELOS MATEMÁTICOS DE FENOMENOS DISCONTINUOS

por Enrique Outerelo
de la Universidad Complutense de Madrid

Recientemente ha aparecido en edición española (Editorial Alianza, 1987) el libro titulado Teoría de Catástrofes, escrito por el matemático V.I. Arnold que en la actualidad es profesor de ecuaciones diferenciales de la Universidad Lomonosov de Moscú. Su lectura me ha animado a escribir las siguientes consideraciones sobre los modelos matemáticos de fenómenos discontinuos.

Una de las facetas de más interés de la matemática, como rama de la ciencia, es la elaboración de modelos (matemáticos) que permitan explicar la evolución de la interminable sucesión de acontecimientos o fenómenos que ocurren en el mundo que nos rodea. Esta descripción matemática depende de una compleja y delicada interacción entre fenómenos que evolucionan de forma continua y fenómenos que en su desarrollo presentan discontinuidades.

La física clásica desde Newton hasta la teoría de la relatividad general de Einstein, estudia procesos cuyos cambios cualitativos son continuos respecto a los parámetros que determinan su evolución, es decir, dos estados del proceso están tan próximos como se quiera, siempre que los parámetros de control correspondientes a cada uno de ellos difieran muy poco. En este caso, la matemática que se utiliza en la construcción de modelos ha sido ampliamente estudiada y, en general, se conoce bastante bien.

Con la teoría newtoniana, se llega al modelo determinista de los sucesos en la naturaleza como síntesis de dos desarrollos con vergentes, el de la física --la descripción del movimiento, con las leyes de Kepler y las de caída de los cuerpos formulada por Galileo-- y el de las matemáticas, que culmina con la invención del cálculo infinitesimal. Este modelo determinista posee un símbolo que explica muy bien lo esencial del mismo: el diablillo imaginado por Laplace, capaz de observar en un instante dado la posición y velocidad de cada una de las masas constitutivas del universo, y deducir a partir de ahí la evolución de cualquier suceso, tanto hacia el pasado como hacia el futuro.

Es importante destacar que estos modelos son de naturaleza cuantitativa, en el sentido que determinan o miden, con mayor o menor aproximación, los estados de la evolución de los fenómenos que describen.

Sin embargo, los fenómenos del segundo tipo, es decir, aquellos que presentan discontinuidades o saltos bruscos en su evolución, son los más abundantes en la naturaleza y son los que se perciben antes. Para cierto tipo de estos sucesos, el matemático francés R. Thom propone, en "Una teoría dinámica de la morfogénesis" (1966), la elaboración de modelos matemáticos, de nuevo como síntesis de los desarrollos convergentes de la matemática --la teoría de singularidades de aplicaciones diferenciables iniciada por H. Whitney en 1955, la teoría de la bifurcación de sistemas dinámicos debida a H. Poincaré (1879) y Andronov-Pontrjagin (1935) y los trabajos del propio R. Thom sobre topología diferencial (por los que obtuvo en 1958 la medalla Field, equivalente en matemáticas al Premio Nobel)-- y de la biología --el trabajo de C. H. Waddington sobre la teoría de la epigénesis. Las ideas de este primer trabajo, las desarrolla R. Thom en su obra de ma-

yor impacto, el libro titulado Estabilidad estructural y morfogénesis, publicado en 1972.

A partir del año 1968, varias copias de este libro empezaron a circular entre los miembros de la comunidad científica. En particular, E.C. Zeeman y su escuela de la Universidad de Warwick (Inglaterra) lo reciben con entusiasmo y desarrollan modelos de sucesos con discontinuidades en un espectro muy amplio de campos científicos. Es precisamente E. C. Zeeman a quien se debe la denominación de la nueva teoría --"teoría de catástrofes"-- ya que R. Thom, en los trabajos citados, únicamente introduce la terminología "puntos de catástrofes".

El soporte matemático de la teoría actual de catástrofes es un teorema, conocido como teorema de Thom, de clasificación de singularidades de un tipo especial de aplicaciones, llamadas de tipo gradiente.

Desde el año 1970, se han publicado centenares de artículos científicos con aplicaciones de la teoría de catástrofes en áreas tan diversas como la embriología, la psicología experimental, la economía, la geología, la teoría de partículas elementales, la lingüística, las ciencias sociales, etc. Entre 1970 y 1977 la teoría se hace tremendamente popular, y por primera vez en la historia de la matemática aparecen artículos sobre la teoría de catástrofes en la prensa diaria: Newsweek, L'Expres (donde se asegura que "el nuevo Newton" es francés (es decir, R. Thom)), London Times (donde se compara el libro de R. Thom con el Principia de Newton), New York Times, etc.

Aparecen amplios artículos en las revistas de divulgación científica y el libro de R. Thom se publica como libro de bolsillo (una propaganda de esta naturaleza no se había producido desde el nacimiento de la cibernética). Esta singular actividad se debe por una parte a la nueva orientación que la teoría de catástrofes introduce en las aplicaciones de la Matemática a otras ramas de la Ciencia, y por otra a las aplicaciones que se publicaron en los campos de las ciencias sociales (motines en las cárceles, conducta de los inversores en la bolsa, influencia del alcohol en los conductores, política de censura frente a la literatura erótica, etc.), la biología (depresión, gastrulación, modelos del cerebro, etc.), y en otros campos de difícil descripción matemática por su complejidad.

Sin embargo, tras este periodo de singular actividad, se inicia una época de fuertes controversias científicas, motivadas por la publicación a partir del año 1977, de una serie de artículos que critican duramente la teoría de catástrofes. Entre estos artículos destacan los de Sussmann-Zahler (La teoría de catástrofes aplicada a las ciencias biológicas y sociales: una crítica, 1978) en el que se atacan las aplicaciones a las ciencias sociales y a la biología y se llega a decir que la teoría de catástrofes es un callejón sin salida, el de J. Guckenheimer (La controversia de las catástrofes, 1978) en el que se afirma que la teoría de catástrofes puede engañar en el sentido de creer que el trabajo está realizado cuando en realidad es cuando se empieza, y la parodia sobre la teoría de catástrofes de Fussbudger-Znarler (Teoría de la sagacidad: una crítica, 1979).

En este punto hemos de plantearnos: ¿qué es la teoría de catástrofes? y ¿cuáles son los motivos de la fuerte polémica científica que ha originado? Entre los principales protagonistas de la teoría, R. Thom y E.C. Zeeman, existen divergencias sobre el contenido y las aplicaciones de la teoría. Para E. C. Zeeman la teoría de catástrofes es un nuevo método matemático para describir la evolución de formas en la naturaleza. Es particularmente aplicable allí donde cambios graduales de las fuerzas producen efectos bruscos. Llamamos a tales efectos catástrofes porque la la intuición sobre la continuidad subyacente a las fuerzas hace que la discontinuidad de los efectos sean inesperados y así surge el nombre. Según el punto de vista de su fundador, R. Thom, la teoría de catástrofes no es un cuerpo específico de conocimiento, sino un programa científico que intenta explicar la variedad y evolución de las formas en la naturaleza, es decir, una teoría de la morfogénesis.

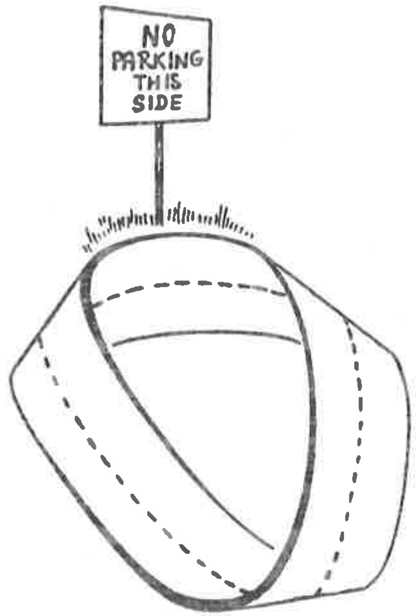
La fuerte controversia científica que ha originado la teoría de catástrofes se debe a que se ha aplicado a situaciones en las que las hipótesis del soporte matemático de la teoría eran de dudoso cumplimiento. En este tipo de aplicaciones se encuentran todas las de las ciencias sociales y las de la biología, como hemos comentado anteriormente. No obstante, existen aplicaciones "rigurosas" de la teoría, aceptadas sin discusión por la comunidad científica que han servido para probar la consistencia de la teoría y donde el modelo matemático ha sido comprobado y contrastado experimentalmente. Se tienen ejemplos en los campos de la elasticidad, la mecánica, la óptica física y geométrica, etc.

Los modelos elaborados por la teoría de catástrofes son, en general, de carácter cualitativo.

El primer antecedente del libro citado al principio de estas notas, apareció en forma de artículo publicado en ruso en la revista Nature (1979). En este artículo V.I. Arnold fija su postura ante la teoría de catástrofes: las contribuciones positivas de la teoría de catástrofes están contenidas en la teoría de singularidades de aplicaciones diferenciables, y las aplicaciones en biología, psicología y ciencias sociales tanto las premisas iniciales como las conclusiones teóricas únicamente tienen valor heurístico. Este artículo fue traducido al francés por J. M. Kantor y publicado en la revista Gazette des mathématiciens (1980). En esta traducción una página con el dibujo de la metamorfosis de las caústicas fue sustituido por una página con comentarios de R. Thom sobre el artículo, destacando que V. I. Arnold adopta una postura demasiado racionalista y defiende la existencia de algo interesante en la teoría de catástrofes: su utilización cualitativa independientemente del sustrato subyacente, lo que no permite en general la predicción y de ahí la dificultad en valorar su interés. Con esta filosofía se pregunta Thom qué significado tiene el dar un valor heurístico a la teoría de catástrofes y recomienda que se reflexione sobre el tema.

Es interesante destacar que V. I. Arnold se olvida que fue precisamente la teoría de catástrofes,la que originó el gran avance experimentado por la teoría de singularidades a partir de los trabajos pioneros de H. Whitney, y que si en la actualidad existen dificultades en la aplicación de la teoría de catástrofes se debe

a la falta de desarrollo tanto de la matemática que la soporta teóricamente, como de la rama de las ciencias a la que se pretende aplicar. Como ha sucedido siempre en la historia del conocimiento los avances en cada una de ellas implicarán progresos en la otra.



Las dificultades de aparcamiento en horas de clase inspiraron este cartel a un lector de " The American Mathematical Monthly ", publicado en el número de Abril de 1.983 de esa revista.

UN METODO DE RECURRENCIA PARA EL AJUSTE DE LA CURVA LOGISTICA

Por Jose V. García Sestafé

Uno de los problemas fundamentales que se presentan al demógrafo es el de la predicción de poblaciones futuras. Los primeros intentos realizados para lograr proyecciones de población consistieron en la adopción de funciones matemáticas más o menos complicadas, que explicaran la evolución pretérita de la población considerada de forma satisfactoria y de las cuales se esperaba que, al menos durante un cierto período, proporcionaran estimaciones aceptables.

En la actualidad se utilizan prioritariamente otros métodos, en especial el denominado de componentes que permite obtener estimaciones desagregadas por sexo y edad, e inclusive permite incorporar el importante fenómeno de la migración. Sin embargo, y a pesar del descrédito en que han caído los métodos matemáticos -debido, fundamentalmente, al mal uso que de ellos se ha hecho- hay que reconocer que utilizados con prudencia, y dentro de su intervalo de validez, pueden proporcionar resultados globales muy aceptables.

Entre los modelos matemáticos más empleados cabe citar la función exponencial (expresión del crecimiento geométrico), la función de FOLWELL, la de GOMPERTZ y, en especial, la curva logística.

La idea directriz para la obtención de la curva logística -o curva autocatalítica- fué la del "freno" al crecimiento en progresión geométrica. Este tipo de crecimiento de la población, enunciado por los aritméticos políticos ingleses, en especial por

John GRAUNT -reconocido como el "padre de la Estadística"- fué expuesto pesimista y detalladamente por Thomas R. MALTHUS en su "Ensayo sobre la población" (1798). El matemático, estadístico y astrónomo belga Adolphe QUETELET en 1835 formuló su teoría mecánica sobre el crecimiento de las poblaciones, que en esencia dice que la resistencia que se opone al crecimiento ilimitado de la población es proporcional al cuadrado de dicha población. En 1838 el belga Pierre F. VERHULST, profesor de Matemáticas en la Academia Militar de Bruselas, combinando las hipótesis mecánica y malthusiana, llegó a formular la ecuación de la logística.

Designando por $P(t)$ la población de una determinada unidad geográfica en el instante t, se tiene la ecuación diferencial

$$d\,P(t) = h\,P(t)\,dt - K[P(t)]^2\,dt$$

que se puede escribir

$$h\,dt = \frac{d\,P(t)}{P(t)} + \frac{k\,d\,P(t)}{h - k\,P(t)}$$

cuya integración proporciona

$$ht = \ln \frac{C\,P(t)}{h - k\,P(t)}$$

o bien

$$P(t) = \frac{h\,e^{ht}}{C + k\,e^{ht}} = \frac{a}{1 + b\,e^{-ht}}$$

donde $a = \frac{h}{k}$, y $b = \frac{C}{k}$.

Obsérvese que $\lim\limits_{t \to -\infty} P(t) = 0$, lo cual implicaría una población cero; en las aplicaciones no se parte de esta población, sino que se toma un conjunto poblacional $P(t_0) = c$, que se calcula

posteriormente. En estas condiciones, la ecuación de la logística se puede escribir

$$P(t) = c + \frac{a}{1 + b\,e^{-ht}} \quad (a, b, c, h \in R_{++})$$

que admite por asíntotas $P(t) = c$ (si $t \to -\infty$) y $P(t) = c + a$ (si $t \to +\infty$). La función es creciente en todo punto, admite un punto de inflexión en I ($\ln b/h$, $a/2$), siendo cóncava a la izquierda de I y convexa a la derecha.

Una vez obtenida la expresión de la curva logística, la cuestión siguiente es proceder a su adaptación a un conjunto de valores observados, esto es, a determinar los parámetros $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, y $\underline{h}$ conociendo los valores p_i de la población en los instantes t_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

La solución adoptada por VERHULST, consistió en elegir arbitrariamente $\underline{c}$ "haciéndolo compatible con los datos" y después, tomar tres poblaciones p_1, p_2, p_3 en los instantes t_1, t_2, t_3 tales que $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = d$; entonces se tiene

$$p_i - c = \frac{a}{1 + b\,e^{-ht_i}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

o bien, haciendo $z_i = 1/(p_i - c)$

$$\frac{1}{a}\,(1 + b\,e^{-ht_i}) = z_i \qquad [I]$$

de donde

$$\left\{ \begin{array}{l} z_2 - z_1 = \frac{b}{a}\,e^{-ht_1}\,(e^{-hd} - 1) \\ z_3 - z_2 = \frac{b}{a}\,e^{-ht_2}\,(e^{-hd} - 1) \end{array} \right. \qquad [II]$$

y de aquí

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}\,e^{hd} \longrightarrow h = \frac{1}{d} \ln \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$$

De cualquiera de las ecuaciones [II] se obtiene b/a y de una de las [I] se deduce a.

Años más tarde, en 1920, los norteamericanos Raymond PEARL y Lowell J. REED "redescubrieron" la logística, como resultado de las diversas experiencias realizadas sobre el crecimiento de una población de moscas -la drosophila melanogaster- en una botella de leche, llegando a establecer empíricamente que la tasa de crecimiento r, cuando la población es P, se obtiene de $r = r_0(1 - P/P_\infty)$, donde r_0 es la tasa de crecimiento inicial y P_∞ es la población máxima admisible; el resultado anterior conduce a la hipótesis de partida de VERHULST:

$$\frac{dP}{dt}/P = r_0\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) \longrightarrow \frac{dP}{dt} = r_0 P - \frac{r_0}{P_\infty} P^2$$

El método seguido para el ajuste por PEARL Y REED, método que perfeccionan a posteriori con aproximaciones sucesivas, consiste en elegir opináticamente y después de sucesivos ensayos los valores de c y a de forma tal que el crecimiento esperado de la población considerada sea a. Una vez fijados a y c se toma la nueva variable

$$z_i = \frac{a}{p_i - c} - 1, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

de donde $z = b\, e^{-ht} \longrightarrow \ln z = -ht + \ln b$; ajustando mínimo cuadráticamente una recta a la nube de puntos $(t_i, \ln z_i)$ se obtienen los parámetros h y b, con lo que queda resuelto el problema.

Como puede apreciarse, tanto el método de VERHULST como el seguido por PEARL y REED dependen de la habilidad de la persona que los utilice, cayendo, por tanto, en una subjetividad que puede llevar a resultados muy apartados de la realidad.

El método que se presenta a continuación evita todo tipo de suposición sobre los parámetros, los cuales se obtienen por un proceso bietápico de ajuste mínimo cuadrático. La idea intuitiva del método es la siguiente: supuesta conocida una ley recurrente para las poblaciones p_i y p_{i+n} (n constante) de la forma

$$p_{i+n} = \frac{A\, p_i + B}{p_i + C}$$

o bien, $p_{i+n}\, p_i + M\, p_{i+n} + N\, p_i + P = 0$, si $i \to \pm\infty$, se tiene, admitido que la población sigue una ley logística, que $p_{i+n} \simeq p_i$, luego la ecuación

$$p^2 + (M + N)\, p + P = 0$$

proporcionaría las ordenadas de las asíntotas.

Para la obtención de la ecuación de recurrencia se supone que se dispone de las observaciones p_i $(i = 1, 2, \ldots 2n)$ realizadas en los instantes t_i, tales que $t_{i+1} - t_i = d$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n-1)$. Admitiendo la ajustabilidad de la logística, se verifica

$$p_t = c + \frac{a}{1 + b\, e^{-ht}} \quad (t = t_1, t_2, \ldots t_n)$$

Para $t = t_{i+n}$ se tiene, como $t_{i+n} = t_i + nd$

$$p_{n+i} - c = \frac{a}{1 + b\, e^{-h(t_i + nd)}} = \frac{a}{1 + b\, e^{-ht_i} \cdot e^{-hnd} - e^{-hnd} + e^{-hnd}} =$$

$$= \frac{a}{1 - e^{hnd} + e^{-hnd}(1 + b\, e^{-ht_i})} = \frac{a}{1 - e^{-hnd} + e^{-hnd} \cdot a/(p_i - c)} =$$

$$= \frac{a\, e^{hnd}(p_i - c)}{a + (e^{hnd} - 1)(p_i - c)}$$

y haciendo, por comodidad, $H = e^{hnd} - 1$, se tiene

$$H\, p_{n+i} \cdot p_i = p_{n+i}(Hc - a) + p_i(Hc + Ha + a) - Hc(c + a)$$

y como $H \neq 0$, ya que $hnd \neq 0$

$$p_{n+i} \cdot p_i = (c - \frac{a}{H})\, p_{n+i} + (c + a + \frac{a}{H})\, p_i - c(c + a)$$

y haciendo $X = c - a/H$, $Y = c + a + a/H$, $Z = -c(c + a)$ y como

$$J = \left| \frac{\partial(X,\ Y,\ Z)}{\partial(c,\ a,\ h)} \right| \neq 0$$

basta ajustar, por mínimos cuadrados, la ecuación

$$p_{n+i} \cdot p_i = X_{p_{n+i}} + Y\, p_i + Z$$

a la nube de puntos $(p_{n+i} \cdot p_i,\ p_{n+i},\ p_i)$.

Determinados X, Y, Z, eliminando a y H entre las ecuaciones del cambio de variable, se obtiene

$$c^2 - (X + Y)\, c - Z = 0$$

ecuación que, si la logística es ajustable, admite dos raíces reales distintas y positivas; siendo las raíces c_1 y c_2 $(c_1 < c_2)$, se verifica

$$c_2 - c_1 = \sqrt{(X + Y)^2 - 4Z} = \sqrt{(2c + a)^2 - 4\ c(c + a)} = a$$

luego las asíntotas buscadas son $p = c$ y $p = a + c$, como tenía que verificarse.

Conocidos a y c, los otros dos parámetros se obtiene por un nuevo ajuste mínimo cuadrático, similar al de PEARL y REED expuesto anteriormente.

En un próximo artículo se dará a conocer otro nuevo procedimiento, más general que el que se ha presentado en este trabajo y se desarrollará un ejemplo de aplicación de los métodos expuestos.

BIBLIOGRAFIA

- GARCIA SESTAFE, Jose V.- "La Curva Logística". Documentos de trabajo. Instituto Nacional de Estadística. (1988).

- LEGUINA, Joaquín.- "Fundamentos de Demografía". Siglo XXI de España. (1981).

- PEARL, Raymond.- "The Biology of Population Growth". Alfred Knopf. (1925).

- SMITH, David y KEYFITZ, Nathan.- "Mathematical Demography". Springer Verlag. (1977).

Como socio de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín (señalar con unas aspas los que interesen):

3	4	5	9	10	11	13	14	15	16	17	18
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo (20 pts. por número para Madrid y 30 pts. por número para provincias).

Hagan el envío utilizando como dirección la que consigno en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8 y 12 están agotados. De los números 9 y 19 quedan sólo unos pocos ejemplares.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la Sociedad, Apartado 9479 - 28080-MADRID.

DESARROLLOS ASINTOTICOS

Por Mª Carmen Escribano Ródenas

Los desarrollos asintóticos son conocidos desde hace más de un siglo, sin embargo, desde el principio fueron discutidos por los matemáticos debido a una aparente ausencia de rigor, dado el carácter divergente de las series que se usaban como instrumentos en la aproximación asintótica. Fué Henri Poincaré quien, por primera vez, con motivo de los trabajos sobre perturbaciones en mecánica celeste, dió un sentido a las series divergentes, formadas como las tradicionales series de potencias. Estudió sus propiedades y desarrollos de algunas funciones en concreto.

I. DEFINICIONES

Consideremos siempre, para simplificar, funciones complejas de variable compleja, aunque la generalización es sencilla para funciones definidas sobre un espacio topológico Hausdorff (T2), a valores en un espacio de Bannach M, considerando siempre un punto x° de acumulación de un conjunto abierto dentro del dominio.

En primer lugar hay que hablar necesariamente de cómo medir la "proximidad" de dos funciones en el entorno de un punto, y por lo tanto, es imprescindible conocer perfectamente los símbolos de Landau "O" y "o".

1. $f \in O(g)$ cuando $x \to x^\circ$ si, y sólo si, $\exists A \in \mathbb{R}^+ \cup \{o\}$, y

$$\exists U(x^\circ) / |f(x)| \leq A|g(x)|, \qquad \forall x \in U(x^\circ)$$

2. $f \in o(g)$ cuando $x \to x^\circ$ si, y sólo si, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$,

$$\exists U_\varepsilon(x^\circ) / |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|, \qquad \forall x \in U_\varepsilon(x^\circ)$$

Por abuso de escritura, se escribe a menudo $f = O(g)$ (respectivamente $f = o(g)$) en lugar de $f \in O(g)$ (respectivamente $f \in o(g)$).

En segundo lugar hay que considerar un conjunto de funciones, concretas y conocidas, entre las que se puedan elegir las más adecuadas en cada caso para aproximar la función en cuestión.

3. Un conjunto de funciones ξ, que no son nulas sobre cualquier entorno de x° constituye una "escala asintótica" cuando $x \to x^\circ$ si, y sólo si, para cualquier par de funciones $f, g \in \xi$, $f \neq g$, se verifica que $f \in o(g)$ ó $g \in o(f)$. Es decir, está totalmente ordenado por la relación de orden

$$f \leq g \quad \text{si, y sólo si} \quad f \in o(g) \quad ó \quad f = g$$

Por ejemplo, $\{f(x) = x^\alpha, \alpha \in R\}$ es una escala asintótica para $x \to \infty$.

Es importante observar que este conjunto no tiene por qué ser numerable, aunque en la práctica las escalas que se utiizan, casi siempre, son numerables y reciben entonces el nombre de sucesiones asintóticas para los desarrollos.

Ahora ya podemos definir un desarrollo asintótico, generalizando la definición de Poincaré de 1886.

4. Se dice que la función f admite un desarrollo asintótico según la escala asintótica ξ hasta el orden ϕ, donde $\phi \in \xi$,

si existe una familia de números reales $(\{\lambda_\psi\}\ \psi \in \xi)$ casi todos nulos (es decir todos nulos salvo un número finito de ellos), verificando que

$$f(x) = \sum_{\substack{\psi \in \xi \\ \psi \leq \phi}} \lambda_\psi \, \psi(x) + o(\phi)$$

Se demuestra fácilmente, por reducción al absurdo la unicidad del desarrollo asintótico así definido, con respecto a una escala asintótica determinada.

5. Si dada la función f y la escala asintótica ξ, θ es el más grande de ξ tal que $\lambda_\theta \neq 0$, entonces la función $\lambda_\theta\, \theta(x)$ se llama "parte principal" de f en el desarrollo asintótico de f según la escala ξ, y además $f = \lambda_\theta\, \theta + o(\theta)$.

Una aproximación (o parte principal o representación asintótica), sería el primer término de un desarrollo asintótico cuando tuviésemos la escala asintótica definida desde el principio, es decir, cuando se trata de hallar el desarrollo asintótico de una función en un punto, hemos de referirnos, según la definición, a una escala o sucesión asintótica dada. Sin embargo, lo que ocurre, en general, cuando se desea hallar el desarrollo asintótico de una función, es que la escala asintótica se va creando al mismo tiempo que se obtiene el desarrollo asintótico, es decir, vamos obteniendo aproximaciones sucesivas, y se comprueba después, que efectivamente forman parte de una escala asintótica, lo único que tenemos dado desde el principio es una clase de funciones muy amplia, la cual actúa como proveedora de las posibles funciones que van a formar parte de la escala asintótica en cada caso.

TEOREMA.

Si una función f admite un desarrollo asintótico de orden ϕ según la escala ξ, $f(x) = \sum_{\psi \in \xi} \lambda_\psi\, \psi(x) + o(\phi)$ con $\psi \geq \phi$ entonces $\forall \zeta > \phi$, f admite un desarrollo asintótico de orden ζ, obtenido truncando el desarrollo asintótico dado en el término ζ, $f(x) = \sum_{\substack{\psi\in\xi \\ \psi\geq\zeta}} \lambda_\psi \psi(x) + o(\zeta))$.

Notación

Si el desarrollo asintótico es de orden cualquiera entonces se escribirá, para simplificar

$$f(x) \sim \sum_{\psi\in\xi} \lambda_\psi \psi(x)$$

cuando $x \to x°$ según la escala asintótica ξ.

Es conveniente observar que una misma función puede tener varios desarrollos asintóticos diferentes, si cada uno de ellos está dado respecto a una sucesión o escala asintótica distinta.

Por ejemplo $f(x) = 1/(x+1)$ se puede desarrollar cuando $x \to \infty$ como $\Sigma(-1)^{n-1} x^{-n}$, o cómo $\Sigma(-1)^{n-1} (x^2 - x + 1) x^{-3n}$, ó cómo $\Sigma(x - 1) x^{-2n}$.

También hay que prestar atención al hecho de que un desarrollo asintótico no determina una única función, basta con tomar el desarrollo asintótico $\Sigma(-1)^{n-1} x^{-n}$, cuando $x \to \infty$ como desarrollo asintótico de las funciones diferentes $1/(x+1)$ y $(1 + e^{-x})/(1 + x)$.

Es importante sin embargo, el hecho de que cada sucesión asintótica determine una relación de equivalencia entre las funciones que consideramos.

6. f y g se dice que son asintóticamente equivalentes, con respecto a $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si, y sólo si $f(x) - g(x) = o(f_n(x))$ cuando $x \to x°$ para cada n de la sucesión.

Por lo tanto, se puede decir que cada desarrollo asintótico representa una clase de funciones asintóticamente equivalentes que se denomina "suma del desarrollo asintótico" o "suma de la serie asintótica".

La existencia de la suma asintótica de la serie fué probada en 1926 por Carleman para series de funciones analíticas y en 1954 por Van der Corput para series asintóticas de potencias.

II. OPERACIONES CON DESARROLLOS ASINTOTICOS

Se trata de establecer el mayor número posible de operaciones ciertas entre los desarrollos asintóticos para facilitar su estudio. Es decir, interesa saber en qué condiciones se puede operar con los desarrollos asintóticos para obtener un nuevo desarrollo asintótico de la función resultante de la operación.

Esto tiene una enorme importancia efectiva dada la dificultad práctica de obtener un desarrollo asintótico de una función según una sucesión o escala asintótica previamente dada; por lo que será conveniente poder relacionar la función en estudio con algunas cuyos desarrollos asintóticos son conocidos, para obtener su desarrollo asintótico por medio de relaciones con otros anteriormente obtenidos.

TEOREMA.- (Suma).

Si las funciones f_1, f_2 admiten desarrollos asintóticos hasta el orden ϕ, según la escala asintótica ξ,

$$f_i = \sum_{\substack{\psi\in\xi \\ \psi\geq\phi}} \lambda_\psi^i \psi + o(\phi) \text{ para } i = 1, 2,$$

entonces la función suma $f_1 + f_2$ admite el desarrollo asintótico según la escala ξ hasta el orden ϕ, que resulta de la suma formal $f_1 + f_2 = \sum_{\substack{\psi\in\xi \\ \psi\geq\phi}} (\lambda_\psi^1 + \lambda_\psi^2) + o(\phi)$.

Para series de potencias es sencillo probar que la combi nación lineal de desarrollos asintóticos es el desarrollo asintó tico de la combinación lineal.

Para la multiplicación o producto de series asintóticas, los problemas son muy diferentes, pues en primer lugar el producto de dos desarrollos asintóticos no es un desarrollo asintótico en general, ya que al multiplicar formalmente dos desarrollos $\Sigma a_n f_m$ y $\Sigma b_m f_m$ para $x \to x°$, los productos $f_n f_m$ no son, en principio, una sucesión asintótica, y normalmente no es posible arreglar el sistema para que lo sea. Sin embargo, existen algunas sucesiones asintóticas que tienen propiedades especiales con respecto al producto, es decir, en las que ampliando el sistema de sucesiones, o simplemente por características especiales de su forma, son tales que al multiplicar dos desarrollos asintóticos obtenemos un nuevo desarrollo asintótico.

Definición

La escala asintótica ξ se dice estable para el producto si para cada par de funciones f, $g \in \xi$ se tiene que $f \cdot g \in \xi$.

TEOREMA.-(Producto).

Si ξ es una escala estable para el producto y f_1 y f_2 son funciones acotadas que admiten un desarrollo asintótico hasta el orden ϕ, según la escala asintótica ξ,

$$f_i(x) = \sum_{\psi \in \xi} \lambda_\psi^i \; \psi(x) + o(\phi) \; , \quad i = 1, 2,$$

entonces el producto $f_1 \cdot f_2$ admite un desarrollos asintóticos hasta el orden ϕ de la forma

$$f_1 \cdot f_2 = \sum_{\substack{\psi_i \in \xi \\ \psi_i \geq \phi, i=1,2}} \lambda_{\psi_1}^1 \; \lambda_{\psi_2}^2 \; \psi_1 \; \psi_2 + o(\phi)$$

Por ejemplo, el producto de dos potencias sigue siendo una

potencia, luego el producto formal de dos desarrollos asintóticos en serie de potencias cuando $x \to 0$ es el desarrollo asintótico del producto. Sin embargo hay que asegurarse para las demás escalas asintóticas.

Proposición.- (Composición de funciones)

Sea ξ una escala asintótica estable para el producto, para el punto $x°$. Sea f una función a valores reales, definida en un entorno del punto $x°$, que admite un desarrollo asintótico según la escala ξ hasta el orden ϕ;

$$\sum_{\substack{\psi \in \xi \\ \psi \geq \phi}} \lambda_\psi \; \psi + o(\phi) \quad \text{con } f = O(\theta), \; \theta \in \xi \;\; \text{y } \theta = o(1)$$

Sea g una función continua en el origen (función real de variable real), admitiendo en un entorno del origen un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$g(u) = a_0 + a_1 u + \ldots + a_n \; u^n + o(u^{n+1})$$

Si las funciones ψ, θ verifican

$$\theta^{n+1} < \phi < \theta^n$$

entonces $g o f$ admite un desarrollo asintótico hasta el orden ϕ, según la escala ξ, y este desarrollo es el obtenido haciendo la suma de los términos mayores o iguales a ϕ, en la expresión

$$a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \ldots + a_n R^n \; , \quad \text{con } R = \sum_{\substack{\psi \in \xi \\ \psi \geq \phi}} \lambda_\psi \; \psi$$

La demostración se obtiene teniendo en cuenta que de la relación $f = O(\theta)$ se tiene $O(f^{n+1}) \subset O(\theta^{n+1})$, luego

$$g o f = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n + O(\theta^{n+1}) = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n + o(\phi)$$

ya que $\theta^{n+1} < \phi$.

Pero teniendo en cuenta el teorema anterior, cada f^K admite un desarrollo asintótico hasta el orden ϕ, según la escala ξ, y por la unicidad del desarrollo la proposición queda demostrada.

Para obtener más resultados a la hora de operar con desarrollos asintóticos hay que restringir las escalas asintóticas a sucesiones asintóticas e incluso a veces, sólamente se pueden considerar desarrollos asintóticos de potencias.

La derivación de desarrollos asintóticos no es posible en general. Sin embargo, en algunos casos concretos bajo características particulares, es posible integrar los desarrollos asintóticos. Veamos a continuación, algunos resultados en este sentido.

Proposición.- (Integración)

Sea $\gamma(x)$ un camino diferenciable con continuidad a trozos de x a x°. Sean $\{f_n(x)\}$ $n \in \mathbb{N}$ una sucesión asintótica de funciones reales positivas para $x \to x^\circ$, tales que existen las integrales $I_n(x) = \int_{\gamma(x)} f_n(z)\,dz$.

Si $f(x)$ tiene el desarrollo asintótico $f(x) \sim \Sigma a_n f_n(x)$ de orden N, cuando $x \to x^\circ$ y f es una función medible sobre $\gamma(x)$, entonces $F(x) = \int_{\gamma(x)} f(z)\,dz$ existe en un entorno de x° y $F(x)$ tiene el desarrollo asintótico $\Sigma a_n I_n(x)$ de orden N cuando x tiende a x°.

Demostración

Teniendo en cuenta que f_n es una función positiva, en primer lugar hay que probar que $I_n(x)$ es una sucesión asintótica

$$I_{n+1}(x) = \int_{\gamma(x)} f_{n+1}(z)\,dz = \int_{\gamma(x)} o(f_n(z))\,dz = o\left(\int_{\gamma(x)} f_n(z)\,dz\right)$$

ya que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U(z_0)$ tal que por ser

$$f_{n+1}(z) \leq \varepsilon f_n(z) \quad \forall z \in U(z_0) \Longrightarrow \left|\int_{\gamma(x)} f_{n+1}(z)\,dz\right| \leq$$

$$\leq \int_{\gamma(x)} f_{n+1}(z)\,dz \leq \int_{\gamma(x)} \varepsilon f_n(z)\,dz = \varepsilon \int_{\gamma(x)} f_n(z)\,dz$$

Y por último resulta que

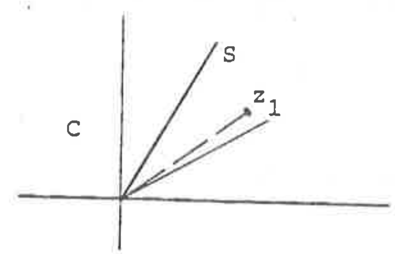
$$F(x) = \int_{\gamma(x)} f(z)\,dz = \int_{\gamma(x)} \left[\sum_{n=1}^{N} a_n f_n(z) + o(f_N(z))\right] dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_n \int_{\gamma(x)} f_n(z)\,dz + \int_{\gamma(x)} o(f_N(z))\,dz = \sum_{n=1}^{N} a_n I_n(x) + o(I_N(x))$$

Proposición

Sea $f(z)$ una función compleja de variable compleja definida en un sector abierto S, y tal que $f(z) \sim a_n z^n$ de orden N para $z \to 0$. Entonces $\int_0^{z_1} f(z)\,dz$, donde el camino de integración es una recta desde el origen, tiene un desarrollo asintótico en serie de potencias de orden $N+1$.

Demostración



$$f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = o(z^N) \iff \forall z \in U_0(O)$$

$$\left|f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right| < \varepsilon\, z^N \Longrightarrow$$

$$\left|\int_0^{z_1} f(z)\,dz - \sum_{n=0}^{N} a_n\, z^{n+1}/n+1\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{z_1} \left|f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n z_n\right| |dz| \leq \int_0^{z_1} \varepsilon\, |z|^N\, dz = 0(z^{N+1})$$

Proposición

Si $f(z)$ es una función compleja de variable compleja en un sector S, y tiene derivada $f'(z) \sim \Sigma a_n z^n$ de orden N para $z \to 0$, entonces $f(z)$ tiene un desarrollo asintótico que al diferenciar da el desarrollo asintótico de $f'(z)$.

Demostración

Basta aplicar la proposición anterior a f'(z).

Proposición

Sea f una función compleja de variable compleja y $f(z) \sim \sum_{n=1}^{N} a_n/z^n$, de orden N cuando $z \to \infty$ en un sector S. Entonces, $[f(z) - a_0 - a_1/z]$ es integrable y

$$F(z) = \int_z^{\infty} [f(w) - a_0 - a_1/w]\, dw \sim (a_2/z + a_3/2z^2 + a_4/3z^3 + \dots)$$

de orden N-2 cuando $z \to \infty$.

Demostración

$$\left| f(z) - \sum_{n=1}^{N} a_n/z^n \right| < \varepsilon |1/z^N| \qquad \forall z \in U(\infty) \subset S$$

$$\left| F(z) - \sum_{n=1}^{N-2} a_{n+1}/n\, z^n \right| = \left| \int_z^{\infty} \Big[f(w) - a_0 - a_1/w - a_2/w^2 - \dots - a_{N-1}/w^{N-1} \Big] dw \right| \leq \int_z^{\infty} \left| f(w) - a_0 - a_1/w - \dots a_{N-1}/w^{N-1} \right| |dw| <$$

$$< \int_z^{\infty} \varepsilon \left| 1/z^{N-1} \right| |dw| = o(1/z^{N-2})$$

Y por último este resultado se puede enunciar así:

Proposición

Si f es una función compleja de variable compleja y $f(z) \sim \sum_{n=2}^{N} a_n/z^n$ de orden N para $z \to \infty$ y f es diferenciable y f' tiene un desarrollo asintótico en serie de potencias, entonces el desarrollo asintótico de f' es la derivada del desarrollo asintótico en serie de potencias de f(z).

III. EJEMPLOS

El problema de la obtención de desarrollos asintóticos resulta complicado en la práctica, pues generalmente el dato es una simple función y la solución un desarrollo asintótico de esta función, pero sin hablar para nada, en un principio, de sucesión o escala asintótica. Es decir, la elección de una u otra escala asintótica va a venir determinada por la misma función de la que se quiere hallar su desarrollo. Por este motivo es conveniente tener ya un grupo de escalas asintóticas posibles, estudiadas anteriormente, para poder elegir una de ellas, o tener algún punto de partida para alguna nueva. Este es el motivo de los ejemplos que siguen.

Ejemplos de SUCESIONES ASINTOTICAS

POTENCIALES Y EXPONENCIALES

1. $P_z = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$; $x° = 0$.
2. $\{x^{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$; $x° = \infty$.
3. $\{(x - x°)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
4. $\{z^{-h_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$; $h_n \in \mathbb{C}$, $Re(h_n) < Re(h_{n+1})$.

   $x° = \infty$ con $z \in \mathbb{C}$ y $|z| \geq 1$; $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta$; $\delta > 0$.
5. Caso particular del anterior:

   $\{z^{-h_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$; $h_n \in \mathbb{R}$ con $h_{n+1} > h_n$; $x° = \infty$.
6. $\{e^z \cdot z^{-h_n}\}$, $x° = \infty$, h_n como el ejemplo nº 4.

Ejemplos de ESCALAS ASINTOTICAS.- Sea $x° \in \bar{\mathbb{R}}^{+}$

1. $P_{\mathbb{R}} = \{x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad x° = \infty.$

2. $L_1 = \{x^{\alpha} \cdot \mathrm{Log}^{\beta} x,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 1\ ; \quad x° = \infty.$

3. $F_1 = \{x^{\alpha} \cdot e^{P(x)},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \ p(x) = \text{polinomio sin término constante}\}$

4. $L_m = \{x^{\alpha} \cdot \mathrm{Log}^{\beta_1} x\ \ \mathrm{Log}_2^{\beta_2} x \ldots \mathrm{Log}_m^{\beta_m} x;\ (\alpha_1, \beta_1,\ \beta_2, \ldots \beta_m) \in \mathbb{R}^{m+1}\}$

$m \in \mathbb{N} - \{0\},\ x \geq e_{m-1}$ con $e_{h+1} = e^{e_h}$ (por recurrencia); $x° = \infty.$

5. $L = \bigcup_{m \in \mathbb{N} - \{0\}} L_m$

6. $\{|x|^{\alpha} \cdot |\mathrm{Log}\ x|^{\beta},\ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$

Ejemplos de DESARROLLOS ASINTOTICOS

1. $\dfrac{1}{1-x} \sim \sum x^n; \quad x° = 0.$

2. $\dfrac{1}{1+x^2} \sim \sum (-1)^{n-1}\ x^{-2n}; \quad x° = \infty.$

3. $\dfrac{1}{1+x} \sim \sum (-1)^{n-1}\ x^{-n}; \quad x° = \infty.$

4. $\dfrac{1}{1+x} \sim \sum (-1)^{n-1}\ (x^2 - x + 1) \cdot x^{-3n}; \quad x° = \infty.$

5. $\dfrac{1}{1+x} \sim \sum (x-1) \cdot x^{-2n}; \quad x° = \infty.$

6. $\dfrac{1+e^{-x}}{1+x} \sim \sum (-1)^{n-1}\ x^{-n}; \quad x° = \infty.$

7. $\displaystyle\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \sim \sum e^{-x}\ \frac{(-1)^n\ (n-1)!}{x^n}; \quad x° = \infty.$

8. $\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t} \cdot t^{-u}\ dt \sim e^{-x} \sum (-1)^n \cdot (u)_n\ x^{-u-n}; \quad x° = \infty.$
$(u)_n = u(n+1) \ldots (u+n-1)$

IV. METODOS PARA LA OBTENCION DE DESARROLLOS ASINTOTICOS

Existen muchas posibilidades para la obtención de desarrollos asintóticos de funciones, y casi todos dependen de la forma concreta de expresar la función dato. El tratamiento de cada uno de ellos merece un estudio amplio que en pocas ocasiones se ha realizado y casi siempre resulta un caso particular no generalizable. Algunos de estos métodos podrían ser enumerados así.

a) Para funciones definidas por integrales:

1. Integración por partes.

2. Transformaciones integrales. (Se trata de relacionar la integral dada con alguna transformación integral, de la cual sea más sencillo obtener el desarrollo asintótico o la parte principal y después ir obteniendo sucesivamente, aplicando la misma transformación, los demás términos). Son de este tipo:

- La transformación de Laplace. Lemas de Watson.
- La transformación de Fourier.
- Fórmula de Kelvin y su generalización.
- Método del descenso rápido o método del puerto.
- Aplicación de la integral de Airey.
- Fórmula del punto de silla.
- Método de la fase estacionaria.
- Integrales multidimensionales con varios parámetros.

b) Para funciones definidas por las soluciones de ecuaciones diferenciales.

Generalmente se puede precisar, de alguna manera, la existencia de las soluciones, pero no la forma explícita. En este caso, se trata de aproximar estas soluciones por medio de sus desarrollos asintóticos. En la práctica se suele seguir el proceso inverso, es decir, en primer lugar, se busca un tipo de serie que puede satisfacer la ecuación diferencial, desde un punto de vista puramente formal, y después se procede a la comprobación analítica de la existencia de la solución, verificando que efectivamente la serie buscada es el desarrollo asintótico de la solución, cuya existencia se ha probado.

Existe un teorema debido a W. Wasow (1965), dificultoso en su demostración, que se enuncia a continuación y que resuelve totalmente el problema que muchos matemáticos intentaron conseguir, desde hace más de 40 años, de manera formal, llegando casi siempre a series no convergentes que detenían las investigaciones.

TEOREMA DE WASOW

Sea $A(x)$ una matriz función nxn, holomorfa para $|x| > x^{\circ}$, $x \in S$, donde S es un sector con vértice en el origen; se supone que $A(x)$ tiene un desarrollo asintótico en serie de potencias de $1/x$, cuando x tiende a infinito, en S. Entonces, para cada subsector de S, suficientemente pequeño, la ecuación diferencial $x^{-q}+y' = A(x)y$ tiene una matriz fundamental de la forma $y(x) = \hat{y}(x)\, x^{G}\, e^{Q(x)}$. Donde $Q(x)$ es una matriz diagonal cuyos elementos son polinomios en $x^{1/p}$, con p entero positivo; G es una matriz constante, e $\hat{y}(x)$ admite, para x tendiendo a infinito en este subsector, un desarrollo asintótico en serie de potencias de $x^{-1/p}$.

RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

por M. AVILES SANCHEZ y A. MARTINEZ SANZ

Profesores Agregados de Matemáticas de los
I. B. Calderón e I. B. Arcipreste de Madrid

En este artículo se analiza mediante un programa escrito en GW-BASIC, para ordenadores compatibles la solución de un sistema de ecuaciones lineales, en su forma general, es decir, "m" ecuaciones con "n" incognitas.El programa esta realizado para que estudie todos los casos.

1)INCOMPATIBLE

2)COMPATIBLE

a)COMPATIBLE DETERMINADO

b)COMPATIBLE INDETERMINADO

En el caso 1º), el programa indica que el sistema no tiene solución.

En el 2º) caso, analiza si la solución es única o si tiene infinitas.Si el sistema es compatible indeterminado, el programa calcula cuales son las incógnitas principales y escribe la ecuación paramétrica de la variedad.

Organización del programa.

El método empleado para la obtención de las matrices escalonada y escalonada reducida es el de GAUSS-JORDAN, situados en las lineas 3100-3600 y 4600-5100, respectivamente.Este método es de sobra conocido y creemos que no merece la pena el describirlo, ya que en cualquier libro sobre Cálculo Numérico (Demidowich), puede encontrarse una descripción del mismo, que es fácilmente traducible a cualquier lenguaje.Hay que señalar que dicho método ha sido mejorado mediante un control, debido a Knuth, para evitar que el ordenador trate un cero, como un número muy pequeño y al diagonalizar, se llegue a obtener un uno como cociente de dicho número por si mismo, cuando en realidad se obtendría la forma 0/0.Dicho método en esencia consiste en definir una función f(x) que aparece en la línea 150 (DEF FN F(Q)=-Q*(ABS(Q)>=.0000001), que evita esto.

Las subrutinas empleadas son la 3200, 3800, 7200, 9300, de estas vamos ha describir la 7200 y la 9300 ya que las otras se refieren, al método de GAUSS-JORDAN.

GOSUB 7200.En esta subrutina se imprimen en impresora o en su defecto salen por pantalla las ecuaciones del sistema.

Las ecuaciones se almacenan en la variable A$, en A$ iría a11*x1+.........+a1n*xn=a1,n+1, para hacer esto se procede como sigue, A$ y B$ se hacen "" para detectar después que tipo de coeficientes son los aij, cero o distintos de cero.En el primer caso se pasa al siguiente coeficiente ai,j+1 y en el segundo se detecta el signo de aij , más adelante para poder escribir comodamente la ecuación se convierten las aij en variables alfanuméricas y se almacenan en E$<--aij*x, falta solo determinar que subíndice lleva la "x", esto se lleva a efecto en la linea 8200, C$<-- aij*xj.A continuacion a11*x1,a11*x11+a12*x2, son los valores que toma A$ y finalmente cuando k=n-1 en A$<--a11*x1+.........+a1n*xn, solo queda añadirle mediante la línea 8500 el término independiente.

GOSUB 9300.Esta rutina permite que las peticiones de datos se realicen por medio de un menú.Este menú es siempre el mismo a lo largo de todo el .programa.Utiliza las ordenes chr$,string$,spc y los caracteres ascii para dibujar un rectángulo en pantalla.

El resto del programa es o bien conocido o repetición de lo anterior, por ej : las líneas 5200-7000 son casi identicas a las que aparecen en la subrutina 7200.

Se aconseja variar la linea 8700 de la forma siguiente LOCATE 2+SS,20:SS=SS+1, si el sistema tiene más de seis ecuaciones y se quiere que el resultado aparezca por pantalla.

Seguidamente pasamos a poner un ejemplo y sacar un listado del programa.

EJEMPLO:

```
*****

X1  +  2*X2  +  3*X3  +  X4  =  3
X1  +  4*X2  +  5*X3  +  2*X4  =  2
2*X1  +  9*X2  +  8*X3  +  3*X4  =  7
3*X1  +  7*X2  +  7*X3  +  2*X4  =  12
5*X1  +  7*X2  +  9*X3  +  2*X4  =  20

ECUACIONES INDEPENDIENTES= 3

*******SOLUCIONES**********

X  1= 5.166667  +  .5*X4
X  2= .6666666
X  3=-1.166667  -.5*X4
```



```
100 KEY OFF:COLOR 7,9:CLS
150 DEF FN F(Q)=-Q*(ABS(Q)>=.0000001)
200 GOSUB 9300
300 LOCATE 9,21:PRINT"SOLUCION DE S.E LINEALES":LOCATE 12,23:PRINT"M ECUA Y N IN
COG"
400 LOCATE 14,21:PRINT"PULSE UNA TECLA PARA SEGUIR"
500 W$=INKEY$:IF W$="" THEN 500
600 GOSUB 9300
700 LOCATE 12,22:PRINT"SALIDA POR IMPRESORA (S/N)";
800 INPUT I$
900 OPTION BASE 1
1000 REM _______INTRODUCCION DE COEFICIENTES Y TERMINO INDEPENDIENTE________
1300 CLS:GOSUB 9300
1400 LOCATE 10,22:INPUT "FILAS DEL SISTEMA:";M
1500 LOCATE 14,22:INPUT "COLUM DEL SIST INCL TER IND:";N
1600 CLS
1700 DIM A(M,N)
1800 GOSUB 9300
1900 FOR I=1 TO M
2000 FOR J=1 TO N
2100 LOCATE 12,21:PRINT STRING$(37,32)
2200 LOCATE 12,25
2300 PRINT "A(";I",";J")=";:INPUT A(I,J)
2400 NEXT:NEXT
2500 CLS
2600 GOSUB 9300
2700 LOCATE 10,22:INPUT "SALIDA POR IMPRESORA(S/N)";Q$:PRINT:IF (Q$="S" OR Q$="s
") THEN LPRINT:LPRINT
2800 GOSUB 7200
2900 GOSUB 3200
3000 GOTO 3800
3100 REM _______MATRIZ ESCALONADA________
3200 L=1:C=1
3300 CONTA=L+1
3400 IF (L=M OR C=N) THEN IF A(M,C)<>0 THEN Z=A(M,C):FOR I=C TO N :A(M,I)=FN F(A
(M,I)/Z):NEXT I :RETURN ELSE C=C+1:IF C=N+1 THEN RETURN ELSE GOTO 3400
3500 IF A(L,C)=0 THEN IF A(CONTA,C)<>0 THEN FOR I=C TO N:SWAP A(L,I),A(CONTA,I):
NEXT I:GOTO 3600 ELSE CONTA=CONTA+1:IF CONTA=M+1 THEN C=C+1:GOTO 3300 ELSE GOTO
3500
3600 IF A(L,C)<>1 THEN Z=A(L,C):FOR I=C TO N:A(L,I)=FN F(A(L,I)/Z):NEXT I:GOTO 3
500 ELSE FOR I=L+1 TO M:Z=A(I,C):FOR J=C TO N:A(I,J)=FN F(A(I,J)-A(L,J)*Z):NEXT
J:NEXT I:L=L+1:C=C+1:GOTO 3300
3700 REM _________ECUACIONES INDEPENDIENTES__________
3800 FOR I=1 TO M
3900 FOR J=1 TO N-1
4000 IF A(M-I+1,J)<>0 THEN 4400
4100 NEXT J
4200 IF A(M-I+1,N)<>0 THEN LOCATE 24,25:PRINT "SISTEMA INCOMPATIBLE":GOTO 9100
4300 NEXT I
4400 PRINT:PRINT "ECUACIONES INDEPENDIENTES=";M-I+1:SI=M-I+1:PRINT
4500 IF (I$="S" OR I$="s") THEN LPRINT:LPRINT "ECUACIONES INDEPENDIENTES=";M-I+1
4600 REM _________MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA__________
4700 FOR I=SI TO 2 STEP -1
4800 FOR J=1 TO N-1
4900 IF A(I,J)<>0 THEN FOR T=I-1 TO 1 STEP -1:Z=A(T,J):FOR L=J TO N:A(T,L)=FN F(
A(T,L)-Z*A(I,L)):NEXT L:NEXT T:GOTO 5100
5000 NEXT J
```

```
5100 NEXT I
5200 PRINT "*******SOLUCIONES********":PRINT
5300 IF (I$="S" OR I$="s") THEN LPRINT:LPRINT "*******SOLUCIONES**********":LPRI
NT
5400 REM _______DESPEJAR INCOGNITAS_________
5500 FOR I=1 TO SI
5600 A$=""
5700 FOR J=1 TO N-1
5800 IF A(I,J)<>0 THEN 6000
5900 NEXT J
6000 FOR K=N-1 TO J+1 STEP -1:B$=" +"
6100 IF A(I,K)=0 THEN 6700
6200 IF SGN(-A(I,K))=-1 THEN B$=" "
6300 IF ABS(A(I,K))<>1 THEN E$=STR$(-A(I,K))+"*X":GOTO 6500
6400 IF A(I,K)=1 THEN E$="-X":GOTO 6500
6450 E$="X"
6500 M$=STR$(K):M$=MID$(M$,2,LEN(M$)-1):C$=E$+M$:B$=B$+C$
6600 A$=B$+A$
6700 NEXT K
6800 IF A(I,N)<>0 THEN A$=STR$(A(I,N))+A$:GOTO 6900 ELSE IF A$="" THEN A$="0" EL
SE IF LEFT$(A$,1)="+" THEN A$=MID$(A$,2,LEN(A$)-1)
6900 C$=STR$(J):A$="X"+C$+"="+A$:PRINT A$: IF (I$="S" OR I$="s") THEN LPRINT A$
7000 NEXT I
7100 END
7200 REM _________LISTADO IMPRESORA____________
7300 CLS:IF A$="s" OR A$="S" THEN 7400 ELSE LOCATE 2,10:PRINT "**************SIS
TEMA DE ECUACIONES****************":GOTO 7500
7400 LPRINT:LPRINT "********SISTEMA DE ECUACIONES*********":LPRINT
7500 FOR I=1 TO M
7600 A$="":B$=""
7700 FOR K=1 TO N-1:IF A$<>"" THEN B$="+"
7800 IF A(I,K)=0 THEN 8400
7900 IF SGN(A(I,K))=-1 THEN B$=""
8000 IF ABS(A(I,K))<>1 THEN E$=STR$(A(I,K))+"*X":GOTO 8200
8100 IF A(I,K)=1 THEN E$=" X":GOTO 8200
8150 E$="- X"
8200 M$=STR$(K):M$=MID$(M$,2,LEN(M$)-1)+" ":C$=E$+M$+" ":B$=B$+C$
8300 A$=A$+B$
8400 NEXT K
8500 A$=A$+"="+STR$(A(I,N))
8600 IF (Q$="s" OR Q$="S") THEN LOCATE 10+MM,20:MM=MM+2:PRINT A$:LPRINT A$:GOTO
8900
8700 LOCATE 4+SS,20:SS=SS+2
8800 PRINT A$
8900 NEXT I
9000 RETURN
9100 IF (I$="s" OR I$="S") THEN LPRINT:LPRINT "SISTEMA INCOMPATIBLE"
9200 END
9300 CLS
9400 LOCATE 7,20:PRINT CHR$(201)+STRING$(38,205)+CHR$(187):FOR WW=1 TO 9:LOCATE
7+WW,20:PRINT CHR$(186) SPC(38) CHR$(186):NEXT
9500 LOCATE 17,20:PRINT CHR$(200)+STRING$(38,205)+CHR$(188)
9600 RETURN
```


R E S E Ñ A S   D E   L I B R O S

" M A C O - MATEMÁTICAS CON ORDENADOR (para profesores y estudiantes de **Enseñanza Primaria, Bachillerato,** Formación Profesional y Universidad)", por **E. Roanes Macías** y **E. Roanes Lozano.** Editorial Síntesis. Madrid, 1988. Con 367 páginas y un disquete.

El primero de los autores de esta obra, dirige los trabajos de un proyecto de investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas con ayuda de los ordenadores, desarrollado en la Sección Departamental de Algebra de la E. U. *"Pablo Montesinos"* de la Universidad Complutense. El otro participa también en esos trabajos. Ambos son activos consocios, colaboradores de este Boletín.

La obra es a la vez un libro y un "paquete" de programas dispuestos para su uso inmediato, que se suministra mediante un disquete. El libro no es simplemente el "manual del usario" del mencionado paquete; por el contrario, al profesor de Matematicas que desee iniciarse en las aplicaciones de los ordenadores a la enseñanza, su lectura le abrirá muchas más perspectivas que los habituales manuales sobre lenguajes y programas. Al que ya esté iniciado en el uso del LOGO, aunque no quiera utilizar los programas del paquete, le será útil como modelo de resolución de problemas a través de este lenguaje, en forma elegante y grata para el que lo vaya a utilizar, constituyendo un excelente libro de ejercicios de LOGO. Para los que quieran utilizar los programas tal como vienen en el disquete, el libro no solo le servirá de manual de instrucciones para su uso, sino que le ofrecerá, para cada programa, una extensa colección de ejercicios que pueden ser realizados con él. El que quiera aventurarse a ampliar o modificar los programas de la colección, encontrará unos listados muy claros y completos, de estructura marcadamente modular, que le facilitarán la tarea.

La colección de programas que contiene el disquete cubre prácticamente la totalidad de los temas matemáticos de nivel medio cuya enseñanza puede recibir algún beneficio del auxilio del ordenador. Algunos programas están pensados para su uso en la E.G.B., mientras que otros se orientan a las enseñanzas de B.U.P. o F.P. y C.O.U. e incluso universitarias.

La colección está dividida en cuatro bloques: El primero, *"Operaciones"*, comprende programas para la enseñanza del uso del reloj, de las operaciones numéricas, incluido la utilización de paréntesis, de la teoría de la divisibilidad, de las operaciones con conjuntos y de las operaciones con proposiciones lógicas.

El segundo bloque está destinado a los *"Cálculos Geométricos"*, comprendiendo programas para la enseñanza de las coordenadas cartesianas, de los vectores, de los movimientos del plano, de las semejanzas, del cálculo de áreas y de la equivalencia de polígonos.

El tercer bloque de programas versa sobre los *"Cálculos Algebraicos"* y es útil para la enseñanza del cálculo con polinomios, de las ecuaciones algrebraicas, de los sistemas de ecuaciones lineales y del cálculo de matrices y sus determinantes.

Por último, el bloque de *"Cálculos Funcionales"* contiene programas preparados para la enseñanza de las proporcionalidades, del estudio de las funciones y sus gráficas, de la integración numérica, de los números aleatorios y de la estadística elemental.

Merece la pena resaltar la cuidada edición del libro, que tiene una excelte presentación tipográfica, que contrasta con lo que es habitual en los libros sobre programas para ordenadores. Mediante unos rombos, se señala en el índice el grado de dificultad que presentan los temas a que se refieren los distintos programas.

El disco flexible de 5 " que acompaña al libro es adecuado para ordenadores IBM o compatibles trabajando ya sea en LOGO LCSI o en ACTI-LOGO. Puede canjearse gratuitamente por otro preparado en APPLE LOGO II para funcionar en un APPLE II de 128K. Basta con un monitor monocromo, pero si se dispone de uno de colores, las figuras aparecen coloreadas de forma que se realza su significado.

Las instrucciones para el uso de los programas son muy sencillas y no requieren conocimientos de informática. Los alumnos pueden utilizarlos manejando el teclado del ordenador, con solo seguir las indicaciones del libro.

J. F. B.

"CALCULO INTEGRAL VECTORIAL", por Carlos Conde Sánchez, Catedrático de Matemáticas de la Escuela Superior de Ingenieros de Minas de Oviedo. Editorial Tebar Flores. Madrid, 1988. 422 páginas.

Este magnífico libro del profesor Conde puede situarse entre los buenos que han sido editados en castellano sobre el análisis vectorial. La obra expone la teoría de campos clásica con estricto rigor, y empieza suponiendo, como es natural, que el lector conoce el cálculo diferencial e integral de las funciones reales de una y varias variables, así como la geometría vectorial. De todos modos, dedica algunas páginas a un breve repaso de dichas cuestiones y a las nociones de curva y superficie, orientación, dominios y su grado de conexión, etc.

Esta obra de Conde es completa y detallada. Hay un perfecto equilibrio entre el minucioso análisis de conceptos y métodos y la contundente precisión expositiva; equilibrio que conduce a un justo contenido didáctico. Contribuye a esto último la profusión de ejemplos, ejercicios y problemas distribuidos dentro de cada capítulo y al final de los mismos, que aparecen resueltos en su totalidad. Otro acierto es la gran cantidad de figuras que, como es lógico, ayudan a aclarar definiciones y resultados.

La Física es inherente a la teoría matemática de los campos y, como es de esperar de los libros que tratan de esta última, también en el de Conde está presente la Física, tanto en la mayoría de los ejercicios como en el propio texto.

En las primeras páginas, el autor cuida de resaltar el carácter intrínseco de ciertas propiedades de los campos, demostrando, por ejemplo, la invariancia de los operadores básicos (gradiente, divergencia y rotacional) respecto de los cambios

del sistema de referencia. Matiza también lo que se refiere a la orientación de los espacios euclídeos y su impacto en los productos escalar y vectorial y en el rotacional en E_3, apareciendo el concepto de pseudovector.

La obra está constituida por siete capítulos y un apéndice. El primero contiene el estudio diferencial de los campos, incluidos los paramétricos. Destaca también la diferencia entre las trayectorias ortogonales a las líneas de un campo vectorial en el plano y en el espacio euclídeos.

Los capítulos II y III están dedicados a las integrales de campo propiamente dichas, su propiedades y cálculo, todo ello precedido de una exposición del concepto de orientación de curvas y superficies. Incluye también el autor integrales curvilíneas de Riemann-Stieltjes. Los ejercicios son numerosos y bien elegidos para fijar las ideas.

El capítulo IV es importante. En él se enuncia y demuestra el teorema de Green-Riemann y sus consecuencias, se extiende el teorema de Barrow a los campos irrotacionales por medio del potencial escalar y se expone lo referente a la conexión de los dominios en E_2 sobre el concepto de homotopía. Aquí el autor, al tratar de la circulación en dominios doblemente conexos, introduce lo que él llama "constante de agujero", que utilizará a lo largo del libro. Incluye también en este capítulo la versión en el plano del teorema de la divergencia y el cálculo de potenciales. Y precisamente, con el fin de resolver problemas de frontera utilizando la relación que existe entre funciones holomorfas y potenciales armónicos, el autor incluye antes algunas jugosas páginas dedicadas a las funciones de variable complea y los teoremas integrales de las mismas, y al problema de Dirichlet.

El capítulo V de la obra está dedicado al teorema de Stokes, que demuestra fácilmente utilizando el de Green-Riemann, y estudia sus consecuencias. Incluye la correspondiente generalización de la regla de Barrow y el cálculo de potenciales en E_3, que después aplica a campos concretos de la Física.

El teorema de Gauss-Ostrogradski, su aplicación a los campos que permiten obtener las fórmulas del gradiente y del rotacional, y el estudio de los campos solenoidales, constituyen el núcleo del capítulo VI, donde además se deduce las expresiones integrales de carácter intrínseco de los tres operadores básicos, y se estudia la divergencia de aquellos campos newtonianos cuyo potencial satisface a la ecuación de Poisson, o bien a la de Laplace. Se incluye también, claro es, el potencial vectorial, que permite una nueva forma de generalizar la regla de Barrow. Figura asismismo en este capítulo la obtención de las tres fórmulas de Green, cuya tercera de ellas conduce, según los casos, a la expresión de funciones como suma de potenciales newtonianos. Finaliza con funciones armónicas y la obtención de soluciones de la ecuación de Laplace.

El capítulo VII incorpora la importante cuestión de utilizar conjuntamente divergencia y rotacional para determinar campos cualesquiera, en lo cual está involucrada la ecuación de Poisson.

Por último, hay un apéndice dedicado a los campos que dependen del tiempo, precedido de ejemplos de la Física basados en los campos paramétricos estudiados en el capítulo I.

Se trata, en fin, de una obra de alta calidad científica, que desarrolla el análisis de los campos clásicos con gran maestría y amplitud.

V.F.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA PRIMERA FASE DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA EN EL DISTRITO DE MADRID Y EN OTROS, LOS DIAS 11 Y 12 DE NOVIEMBRE DE 1988

Problema 1°:

Sea n un número par divisible por un número primo mayor que su raiz cuadrada. Probar que ni n ni n^3 pueden expresarse como producto de dos impares consecutivos aumentado en una unidad, pero tanto n^2 como n^4 se pueden expresar de esa forma.

Problema 2°:

Dado un cuadrado $ABCD$, sean M y N los puntos medios de los respectivos lados AB y CD. Se considera la transformación T *entre puntos del plano de dicho cuadrado que conserva las distancias y tal que*

$$T(A) = N \quad , \quad T(N) = B \quad , \quad T(D) = M$$

Razonar si existe o no una recta r tal que $T(r) = r$. ¿ Existe algún punto X tal que $T(X) = X$?

Problema 3°:

Se disponen los números enteros del 1 al n^2 formando una matriz cuadrada en esta forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & n^2 \end{pmatrix}$$

Se escoge arbitrariamente un número de la matriz, suprimiendo después la fila y la columna donde está; en la matriz que queda se repite el proceso, continuando así hasta que queda un solo número. Hallar la suma de este último número y de todos los escogidos sucesivamente. Probar que esta suma no depende de las elecciones realizadas.

Problema 4°:

Se conocen los angulos de un triángulo $A_1B_1C_1$. Para todo n natural, llamaremos A_{n+1}, B_{n+1} y C_{n+1} a los puntos de tangencia con los lados B_nC_n, C_nA_n, A_nB_n de la circunferencia inscrita en el triángulo $A_nB_nC_n$. Determinar, en función de n, los ángulos del triángulo $A_nB_nC_n$.

Problema 5°:

En el interior de un cuadrado *ABDE* se toma el punto *C* tal que *CDE* sea un triángulo isósceles con ángulos de 15° en *D* y *E* . ¿ Qué clase de triángulo es *ABC* ? Justifica la respuesta.

Problema 6°:

Se escriben varias colecciones de números de modo que en cada una de esas colecciones se empleen una sola vez cada uno de los diez dígitos, del 0 al 9, (sin que estos números comiencen por un 0 por la izquierda) y que la suma de los números que forman cada colección escrita sea menor que 75. ¿ Cuantas colecciones de esa clase se podrán escribir ? (No se consideran distintas colecciones con los mismos números pero en otro orden).

Problema 7°:

Calcular el valor máximo de la función $f(x) = \prod_{k=0}^{7} |x-k|$ en el intervalo cerrado $[3\,,\,4]$.

Problema 8°:

Sea *m* un número impar; demostrar que para todo *n* entero mayor que 2, la suma de las potencias *m*-ésimas de los números primos con *n*, y menores que él, es un múltiplo de *n* .

En la 48ª COMPETICION MATEMATICA "W. L. PUTNAM", celebrada el 5 de Diciembre de 1987 en U. S. A., se propusieron doce problemas, de los que damos dos a continuación:

Problema 9° :

Las curvas A , B , C y D están definidas en el plano como sigue:

$$A = \left\{ (x,y) \; : \; x^2 - y^2 = \frac{x}{x^2 + y^2} \right\} ,$$

$$B = \left\{ (x,y) \; : \; 2xy + \frac{y}{x^2 + y^2} = 3 \right\} ,$$

$$C = \left\{ (x,y) \; : \; x^3 - 3xy^2 + 3y = 1 \right\} ,$$

$$D = \left\{ (x,y) \; : \; 3x^2y - 3x - y^3 = 0 \right\} ;$$

Demostrar que $A \cap B = C \cap D$.

Problema 10° :

Calcular

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}\; dx}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}$$

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTROS BOLETINES Y DE AQUELLOS PARA LOS QUE TODAVIA NO SE HAN RECIBIDO SOLUCIONES (INDICADOS CON XX)

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números										obs.
		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2 1984	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finl^{a})	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-86 (Bogotá)	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2 1986	18	19	20	18	19	19	-	-	-	-	C
	Varios	-	-	-	-	-	-	17	17	11	17	C
10	China y Aust^{a}	20	15	XX	20	15	20	20	XX	XX	-	*
11	OME-f1 1986	13	14	14	14	14	XX	20	15/	20	12	
	OMI-86 (Varso^{a})	XX	20	12	XX	-	-	-	-	-	-	*
12	OIM-87 (Urug.)	16	14	14	17	15	17	-	-	-	-	C
	OME-f1-Extrem^{a}	-	-	-	-	-	-	15	15	15	XX	
13	OME-f2 1987	20	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	18	18	18	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
16	OME-f1 1987	XX	XX	XX	18	XX	XX	XX	XX	-	-	
17	OME-f2 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
18	OIM-Perú 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
19	OMI-88 (Aust^{lia})	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
20	OME-f1 (1988)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OME = Olimpiada Matemática Española - fase 1^{a} o 2^{a}.

Obs. C = Completada la publicación de soluciones
* = Esperamos especialmente de nuestros socios el envío de soluciones a estos problemas señalados con XX .

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 3ª (Boletín nº 9)

Hallar los valores de n, $n \in N$, para los que 5^n+3 es una potencia de 2 de exponente natural.

Solución

Se consideran los tres casos:

a) Sea $n = 2m$ $(m \in \mathbb{N})$; entonces se verifica

$$5^{2m} + 3 = 2^2(2k+1)\ ,\ k \in \mathbb{N}$$

En efecto, para $k = 0$, $5^0+3 = 2^2$; para $k = 1$, $5^2+3 = 28 = 2^2 \cdot 7$. Supuesto cierto para m, se demuestra para m+1; multiplicando por 5^2:

$$5^{2m+2} + 3 \cdot 25 = 100(2k+1) \quad ; \quad 5^{2(m+1)} + 3 = 2^2 \cdot 50k + 100 - 72;$$

$$5^{2(m+1)} + 3 = 2^2 \cdot 50k + 28 \quad \text{o sea,} \quad 5^{2(m+1)} + 3 = 2^2(50k+7) = 2^2(2k'+1)$$

luego se cumple. Por tanto, salvo para $m = 0$, $5^{2m} + 3 \neq 2^p$

b) Sea $n = 4m+1$ $(m \in \mathbb{N})$. Se verifica,

$$5^{4m+1} + 3 = 2^3(2k+1), \quad k \in \mathbb{N}$$

En efecto, para $k = 0$, $5 + 3 = 2^3$; para $k = 1$, $5^5 + 3 = 3128 = 2^3 \cdot 391$. Supuesto cierto para m, se demuestra para m+1; multiplicando por 5^4:

$$5^{4m+1} \cdot 5^4 + 5^4 \cdot 3 = 2^4 \cdot 5^4 k + 2^3 \cdot 5^4 \ ; \quad 5^{4(m+1)+1} + 3 = 10^4 k +$$

$$+ 3128 = 2^3(1250k + 391) = 2^3(2k'+1)$$

como se quería probar. Por tanto, salvo para $m = 0$, $5^{4m+1} + 3 \neq 2^p$.

c) Sea $n = 4m+3$ $(m \in \mathbb{N})$. Designando por $N[4m+3]$ al conjunto de los números de la forma $\dot{4}+3$, se tiene la igualdad evidente

$$N[\dot{4}+3] = N[2^2(2k+1)+3] \cup N[2^3(2k+1)+3] \cup N[2^4(2k+1)+3] \quad \dots$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots$

Observando que

$5^0 \equiv 1(16)$	$5^0 \equiv 1(32)$
$5^1 \equiv 5$	$5^1 \equiv 5$
$5^2 \equiv -7$	$5^2 \equiv -7$
$5^3 \equiv -3$	$5^3 \equiv -3$
	$\dots\dots$
$5^4 \equiv 1$	$5^8 \equiv 1$

Se aprecia que $5^{4n+3} + 3 = \dot{\overline{2^4}}$, $5^{8n+3} = \dot{\overline{2^5}}$ ...

Se va a probar que

$$5^{2^2(2k+1)} + 3 = 2^4(2h+1), \quad 5^{2^3(2k+1)} + 3 = 2^5(2h+1), \quad \dots$$

donde por $2h+1$ y $2k+1$ se designan números impares cualesquiera. En general, se demuestra que:

$$5^{2^m(2k+1)+3} + 3 = 2^{m+2}(2h+1) \qquad k = 0, 1, 2, \dots \qquad [A]$$

La igualdad se ha comprobado para $m = 1, 2$. Supuesta cierta [A] se quiere probar que es cierta

$$5^{2^{m+1}(2k+1)+3} + 3 = 2^{m+3}(2h'+1) \qquad k = 0, 1, 2, \dots \qquad [B]$$

Si [A] es cierta y [B] - [A] también lo es, la igualdad [B] también lo es. La expresión de [B] - [A] es:

$$5^{2^{m+1}(2k+1)+3} - 5^{2^m(2k+1)+3} = 2^{m+3}(2h'+1) - 2^{m+2}(2h+1)$$

donde el segundo miembro se puede escribir:

$$2^{m+3}(2h'+1) - 2^{m+2}(2h+1) = 2^{m+2}(4h'-2h+1) = 2^{m+2}(2h''+1)$$

y el primer miembro

$$5^{2^{m+1}(2k+1)+3} - 5^{2^m(2k+1)+3} = 5^{2^m(2k+1)+3}\left[5^{2^m(2k+1)} - 1\right]$$

y como el corchete se puede descomponer en

$$\left[5^{2^{m-1}(2k+1)} + 1\right]\left[5^{2^{m-2}(2k+1)} + 1\right] \dots \left[5^{2(2k+1)} + 1\right]\left[5^{2k+1} + 1\right] \cdot$$
$$\cdot \left[5^{2k+1} - 1\right]$$

resulta que es divisible por 2^{m+2}, puesto que cada factor $5^{2^i(2k+1)} + 1$, $(i = 0, 1, 2, \dots m-1)$ contiene el factor 2 una y sólo una vez (ya que sus dos últimas cifras son 26, siendo, por tanto $\dot{2}$ pero no $\dot{4}$) y el factor $5^{2k+1} - 1$ contiene el factor 2, dos y sólo dos veces (dado que termina en 124 que es $\dot{4}$ pero no $\dot{8}$, para $k \neq 0$ y para $k = 0$ es igual a 4). Por tanto, el primer miembro es múltiplo de 2^{m+2}, pero no de 2^{m+3}, luego [B] - [A] es cierta, con lo que queda probado [A].

Luego los números de la forma $5^{4m+3} + 3 \neq 2^p$ salvo para $m = 0$.

En definitiva las únicas soluciones son:

De $5^{2m}+3$, para $m = 0$: $5^0 + 3 = 2^2$

De $5^{4m+1}+3$, para $m = 0$: $5^1 + 3 = 2^3$

De $5^{4m+3}+3$, para $m = 0$: $5^3 + 3 = 2^7$

José V. García Sestafé.

PROBLEMA 1ª (Boletín nª 10)

Dada la función polinómica $f(x) = a_0x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, con coeficientes enteros, y el número entero impar p y el número entero par q, tales que f(p) y f(q) son ambos impares, probar que la ecuación f(x) = 0 no tiene raíces enteras.

Solución

Siendo q par, como f(q) es impar, se tiene

$$a_0q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1}q + a_n = \dot{2} + 1$$

o bien

$$\dot{2} + a_n = \dot{2} + 1 \longrightarrow a_n \text{ impar}$$

Al ser p impar y f(p), también impar,

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + \dot{2} + 1 = \dot{2} + 1$$

de donde

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = \dot{2}$$

que indica que el número de coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ que sean impares es par.

Las raíces enteras, si las hay, dividen a a_n; como éste es impar, las únicas posibles raíces enteras son impares. Pero, para cualquier número impar r (y también si $r = \dot{2}$)

$$a_0 r^{n-1} + a_1 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

es par, ya que el número de coeficientes impares era par. Luego,

$$a_0 r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r$$

es par y sumando con $a_n = \dot{2}+1$, resulta

$$f(r) = \dot{2} + 1 \neq 0$$

esto es, f(x) no se anula para ninguno de los posibles valores de las raíces enteras, o sea f(x) no admite raíces enteras.

José V. García Sestafe (Madrid)

Otra solución de Carlos J. Pérez Jiménez (Logroño)

PROBLEMA 4ª (Boletín nª 10)

Dado el entero a > 2 y el número compuesto b (b > 0), si b puede ser dividido por r números positivos distintos, probar que a^b-1 puede ser dividido al menos por r números positivos distintos.

Solución

Es sabido que $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$, puesto que para $x = y$: $y^n - y^n = 0$. A partir de este resultado se tiene que $x^m - y^m$ es divisible por $x^n - y^n$, si $m = n\cdot r$; en efecto $x^m - y^m = x^{nr} - y^{nr} = (x^n)^r - (y^n)^r$ que es divisible por $(x^n) - (y^n)$.

En el problema presente, supongamos que los r números positivos que dividen a b son $n_1, n_2, \ldots n_r$; por tanto, existirán r números $x_i (i = 1, \ldots r)$ tales que $n_ix_i = b (i = 1, \ldots r)$. Como,

$$a^b - 1 = a^{n_ix_i} - 1 = (a^{n_i})^{x_i} - 1$$

es divisible por $a^{n_i} - 1$ $(i = 1, 2, \ldots r)$, existen al menos r números positivos que dividen a $a^b - 1$.

José V. García Sestafe, (Madrid).

Otra solución de Carlos José Pérez Jiménez (Logroño).

PROBLEMA 6ª (Boletín nª 10)

La mantisa $\{x\}$ de x se define como el mínimo número no negativo tal que $x - \{x\}$ es un entero. Probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \{(2+\sqrt{3})^n\} = 1$$

Solución

Calculando las potencias sucesivas de $2+\sqrt{3}$

$$2+\sqrt{3} = A_1 + B_1\sqrt{3}; \quad (2+\sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3} = A_2 + B_2\sqrt{3}$$

Se observa que en general $A_n^2 - 1 = 3B_n^2$; en efecto a partir de

$$(2+\sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3}$$

multiplicando miembro a miembro por $2+\sqrt{3}$

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = 2A_n + 3B_n + (2B_n + A_n)\sqrt{3}$$

o sea,

$$A_{n+1} = 2A_n + 3B_n, \quad B_{n+1} = 2B_n + A_n$$

como

$$A_{n+1}^2 = (2A_n + 3B_n)^2 = 4A_{n_2}^2 + 12A_n B_n + 9B_n^2 = 12B_n^2 + 12 A_n B_n +$$
$$+ 2A_n^2 - 3B_n^2 + A_n^2 = 3B_{n+1}^2 + 1$$

luego

$$A_n^2 - 1 = 3B_n^2$$

es cierta.

Esto sabido, la raiz entera de $3B_n^2$ es A_{n-1}, luego la mantisa de $(2+\sqrt{3})^n$ es $\sqrt{3B_n^2} - (A_n - 1)$. Calculemos

$$\lim_{n\to\infty} = (\sqrt{3B_n^2} - A_n + 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{3B_n^2 - A_n^2 + 2A_n - 1}{\sqrt{3B_n^2} + (A_n - 1)} \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \frac{2A_n - 2}{A_n + A_n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2A_n - 2}{2A_n - 1} = 1$$

donde se ha tenido en cuenta que $\sqrt{3B_n^2} < A_n$ y que $A_n \to \infty$ si $n \to \infty$, puesto que, como es evidente

$$A_n = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right]$$

Luego

$$\lim \{(2+\sqrt{3})^n\} \geq 1$$

y como la mantisa no puede superar (ni igualar) a la unidad

$$\lim \{(2+\sqrt{3})^n\} = 1$$

José V. García Sestafe, (Madrid).

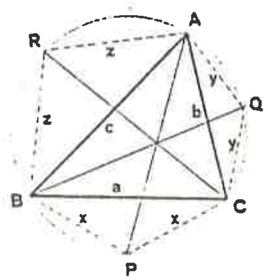
PROBLEMA 7ª (Boletín nº 10)

Sea ABC un triángulo, y sea P el punto en que la bisectriz interior del ángulo A vuelve a cortar a la circunferencia circunscrita. Se definen Q y R análogamente. Probar que:

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA$$

Solución

Por ser inscriptible el cuadrilátero ABPC se cumple



$$BP \cdot AC + AB \cdot CP = AP \cdot BC$$

o bien

$$x \cdot b + x \cdot c = AP \cdot a$$

pero en el triángulo BCP se verifica $2x > a$, luego

$$x(b+c) < 2x \cdot AP; \quad b + c < 2AP$$

Al igual

$$b + a < 2\,CR, \quad a + c < 2BQ$$

sumando y simplificando por 2:

$$a + b + c < AP + CR + BQ$$

José V. García Sestafe, (Madrid).

PROBLEMA 7ª (Boletín nº 11)

Sean a, b y c los lados de un triángulo y α, β, γ los ángulos opuestos a cada uno de ellos. Demostrar que si se verifica

$$(a+b) = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\,(a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta)$$

el triángulo es isósceles.

Solución

Como $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}$, se tiene

$$(a+b)\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = 2a\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + 2b\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}$$

y haciendo, por comodidad, $m = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $n = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$

$$(a+b)\,\frac{m+n}{1-mn} = \frac{2am}{1-m^2} + \frac{2bn}{1-n^2}$$

que se puede escribir

$$a\left(m + n - \frac{2m - 2m^2 \cdot n}{1-m^2}\right) = b\left(\frac{2n - 2mn^2}{1-n^2} - m - n\right)$$

de donde,

$$\frac{(n-m)\,(m^2+1)}{1-m^2}\,a = \frac{(n-m)\,(n^2+1)}{1-n^2}\,b$$

Simplificando por $n - m$, que proporciona $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ [A] resulta

$$\frac{a}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\,(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2})} = \frac{b}{\cos^2\frac{\beta}{2}\,(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2})} \longrightarrow \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta}$$

y, como, por el teorema del seno $\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta}$ resulta

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta \quad [B]$$

Tanto de [A] como de [B], para ángulos menores que π, se desprende $\alpha = \beta$, luego el triángulo es isósceles.

José V. García Sestafe, (Madrid).

PROBLEMA 9ª (Boletín nª 11)

Sea d cualquier número entero estrictamente positivo distinto de 2, 5 y 13. Demuestre que pueden hallarse dos números diferentes pertenecientes al conjunto {2, 5, 13, d}, tales que ab - 1 no es cuadrado perfecto.

Solución

Procedamos por reducción al absurdo; sea $d \in \mathbb{N}$ y $d \neq 2,5$ y 13 y supongamos que existan K_1, K_2, $K_3 \in \mathbb{N}$ y tales que

$$2d - 1 = K_1^2 \qquad 3d = K_2^2 - K_1^2$$

$$5d - 1 = K_2^2 \qquad 8d = K_3^2 - K_2^2$$

$$13d - 1 = K_3^2$$

de donde,

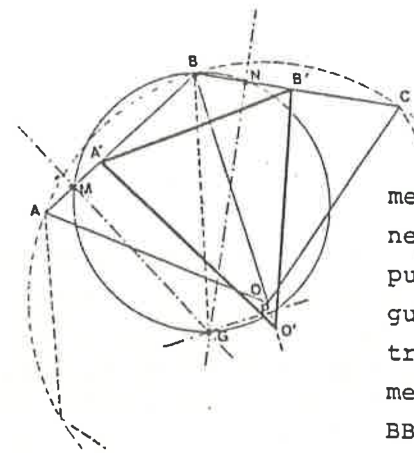
$$\frac{3}{8} = \frac{K_2^2 - K_1^2}{K_3^2 - K_2^2} \quad ,, \quad 8K_1^2 = 11K_2^2 - 3K_3^2$$

igualdad imposible entre números naturales, ya que el primer miembro contiene el factor y 2 un número impar de veces, mientras que en el segundo miembro el factor 2 figura con exponente par.

José V. García Sestafe, (Madrid).

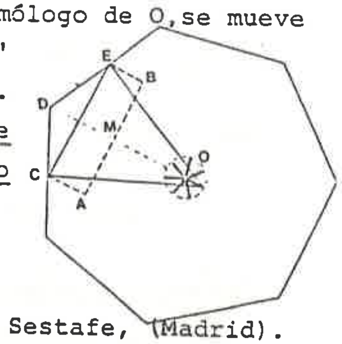
PROBLEMA 12ª (Boletín nª 11)

Sean A y B dos vértices consecutivos de un polígono regular de $n \geq 5$ lados y centro O. Un triángulo A'B'O' igual al ABO se desplaza en el plano de tal modo que los puntos A' y B' siempre están sobre los lados del polígono y O' queda en el interior. Hallar el lugar geométrico descrito por O' cuando A' y B' recorren cada uno la frontera del polígono.



Solución

Sea el triángulo ABC de la primera figura, a partir del cual se obtiene el A'B'C', congruente con él y que se puede obtener mediante un giro del triángulo ABC. El centro de giro G se encontrará en el punto de intersección de las mediatrices de los puntos homólogos AA' y BB'. Como los ángulos BMG y BNG son rectos, los cuatro puntos M, B, N, G son concíclicos, siendo BG un diámetro de la circunferencia. Sea P el punto donde dicha circunferencia corta a la prolongación de OB; como B es recto, el homólogo de O en el giro se encuentra en la prolongacien de BO y a doble distancia de O que P. Por tanto O', homólogo de O, se mueve sobre la prolongación del radio OB, cuando A' y B' lo hacen, respectivamente sobre AB y BC. El lugar geométrico aparece dibujado en la segunda figura y consiste en los segmentos, prolongación de los radios del polígono, y cuya longitud se ha obtenido en la figura.



José V. García Sestafe, (Madrid).

PROBLEMA 1ª (Boletín nª 13)

Siendo a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo no isósceles, se dan, en un plano, tres circunferencias concéntricas cuyos radios miden respectivamente a, b y c. Se pide:

1ª) ¿Cuántos triángulos equiláteros de distintas áreas se pueden construír de modo que las rectas en que están sus lados sean tangentes una a cada una de esas circunferencias?

2ª) Calcular las áreas de los triángulos anteriores.

Solución

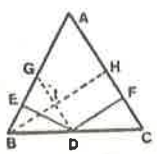


Figura 1

Es inmediato comprobar que cualquier punto de un lado de un triángulo equilátero es tal que la suma de sus distancias a los otros dos lados es igual a la altura del triángulo (Fig. 1):

$$DE + DF = BI + IH = BH$$

Aplicando lo anterior, para todo punto interior a un triángulo equilátero se cumple que la suma de sus distancias a los tres lados es igual a la altura de dicho triángulo. En efecto (Fig. 2)

$$PP_1 + PP_2 + PP_3 = (PP_1 + PP_2) + HH' =$$

$$= H'A + HH' = HA$$

donde la paralela MN a BC ha formado el triángulo equilátero MNA al que se le ha aplicado la propiedad anterior.

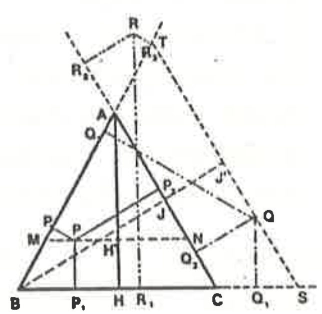


Figura 2

Para cualquier punto exterior al triángulo pero perteneciente a cualquiera de los ángulos convexos A, B ó C se cumple (Fig. 2):

$$QQ_1 + QQ_3 - QQ_2 = BJ = \text{altura del triángulo}$$

En efecto, basta aplicar la primera propiedad al triángulo BST:

$$QQ_1 + QQ_3 = BJ'$$

de donde,

$$QQ_1 + QQ_3 - QQ_2 = BJ' - QQ_2 = BJ' - JJ' = BJ$$

Análogamente se prueba que para cualquier punto exterior al triángulo y perteneciente al ángulo opuesto por el vértice a cualquiera de los A, B, o C se cumple:

$$RR_1 - RR_2 - RR_3 = \text{altura del triángulo}$$

Sea (Fig. 3) un triángulo de lados a, b y c. Según lo visto anteriormente, como en todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos, sólo caben las cuatro posibilidades

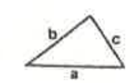


Figura 3

a) El centro de las circunferencias es interior (Fig. 4) al triángulo buscado; la altura h del triángulo es $h = a + b + c$.

b) El centro de las circunferencias es exterior (Fig. 5) y pertenece al ángulo convexo C; $h_c = a + b - c$.

c) El centro de las circunferencias es exterior (Fig. 6) y pertenece al ángulo convexo B; $h_b = a + c - b$.

d) El centro de las circunferencias es exterior (Fig. 7) al triángulo y pertenece al ángulo convexo A; $h_a = b + c - c$.

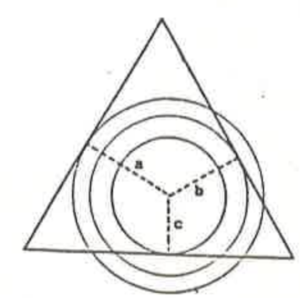


Figura 4

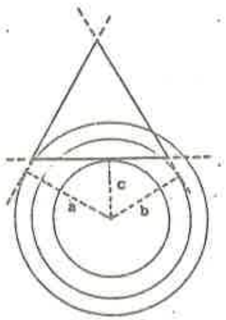


Figura 5

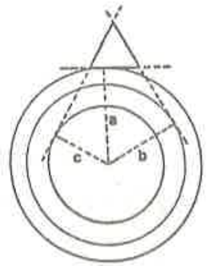


Figura 6

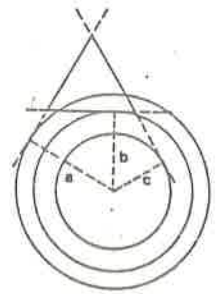


Figura 7

Como en todo triángulo equilátero $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ y $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ se tiene:

$$S = \frac{h^2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, las áreas de los respectivos triángulos equiláteros son:

$$S = \frac{(a+b+c)^2\ \sqrt{3}}{3}\ \text{(Fig. 4)};\quad S_c = \frac{(a+b-c)^2\ \sqrt{3}}{3}\ \text{(Fig. 5)}$$

$$S_b = \frac{(a+c-b)^2\ \sqrt{3}}{3}\ \text{(Fig. 6)};\quad S_a = \frac{(b+c-a)^2\ \sqrt{3}}{3}\ \text{(Fig. 7)}$$

Jose V. García Sestafe, (Madrid).