I CONCURSO "PUIG-ADAM"

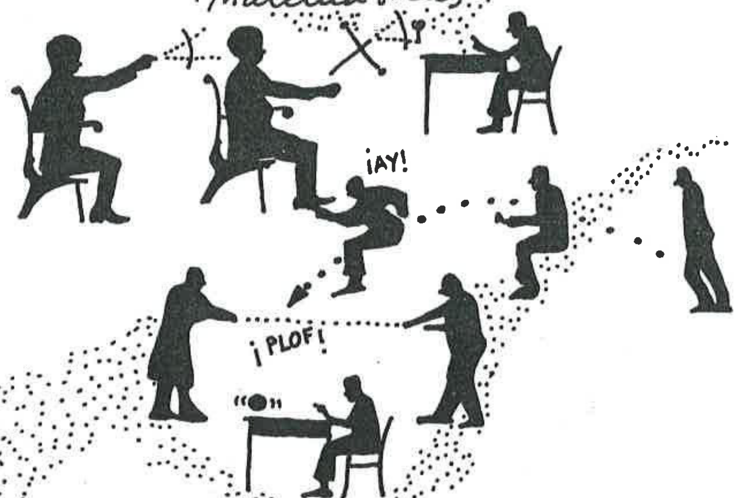
BOLETÍN

Nº 2

1983

BOLETÍN Nº 2

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas



B O L E T I N de la Sociedad Castellana de Profesores de Matemáticas "PUIG ADAM"

n°2 (1983)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

Ronda de Atocha 2 (INBAD)
Madrid (5).

- La confección de este número ha estado a cargo de:

ELORRIAGA, Javier López de
PACHECO, José Miguel (coordinador)
PALANCAR, Fernando
VELAZQUEZ, Enrique

- La correspondencia deberá dirigirse a la sede de la Sociedad, con la indicación "Para el Boletín".

- Este Boletín se publica tres veces a lo largo del curso académico.

- La portada de este número ha sido hecha por J.M. Pacheco.

INDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: José Ramón Pascual Ibarra

Vicepresidentes:

Julio Fernández Biarge (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Joaquín Gómez Rey (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: Enrique Rubiales Camino

Vicesecretario: Vicente Riviere Gómez

Tesorero: Agustín Miguélez Posada

Bibliotecario: Angel Martínez Losada

- EDITORIAL -

LUIS ANTONIO SANTALO Y SORS: PREMIO PRINCIPE DE ASTURIAS

Se abren las páginas de este segundo número del Boletín de la Sociedad con una grata noticia: el día veintidós de junio del presente año, la radio anunciaba la concesión del Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica al matemático Luis A. Santaló, galardón que el día ocho de octubre recibiría en solemne acto de entrega de los premios celebrado en el bello marco del teatro Campoamor, de Oviedo, de manos de S.A. el Príncipe, y con la augusta presencia de S.S.M.M. los Reyes de España.

No es frecuente el reconocimiento del mérito de esos "desconocidos" para el gran público que en el silencio y la paz de sus seminarios consagran su vida al cultivo y desarrollo de esta parcela de la Ciencia, que es la Matemática, y, sin embargo -en palabras del propio Santaló-, "*sólo con la ordenación del pensamiento que proporciona la matemática y con el manejo de su instrumental, será posible salir a flote en este torbellino de datos, máquinas y técnicas que están en la base de nuestro actual sistema de vida*".

Nuestra Sociedad desea con estas líneas, en las que trataremos de esbozar unas breves notas sobre su vida y su obra, rendir al ilustre maestro Santaló el homenaje emocionado de nuestra admiración y simpatía.

Nació Santaló en Gerona el día nueve de octubre de 1911, en el seno de una familia de clase media -su padre era maestro de enseñanza primaria- y en ella recibió sus primeras lecciones de laboriosidad, impregnadas de saber hacer educativo, la semilla que habría de germinar y desarrollarse hasta madurar en el fruto granado de la genialidad.

Terminados sus estudios de bachillerato, viene a Madrid para cursar simultáneamente las licenciaturas en Ciencias Exactas -como se decía entonces- y Físicas. Se aloja en la Residencia de Estudiantes de la calle del Pinar. Todos los que tuvimos la fortuna de tenerle como compañero en el entrañable edificio de la calle de San Bernardo, sede de la denominada en aquella época Universidad Central, que albergaba a la Facultad de Ciencias, recordamos la figura concentrada, pero atrayente, del joven Santaló, a quien con tanta frecuencia teníamos que acudir en solicitud de aclaraciones en la comprensión de un concepto, en el proceso de alguna demostración, en la resolución de un problema. Y siempre, sin hacer alarde de su saber, de su preclara inteligencia, con sencillez y simpatía, mostrando ya su innata maestría, sabía encontrar el ejemplo concreto aclaratorio, la vía intuitiva que llevaba al proceso demostrativo, la ilustración oportuna, que desvelaba de golpe el secreto que nos parecía inexpugnable. Santaló era, pues, para muchos de nosotros, además del compañero y amigo, un maestro más entre los excelentes que profesaban en aquella Facultad: Vegas, Alvarez Ude, Terradas, Plans, Cabrera,... y, ocasionalmente, Rey Pastor, que alternaba la docencia entre Argentina y España. Había allí un ambiente propicio para realizar un trabajo intenso, favorecido además por la circunstancia del reducido número de alumnos que estudiábamos estas carreras.

Terminadas ambas licenciaturas, y cursadas las asignaturas del doctorado, realiza Santaló los cursillos convocados para la formación y selección de profesores de enseñanza secundaria (1933), en los que obtiene el número uno. Comienza sus tareas docentes como profesor de bachillerato en el desaparecido Instituto "Velázquez", de Madrid, y como profesor universitario en calidad de profesor auxiliar de Geometría en la Facultad de Ciencias, al tiempo que se inicia en las tareas de investigación en el Laboratorio -Seminario Matemático, de la Junta para Ampliación de Estudios, que había sido creado por iniciativa de Rey Pastor. Pensionado por la Junta se incorpora al Seminario que en Hamburgo dirige el eminente profesor Wilhelm Blaschke, en el que Santaló es recibido con la reconocida generosidad -característica de un auténtico maestro- del sabio ale-

mán. Bien pronto Santaló es miembro destacado del Seminario y en él ven la luz sus primeros trabajos en el campo de la Geometría Integral, rama entonces incipiente de la Matemática, nacida en conexión con los problemas suscitados por las probabilidades geométricas.

De regreso a España, obtiene el doctorado en 1936 (padrino, el profesor don Pedro Pineda, por el que Santaló guardará siempre el más cariñoso y respetuoso recuerdo). Fruto de su Memoria del doctorado será su primer libro, publicado en alemán por la renombrada editorial Hermann, de París (1936), con el título "INTEGRALGEOMETRIE 5. *Über das kinematische Mass in Raum*".

En el paréntesis de la guerra civil, Santaló es movilizado y destinado como profesor de la Escuela de Observadores de Aviación, en la base de San Javier. Como evasión de los horrores de la contienda entretiene sus "ocios libres" con la lectura de cuestiones relacionadas con la navegación aérea, que más tarde, ya en Buenos Aires, recogerá en su amena "*Historia de la Aeronáutica*" editada por Espasa-Calpe. En ella predice los vuelos espaciales que habrían de tener plena confirmación posterior.

Exiliado en Francia, es llevado a un campo de concentración de refugiados; pero enseguida es reclamado por Cartan para dictar un curso en La Sorbona, y de aquí Rey Pastor lo lleva a Buenos Aires, donde recalan también Balanzat, Pi Calleja y Corominas. Estos dos últimos, pasado algún tiempo, retornarán a España, pero Santaló y Balanzat, fieles al consejo que les diera Rey Pastor a su llegada: "*trabajar y olvidarse del pasado; la Argentina es un país nuevo y en él sólo cabe mirar hacia delante, contribuyendo a su progreso en la medida de las fuerzas de cada uno, como mínima retribución a la generosa hospitalidad que estaba prestando*", quedarán definitivamente afincados en la nación hermana que tan liberalmente quiso acogerlos.

Su primer destino es como profesor contratado en el Instituto de Matemática de la Universidad de Litoral, en la ciudad de Rosario, donde permanecerá desde 1940 hasta 1948; allí contrae matrimonio con una bella y delicada mujer rosarina de la que tendrá tres hijas. En la hermosa ciudad del Paraná, Santaló reanuda con renovado entusiasmo sus interrumpidas tareas investigadoras, consiguiendo importantes aportaciones en diversos campos, y, muy especialmente, en el dominio de las nuevas ramas de la Geometría. Trabajos que sistematizados y organizados en cuerpo de doctrina constituirán quizá su obra fundamental y más original: "*Integral Geometry and Geometric Probability*". Según recoge el Dr. Alberto González Domínguez, uno de los más destacados discípulos de Rey, sobre ella escribió Mac Kac, editor del libro: esta obra hace de Santaló "*for many years the undisputed leader in the field of Integral Geometry*". Ha sido traducida al ruso.

En 1949 está en la Universidad de Princeton y en 1950 da un curso en la de Chicago, para regresar a la Argentina, enseñando primero en la Universidad de La Plata y después en la de Buenos Aires, donde todavía hoy con sus "juveniles" setenta y dos años continúa como profesor "emérito" en plena actividad. Ostenta la Presidencia de la Academia Argentina de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. También es académico correspondiente de la Real Academía de Ciencias, de España.

Aunque Santaló es un enamorado de la Geometría, no ha dejado por ello de investigar en otros campos. Señalemos de pasada sus incursiones en la Teoría de Números y en la Teoría del Campo Unificado, en Física Matemática, en los que ha obtenido resultados del mayor interés.

Los libros de Santaló se distinguen por su rigor científico, su cuidada redacción y su claridad expositiva. Su influencia ha sido importante en todos los estudiantes de habla castellana. Destaquemos: "*Geometría Integral*" (en colaboración con Rey Pastor), "*Geometría Proyectiva*", "*Vectores y tensores*", "*Geometría espinorial*".

Como tantos matemáticos que descollaron por su labor investigadora (Klein, Poincaré, Borel, Enriques, Puig, Polya,...), no podemos dejar de reseñar la notable influencia que Santaló ha tenido en las cuestiones relacionadas con la enseñanza elemental de la Matemática, de las que se ha ocupado intensamente, impartiendo numerosos cursos a profesores de escuela secundaria, tomando parte activa en la elaboración de programas, en congresos internacionales e iberoamericanos, publicando artículos y libros de carácter didáctico. Entre otros: "*La Matemática en la Escuela Secundaria*", "*Probabilidad e inferencia estadística*", "*Las Geometrías no-euclídeas*", y esa pequeña joya que es "*La educación matemática, hoy*", editada por Teide en español y en catalán. Ha presidido el Comité Interamericano de Educación Matemática, del que hoy es Vicepresidente.

Terminemos con la semblanza escrita por uno de los profesores que mejor le conocen, el citado profesor González Domínguez. Dice: "*Santaló ha sido y es Maestro en todos los sentidos de la palabra. En donde actúa o ha actuado ha dejado un recuerdo inolvidable". Uno de sus antiguos alumnos le dedicó la edición de un libro poniendo: "A Luis A. Santaló que me enseñó a enseñar". Sus cursos son profundos, brillantes y claros. No sólo emplea la voz y la tiza para explicar sino que además usa con éxito sus manos, las que dibujan en el aire curvas y superficies y sugieren sus propiedades, y eso que a veces están en espacios de dimensión mayor que tres. Es rarísimo, por no decir imposible, encontrar un alumno que diga no haber entendido nada de la explicación de Santaló, lo cual no quiere decir que todos puedan captar en su totalidad la profundidad de su enseñanza; eso sí, el que lo consigue queda marcado para el resto de su existencia*".

***
*****

- V I D A   D E   L A   S O C I E D A D -

- La Sociedad "Puig Adam" mantendrá, provisionalmente su sede en el INBAD (Ronda de Atocha 2, Madrid-5) por especial deferencia de la nueva dirección del Centro. Gracias por ello.

- A finales de Junio la Sociedad participó en la promoción y presentación de grupos de trabajo en didáctica y enseñanza de las Matemáticas. En aquella ocasión se presentaron los trabajos del grupo Zero de Barcelona. En el mes de Noviembre se ha recibido al grupo Cero de Valencia. Este tipo de contactos proseguirá, auspiciados por el ICE de la UAM.

- La Junta Directiva de la Sociedad se reunió el 20 de Octubre, tomándose acuerdos sobre la extensión de las actividades a las provincias en las que está implantada. Se llevarán a cabo actuaciones en Centros de esta área.

  También se estudió la posibilidad de creación de una Federación de Sociedades afines, cuya posible sede futura sería Madrid.

- La Sociedad ha organizado el "I Concurso de resolución de problemas" para alumnos de 1º de BUP, del cual se hace la crónica en las páginas siguientes.

***
*****

- 1. INFORMES -

PRIMER CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS ENTRE ALUMNOS DEL PRIMER CURSO DE B.U.P.

En el Instituto de Bachillerato "San Isidro", de Madrid, gentilmente cedido por la Dirección del Centro, el sábado 26 de junio del corriente, se celebraron las pruebas de este concurso que había sido convocado por nuestra Sociedad. Restringido a alumnos del primer curso de bachillerato de nuestro ámbito territorial, que previamente hubieran obtenido la calificación de sobresaliente en la asignatura de matemáticas en sus respectivos centros, institutos o colegios, la respuesta de éstos ha sido entusiasta mereciendo la gratitud de los organizadores. Se presentaron, en efecto, ochenta y tres muchachos con representación de todas las provincias. La prueba consistió en la resolución de cuatro problemas, cuyos enunciados publicamos al final de esta reseña, en dos sesiones con dos problemas en cada una.

A última hora de la tarde del mismo día, en el marco del salón de actos del Instituto, lleno de público -alumnos, familiares y profesores-, con la presencia de las cámaras de T.V.E., tuvo lugar la sesión solemne de entrega de premios a los alumnos ganadores, consistentes en un diploma y un lote de diez libros cada uno, de amena e instructiva lectura, donados para este fin por el Ministerio de Cultura, más dos especialmente de matemáticas -"Problemas de Matemáticas Elementales" y "Basic básico" (curso de programación)- aportados por la Sociedad. En ella nuestro Vicepresidente, profesor Julio Fernández Biarge, dirigió un breve discurso de aliento y estímulo a los estudiantes, resaltando la importancia del estudio de la matemática en orden a la formación de la personalidad, como instrumento indispensable para la comprensión del mundo natural y social y como factor imprescindible para el desarrollo tecnológico de los pueblos.

Resultaron ganadores del concurso, por orden de puntuación obtenida, los siguientes alumnos:

1. Juan Ignacio Rivera Pardo (I.B. "Cervantes").
2. Juan Carlos Caballero Fuentes (I.B. de Las Rozas).
3. Juan Carlos Rodríguez Monzón (I.B. de Leganés, 3).
4. Carlos Ueno Jacue (I.B. "Cervantes").
5. Juan Ramón Romero Barrenechea (Colegio "Nervión").
6. Ignacio Moreno Villoslada (Colegio Ntra. Sra. del Buen Consejo).
7. Carlos Alonso Ramos (I.B. de Las Rozas).
8. Rocío García Rubio (Colegio M.M. Concepcionistas).
9. Fernando Blasco Contreras (I.B. "San Isidro").
10. Antonio Calderón Martín (I.B. "Calderón de la Barca").

A todos nuestra cordial enhorabuena.

La Sociedad se complace en reiterar su agradecimiento a todas las personas y organismos que nos prestaron su colaboración, muy especialmente al Director General de Enseñanzas Medias por su apoyo al desarrollo de la idea del concurso, a la Inspección de Enseñanza Media del Distrito Universitario de Madrid que hizo llegar a todos los centros la convocatoria, y al Ministerio de Cultura por su ayuda inestimable en la dotación de los premios.

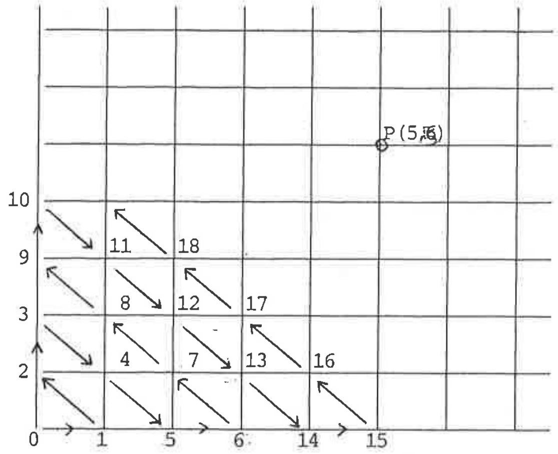
PROBLEMA 1º

En la cuadrícula dibujada, que puede prolongarse cuanto se quiera, se pueden designar los vértices por sus dos coordenadas (abscisa y ordenada). Así, por ejemplo, P(5,6). Pero también, siguiendo el proceso indicado en la figura, es posible determinar cada vértice de la cuadrícula por un único número natural.

a) Determinar el número natural que designa al P(5,6).

b) Determinar el que designa al Q(25,3).

c) Expresar el número natural que designa al R(m,n), siendo m y n números naturales cualesquiera.



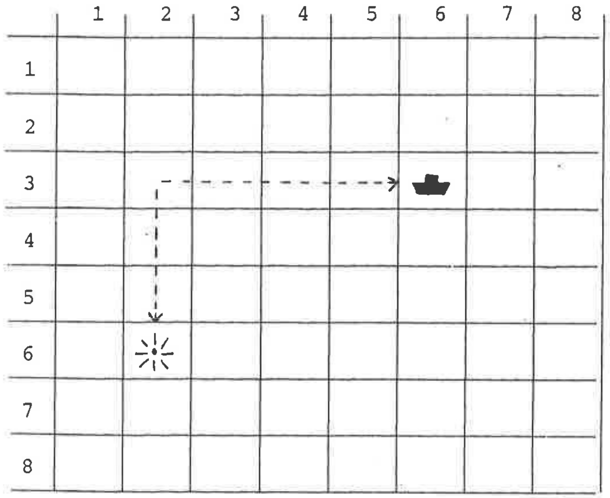
PROBLEMA 2º

Siendo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ una progresión aritmética de diferencia d, calcular la suma:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots \ldots \ldots \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

PROBLEMA 3º

En un casillero de 8 × 8 tu compañero sitúa un submarino () sin que tu lo veas. Vas lanzando cargas de profundidad, diciendo las coordenadas de la zona de disparo. Después de cada carga lanzada, el compañero te contesta con la distancia, medida en casillas horizontales y verticales, a la que se encuentra el submarino. Si la distancia es cero, contesta HUNDIDO. Por ejemplo, si el submarino está en la posición (3,6), y tu disparas a la zona (6,2), tu compañero dirá: distancia 7. Se pide describir una estrategia, o reglas para efectuar los disparos, que permita hundir el submarino con tres de ellos, como máximo.



PROBLEMA 4ª

¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila 7 chicas y 4 chicos de modo que no queden dos chicos juntos?

LA XXIV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS, PARIS, 1983

Tal como estaba previsto tuvo lugar en París durante los días seis y siete del pasado mes de julio este tradicional certamen entre alumnos no universitarios. Es la primera vez que España ha concurrido a él, presentando un equipo formado por cuatro alumnos del Curso de Orientación Universitaria, que, relacionados por el orden de clasificación obtenida en las pruebas, fueron los siguientes:

1. Roberto Selva (Alicante)
2. José Burillo (Tarragona)
3. Javier Diez (Burgos)
4. José Marañón (Huelva).

No existe en este concurso una clasificación oficial por países; pero extraoficialmente se sabe que la prueba fue ganada por la República Federal Alemana, ya que de los cuatro candidatos que alcanzaron la puntuación máxima posible, tres pertenecían a ella. El segundo puesto fue para los Estados Unidos de América. A nuestros representantes les correspondería el puesto 23, entre los 32 países participantes, actuación que puede considerarse como discreta, si se tienen en cuenta los siguientes condicionamientos:

a) Cada uno del resto de los países presentaba seis concursantes.

b) La falta de adecuación de los programas del bachillerato español con los temas propuestos en las pruebas.

c) La imposibilidad de efectuar, por parte del equipo español, una preparación previa, antes de la prueba, por estar obligados a superar en fechas inmediatas los exámenes de Selectividad, en tanto que para los demás países el hecho de tener la condición de olímpico lleva implícito el libre acceso a cualquier Universidad de la nación, en calidad de becario.

Es obligado consignar la cordial acogida dispensada a la Delegación Española, tanto por parte del país anfitrión (Francia), cuanto por el resto de las delegaciones participantes.

La próxima Olimpiada (XXV, 1984), tendrá lugar en Checoslovaquia. La delegación española fue amablemente invitada por la checa para enviar una representación.

A continuación se transcriben los enunciados de los problemas propuestos. Esperamos recibir soluciones a los mismos para su publicación en próximos números del Boletín.

PRIMER DIA: MIERCOLES 6 DE JULIO
TIEMPO : 4 h 30 m

CADA EJERCICIO VALE 7 PUNTOS

1. Hallar todas las funciones f, definidas en el conjunto de los números reales estrictamente positivos, que toman valores reales estrictamente positivos y que satisfacen las condiciones

   (i) $f(xf(y)) = yf(x)$ para $x,y > 0$,

   y

   (ii) $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$

2. En un plano hay dos circunferencias secantes C_1 y C_2 de radios distintos y centros O_1 y O_2, respectivamente. Una de las tangentes comunes a las dos circunferencias toca a C_1 en P_1 y a C_2 en P_2, mientras que la otra toca a C_1 en Q_1 y a C_2 en Q_2.

Sea M_1 el punto medio de P_1Q_1 y M_2 el punto medio de P_2Q_2. Demuestre que los ángulos O_1AO_2 y M_1AM_2 son iguales. A pertenece a las dos circunferencias.

3. Dados los enteros estrictamente positivos a, b y c que son primos entre sí, dos a dos; demostrar que:

$$2abc - ab - bc - ca$$

es el mayor número entero que no puede expresarse en la forma

$$xbc + yca + zab$$

con x, y, z enteros positivos o nulos.

SEGUNDO DIA: JUEVES 7 DE JULIO
TIEMPO : 4 h 30 m

CADA EJERCICIO VALE 7 PUNTOS

4. Sea ABC un triángulo equilátero y E el conjunto de los puntos de los segmentos AB, BC y CA (que incluyen a A, B y C). ¿Será cierto que en toda partición de E en dos subconjuntos disjuntos existe al menos un triángulo rectángulo cuyos tres vértices pertenecen al mismo subconjunto?

   Justifique su respuesta.

5. ¿Podrán encontrarse 1983 números enteros estrictamente positivos y distintos, menores o iguales que 10^5 tales que tres cualesquiera de ellos no sean términos consecutivos de una progresión aritmética?

   Justifique su respuesta.

6. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

Determinar cuando se cumple la igualdad.

CRONICA DEL SEMINARIO PERMANENTE DE MATEMATICAS DE INSPECTORES DE BACHILLERATO

Como viene siendo habitual, en los últimos cursos, en la semana del 16 al 20 de mayo, los Inspectores de Bachillerato de Matemáticas se reunieron en la Universidad de Verano de Extremadura, que se encuentra ubicada en Jarandilla de la Vera, provincia de Cáceres. En tales locales, no sólo se celebraron las sesiones ordinarias de trabajo, sino también recibieron alojamiento los 21 inspectores asistentes.

Se dedicaron cinco sesiones a los siguientes temas monográficos:

1. Innovación didáctica en los Seminarios de Matemáticas.
2. Aportaciones del Seminario Didáctico a la acción tutorial.

OBJETIVOS

1) Obtener información de los Seminarios Didácticos sobre los siguientes puntos:

Innovación didáctica en los Seminarios de Matemáticas

- Experiencias ya concluídas o en curso.
- Grupos de innovación didáctica que hay en el Distrito.

- Pertenencia de los miembros del Seminario a esos grupos.
- Actividades interdisciplinares.
- Recursos didácticos innovadores (utilización de material), medios audiovisuales, actividades extraescolares, motivaciones, actividades creativas, etc.).

Aportaciones del Seminario didáctico a la acción tutorial

- Diagnóstico y clasificación de dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas.
- Fijación de medidas de ayuda y recuperación de alumnos. Organización de la recuperación de alumnos con las matemáticas pendientes en cursos anteriores.
- Criterios del Seminario sobre "tareas para casa".
- Aportación del Seminario Didáctico en la exploración inicial de los alumnos.

2) Alentar las experiencias de este tipo que se realicen y asesorar y animar la iniciativa de otras nuevas.

3) Implicar a los Seminarios Didácticos en la acción tutorial, como órganos colaboradores del tutor en el suministro de información sobre los puntos indicados.

En otras cinco sesiones de trabajo se trataron y analizaron los temas:

- Algunos problemas lógicos y de lenguaje en la enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato, Por D. Antonio Luis Rodríguez López-Cañizares.

- Documentación audiovisual de las III Jornadas sobre enseñanza y aprendizaje de la Matemática, por D. Guillermo Dorda Abaúnza.
- Microexperiencia para determinar la incidencia de determinados factores en el éxito/fracaso de los alumnos, por D$^{\underline{a}}$. M$^{\underline{a}}$ Dolores de Prada Vicente.
- Desarrollo de los programas de C.O.U. en los distintos Distritos Universitarios.
- Presentación de trabajos y experiencias realizadas en los Distritos de Valencia, La Laguna, Murcia, Sevilla, etc.

D. Carlos Benítez Rodríguez, Catedrático de Análisis I y II de la Universidad de Extremadura expuso en una lección una interesante introducción a la Teoría de la aproximación, y D. Jesús Muñoz Díaz, Catedrático de Análisis IV y V de la Universidad de Salamanca en dos sesiones expuso el tema "Superficies de Riemann y variedades de Jacobi".

Tan apretadas jornadas de trabajo no impidieron al Coordinador del Seminario -Inspector de Matemáticas en Cáceres- organizar visitas a la Central Nuclear de Almaraz, a una fábrica de pequeña maquinaria de precisión radicada en Navalmoral de la Mata, Al Monasterio de Yuste y a la Catedral y ciudad de Plasencia.

A la clausura del Seminario Permanente asistió el Sr. Director del I.C.E. de la Universidad de Extremadura.

Junio 1983.

***
*****

- 2. ESTUDIOS Y DOCUMENTOS -

JUEGOS MATEMATICOS

Por Miguel de Guzmán
División de Matemáticas. U.A. de Madrid

Un buen juego matemático puede enseñar más matemáticas que muchas páginas de un libro de texto. Por muchas razones. El juego atrae la atención, estimula la actividad propia, y, si su contenido matemático es adecuado, puede proporcionar la motivación que despierte el apetito matemático, de la que muchos libros de texto carecen tan llamativamente.

Leibniz, en una de sus cartas (29 de julio de 1715), carta a De Montmort) escribe: *"Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos; el espíritu se encuentra ahí a sus anchas... sería deseable que se dispusiera de un curso entero de juegos tratados matemáticamente"*.

La exploración racional de la naturaleza ha sido, por supuesto, la primera gran fuente de inspiración de la creación matemática más sana. Debe seguir siéndolo y sin duda que lo será por siempre. La exploración de los juegos ha sido y será también una fuente importante de inspiración. La teoría de la probabilidad nació en las cartas de Pascal a un jugador empedernido, el caballero de Meré, la topología nació con el problema de los puentes de Königsberg, un acertijo de los que corren de boca en boca en una ciudad, el problema de los cuatro colores ha estimulado por más de un siglo la teoría de grafos, la topología, el acercamiento de los computadores a los problemas de la matemática pura... ¿Se puede señalar una clara línea divisoria entre juego matemático y matemática seria e importante?

Muchos de los que nos ocupamos de la transmisión a los más jóvenes del conocimiento matemático estamos preocupados por la ineficacia de nuestros métodos actuales, por la inadecua ción de nuestros libros de texto, por la pasividad de nuestros alumnos, por la incultura matemática de nuestro entorno, por la indiferencia o negativa predisposición tan generalizada en nuestra sociedad hacia el pensamiento matemático, incluso en los estratos que se consideran más cultos.

A mi parecer es necesario movilizar muchos mecanismos diferentes para salir de esta situación, pero uno de ellos, en mi opinión atrayente y poderoso, debe consistir en el fomento del espíritu lúdico de las matemáticas.

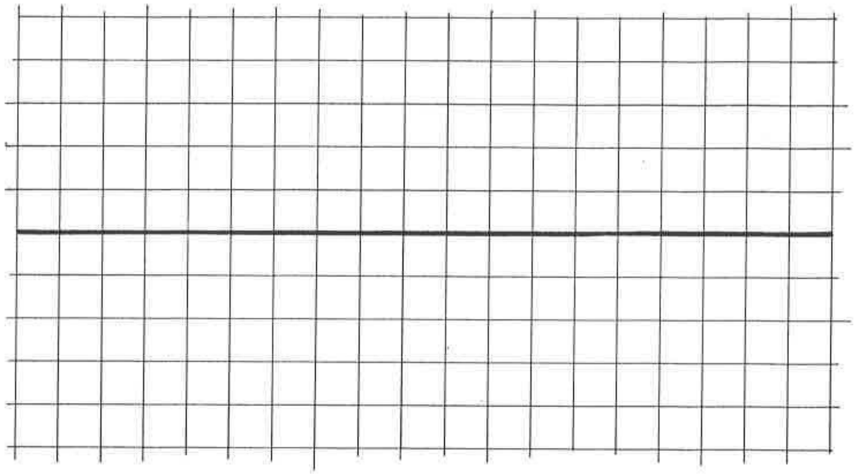
En febrero de 1983 tuve la oportunidad de dirigir un cursillo sumamente agradable para mí sobre aplicaciones didácticas de los juegos matemáticos, en el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Madrid. Espigando un poco en la literatura me convencí más y más de las grandes posibilidades de explotar en nuestra enseñanza estos aspectos educativos de los juegos.

A continuación ofrezco uno de los pequeños ensayos expuestos en el curso. Espero que resulte entretenido y útil.

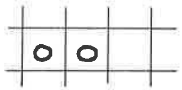
* * * * * * * * *

LA RANA SALTARINA

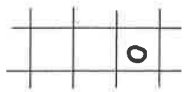
Tal vez conozcas el juego de la RANA SALTARINA. Si no es así, tanto mejor. Para jugarlo puedes hacerte en un papel bien grande una cuadrícula de cuadros grandes en los que quepa una peseta. En la cuadrícula señalarás una línea horizontal gruesa a cinco cuadros de la línea horizontal superior. Algo así:



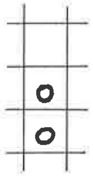
El juego consiste en lo siguiente. Colocas al principio un número de pesetas, el que quieras, distribuídas como te parezca mejor, cada una en algún cuadro de los de debajo de la raya gorda. Una vez colocadas vas a empezar a mover y retirar pesetas del tablero. Se pueden mover sólo horizontalmente (a derecha e izquierda) y verticalmente (hacia arriba) saltando por encima de otra contigua siempre que el cuadro al que se salta esté vacío, comiendo (retirando) la moneda sobre la que se ha saltado. Por ejemplo, de esta situación



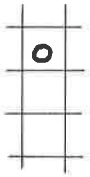
se puede pasar a esta otra



o de ésta

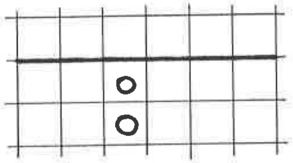


a esta otra



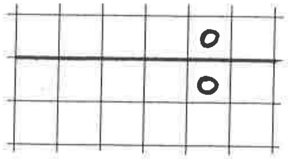
Se trata de colocar al principio las fichas o monedas debajo de la raya de modo que logres colocar una moneda con los movimientos permitidos lo más alto posible por encima de la raya gorda. Cuando hayas practicado un poco puedes tratar de hacerlo con el mínimo número de monedas.

Por ejemplo, para llegar a la fila primera por encima de la raya gruesa es claro que con una sola moneda no lo consigues (no te permite ningún movimiento) pero con dos colocadas así

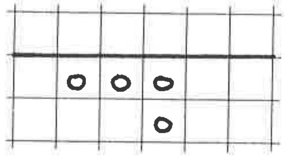


sí que lo puedes hacer. El mínimo número suficiente de monedas para colocar una en la primera fila de arriba es 2. Ponte a trabajar. ¿Cómo llegar a la fila 2? ¿Cuál será el número mínimo? ¿Y a la fila 3, 4, etc...? No quiero quitarte el gusto de hallarlo por tí mismo. Cierra y sólo después de un rato de jugar vuelve conmigo.

Pronto habrás descubierto que para poner una peseta en la fila 2 tienes que llegar a esta situación:

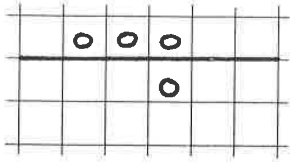


Para llegar a ella te es suficiente colocar cuatro fichas en esta situación

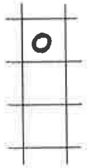


Es fácil ver que con tres no puedes llegar a la segunda fila. PARA LLEGAR A LA FILA 2 EL NUMERO MINIMO SUFICIENTES ES 4.

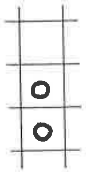
¿Y para la fila 3? La idea sería colocar inicialmente las fichas de modo que podamos llegar a la posición



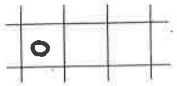
o a su simétrica, pues así ya sabemos que podemos subir dos filas más. ¿Cómo podemos hacerlo? Como las cosas se van complicando más, lo mejor es tratar de inventar un modo sistemático de proceder. Este puede ser uno bien razonable: JUGAR HACIA ATRAS. Es decir, nuestra rana se va a mover al segundo cuadro hacia abajo o al segundo cuadro hacia la derecha o izquierda poniendo una peseta en el cuadro inmediato de la misma dirección, suponiendo siempre que éste esté libre. Es decir, de esta situación:



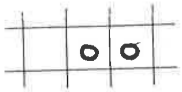
se puede pasar a esta



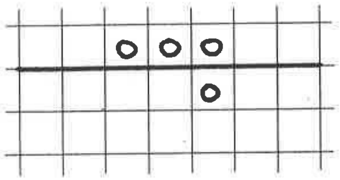
y de ésta



a esta

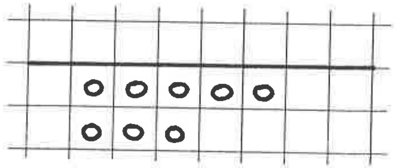


Mediante estos movimientos hemos de tratar de colocar las piezas que resultan de esta situación



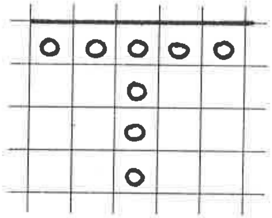
todas ellas por debajo de la línea gruesa.

Si pruebas un poco con este sistema verás que llegas enseguida a esta situación

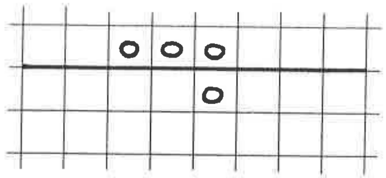


desde la que, jugando al derecho, pasas a la fila tercera. Son 8 monedas. ¿Puedes demostrar que no se puede hacer con menos?

Es curioso observar que a la tercera fila se puede llegar también a partir de la situación siguiente, también de ocho monedas



SIN NECESIDAD DE PASAR POR LA SITUACION INTERMEDIA CORRESPONDIENTE AL SALTO HACIA LA SEGUNDA FILA HACIA ARRIBA



y así, esta posición inicial en forma de T NO RESULTA POR EL PROCEDIMIENTO DE JUGAR AL REVES.

Resumamos nuestros hallazgos:

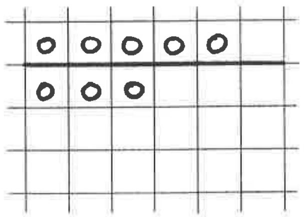
Para la fila 1, el número mínimo es 2.

Para la fila 2, el número mínimo es 2^2.

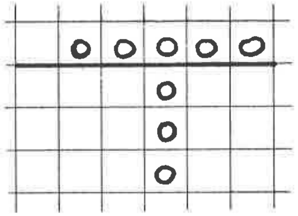
Para la fila 3, el número mínimo es 2^3.

Parece que se puede decir: Malo será que para la fila 4 no sea 2^4 el número mínimo, ¿no?

Pues por malo que parezca así sucede. Para llegar a la fila 4 será suficiente (no necesario, en principio, como hemos visto que sucedía con la fila 3) partir de una situación inicial de la cual podemos llegar a una de las posiciones



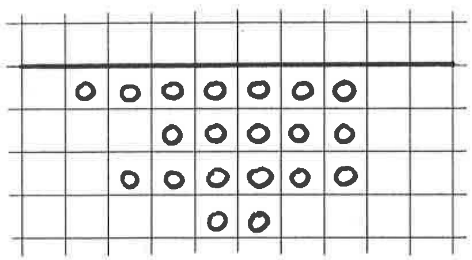
A



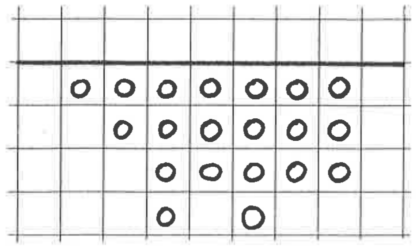
B

o, naturalmente, a la simétrica de la primera.

Jugando al revés y con cierto cuidado para no introducir fichas superfluas, verás que la situación A y la situación B te pueden llevar a la situación inicial siguiente:



Pero la situación A te puede llevar también, jugando al revés, a ésta



que es distinta de la anterior, pero ambas tienen 20 monedas. ¿Se podrá llegar con menos? ¿Por qué no lo intentas? ¿Y para la fila 5? Adelante. Verás que con menos de 20 monedas no logras llegar a la fila 4. Para la fila 4 el número mínimo es 20, lo que enseña que no hay que fiarse demasiado de inducciones prematuras.

¿Y para la fila 5? Ya no pisamos terreno firme para hacer una conjetura.

Pues bien, aunque parezca sorprendente, A LA FILA 5 NO SE PUEDE LLEGAR CON NINGUN NUMERO DE FICHAS, COLOQUENSE DONDE SE QUIERAN COLOCAR.

La demostración siguiente se debe a John Conway, de Cambridge. Tomamos el número positivo w, tal que $w^2 + w = 1$. Misterioso ¿no? Pues resulta que, para mayor desconcierto, w es el inverso del número áureo $\phi > 0$, tal que

$$\frac{\phi}{1} = \frac{\phi+1}{\phi}$$

Ponemos en cada casilla de nuestro tablero indefinidamente prolongado hacia abajo y a la derecha e izquierda una potencia de w tal como te indico en la figura siguiente:

	.	.	.	w^4	w^3	w^2	w	1	w	w^2	w^3	w^4	.	.	.	
	.	.	.	w^5	w^4	w^3	w^2	w^1	w^2	w^3	w^4	w^5	.	.	.	
	.	.	.	w^6	w^5	w^4	w^3	w^2	w^3	w^4	w^5	w^6	.	.	.	
	.	.	.	w^7	w^6	w^5	w^4	w^3	w^4	w^5	w^6	w^7	.	.	.	
	.	.	.	w^8	w^7	w^6	w^5	w^4	w^5	w^6	w^7	w^8	.	.	.	
	.	.	.	w^9	w^8	w^7	w^6	w^5	w^6	w^7	w^8	w^9	.	.	.	
	.	.	.	w^{10}	w^9	w^8	w^7	w^6	w^7	w^8	w^9	w^{10}	.	.	.	
	.	.	.	w^{11}	w^{10}	w^9	w^8	w^7	w^8	w^9	w^{10}	w^{11}	.	.	.	
	.	.	.	w^{12}	w^{11}	w^{10}	w^9	w^8	w^9	w^{10}	w^{11}	w^{12}	.	.	.	
	.	.	.	w^{13}	w^{12}	w^{11}	w^{10}	w^9	w^{10}	w^{11}	w^{12}	w^{13}	.	.	.	
	.															

Observa ahora los dos hechos siguientes:

(a) LA SUMA DE TODOS LOS NUMEROS QUE FIGURAN BAJO EL EJE ES

$$S = (w^5 + w^6 + w^7 + \dots) + 2(w^6 + w^7 + \dots) +$$

$$+ 2(w^7 + w^8 + w^9 + \dots) + \dots =$$

$$= \frac{w^5}{1-w} + 2\,\frac{w^6}{1-w} + 2\,\frac{w^7}{1-w} + \dots$$

y como $1 - w = w^2$, resulta

$$S = w^3 + 2w^4 + 2w^5 + \dots =$$

$$= (w^3 + w^4 + w^5 + \dots) + (w^4 + w^5 + w^6 + \dots) =$$

$$= \frac{w^3}{1-w} + \frac{w^4}{1-w} = w + w^2 = 1$$

$$\boxed{S = 1}$$

Así, LA SUMA DE LOS NUMEROS CORRESPONDIENTES A UN NUMERO FINITO DE CASILLAS ES ESTRICTAMENTE MENOR QUE 1.

(b) Interpretemos ahora nuestros movimientos permitidos con las pesetas en relación con estos números del modo siguiente. Sumamos los números correspondientes a casillas del tablero ocupadas por pesetas antes y después de un movimiento. Por ejemplo

w^8	w^7	w^6

ANTES

$w^8 + w^7$

w^8	w^7	w^6

DESPUES

w^6

$$w^8 + w^7 = w^6$$

Otro caso

w^{10}	w^9	w^8

ANTES

w^{10}	w^9	w^8

DESPUES

$$w^9 + w^8 = w^7 > w^{10}$$

Este hecho, como fácilmente percibirás, es general, es decir, LA SUMA CORRESPONDIENTE A CASILLAS OCUPADAS ES LA MISMA O MENOR A LO LARGO DE TODOS NUESTROS POSIBLES MOVIMIENTOS.

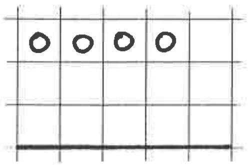
Ahora bien, la suma correspondiente a casillas ocupadas al comenzar el juego (un número finito de casillas ocupadas) es, como hemos visto, menor que 1. Si con nuestros movimientos lográsemos llegar a la quinta fila, colocando nuestro 1 en ese cuadro de la quinta fila que se alcanza, resulta que la suma correspondiente a casillas ocupadas al final sería mayor o igual que 1, lo cual es imposible.

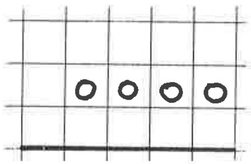
La idea de Conway es muy ingeniosa. ¿Por qué no tratas de explotarla para aclarar algunas de las preguntas que han quedado colgando? Un poco de álgebra te ayudará.

1) Demuestra que efectivamente el número mínimo de fichas para llegar a la fila 3 es 8 y para la fila 4 es 20. Esto último no es fácil.

2) Demuestra si las únicas posiciones iniciales para llegar a la fila 3 y 4 son las señaladas y sus simétricas.

3) Plantéate otros problemas semejantes, como por ejemplo si se puede, y cómo, llegar a las situaciones





Y te pediría que me escribas si tienes alguna idea sugerente sobre todo este lío. Gracias.

MASCHERONI Y LA GEOMETRIA DEL COMPAS

Por José Javier Etayo
Catedrático de Geometría. U. Complutense

He tenido recientemente el placer de recibir en amable préstamo uno de esos libros que nos seducen desde el principio, no sé si por su tema, su antigüedad, su expresión, su impresión, o por todo ello junto. Se trata de la segunda edición de la Geometría del compás de L. Mascheroni. La primera había aparecido en Pavía en 1798 y ésta segunda, Géométrie du compas, es la traducción al francés hecha por A.M. Carette y publicada en 1828, en París, por la editorial Bachelier, sucesora de Courcier, quai des Augustins, 55. Sospecho que, a su vez, le sucede la conocida Gauthier-Villars, que tiene la misma dirección e incluso una marca similar, con las letras G.V. entrelazadas y orladas de laurel, en lugar de las E.B. de la editorial anterior.

Este libro puede resultar una delicia para quienes no han perdido el gusto por la geometría gráfica, por el discurrir a través de las construcciones, todo un cuerpo de doctrina cada vez más abandonado en nuestros estudios; tristemente abandonado, no por la pérdida que suponga el desconocimiento de todas las soluciones de este tipo, algunas verdaderamente artificiosas, sino del modo de educar la imaginación, componente tan importante en la formación de matemático.

Se propone el autor desarrollar sólo con el compás la geometría de la regla y el compás. "*J'ai voulu* -dice textualmente- *démontrer qu'on peut trouver avec le compas seul tous les points qu'Euclide et les autres auteurs de Géométrie élémentaire, enseignent à trouver avec les secours de la règle et du compas réunis*". Puesto que sólo se ha de utilizar el compás, se entiende que dar una recta, por ejemplo, es dar dos puntos distintos de ella y cuando se pide encontrar una recta, basta también con encontrar dos puntos que la determinen. Asimismo un ángulo equivale a tres puntos, el vértice y un punto en cada lado; en un polígono, se trata de encontrar los puntos que bastan para determinar en magnitud y posición los segmentos que habría que trazar para construirlo enteramente. En cambio, una circunferencia, o un arco de ella, puede ser dada por su mismo dibujo; o también por tres puntos no alineados, con lo cual el problema es distinto y, por supuesto, más difícil. En resumen, ni en los datos ni en la construcción se puede dibujar una recta; no hay, en cambio, inconveniente en utilizarlas en la demostración posterior de que la solución encontrada es correcta.

Está dividido el libro en doce capítulos que adoptan la forma de colecciones de problemas, para cada uno de los cuales se da su solución o soluciones y la correspondiente demostración de la bondad de esa solución. Así, sólo con el compás, construye polígonos regulares inscritos o circunscritos en una circunferencia; busca intersecciones de rectas o de una recta con un arco; encuentra raíces cuadradas de números; duplica, o multiplica en general, las áreas de cuadrados, círculos y otras figuras regulares, así como los segmentos y los ángulos; divide también éstos en partes iguales y halla las líneas trigonométricas de un arco y su problema inverso; construye figuras semejantes dada la razón de las áreas; determina rectas paralelas o perpendiculares a otras; halla las terceras, cuartas y medias proporcionales; y encuentra, por aproximación, un segmento de longitud la de una circunferencia, o un cuadrado igual a un círculo o un círculo igual a un cuadrado, o un cubo igual a una esfera, o un cubo doble, triple o cuádruple de otro.

Vale la pena que nos detengamos en estos últimos que él llama "Problemas resueltos por aproximación". Son aquellos problemas no resolubles por regla y compás y para los cuales encuentra una solución aproximada con una cota de error francamente buena. En la duplicación del cubo, por ejemplo, el error es menor de 0,0007. El problema de la cuadratura del círculo, hallar el lado de un cuadrado "aproximadamente" igual a un círculo de radio dado, lo obtiene con error de 0,002. Y resuelve también, con error de 0,0002, el inverso, es decir el de obtener el radio de un círculo de área aproximadamente igual a la de un cuadrado de lado dado. No puedo evitar, al hablar de esto, que se me venga a las mientes aquella anécdota atribuída a D. Miguel Vegas quien, para quitarse de encima a los falsos cuadradores del círculo que le molestaban con sus insistencias, había acuñado una respuesta que los paraba en seco: *"Mire Vd., ése es un problema por el que ya no estamos interesados; ahora el que nos preocupa es el de la circulatura del cuadrado"*.

No sólo esta "circulatura", sino que también encontramos aquí, como se ha dicho, la construcción del lado de un cubo de volumen aproximadamente igual al de una esfera de radio dado, o al revés. Todo esto, naturalmente, antes de que se demostrase la transcendencia de pi que aseguraba la imposibilidad de resolver estos problemas con exactitud y siendo por tanto todavía problemas abiertos. Qué contraste el de esta finura que busca sólo la solución aproximada cuando aún no se sabía si existía la exacta, con la torpeza de los que hoy pretenden haber encontrado la solución exacta cuando se sabe ya que no existe.

Los otros problemas griegos no están considerados , pues bien se biseca un ángulo en dos ángulos iguales, no se toca, ni aún aproximadamente, el problema de trisecarlo. Igualmente se divide una circunferencia en un cierto número de partes iguales, dos, cuatro, cinco, etc., pero no en siete; precisamente en uno de los problemas se pide circunscribir con el compás en una circunferencia uno cualquiera de los polígonos regulares "que se pueden inscribir con la regla y el compás", admitiendo ya sin duda la imposibilidad de algunos, como el eptágono.

Como puede apreciarse, el estilo de la obra está estrechamente vinculado al espíritu de su tiempo, un tiempo en que la especialización está apenas iniciándose y la curiosidad del hombre culto sigue siendo universal. Porque, junto a éste, los restantes trabajos que se citan de Mascheroni se refieren ya al equilibrio de las bóvedas, ya al cálculo diferencial de Euler o, incluso, a poemas y versos de gran mérito. No hay que olvidar que Mascheroni, que había nacido en Bérgamo en 1750, emprendió en un principio la carrera literaria, abrazando el estado eclesiástico, y fue profesor de griego hasta los 27 años. A semejanza de su contemporáneo turinés Lagrange, fue también la lectura de un libro de matemáticas lo que le indujo a emprender un nuevo camino. Ocupó entonces la cátedra de Geometría de su ciudad natal y poco más tarde fue nombrado profesor de Geometría y Algebra de la Universidad de Pavía. En 1798 fué enviado a París por el gobierno italiano y estuvo adscrito, también como Lagrange, a la comisión que redactó el nuevo sistema de pesas y medidas. Allí murió dos años más tarde, a sus 50 años de edad, sin haber podido volver a su patria por causa de la guerra.

Fue ésta, sin embargo, la que le hizo conocido en Francia antes de su llegada. La elaboración de su Geometría del compás coincidió, en efecto, con los últimos momentos de la estancia de Bonaparte en Italia, y con él sostuvo, al parecer, abundantes conversaciones y discusiones sobre el tema. Cuando Napoleón regresó a Francia, firmada la paz de Campo-Formio, comunicó a algunos de los matemáticos con los que estaba relacionado, en particular Lagrange y Laplace, noticias de aquel trabajo y de la solución de algunos problemas. Se cuenta que Laplace, que había sido su profesor de Matemáticas en la Escuela de Brienne, le dijo: *"Lo esperábamos todo de vos, general, excepto lecciones de Matemáticas"*.

Justamente se conoce todavía como "problema de Napoleón" uno que al parecer fue resuelto por él después de que se le había resistido al mismo Laplace. No puedo asegurar la validez de esta anécdota pero voy a terminar con él esta pequeña no

ta, para que sirva de ilustración al contenido de la obra comentada. Al tiempo invito al lector curioso e interesado a que construya la figura que aquí se va a ir describiendo y demuestre después que la solución encontrada es correcta.

El enunciado del problema dice así: <u>Encontrar el centro de una circunferencia dada</u>. Y la construcción desarrollada en el libro de Mascheroni es la siguiente:

Llamemos <u>c</u> a esa circunferencia dada y tomemos en ella un punto A cualquiera. Con centro en A y un radio que sea menor que el diámetro de <u>c</u> y mayor que la cuarta parte de este mismo diámetro, se describe una circunferencia <u>c'</u> que corta a <u>c</u> en los puntos B y M. Sea E el punto de <u>c'</u> diametralmente opuesto a B (el cual puede determinarse con sólo el compás, como es bien conocido, sin más que llevar con él sobre <u>c'</u> los puntos C, D y E tales que AB = BC = CD = DE). Las construcciones que se hacen a continuación se sitúan siempre en el semiplano de arista BE que contiene a M. Tomando E y A como centros y EM como radio, se trazan dos arcos que se cortan en L. Con centro en este punto L y con el mismo radio LA se describe un arco que cortará a <u>c'</u> en dos puntos, y llamamos Q a aquel de los dos que está más cercano a B. Finalmente, con centros B y A y radio BQ se describen dos arcos que se cortan en O. Este punto O es el centro buscado.

MATEMATICAS ELECTORALES

Por José Colera Jiménez
ICE de la U.A.M.

La idea, unas veces explícita otras latente, de que las matemáticas se hallan desvinculadas de lo real limitándose a ser vanas y misteriosas especulaciones, es tan lamentable como frecuente.

"¿Cuánto gasta durante un mes una bombilla de 100 watios si está encendida durante 10 horas diarias, sabiendo que el kw hora cuesta 7 pesetas?" El chaval hace las cuentas, obtiene 210.000 pts y se queda tan fresco. El chico, por lo demás, es inteligente y sensato. Rechazaría ese resultado si se lo encontrara en su mundo doméstico. Pero en clase de matemáticas... ¡Sabe Dios lo que se puede obtener con las matemáticas. ...! El mundo de la enseñanza está plagado de anécdotas así.

Pero no sólo en el ámbito estudiantil encontramos tales disparates. En la prensa diaria no faltan ejemplos curiosos. Recordamos aquel que comentaba el profesor Etayo en la Revista de Bachillerato: En una recogida de sellos se decía el número de los que se recopilaron y el peso de la totalidad. Dividiendo, aparecía un resultado sorprendente: cada sello pesaba aproximadamente lo que una alcachofa.

Del mismo tipo es el error aparecido en el YA (30-III-80). En grandes titulares se nos decía que en el mundo se consumen ¡4 trillones de cigarrillos al año! Unas sencillas operaciones nos llevan a que consumimos más de 100.000 cigarrillos por persona (incluidos bebés) cada hora, sin descanso nocturno. La noticia añadía que la Organización Mundial para la Salud estaba preocupada por el hecho. No es para menos.

El mundo electoral, con sus grandes masas de datos, porcentajes, pronósticos, desviaciones sobre lo esperado,..., es especialmentel indicado para las especulaciones numéricas y, cómo no, campo adecuadísimo para achacar a las matemáticas, así, por las buenas, la culpa de cada resultado inesperado o inexplicable como recóndita consecuencia de los misterios matemáticos.

En el editorial de El País (25-V-82), que apareció tras las elecciones andaluzas, al comparar los resultados de cinco partidos, A, B, C, D, E, con los que obtuvieron esos mismos en las elecciones del 79, se nos dice: la abstención fue sensiblemente la misma; sumando las pérdidas de A, B y C y restando las ganancias de D, "el resultado se asemeja de manera sorprendente" a las ganancias de E. Es curioso que el autor se sorprenda, simplemente, de que las cuentas, sumas y restas, salgan.

En CAMBIO 16 (6-IX-82) se presentaban unos estudios en los que se demuestra que, si varios partidos pudieran sumar sus votos, el número de escaños que obtendrían superaría con mucho a los que sumarían por separado. Así, y dándole la vuelta al argumento, si UCD en las anteriores elecciones se hubiera fraccionado en tres, la suma de diputados obtenidos sería de treinta y tantos menos que los que se alcanzaron, con lo que hubiera sido superado por el PSOE, que a su vez habría mejorado en veinte escaños. Lo pintoresco del caso es que todo esto, según el editorial de la revista, "son misterios de las matemáticas belgas".

Veamos en qué consisten tales "misterios".

Hay dos circunscripciones, Ceuta y Melilla, que eligen un solo diputado. Se le asigna al partido vencedor. Si éste se parte, ninguno de sus fragmentos podrá ganar y el escaño se lo lleva otro.

Cuando en las circunscripciones hay más escaños, la cosa no es tan simple. Influye el efecto anterior (fragmentos

de partido suficientemente pequeños como para no poder competir). Pero también influye la desventaja que se le atribuye a los partidos minoritarios.

Las siguientes líneas son un resumen esquemático del proceso que he seguido con los alumnos de Bachillerato para que comprendan en qué consiste el método Hondt, por qué se puede decir que es un procedimiento razonable, y en qué sentido, a pesar de eso, favorece a los partidos mayoritarios.

Los escaños se reparten proporcionalmente a los votos obtenidos. Hay una mercancia que los distintos partidos desean adquirir en la mayor cantidad posible, los escaños; y un capital de que dispone cada partido, los votos obtenidos. Si el número total de votos es 500 y el número de escaños 5, parece razonable decir que el precio de cada escaño es 100 votos y que si un partido tiene 300 votos le corresponden 3 escaños.

Pero las cosas, ciertamente, no son tan simples. Veamos un primer ejemplo con los mismos 500 votos y 5 escaños.

PARTIDOS	Nº DE VOTOS	ESCAÑOS	SOBRAN VOTOS
A	340	3	40
B	160	1	60

Está claro que A se lleva 3 escaños y B uno. ¿Quién se lleva el 5º? Estamos tentados a decir que puesto que B puede pagar 60 votos exhibe más derechos que el A, con sólo 40.

Tal razonamiento se basa en una venta de escaños en dos fases: Primera fase - Precio fijo calculado a priori. Segunda fase - Asignación de escaños sobrantes al mejor postor. Este es el método del resto mayor.

Pero el partido A, astutamente, podría obrar así: En la primera fase no adquiere ningún escaño, esperando a que sal gan a la venta libre, a la que llegaría con su capital íntegro (340 votos). Puesto que B sólo puede adquirir un escaño en la 1ª fase, quedan 4. A está dispuesto a pagar 340:4 = 85 votos por cada uno. Evidentemente A puede adquirir los 4 escaños. Obsérvese que aunque B hubiera obrado tan astutamente como A, no hubiese podido competir para llevarse un escaño más, pues 160:2= 80 es menos de lo que pudo pagar A.

Naturalmente, no es necesario que los partidos anden participando en una y otra fase. Directamente se les asignan a cada uno tantos escaños como le corresponderían si todos ellos siguieran una estrategia óptima. Es el método del mayor cociente.

	VOTOS	2	3	4	5
A	340	170	113	85	68
B	160	80	53	40	32

En el cuadro resumen aparecen los precios que, en el supuesto anterior, podrían pagar los partidos A y B por 1, 2, ..., 5 escaños respectivamente. Obsérvese que los 5 escaños se asignan a: A, A, B, A, A, en ese orden, según los cocientes obtenidos. Véase, también, que si hubiera 6 escaños en vez de 5, el 6ª iría a parar al partido B que tiene más derecho a adquirir un 2ª escaño (160:2 = 80) que el A a adquirir el 5ª (340: 5 = 68).

De esta forma hemos obtenido la regla Hondt para la asignación de diputados. Véamosla para un supuesto menos simple que el anterior: repartir 1000 votos entre 4 partidos que compiten por 10 escaños. El precio medio del escaño es, pues, 100 votos.

	VOTOS	2	3	4	5	6
A	450	225	150	112	90	75
B	240	120	80			
C	165	82				
D	145	72				

La asignación de escaños es A, B, A, C, A, D, B, A, A, C. Si hubiera dos escaños más, se asignarían a B y a A.

¿Es desventajoso este método para los partidos pequeños? La pregunta, en principio es ambigua. Maticemos algunos términos para poderla responder.

Supongamos que el capital en votos de cada partido es un mérito incuestionable y, por consiguiente, que si la asignación de escaños fuese exactamente proporcional a los votos, el método sería perfecto. La imperfección proviene, pues, de que a unos partidos le salen los escaños más caros que a otros. Podemos repetir la pregunta, ahora, en términos más precisos: ¿Le salen los escaños más caros a los partidos cuántos menos votos tienen? La respuesta es negativa. No hay más que ver en el cuadro anterior que al partido C le sale el escaño a 82 votos, más barato que al A (90) y que al B (120).

¿Es, pues, completamente errónea tal creencia? No. Veámoslo.

Pongámonos en un nuevo supuesto en el cual sólo fijaremos el precio medio del escaño: 100 votos. Tenemos varios partidos. Prestamos atención a 2 de ellos: uno fuerte, A, que sacará un mínimo de 1000 votos y 10 escaños, y otro flojo, B, que obtendrá un mínimo de 200 votos y 2 escaños. El precio es para ambos 100 votos por escaño.

Supongamos, ahora, que ambos aumentan en 50 el número de votos. Tendrán 1050 y 250 votos. Mantienen los mismos escaños que antes pero los precios son, ahora, 105 y 125 votos, respectivamente. Es fácil ver que lo máximo que puede costarle un escaño al partido A es 110 votos, mientras que el partido B puede llegar a pagar casi 150 votos por sus escaños. Por tanto, es más probable que al partido B le salga el escaño más caro que al partido A.

Conclusiones

1. El método Hondt se aproxima en lo posible a la proporcionalidad (en cada circunscripción).

2. Los escaños se reparten como si los partidos pujaran con sus votos para conseguir, a precio uniforme, el mayor número de escaños.

3. Es más probable que a los partidos les cuesten los escaños tanto más caros cuanto más pequeños son.

4. En cualquier caso, las matemáticas (incluídas las belgas) son absolutamente inocentes.

GEOMETRIA DEL TABLERO DE AJEDREZ

Por Joaquín Gómez Rey
Catedrático de Matemáticas, I.B. de Tomelloso (Ciudad Real)

Para el rey, el camino más corto entre dos puntos (casillas), no es sólo la línea recta, sino que hay más. Estas distintas posibilidades de caminar el rey son parte de la estrategia del ajedrecista.

EJERCICIO

Calcular el número de caminos que puede recorrer el rey, para ir en 7 tiempos (movimientos), desde la casilla:

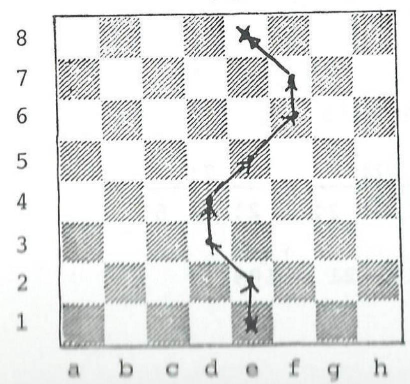
I) e1 hasta la e8

II) f1 hasta la g8.

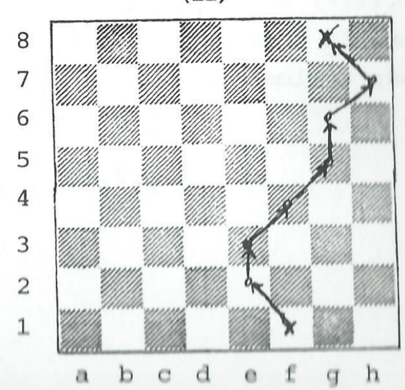
Solución.- Como el recorrido se ha de efectuar en 7 tiempos, en cada uno de ellos el rey tiene a lo más 3 alternativas: De frente (f), en diagonal hacia el frente derecha (d), o izquierda (i), respectivamente.

Ejemplos.-

(I)



(II)



I) Como $f+d+i = 7$ y $d=i$, los casos posibles son:

1. $f=7$, $d=i=0$, que son $PR_7^{7,0,0} = \dfrac{7!}{7!\ 0!\ 7!} = 1$

2. $f=5$, $d=i=1$, que son $PR_7^{5,1,1} = \dfrac{7!}{5!\ 1!\ 1!} = 42$

3. $f=3$, $d=i=2$, que son $PR_7^{3,2,2} = \dfrac{7!}{3!\ 2!\ 2!} = 210$

y

4. $f=1$, $d=i=3$, que son $PR_7^{1,3,3} = \dfrac{7!}{1!\ 3!\ 3!} = 140$

$$\text{Total} = 1+42+210+140 = 393$$

II) Similar al anterior, pero teniendo en cuenta que ahora hay caminos que se salen del tablero.

Como $f+d+i = 7$ y $d=i+1$, los casos posibles son:

1. $f=6$, $d=1$, $i=0$, que son $PR_7^{6,1,0} = \dfrac{7!}{6!\ 1!\ 0!} = 7$

2. $f=4$, $d=2$, $i=1$, que son $PR_7^{4,2,1} = \dfrac{7!}{4!\ 2!\ 1!} = 105$

3. $f=2$, $d=3$, $i=2$, que son

$$PR_7^{2,3,2} - PR_7^{2,0,5} = \frac{7!}{2!\ 3!\ 2!} - \frac{7!}{2!\ 0!\ 5!} =$$

$$= 210 - 21 = 189$$

y

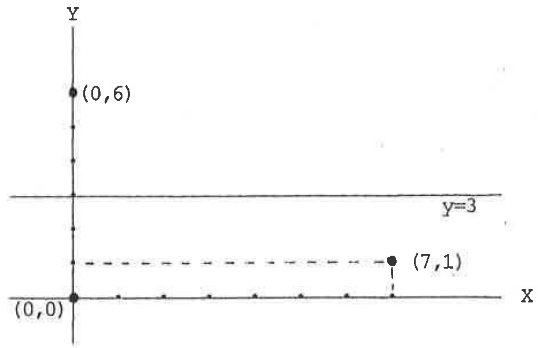
4) $f=0$, $d=4$, $i=3$, que son

$$PR_7^{0,4,3} - PR_7^{0,1,6} = \frac{7!}{0!\ 4!\ 3!} - \frac{7!}{0!\ 1!\ 6!} =$$

$$= 35 - 7 = 28$$

$$\text{Total} = 7+105+189+28 = 329$$

En los casos 3. y 4., representando los movimientos del rey sobre unos ejes coordenados en el plano, tomando como abscisa la suma $f+d+i$, y como ordenada la diferencia $d-i$, tenemos



Todos los caminos parten de (0,0) y llegan a (7,1), y hay que excluir todos aquellos que corten a la recta $y=3$, que por el principio de reflexión es igual al número de caminos que parten de (0,6) y llegan a (7,1).

REFLEXION EN TORNO A UN PROBLEMA DE CONCURSO

Por José R. Pascual Ibarra

Se reconoce unánimemente el papel preponderante que, en una didáctica activa de la matemática, le corresponde al planteo y resolución de problemas. Pero esta actividad, tal vez en demasiadas ocasiones, se limita a proponer a los alumnos la resolución de algunos de los numerosos ejercicios -pocos auténticos problemas- contenidos en el libro de texto -seguramente elegido por este sólo motivo-, después de explicada la lección correspondiente, creyendo así de buena fe que el alumno afianzará sus conocimientos teóricos supuestamente adquiridos, y con la pretensión de su adiestramiento en el manejo de fórmulas o en determinadas técnicas de cálculo. ¡La tradicional división en clases teóricas y en clases prácticas! Esta manera exclusiva de proceder puede ser contraría a la eficacia deseada en relación con un auténtico aprendizaje. Ocurre, en efecto, que el hecho de obligar a los alumnos a la resolución de un buen número de ejercicios repetitivos y rutinarios puede ser motivo de cansancio y aburrimiento, constituyendo por ello otro factor más del fracaso de nuestra enseñanza.

Recuerdo a este respecto el ingenuo lamento de una entusiasta profesora cuando, ante el poco éxito logrado por sus alumnas en una de las pruebas de los desaparecidos exámenes de grado del antiguo bachillerato, me decía: *no puede usted darse idea de la cantidad de ejercicios que hemos hecho durante todo el curso; de cómo han trabajado las muchachas*". Pero éste -el que les salió en el examen-, éste no lo habían estudiado, ¿verdad?, le pregunté. *Este, no; éste no lo habíamos visto*, me *repuso*. Las alumnas, evidentemente, no habían trabajado bien, no habían adquirido la capacidad de saber, ésto es, la capacidad de hacer, de reaccionar con acierto ante una situación nueva, quizá inesperada, objetivo esencial de la educación matemática

-de la educación sin adjetivos-, y más aún hoy en la sociedad cambiante a ritmo acelerado en que nos ha tocado vivir.

No puede reducirse, por tanto, la labor del profesor a explicar su lección teórica, con claridad y precisión por supuesto, y completarla con algún ejercicio de tipo práctico. Por el contrario, tarea primordial suya, que ha de ocupar buena parte de su tiempo (y no sería malo que la Administración tomara conciencia de ello a la hora de fijar los horarios de trabajo), debería ser la búsqueda de buenos y verdaderos problemas estimulantes, de auténticas situaciones activas de aprendizaje, naturalmente adecuadas a las posibilidades reales de los alumnos. Problemas y situaciones que, a manera de centros de interés, despierten en ellos la imaginación creadora, potencien las facultades de observación y percepción de la realidad concreta -"*Mirar y ver*", como titula su libro el profesor Guzmán-, adquieran el hábito de la crítica razonada -autocrítica- para poder reconocer y corregir los errores inevitables que implica el aprendizaje, y, sobre todo, que les estimule a un trabajo esforzado y tenaz ... porque siempre "las ideas felices llegan al final". Trabajo que quizá sea duro, pero no penoso, compensado ampliamente por la noble alegría proporcionada por el éxigo logrado, factor imprescindible para el afianzamiento de la personalidad.

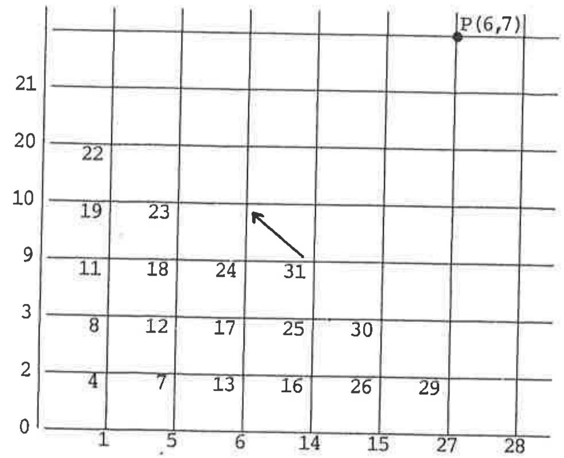
A esta actividad de creación en libertad se opone en buena medida la nefasta costumbre de exigir de todos los alumnos -tan diversos- la resolución de un cierto número de ejercicios o problemas, por lo demás bien escogidos, en un tiempo limitado, tanto peor si con este procedimiento se trata de otorgar una calificación definitiva de su aprovechamiento y de su saber. El hecho de llegar a la solución de un problema, o de varios, en período casi siempre escaso de tiempo puede ser un expediente válido para calificar de bueno a un alumno; pero quizá no sea motivo suficiente para descalificar al que no lo haya logrado.

Un buen problema es aquel que supone para el alumno, más que un quehacer impuesto, un desafío a su capacidad de iniciativa. Su resolución requerirá muchas veces más tiempo que el de una sesión de clase. Debe incitarle a un trabajo personal -sin desdeñar el interés del trabajo en grupo para contrastar opiniones y discutir diferentes puntos de vista-; deberá asimismo provocar la necesidad de consultar otros textos, que para eso están y no sólo para estudiarlos memorísticamente. Obtenida la solución del problema, será muy educativo una revisión de los caminos intentados antes de haber llegado al proceso correcto, analizando el porqué de los errores cometidos, de los pequeños fracasos. Siempre habrá que exigir de los alumnos una presentación cuidadosa y una buena redacción del proceso y del razonamiento seguidos. Si el problema lo permite, como una modesta iniciación a la investigación, el profesor podrá invitarles a la búsqueda de las posibles generalizaciones, así como a la comprobación de la validez de los resultados a casos más particulares, los cuales, por su mayor sencillez, tal vez hayan podido sugerirles la solución más general. También puede ser interesante estudiar analogías con otros problemas estudiados anteriormente o investigar otros nuevos relacionados con él, así como, en su caso, el planteamiento y resolución del (o de los) problema recíproco. Y, sobre todo, si el problema ha sido propuesto con una intención preconcebida, y no sólo como pasatiempo más o menos bonito, establecer el objetivo fundamental perseguido, esto es, extraer las estructuras y propiedades matemáticas subyacentes en la situación planteada.

Cuando se practica una enseñanza participativa de los alumnos ¡cuántas veces quedaremos sorprendidos por las cuestiones que pueden plantearnos! Y suele ser mejor medio para conocer a los alumnos atender a las preguntas espontáneas que libremente puedan formularnos que exigir de ellos respuestas rígidas a las hechas por nosotros, aunque, en ocasiones, esta didáctica pueda colocarnos en verdaderos aprietos. Tal es el caso siguiente. En una lección se había visto que los lados del decágono, del pentágono y del exágono regulares, inscritos en el mismo círculo, son los lados de un triángulo rectángulo. El profesor se quedó sorprendido y perplejo, sin saber qué contestar, cuando una alumna avispada le preguntó: ¿hay alguna otra terna de polígonos regulares que posean la misma propiedad? No se percató en ese momento que también la tienen el exágono, el cuadrado y el triángulo. Pero, ¿hay otras? Problema ciertamente difícil, que, al parecer, está resuelto; no existen otras.

Estas reflexiones en torno al papel de los problemas me han sido sugeridas, más bien recordadas, a propósito de un problema propuesto en el concurso celebrado por nuestra Sociedad, en el pasado mes de junio, entre alumnos del primer curso de bachillerato, previamente calificados en sus respectivos centros con la nota de sobresaliente en matemáticas. Problema que sólo fue resuelto completo por nueve alumnos de los ochenta y dos presentados, y, sin embargo, alguno de los miembros de la comisión de profesores encargada de la selección de los ejercicios había opinado que debería desecharse por estimarlo demasiado fácil. ¿Cuándo podemos decidir a priori sobre la facilidad o dificultad de un problema?

El enunciado del problema en cuestión venía a ser el siguiente: "En la cuadrícula dibujada, que puede prolongarse cuanto se quiera, se designa habitualmente cada uno de sus vértices por sus dos coordenadas (abscisa y ordenada). Así, por ejemplo, el punto P(6,7). Pero también es posible, siguiendo el proceso indicado en la figura, determinar cada vértice por un único número. ¿Podrías decir qué número corresponderá al punto señalado P(6,7)? ¿A un vértice de la cuadrícula de coordenadas cualesquiera (a,b)?



Obviamente el "problema" está ya resuelto; basta continuar el camino indicado en la figura hasta alcanzar el punto deseado. Pero ésto puede ser demasiado largo, y aún irrealizable, si el punto en cuestión está muy alejado del origen. Se hace, pues, necesario pensar, esto es, observar las características del proceso. En primer lugar, se ve que los vértices de la cuadrícula se ordenan siguiendo las diagonales de ésta; que las diagonales de orden impar son "ascendentes", en tanto que las de orden par son "descendentes"; que cada diagonal recoge los vértices de la cuadrícula cuya suma de coordenadas es igual al número de su orden; y, finalmente, que cada diagonal contiene un número de vértices igual al de su orden más una unidad. Tenemos, por tanto, un primer resultado: el punto P(6,7) pertenece a la diagonal d_{13}, que es ascendente; el primer punto de esta diagonal es por ello el punto (13,0), sobre el eje X. Y, más general, un vértice cualquiera de la cuadrícula de coordenadas (a,b), si $a+b = k$, pertenecerá a la diagonal d_k, y ésta será ascendente o descendente, si k es impar o si k es par, respectivamente; en el primer caso, el primer punto de d_k es (k,0), y (0,k) en el segundo.

Sigamos observando. Vamos a fijarnos, como caso particular, en los números n que designan a los primeros puntos de cada diagonal. Son respectivamente:

$1, \quad 1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4 = 10, \ldots$

Por tanto, al vértice (13,0), primero de la diagonal d_{13}, le corresponde el número

$$1+2+3+\ldots+13 = \frac{13 \times 14}{2} = 91$$

Se obtiene así el segundo resultado: para llegar desde el anterior al número que corresponde al punto (6,7), tendremos que "subir" todavía siete unidades más, la ordenada. Por tanto,

$$P(6,7) \longrightarrow \frac{13 \times 14}{2} + 7 = 98$$

Y, por último, el resultado general: al punto (a,b), si $a+b = k$, le corresponde uno de los dos números n dados por las fórmulas:

$$\boxed{\begin{array}{ll} n = \dfrac{k(k+1)}{2} + b, & \text{si } k \text{ es impar} \\[2ex] n = \dfrac{k(k+1)}{2} + a, & \text{si } k \text{ es par} \end{array}}$$

Resuelto ya el problema propuesto ha llegado el momento de preguntarse -lo que los alumnos siempre hacen-, ésto ¿paraque sirve? Bien, lo que hemos realizado ha sido construir una biyección entre los conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$, lo que demuestra, en general, que si un conjunto C es numerable, también lo es el conjunto $C \times C$. Ahora bien, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es numerable, también lo es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y por tanto Q, conjunto de los números racionales, es numerable: Hay tantos números racionales como números naturales.

Finalmente, para los alumnos que lo deseen, fuera de las horas de clase, se les puede invitar a que estudien los siguientes problemas inducidos:

a) Resolver el problema inverso (diofántico), esto es, encontrar en la biyección construida $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, las coordenadas (x,y) que son la imagen de un número dado cualquiera n.

b) Buscar procesos análogos que realicen otra biyección $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$: por ejemplo, considerando recorridas las diagonales en el mismo sentido -lo que unifica la solución-, por cuadrados,...

c) Generalizar el problema a tres dimensiones, o sea, construir una biyección $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Como bibliografía para este último, algo más laborioso, se les puede señalar el Análisis Algebráico de Rey Pastor en el capítulo dedicado al estudio de los números triangulares, cuadrangulares,..., trabajo que supondrá una iniciación en el estudio de las progresiones aritméticas de orden superior.

SOBRE LA RESOLUCION DE TRIANGULOS

Por José Francisco Carballido Quesada
Escuela de Ingeniería Técnica Industrial (Madrid)

INTRODUCCION

El objeto del siguiente trabajo es el de proporcionar algunas sugerencias al profesor que, después de haber explicado la resolución de triángulos y haber realizado los clásicos problemas, no quede satisfecho y siga pensando en la desconexión que hay entre lo que se dice en el aula y la vida real. Lo ideal sería "sacar de la clase" los conocimientos allí aprendidos y mostrar a los alumnos, o mejor que ellos mismos descubrieran, cómo esos conocimientos son aplicables a situaciones reales. Se trata en definitiva de que el alumno transforme el conocimiento en herramienta y que la utilice.

El modo que propongo, en este tema concreto, es el de la realización de unas prácticas en un marco necesariamente distinto al del aula.

MATERIAL

Necesitaremos: goniómetro, regla milimetrada, transportador de ángulos, un trozo de cuerda de longitud conocida y unas tablas trigonométricas o una calculadora con funciones trigonométricas.

Como se ve, el aparato más difícil de conseguir es el goniómetro o medidor de ángulos; diré que sirve en su lugar una brújula-goniómetro de las que pueden medir con una precisión de un grado; hoy en día hay algunas excelentes de fabricación alemana que disponen de un pequeño prisma óptico, pero por su precio algo elevado (unas 10.000 pts.) veremos cómo construir nosotros mismos un goniómetro.

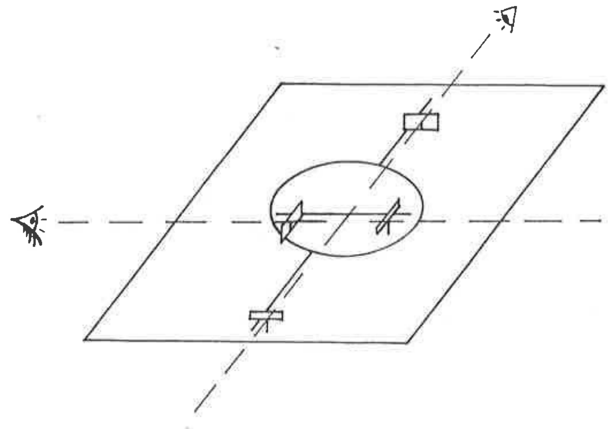
Tomemos un transportador de ángulos, a ser posible circular y que tenga la escala en los dos sentidos; uno de 15 cm de diámetro lleva divisiones de medio grado. A continuación tomamos un círculo de madera contrachapada o de cartón fuerte que tenga un diámetro 1 cm menor que el del transportador, le pegamos un papel blanco y sobre éste pegaremos el transportador, el cual sobresaldrá por los bordes. Colocamos el círculo así obtenido, sobre un tablero de madera contrachapada o de cartón fuerte, encima del cual habremos pegado previamente un papel blanco. Hacemos un taladro por el centro del transportador a las dos maderas y las fijamos con un tornillo cilíndrico, arandelas y tuerca sin apretar demasiado para que pueda girar nuestro círculo, aunque lo haga con dificultad.

Trazaremos la línea recta que definen los 0° y los 180° del transportador sobre el círculo y la continuamos sobre el tablero. Esta línea constituirá nuestro origen de medida.

A continuación construiremos dos alzas y dos puntos de mira. Un sistema sencillo es el siguiente: Tomamos dos pequeños rectángulos de madera contrachapada, de unos 3 x 2 cm son suficientes, y con un serrucho les hacemos un corte de 1 cm de profundidad por el punto medio de una de las bases mayores, cuidando que quede perpendicular a ésta. Habremos construido así las alzas y ahora las pegaremos, por el canto opuesto al corte y perpendicularmente a la línea antes dibujada, una en el tablero y otra en el interior del círculo lo más cerca posible del borde donde estén los 180°, y cuidando de que el corte quede encima de la línea antes dibujada.

Sobre otros dos rectángulos de madera de 3 x 1 cm clavaremos un alfiler o un clavo fino en uno de los cantos de la base mayor y por el centro de ésta, cuidando que quede perpendicular, así tendremos los puntos de mira, y los pegaremos por el canto opuesto al alfiler, lo mismo que las alzas, en lugares simétricos a éstas respecto del centro del círculo, cuidando de que el clavo sea perpendicular a la línea.

Con este goniómetro mediremos el ángulo que forman las direcciones desde donde nos encontramos a dos puntos, y para ello procederemos de la siguiente forma: Colocamos el goniómetro en un sitio con buena base horizontal, dirigimos una visual por el alza y el punto de mira del tablero a uno de los puntos, y luego girando el círculo, sin mover el tablero, dirigimos una visual por el alza y el punto de mira del círculo al otro punto. El valor del ángulo será el del transportador que esté encima de la línea del tablero donde antes estaba 0°.

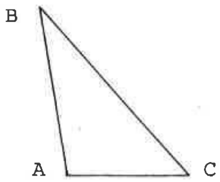


PRACTICAS

Una vez que tenemos todo el material, propondría las siguientes prácticas:

1ª. <u>Medición de la distancia desde el sitio donde nos encontramos A hasta otro alejado de él y visible B</u>

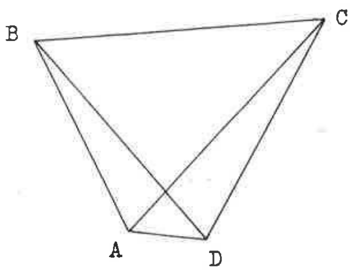
Solución: Con la cuerda fijaremos un nuevo punto C, no situado en la recta AB, mediremos con el goniómetro los ángulos BAC y BCA, el valor de AC lo conocemos, y mediante el teorema del seno calculamos AB



$$\frac{AB}{\text{sen } BCA} = \frac{AC}{\text{sen } (180 - (BAC+BCA))}$$

2ª. Medición de la distancia entre dos puntos B y C alejados entre sí, pero visibles, y alejados del punto A donde nos encontramos.

Solución: Con ayuda de la cuerda fijamos otro punto cercano D, no situado ni en la recta AB ni en la AC, siendo pues conocida la distancia AD. Medimos los ángulos CAD y ADC lo que nos permite calcular AC, puesto que ACD = 180 - (CAD+ADC).



$$\frac{AC}{\text{sen } ADC} = \frac{AD}{\text{sen } ACD}$$

Después medimos los ángulos BAD y BDA, con lo que hallamos AB, puesto que:

$$\frac{AB}{\text{sen } BDA} = \frac{AD}{\text{sen } ABD}$$

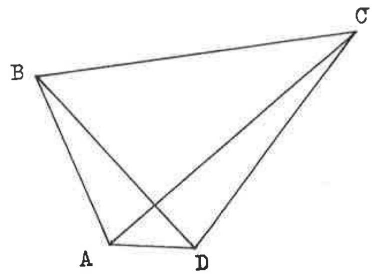
Calculamos ahora BAC = BAD - CAD, y conociendo AB y AC tenemos, gracias al teorema del coseno:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos BAC$$

3ª. Localización en el plano del lugar donde nos encontramos, conociendo dos puntos visibles y estando todos situados aproximadamente a la misma altura.

Solución: Realmente es una forma distinta de enfocar la práctica 2ª.

Supongamos que nos encontramos en un terreno del que tenemos un plano y reconocemos sobre el terreno y sobre el plano dos puntos B y C, y queremos situar en el plano el punto A donde nos encontramos, estando A, B y C situados aproximadamente a la misma altura.



Nuestras incógnitas en este caso serán los ángulos ABC y BCA, ya que trazando en el plano unas rectas que pasen por B y C y formen con la recta BC los ángulos antedichos, tal como indica la figura, su punto de corte será el A donde nos encontramos.

Nos trasladamos, como en la práctica anterior, a otro punto D cuya distancia AD es conocida y que no esté situado en las rectas AB y AC.

Medimos CAD y ADC con los que podemos obtener AC, como ya sabemos.

Después medimos BAD y BDA lo que nos permite hallar AB. Así pues

$$\left.\begin{array}{l} ABC = 180 - (BCA+BAC) \\[2ex] \dfrac{\text{sen } ABC}{AC} = \dfrac{\text{sen } BCA}{AB} \end{array}\right\} \text{Sistema del que obtenemos ABC y BCA}$$

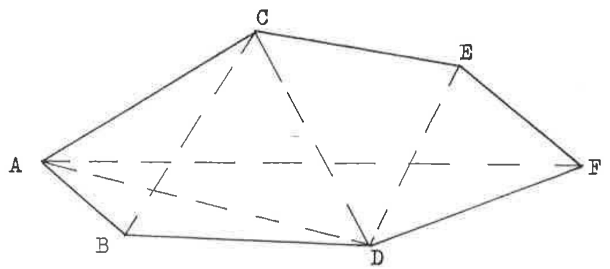
4ª. Levantamiento del plano de una parcela poligonal

El profesor mostrará a los alumnos el contorno de una parcela poligonal de la cual deberán medir los lados y los ángulos, y con todo ello levantar un plano a una escala determinada que previamente les habrá sido fijada.

Queda a la libre elección del profesor la complicación de la parcela en cuanto al número y longitud de sus lados dependiendo del tiempo disponible, lugar de realización, número de alumnos, etc.

5ª. Medición de la distancia desde el punto A donde nos encontramos hasta otro F no visible desde A, bien porque esté alejado de él, bien porque haya un obstáculo entre ambos.

Solución: Tomaremos el siguiente ejemplo:



Desde A trazamos con la ayuda de la cuerda el lado AB; tomamos otro punto visible C y formamos el primer triángulo ABC, del que medimos los ángulos interiores con lo que hallaremos BC, gracias al teorema del seno. Tomamos otro nuevo punto D y medimos los ángulos interiores del triángulo BCD. Como conocemos BC, podemos calcular BD y formamos el triángulo ABD del que sabemos el ángulo ABD y los dos lados AB y BD, aplicando el teorema del coseno hallamos AD. Así tomaríamos otro nuevo punto E que nos formaría dos nuevos triángulos CDE y EDF de los que mediríamos sus ángulos interiores y calcularíamos DF.

Por último consideramos el triángulo ADF del que conocemos los lados AD y DF y el ángulo ADF de los que obtendríamos AF, gracias al teorema del coseno.

ORGANIZACION

Existen multitud de formas distintas de organizar estas prácticas y es difícil dar un modelo que se adapte perfectamente a todas las distintas situaciones. Hecha esta salvedad voy a describir un posible modelo organizativo.

Para las tres primeras prácticas se insta a los alumnos que bajo su criterio formen grupos de 3 ó 4. Cada uno de estos grupos deberá disponer del material descrito anteriormente y el profesor les asignará un lugar donde realizar la práctica (o prácticas) en el cual abrirán un sobre que contiene el enunciado; a continuación cada grupo deberá hallar la solución del problema, tomar las medidas, efectuar los cálculos y reflejarlo en una pequeña memoria que entregarán al finalizar al profesor. Las medidas deberán ser tomadas por todos los miembros del grupo y efectuar los cálculos con la media de ellas. Mientras tanto, el profesor irá visitando a los diversos grupos tomando notas sobre lo que observe y resolviendo pequeñas dificultades que puedan surgir.

Cada profesor discernirá sobre la conveniencia o no de que los alumnos lleven libros y apuntes.

Las prácticas 4ª y 5ª aunque pueden ser realizadas también mediante este esquema, permiten otro tipo de organización distinta: Con los mismos grupos anteriores se trata ahora de realizar la práctica entre toda la clase, debiendo cada grupo ejecutar una parte. Tomemos por ejemplo la 5ª, el profesor distribuirá a los grupos por las estaciones A, B, C, D,... y después con los datos de todos se deberá llegar al resultado final.

EVALUACION

Existen dos formas claramente diferenciadas de concebir estas prácticas; bien utilizándolas solamente por su valor intrínseco, ésto es, dejando que los alumnos tomen conciencia de las posibilidades que tienen en las Matemáticas como herramienta, o bien como un sistema distinto de hacer un examen, para lo cual sería más conveniente que las realizaran individualmente.

Yo sugeriría algo a medio camino entre ambos extremos. Pienso que es fundamental su aspecto pedagógico, pero considero también importante obtener de ellas una nota que nos servirá como un indicativo más y a los alumnos les espolea para realizar la práctica lo mejor posible.

A la hora de poner la nota a los alumnos de un grupo, el profesor, con la memoria delante, puede dirigir a cada uno algunas preguntas cortas que enseguida le delatarán el grado de participación, trabajo y aprovechamiento que ha tenido. Si bien yo incluso recomendaría que sólo se contabilizaran los resultados positivos, pues me parece importante que haya un ambiente distendido, aunque serio, y no desperdiciar la oportunidad de que muchos alumnos pasen un rato, que me atrevería a calificar de agradable, con las Matemáticas, además de contribuir indirectamente a que dominen mejor los casos de resolución de triángulos y la trigonometría en general.

De todas formas, éstas son recomendaciones que a mí en la práctica me han resultado las mejores lo cual no quiere decir que necesariamente lo sean para todos; de todas formas eso es lo de menos porque si estamos de acuerdo en el fondo, poco importa que la forma la establezca cada profesor adaptándose al grupo y a la situación que tiene delante.

LA INFORMATICA EN LA ENSEÑANZA MEDIA

En los momentos presentes se habla, se comenta, se discute la importancia de la Informática en las Enseñanzas Medias, ya sea como objeto de estudio, ya sea como auxiliar, o simplemente como motivo de debate. En la primavera de 1981, bastante adelantados a la actual proliferación didáctica, tuvo lugar una "mesa redonda", organizada por el ICE de la U. Politécnica, de Madrid, con el fin de puntualizar esta situación. Como resumen de lo tratado en dicho simposio, los profesores R. Aguado-Muñoz, J. Fernández Biarge y J.R. Pascual Ibarra, elaboraron el siguiente informe, que, debidamente autorizados, nos complacemos en reproducir.

1. INTRODUCCION

El desarrollo de la Informática en la sociedad actual y su creciente influencia en todas las ramas de la actividad humana hace necesaria la introducción de enseñanzas de informática en el bachillerato, con objeto de preparar al alumno para el profundo cambio operado por la informática dentro de la sociedad.

Numerosos países han incluído temas de informática en los estudios generales y en nuestro país existen experiencias concretas de enseñanza de informática en el bachillerato. Es necesario, por tanto, preparar la introducción de las enseñanzas de informática en el bachillerato estudiando los resultados de las experiencias ya realizadas, los objetivos que se pretenden con la introducción de estos nuevos contenidos y los medios humanos y materiales de que disponemos.

El objetivo de este documento es presentar una síntesis de las ponencias presentadas en el Seminario de Profesores de Matemáticas de Bachillerato que con el título "La Informática en el Bachillerato" se celebró en Madrid los días 11, 12 y 13 de mayo de 1981.

En el documento se exponen los objetivos de las enseñanzas de informática en el bachillerato, las posibilidades de implantación dentro del actual esquema de B.U.P. y algunas orientaciones metodológicas.

2. OBJETIVOS

La introducción de la informática en las enseñanzas del bachillerato debe tender a la consecución de los siguientes objetivos:

2.1. Conocer el vocabulario y los conceptos de carácter informático de uso habitual en la vida moderna, tales como proceso de datos, cinta magnética, etc.

Es obvio que este objetivo elemental debe estar presente debido al papel relevante del tratamiento de la información en la sociedad actual. Pero el propio desarrollo de la informática ha supuesto un cambio tan radical en la concepción y modo de trabajo de prácticamente todas las actividades humanas que se hace necesario renovar la enseñanza en todas las disciplinas. En este sentido se presentan otros objetivos más importantes, como son los siguientes:

2.2. Capacitar al alumno para expresar con claridad los diversos procesos empleados para la resolución de problemas ya sea por medio de algoritmos u otros recursos de lenguajes.

El término "problema" no se refiere sólo a los de tipo matemático y ni siquiera exclusivamente a los de tipo científico, sino a problemas de cualquier carácter y más próximos a las realidades humanas. Este objetivo es claramente imprescindible, si, como es normal hoy día, el trabajo para la resolución efectiva de los problemas se va a encomendar a una máquina.

2.3. Capacitar al alumno para el manejo de una información de carácter complejo como la suministrada por la realidad.

Esta capacitación presenta dos aspectos. En primer lugar, la jerarquización de la información compleja que se consigue ordenándola y clasificándola con vistas a hacer posible su manipulación eficiente. En segundo lugar, la obtención de unidades de información de estructura más compleja.

2.4. Preparar al alumno para el uso de las nuevas formas de lenguaje que requiere la comunicación con las máquinas informáticas.

Estos lenguajes tienen unas exigencias muy distintas de los habituales lenguajes hablado y escrito, y por ello es necesario acostumbrar al alumno a este nuevo tipo de comunicación.

2.5. Preparar al alumno para discernir la eficacia de los distintos procesos de resolución de un problema en función de su economía y de los medios materiales que requieren.

Es importante que el alumno aprenda a relacionar los distintos métodos de resolución de un problema con los medios de cálculo de que dispone, con la economía de tiempo y con la exactitud en los resultados.

3. IMPLANTACION DE LOS ESTUDIOS DE INFORMATICA EN EL BACHILLERATO

Para la consecución de los objetivos señalados se presentan las opciones que exponemos a continuación y que no se excluyen entre sí:

- Orientar la enseñanza de cada una de las materias del Bachillerato con un nuevo espíritu que tenga en cuenta la importancia del tratamiento de la información. Para ello es preciso que los profesores sean conocedores de la transformación que ha supuesto la presencia de la informática en su propia asignatura.

- Establecer la informática como una disciplina nueva, aparte de las demás.

- Introducir temas específicos de informática en los cursos de matemáticas o incluso de física, atendiendo a una cierta afinidad con estas dos disciplinas.

- Por último, como solución más inmediata y prudente, implantar la informática como asignatura optativa dentro del grupo de las E.A.T.P.

De las cuatro opciones, la primera debería subsistir aún en el caso de que se establecieran las otras. Sin embargo, por el momento sus posibilidades son muy limitadas porque requieren planes específicos de formación del profesorado, pero no debe dejar de señalarse como una tendencia para el futuro próximo.

En cuanto a la última opción conviene señalar que sólo puede llevarse a cabo en centros que cuenten con el profesorado y los medios adecuados.

4. ORIENTACION METODOLOGICA

La metodología a emplear en la introducción de las enseñanzas de informática en el bachillerato debe tener en cuenta la edad y los conocimientos del alumno.

Como se ha dicho antes, el mejor enfoque de las enseñanzas de informática sería el multidisciplinar, lo que permitiría ofrecer al alumno una visión más completa de la influencia del tratamiento de la información en cada uno de esos campos.

La comunicación hombre-máquina exige un lenguaje mucho más preciso que los lenguajes hablado o escrito, y requiere además un esquema previo en el que se expresa con claridad el proceso que ha de seguir la máquina en la resolución de problemas. Esto obliga al alumno a realizar un considerable esfuerzo por lo que será necesario partir de ejemplos muy sencillos y aumentar gradualmente la dificultad.

Por otra parte, la introducción de enseñanzas de informática en este nivel permite ofrecer al alumno ejemplos de problemas con datos más reales, acercando más a la realidad algunas disciplinas que tradicionalmente se han presentado de un modo excesivamente simplificado para evitar la complejidad de los cálculos. El manejo de datos reales obliga a un especial cuidado en la selección, clasificación y jerarquización de los mismos, a diferencia de lo que ocurre con los problemas tradicionales en los que se dan únicamente los datos necesarios y en los que el mismo enunciado establece todas las simplificaciones que permitan resolverlo sin excesivos cálculos.

Por último, se considera conveniente proporcionar al alumno suficiente número de ejemplos concretos tomados de aplicaciones reales de la informática en los más variados campos. Esto contribuye, por una parte, a dar a conocer la influencia de la informática en esos campos y, por otra, a habituar al alumno a los métodos de trabajo que se emplean al resolver problemas con ayuda de la informática, tales como consideraciones sobre los medios disponibles, la relativa economía de distintos métodos de resolución, etc.

5. CONCLUSIONES

En vista de la importancia alcanzada por el tratamiento de la información en la sociedad actual, se considera oportuno incluir en el bachillerato enseñanzas de informática.

La introducción de estas enseñanzas de informática, convenientemente enfocadas, significaría un cambio considerable en el modo de enseñanza tradicional de todas las demás materias que constituyen el bachillerato. Esta tarea naturalmente requiere unas acciones en el campo de la formación del profesorado que conlleva una implantación gradual en los centros comenzando con aquellos que poseen el profesorado y los medios adecuados.

Es necesario por tanto fomentar las experiencias que se están llevando a cabo en distintos centros, dando a conocer a otros profesores interesados los resultados de las mismas.

***
*****

- 3. PEQUEÑAS IDEAS -

"Pequeñas Ideas" es una experiencia de los ICEs de las Universidades Autónomas y Politécnica cuyo objetivo era la recogida y difusión de contribuciones con experiencias de clase, nuevos enfoques de temas conocidos, demostraciones interesantes, problemas especialmente adecuados, etc., etc., que constituyen una parte importante de nuestro bagaje profesional y que muy raras veces se comparten.

A pesar de la modestia de nuestros medios, "Pequeñas Ideas" estaba teniendo una estimulante acogida entre el profesorado. Por ello nos sentimos muy satisfechos de saludar la aparición del Boletín que a partir de ahora incorpora a "Pequeñas Ideas" como nueva sección.

Así pues volvemos a animar a nuestros colegas a enviarnos sus colaboraciones que desde este momento podrán contar con un marco mucho más adecuado.

J. Colera
I.C.E. de la U. Autónoma

M. Pacios
I.C.E. de la U. Politécnica

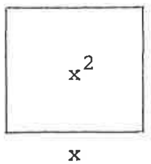
Aplicaciones de la geometría a la obtención de relaciones aritméticas

Entre las "pequeñas ideas" que hemos recibido seleccionamos para este número del Boletín varias que tienen algo en común: utilizar la intuición geométrica para obtener relaciones algebráicas.

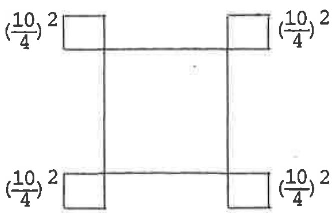
Comenzaremos por dos métodos para la resolución de ecuaciones. El primero de ellos es válido para resolver ecuaciones del tipo $x^2 + px = q$ con p y q positivos, mientras que el segundo resuelve $x^2 = px + q$ con p y q positivos y $x > p$. Ambos métodos se deben al matemático árabe Al-Juwarizmi (S. IX).

I. Encontrar una de las soluciones de la ecuación $x^2 + 10x = 39$.

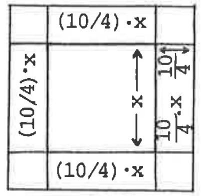
Construimos un cuadrado cuyo lado, x, será la solución de la ecuación



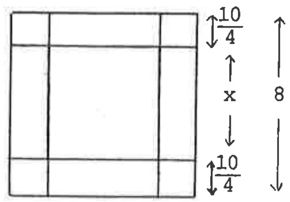
Añadimos en cada vértice un cuadrado de lado 10/4 (Coeficiente de la x dividido por 4)



El nuevo cuadrado tendrá un área: $x^2 + 4(10/4\ x) + 4(10/4)^2 = x + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$, (donde se ha tenido en cuenta que, por la ecuación, es $x^2 + 10x = 39$).



Puesto que el área es 64, el lado del cuadrado es 8, es decir, $10/4 + x\ 10/4 = 8$; $\boxed{x = 3}$



Los datos han sido tomados de:

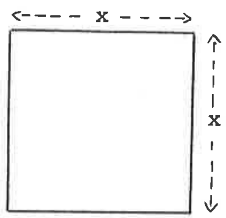
- Historia de la Matemática, Rey Pastor y José Babini, Espasa Calpe.
- Historia de la Ciencia Arabe. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid (1981).

Grupo Azarquiel de Matemáticas de Madrid (GAMMA).

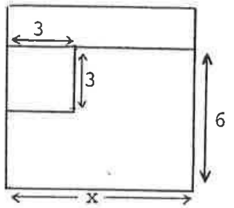
*****

II. Encontrar una solución de $x^2 = 6x + 16$.

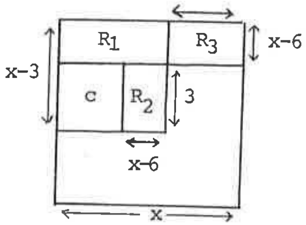
Construimos un cuadrado de lado x.



Sobre un lado llevamos el coeficiente de la x y construimos un cuadrado de lado la mitad del coeficiente



Ahora trazamos el cuadrado de lado x-3 y vemos que se forman dos rectángulos de lado menor x-6 y lado mayor 3 como se ve en la figura.



Por tanto, el área del cuadrado de lado x-3 es igual a la suma de las áreas del cuadrado C y los rectángulos R_1 y R_2. El rectángulo R_2 es igual al R_3, luego:

$$(x-3)^2 = 3^2 + x(x-6)$$

Como la ecuación $x^2 - 6x$ es igual a 16, nos queda:

$$(x-3)^2 = 9+16; \quad (x-3)^2 = 25$$

de donde x-3 = 5, y

$$\boxed{x = 8}$$

Esta nota ha sido obtenida de:

- Histoire des Mathématiques pour les Colleges, Marie-Louise Hocquenghem et. al. Edit. CEDIC, 1980.

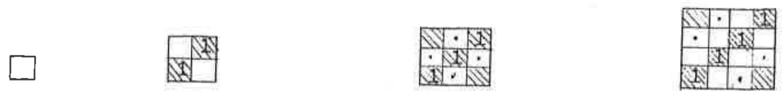
Enrique RUBIALES CAMINO.

*****

En los siguientes ejemplos se utilizan cuadrículas para visualizar propiedades algebráicas: la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales; la suma de los n primeros números impares y la suma de los n primeros números pares. Los tres ejemplos ilustran el método de inducción.

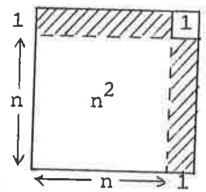
III. Fórmula de la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales.

Tomamos una unidad de dibujo |-| y representamos x^2 por el área de un cuadrado de lado x. El área de cada cuadrado la descompondremos en la suma de las áreas de zonas simétricas respecto de la diagonal.



1^2 $\quad$ $2^2 = 1+1+2\cdot1$ $\quad$ $3^2 = 1+1+1+2(1+2)$ $\quad$ $4^2 = 1+1+1+1+2(1+2+3)$

Veamos que verificándose esta fórmula para n, también se verifica para n+1.



$$(n+1)^2 = n^2 + 2\cdot1\cdot n+1$$

Sustituyendo

$$n^2 = \overbrace{1+1+1+\dots+1}^{\leftarrow n \text{ sumandos} \rightarrow} + 2(1+2+3+\dots+(n-1))$$

resulta

$$(n+1)^2 = 1+1+1+\dots 1+2(1+2+3+\dots(n-1))+2\cdot 1\cdot n+1 =$$

$$= \overbrace{1+1+1+\dots+1}^{\leftarrow n+1 \text{ sumandos} \rightarrow} + 2(1+2+3+\dots+(n-1)+n)$$

como queríamos demostrar.

Por tanto, tendremos que sumar las siguientes igualdades: (sumaremos por columnas)

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1+1+2\cdot 1$$

$$3^2 = 1+1+1+2(1+2)$$

$$4^2 = 1+1+1+1+2(1+2+3)$$

....

$$n^2 = 1+1+1+\dots+1+2(1+2+3+\dots+(n-1))$$

$$\sum_1^n x_i^2 = n+(n-1)+\dots+1+2((n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\dots+(n-1)(n-(n-1)))$$

$$\sum_1^n x_i^2 = \frac{1+n}{2}\cdot n + 2(n(1+2+3+\dots+(n-1)) - (1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2)$$

Sumando y restando n^2 resulta:

$$\sum_1^n x_i^2 = \frac{n^2+n}{2} + 2(n\cdot n/2(n-1) - \sum_1^n x_i^2 + n^2)$$

$$3\sum_1^n x_i^2 = \frac{n^2+n}{2} + n^2(n-1) + 2n^2$$

$$\sum_1^n x_i^2 = 1/3\ \frac{2n^3+3n^2+n}{2}$$

$$\boxed{\sum_1^n x_i^2 = n^3/3 + n^2/2 + n/6}$$

M. RICO.- I.B. Fortuny.

*****

IV. Suma de los n primeros números impares.

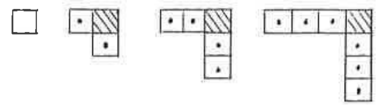
Veamos cómo se escribe un número impar teniendo en cuenta el lugar que ocupa en la sucesión de números impares:

El 1^{er} número impar $= 1 = 2\cdot 0+1$

El $2^{\underline{o}}$ número impar $= 3 = 2\cdot 1+1$

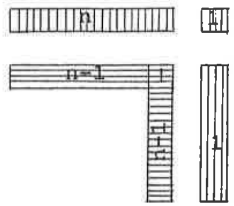
El 3^{er} número impar $= 5 = 2\cdot 2+1$

El $4^{\underline{o}}$ número impar $= 7 = 3\cdot 2+1$



1 3=2·1+1 5=2·2+1 7=2·3+1

⋮



El número impar que ocupa el lugar veinte $= 2\cdot 19+1$

⋮

El número impar que ocupa el lugar $n = 2(n-1)+1$

Rayado horizontalmente el número impar de lugar n $= 2(n-1)+1$

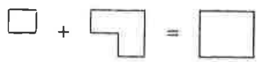
⋮

Rayado verticalmente el número impar siguiente, o sea el de lugar n+1 $= 2n+1$

El número impar que ocupa el lugar $n+1 = 2n+1$

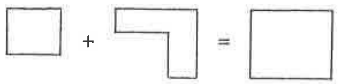
Es fácil ver fijándonos en los gráficos que:

Sumando dos impares se forma un cuadrado de lado dos.



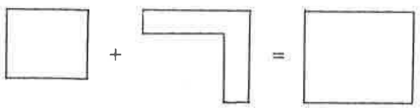
$1 + 3 = 2^2$

Sumando tres impares resulta un cuadrado de lado tres.



$1+3 + 5 = 3^2$

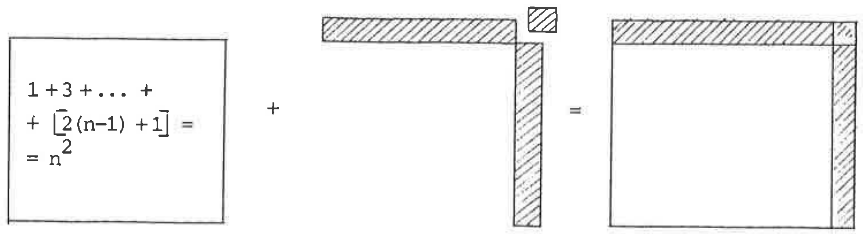
Sumando cuatro números impares resulta un cuadrado de lado cuatro.



$1+3+5 + 7 = 4^2$

Llamando orlar un cuadrado a pasar al cuadrado cuyo lado es la unidad mayor, observamos que sumados un número de números impares sumar el siguiente impar es "añadir" una orla.

Admitimos que sumando "ene" números impares resulta un cuadrado de lado n.



$n^2 + \underbrace{2 \cdot n+1}_{\text{impar de lugar } n+1} = (n+1)^2$

Demostramos que sumando n+1 números impares resulta un cuadrado de lado n+1.

Es fácil ver en la figura que admitido que la suma de n números impares es n^2 se ha demostrado que la suma de n+1 números impares es $(n+1)^2$.

Queda demostrado por INDUCCION completa que

$$1 + 3 + 5 + \dots + [2(n-1) + 1] = n^2$$

V. <u>Suma de los n primeros números pares</u>.

Expresamos los números pares en función del lugar que ocupan la sucesión de números pares

El 1^{er} número par $= 2 = 2\cdot 1$

El 2º número par $= 4 = 2\cdot 2$

El 3^{er} número par $= 6 = 2\cdot 3$

⋮

El número par de lugar $n = 2 \cdot n$

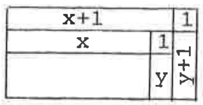
El número par de lugar $n+1 = 2(n+1)$

Dado un rectángulo, llamaremos rectángulo orlado al que resulta de aumentar la base en una unidad y la altura en una unidad

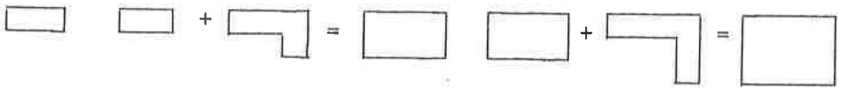
Veamos que:

Si tenemos un rectángulo orlado cuya orla es un número par y lo orlamos de nuevo, la nueva orla es precisamente el número par siguiente.

Decimos que la 1ª orla $= x + y + 1$ es un número par. La 2ª orla $= (x+1) + (y+1) + 1 = (x+y+1) + 2$ es el número par siguiente.



Representación gráfica de varios casos de sumas de números pares:



$2 \qquad 2 + 4 = 2\cdot(2+1) \qquad 2+4+6 = 3\cdot 4 =$

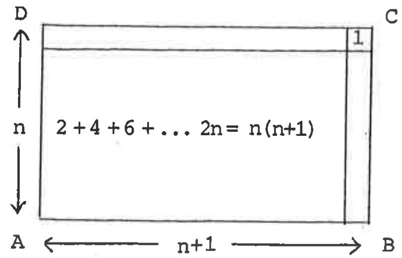
$= 3\cdot(3+1)$

(1) En general, tendremos que demostrar que la suma de n números pares es igual a un rectángulo de base n+1 y altura n, es decir:

$$2 + 4 + \ldots + 2n = n \cdot (n+1) \qquad (1)$$

Demostración por inducción completa.

Supongamos que es cierto que la suma de n números pares es un rectángulo de base n+1 y altura n



La orla es igual

$$(n+1) + n + 1 = 2n + 2 = 2(n+1)$$

Luego el rectángulo

$$ABCD = 2 + 4 + \ldots + 2n + 2(n+1)$$

es igual también a

$$(n+1) \cdot (n \cdot 2)$$

Luego queda demostrado que si sumamos n números pares resulta

$$n \cdot (n+1)$$

M. Rico; I.N.B. Fortuny.

***
*****

- 4. VARIA -

- En Salamanca se han celebrado a finales de Septiembre las II Jornadas de Didáctica Matemática patrocinadas por el Seminario Permanente de Matemáticas de aquella ciudad.

- Durante el mes de Septiembre ha tenido lugar en Madrid un Congreso de Didáctica, con diversas secciones, entre las que destacó la de Matemáticas.

- El Seminario de Historia de las Matemáticas, que dirige Mariano Martín en la Fac. de Matemáticas de la U. Complutense (Madrid-3) ha comenzado su actividad este VI curso con el programa que se detalla:

Tema I : "LA MATEMATICA EN PLATON Y ARISTOTELES". (Tres sesiones). MARIANO MARTINEZ.

Tema II : "LOS LIBROS 'SOBRE CONOIDES Y ESFEROIDES' Y 'SOBRE LAS ESPIRALES' DE ARQUIMEDES". (Tres sesiones). FRANCISCO HERRERO.

Tema III : "EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE ESPACIO DURANTE LOS SIGLOS XV Y XVI". (Tres sesiones). MARIANO MARTINEZ.

Tema IV : "LA OBRA MATEMATICA DE FERMAT". (Dos sesiones). MARIO RODRIGUEZ.

Tema V : "LA 'INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM' DE EULER". (Tres sesiones). MARIANO MARTINEZ.

Tema VI : "LA EPOCA DE PLENITUD DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA HACIA MEDIADOS DEL SIGLO XIX". (Tres sesiones). GREGORIO HERNANDEZ.

Tema VII : "EL DESARROLLO DEL ALGEBRA DURANTE LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XIX". (Cuatro sesiones). IGNACIO LUENGO.

Tema VIII : "LA TEORIA DE LA DIMENSION DESDE CANTOR A MENGER Y URYSHON". (Tres sesiones). JUAN TARRES

Tema IX : "LA TEORIA DE ALGEBRAS DE OPERADORES (VON NEUMANN, GELFAND)". (Tres sesiones). JUAN MARIA LOPEZ DE SA - FERNANDO BOMBAL.

- La falta de publicaciones en español sobre didáctica de las Matemáticas es patente. Además de la archiconocida publicación francesa de la APMEP, los interesados pueden consultar en la Biblioteca de Profesores de la Facultad de Matemática de la U. Complutense (Madrid 3), las siguientes (ninguna en catellano, por desgracia):

  - The Mathematical Gazette.
  - Mathematics Magazine.
  - The Mathematics Teacher.
  - Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik.
  - Educational Studies in Mathematics.
  - The American Math. Monthly.

  El acceso a la Biblioteca es pública y hay facilidades para obtener fotocopias.

- Los profesionales de las Matemáticas y la Física han recibido este año la reposición de Galileo, aunque con "cierto" retraso, con la natural alegría.

- Todo profesor de Matemáticas deberá tener presenta la frase de Max Dehn (recuérdese el famoso teorema de Dehn sobre el cálculo de volúmenes de poliedros): "Las Matemáticas son la única disciplina que puede presentarse de forma totalmente adogmática" (Discurso en Frankfurt am Main, 1928).

- En la enseñanza de las matemáticas, en cualquiera de sus niveles se han perdido ingentes cantidades de información. El siguiente ejercicio, propuesto a alumnos de 1º de BUP, no fue resuelto por <u>ninguno</u> entre más de 80 chicos.

  "Probar que si n y n+1 son enteros consecutivos, son primos entre sí".

  Por otra parte, la enseñanza superior ha visto desaparecer capítulos enteros de análisis "serio" en beneficio de otras formalizaciones. Pocos licenciados actuales serán capaces de sumar una serie como

$$\frac{1}{5} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2n-1)!!}{n!\ 5^{n+1}} \quad ; \quad \text{Solución: } \frac{1}{\sqrt{15}}$$

(Utilícese la fórmula de Wallis...).

- Proponemos desde aquí la incorporación a la enseñanza de las Matemáticas elementales de más geometría y de una iniciación a la astronomía de posición. Es claro que la introducción de los microcomputadores deberá aliviar (¿o no?) el miedo a los terribles cálculos logarítmicos.

- El Servicio de Publicaciones del M.E.C., a instancia de nuestra Sociedad, se propone reeditar la obra del profesor Puig Adam, "<u>La Matemática y su enseñanza actual</u>".

***
*****

Supongamos, ahora, que ambos aumentan en 50 el número de votos. Tendrán 1050 y 250 votos. Mantienen los mismos escaños que antes pero los precios son, ahora, 105 y 125 votos, respectivamente. Es fácil ver que lo máximo que puede costarle un escaño al partido A es 110 votos, mientras que el partido B puede llegar a pagar casi 150 votos por sus escaños. Por tanto, es más probable que al partido B le salga el escaño más caro que al partido A.

Conclusiones

1. El método Hondt se aproxima en lo posible a la proporcionalidad (en cada circunscripción).

2. Los escaños se reparten como si los partidos pujaran con sus votos para conseguir, a precio uniforme, el mayor número de escaños.

3. Es más probable que a los partidos les cuesten los escaños tanto más caros cuanto más pequeños son.

4. En cualquier caso, las matemáticas (incluídas las belgas) son absolutamente inocentes.

GEOMETRIA DEL TABLERO DE AJEDREZ

Por Joaquín Gómez Rey
Catedrático de Matemáticas, I.B. de Tomelloso (Ciudad Real)

Para el rey, el camino más corto entre dos puntos (casillas), no es sólo la línea recta, sino que hay más. Estas distintas posibilidades de caminar el rey son parte de la estrategia del ajedrecista.

EJERCICIO

Calcular el número de caminos que puede recorrer el rey, para ir en 7 tiempos (movimientos), desde la casilla:

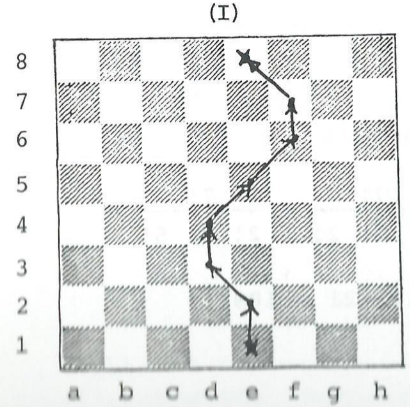
I) e1 hasta la e8

II) f1 hasta la g8.

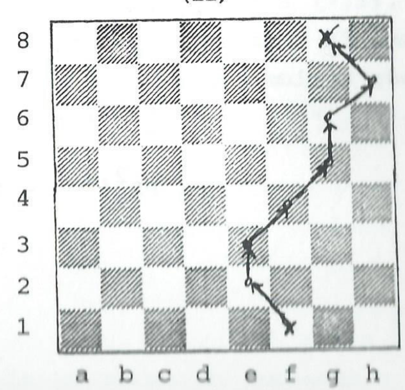
Solución.- Como el recorrido se ha de efectuar en 7 tiempos, en cada uno de ellos el rey tiene a lo más 3 alternativas: De frente (f), en diagonal hacia el frente derecha (d), o izquierda (i), respectivamente.

Ejemplos.-

(I)



(II)



I) Como $f+d+i = 7$ y $d=i$, los casos posibles son:

1. $f=7$, $d=i=0$, que son $PR_7^{7,0,0} = \dfrac{7!}{7!\ 0!\ 7!} = 1$

2. $f=5$, $d=i=1$, que son $PR_7^{5,1,1} = \dfrac{7!}{5!\ 1!\ 1!} = 42$

3. $f=3$, $d=i=2$, que son $PR_7^{3,2,2} = \dfrac{7!}{3!\ 2!\ 2!} = 210$

y

4. $f=1$, $d=i=3$, que son $PR_7^{1,3,3} = \dfrac{7!}{1!\ 3!\ 3!} = 140$

$$\text{Total} = 1+42+210+140 = 393$$

II) Similar al anterior, pero teniendo en cuenta que ahora hay caminos que se salen del tablero.

Como $f+d+i = 7$ y $d=i+1$, los casos posibles son:

1. $f=6$, $d=1$, $i=0$, que son $PR_7^{6,1,0} = \dfrac{7!}{6!\ 1!\ 0!} = 7$

2. $f=4$, $d=2$, $i=1$, que son $PR_7^{4,2,1} = \dfrac{7!}{4!\ 2!\ 1!} = 105$

3. $f=2$, $d=3$, $i=2$, que son

$$PR_7^{2,3,2} - PR_7^{2,0,5} = \frac{7!}{2!\ 3!\ 2!} - \frac{7!}{2!\ 0!\ 5!} =$$

$$= 210 - 21 = 189$$

y

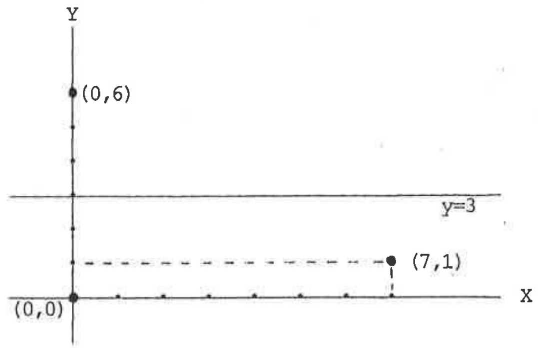
4) $f=0$, $d=4$, $i=3$, que son

$$PR_7^{0,4,3} - PR_7^{0,1,6} = \frac{7!}{0!\ 4!\ 3!} - \frac{7!}{0!\ 1!\ 6!} =$$

$$= 35 - 7 = 28$$

$$\text{Total} = 7+105+189+28 = 329$$

En los casos 3. y 4., representando los movimientos del rey sobre unos ejes coordenados en el plano, tomando como abscisa la suma $f+d+i$, y como ordenada la diferencia $d-i$, tenemos



Todos los caminos parten de (0,0) y llegan a (7,1), y hay que excluir todos aquellos que corten a la recta $y=3$, que por el principio de reflexión es igual al número de caminos que parten de (0,6) y llegan a (7,1).

REFLEXION EN TORNO A UN PROBLEMA DE CONCURSO

Por José R. Pascual Ibarra

Se reconoce unánimemente el papel preponderante que, en una didáctica activa de la matemática, le corresponde al planteo y resolución de problemas. Pero esta actividad, tal vez en demasiadas ocasiones, se limita a proponer a los alumnos la resolución de algunos de los numerosos ejercicios -pocos auténticos problemas- contenidos en el libro de texto -seguramente elegido por este sólo motivo-, después de explicada la lección correspondiente, creyendo así de buena fe que el alumno afianzará sus conocimientos teóricos supuestamente adquiridos, y con la pretensión de su adiestramiento en el manejo de fórmulas o en determinadas técnicas de cálculo. ¡La tradicional división en clases teóricas y en clases prácticas! Esta manera exclusiva de proceder puede ser contraría a la eficacia deseada en relación con un auténtico aprendizaje. Ocurre, en efecto, que el hecho de obligar a los alumnos a la resolución de un buen número de ejercicios repetitivos y rutinarios puede ser motivo de cansancio y aburrimiento, constituyendo por ello otro factor más del fracaso de nuestra enseñanza.

Recuerdo a este respecto el ingenuo lamento de una entusiasta profesora cuando, ante el poco éxito logrado por sus alumnas en una de las pruebas de los desaparecidos exámenes de grado del antiguo bachillerato, me decía: *no puede usted darse idea de la cantidad de ejercicios que hemos hecho durante todo el curso; de cómo han trabajado las muchachas*". Pero éste -el que les salió en el examen-, éste no lo habían estudiado, ¿verdad?, le pregunté. *Este, no; éste no lo habíamos visto*, me *repuso*. Las alumnas, evidentemente, no habían trabajado bien, no habían adquirido la capacidad de saber, ésto es, la capacidad de hacer, de reaccionar con acierto ante una situación nueva, quizá inesperada, objetivo esencial de la educación matemática

-de la educación sin adjetivos-, y más aún hoy en la sociedad cambiante a ritmo acelerado en que nos ha tocado vivir.

No puede reducirse, por tanto, la labor del profesor a explicar su lección teórica, con claridad y precisión por supuesto, y completarla con algún ejercicio de tipo práctico. Por el contrario, tarea primordial suya, que ha de ocupar buena parte de su tiempo (y no sería malo que la Administración tomara conciencia de ello a la hora de fijar los horarios de trabajo), debería ser la búsqueda de buenos y verdaderos problemas estimulantes, de auténticas situaciones activas de aprendizaje, naturalmente adecuadas a las posibilidades reales de los alumnos. Problemas y situaciones que, a manera de centros de interés, despierten en ellos la imaginación creadora, potencien las facultades de observación y percepción de la realidad concreta -"*Mirar y ver*", como titula su libro el profesor Guzmán-, adquieran el hábito de la crítica razonada -autocrítica- para poder reconocer y corregir los errores inevitables que implica el aprendizaje, y, sobre todo, que les estimule a un trabajo esforzado y tenaz ... porque siempre "las ideas felices llegan al final". Trabajo que quizá sea duro, pero no penoso, compensado ampliamente por la noble alegría proporcionada por el éxigo logrado, factor imprescindible para el afianzamiento de la personalidad.

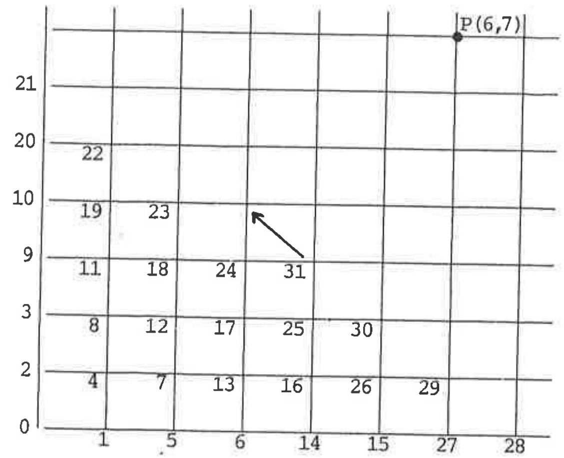
A esta actividad de creación en libertad se opone en buena medida la nefasta costumbre de exigir de todos los alumnos -tan diversos- la resolución de un cierto número de ejercicios o problemas, por lo demás bien escogidos, en un tiempo limitado, tanto peor si con este procedimiento se trata de otorgar una calificación definitiva de su aprovechamiento y de su saber. El hecho de llegar a la solución de un problema, o de varios, en período casi siempre escaso de tiempo puede ser un expediente válido para calificar de bueno a un alumno; pero quizá no sea motivo suficiente para descalificar al que no lo haya logrado.

Un buen problema es aquel que supone para el alumno, más que un quehacer impuesto, un desafío a su capacidad de iniciativa. Su resolución requerirá muchas veces más tiempo que el de una sesión de clase. Debe incitarle a un trabajo personal -sin desdeñar el interés del trabajo en grupo para contrastar opiniones y discutir diferentes puntos de vista-; deberá asimismo provocar la necesidad de consultar otros textos, que para eso están y no sólo para estudiarlos memorísticamente. Obtenida la solución del problema, será muy educativo una revisión de los caminos intentados antes de haber llegado al proceso correcto, analizando el porqué de los errores cometidos, de los pequeños fracasos. Siempre habrá que exigir de los alumnos una presentación cuidadosa y una buena redacción del proceso y del razonamiento seguidos. Si el problema lo permite, como una modesta iniciación a la investigación, el profesor podrá invitarles a la búsqueda de las posibles generalizaciones, así como a la comprobación de la validez de los resultados a casos más particulares, los cuales, por su mayor sencillez, tal vez hayan podido sugerirles la solución más general. También puede ser interesante estudiar analogías con otros problemas estudiados anteriormente o investigar otros nuevos relacionados con él, así como, en su caso, el planteamiento y resolución del (o de los) problema recíproco. Y, sobre todo, si el problema ha sido propuesto con una intención preconcebida, y no sólo como pasatiempo más o menos bonito, establecer el objetivo fundamental perseguido, esto es, extraer las estructuras y propiedades matemáticas subyacentes en la situación planteada.

Cuando se practica una enseñanza participativa de los alumnos ¡cuántas veces quedaremos sorprendidos por las cuestiones que pueden plantearnos! Y suele ser mejor medio para conocer a los alumnos atender a las preguntas espontáneas que libremente puedan formularnos que exigir de ellos respuestas rígidas a las hechas por nosotros, aunque, en ocasiones, esta didáctica pueda colocarnos en verdaderos aprietos. Tal es el caso siguiente. En una lección se había visto que los lados del decágono, del pentágono y del exágono regulares, inscritos en el mismo círculo, son los lados de un triángulo rectángulo. El profesor se quedó sorprendido y perplejo, sin saber qué contestar, cuando una alumna avispada le preguntó: ¿hay alguna otra terna de polígonos regulares que posean la misma propiedad? No se percató en ese momento que también la tienen el exágono, el cuadrado y el triángulo. Pero, ¿hay otras? Problema ciertamente difícil, que, al parecer, está resuelto; no existen otras.

Estas reflexiones en torno al papel de los problemas me han sido sugeridas, más bien recordadas, a propósito de un problema propuesto en el concurso celebrado por nuestra Sociedad, en el pasado mes de junio, entre alumnos del primer curso de bachillerato, previamente calificados en sus respectivos centros con la nota de sobresaliente en matemáticas. Problema que sólo fue resuelto completo por nueve alumnos de los ochenta y dos presentados, y, sin embargo, alguno de los miembros de la comisión de profesores encargada de la selección de los ejercicios había opinado que debería desecharse por estimarlo demasiado fácil. ¿Cuándo podemos decidir a priori sobre la facilidad o dificultad de un problema?

El enunciado del problema en cuestión venía a ser el siguiente: "En la cuadrícula dibujada, que puede prolongarse cuanto se quiera, se designa habitualmente cada uno de sus vértices por sus dos coordenadas (abscisa y ordenada). Así, por ejemplo, el punto P(6,7). Pero también es posible, siguiendo el proceso indicado en la figura, determinar cada vértice por un único número. ¿Podrías decir qué número corresponderá al punto señalado P(6,7)? ¿A un vértice de la cuadrícula de coordenadas cualesquiera (a,b)?



Obviamente el "problema" está ya resuelto; basta continuar el camino indicado en la figura hasta alcanzar el punto deseado. Pero ésto puede ser demasiado largo, y aún irrealizable, si el punto en cuestión está muy alejado del origen. Se hace, pues, necesario pensar, esto es, observar las características del proceso. En primer lugar, se ve que los vértices de la cuadrícula se ordenan siguiendo las diagonales de ésta; que las diagonales de orden impar son "ascendentes", en tanto que las de orden par son "descendentes"; que cada diagonal recoge los vértices de la cuadrícula cuya suma de coordenadas es igual al número de su orden; y, finalmente, que cada diagonal contiene un número de vértices igual al de su orden más una unidad. Tenemos, por tanto, un primer resultado: el punto P(6,7) pertenece a la diagonal d_{13}, que es ascendente; el primer punto de esta diagonal es por ello el punto (13,0), sobre el eje X. Y, más general, un vértice cualquiera de la cuadrícula de coordenadas (a,b), si $a+b = k$, pertenecerá a la diagonal d_k, y ésta será ascendente o descendente, si k es impar o si k es par, respectivamente; en el primer caso, el primer punto de d_k es (k,0), y (0,k) en el segundo.

Sigamos observando. Vamos a fijarnos, como caso particular, en los números n que designan a los primeros puntos de cada diagonal. Son respectivamente:

$$1, \quad 1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4 = 10, \ldots$$

Por tanto, al vértice (13,0), primero de la diagonal d_{13}, le corresponde el número

$$1+2+3+\ldots+13 = \frac{13 \times 14}{2} = 91$$

Se obtiene así el segundo resultado: para llegar desde el anterior al número que corresponde al punto (6,7), tendremos que "subir" todavía siete unidades más, la ordenada. Por tanto,

$$P(6,7) \longrightarrow \frac{13 \times 14}{2} + 7 = 98$$

Y, por último, el resultado general: al punto (a,b), si $a+b = k$, le corresponde uno de los dos números $\underline{n}$ dados por las fórmulas:

$$\boxed{\begin{array}{ll} n = \dfrac{k(k+1)}{2} + b, & \text{si } k \text{ es impar} \\[2ex] n = \dfrac{k(k+1)}{2} + a, & \text{si } k \text{ es par} \end{array}}$$

Resuelto ya el problema propuesto ha llegado el momento de preguntarse -lo que los alumnos siempre hacen-, ésto ¿para que sirve? Bien, lo que hemos realizado ha sido construir una biyección entre los conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$, lo que demuestra, en general, que si un conjunto C es numerable, también lo es el conjunto $C \times C$. Ahora bien, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es numerable, también lo es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y por tanto Q, conjunto de los números racionales, es numerable: Hay tantos números racionales como números naturales.

Finalmente, para los alumnos que lo deseen, fuera de las horas de clase, se les puede invitar a que estudien los siguientes problemas inducidos:

a) Resolver el problema inverso (diofántico), esto es, encontrar en la biyección construida $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, las coordenadas (x,y) que son la imagen de un número dado cualquiera $\underline{n}$.

b) Buscar procesos análogos que realicen otra biyección $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$: por ejemplo, considerando recorridas las diagonales en el mismo sentido -lo que unifica la solución-, por cuadrados,...

c) Generalizar el problema a tres dimensiones, o sea, construir una biyección $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Como bibliografía para este último, algo más laborioso, se les puede señalar el Análisis Algebráico de Rey Pastor en el capítulo dedicado al estudio de los números triangulares, cuadrangulares,..., trabajo que supondrá una iniciación en el estudio de las progresiones aritméticas de orden superior.

SOBRE LA RESOLUCION DE TRIANGULOS

Por José Francisco Carballido Quesada
Escuela de Ingeniería Técnica Industrial (Madrid)

INTRODUCCION

El objeto del siguiente trabajo es el de proporcionar algunas sugerencias al profesor que, después de haber explicado la resolución de triángulos y haber realizado los clásicos problemas, no quede satisfecho y siga pensando en la desconexión que hay entre lo que se dice en el aula y la vida real. Lo ideal sería "sacar de la clase" los conocimientos allí aprendidos y mostrar a los alumnos, o mejor que ellos mismos descubrieran, cómo esos conocimientos son aplicables a situaciones reales. Se trata en definitiva de que el alumno transforme el conocimiento en herramienta y que la utilice.

El modo que propongo, en este tema concreto, es el de la realización de unas prácticas en un marco necesariamente distinto al del aula.

MATERIAL

Necesitaremos: goniómetro, regla milimetrada, transportador de ángulos, un trozo de cuerda de longitud conocida y unas tablas trigonométricas o una calculadora con funciones trigonométricas.

Como se ve, el aparato más difícil de conseguir es el goniómetro o medidor de ángulos; diré que sirve en su lugar una brújula-goniómetro de las que pueden medir con una precisión de un grado; hoy en día hay algunas excelentes de fabricación alemana que disponen de un pequeño prisma óptico, pero por su precio algo elevado (unas 10.000 pts.) veremos cómo construir nosotros mismos un goniómetro.

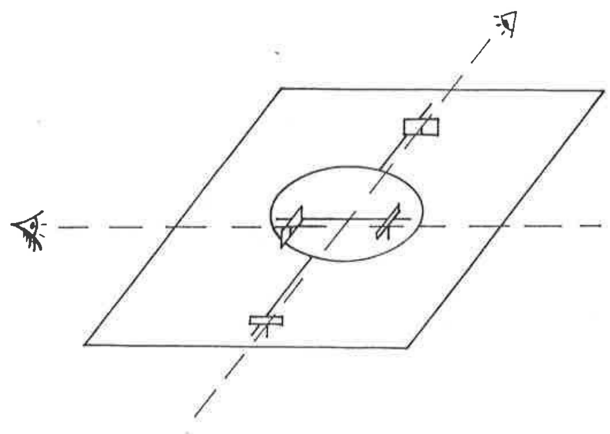
Tomemos un transportador de ángulos, a ser posible circular y que tenga la escala en los dos sentidos; uno de 15 cm de diámetro lleva divisiones de medio grado. A continuación tomamos un círculo de madera contrachapada o de cartón fuerte que tenga un diámetro 1 cm menor que el del transportador, le pegamos un papel blanco y sobre éste pegaremos el transportador, el cual sobresaldrá por los bordes. Colocamos el círculo así obtenido, sobre un tablero de madera contrachapada o de cartón fuerte, encima del cual habremos pegado previamente un papel blanco. Hacemos un taladro por el centro del transportador a las dos maderas y las fijamos con un tornillo cilíndrico, arandelas y tuerca sin apretar demasiado para que pueda girar nuestro círculo, aunque lo haga con dificultad.

Trazaremos la línea recta que definen los 0° y los 180° del transportador sobre el círculo y la continuamos sobre el tablero. Esta línea constituirá nuestro origen de medida.

A continuación construiremos dos alzas y dos puntos de mira. Un sistema sencillo es el siguiente: Tomamos dos pequeños rectángulos de madera contrachapada, de unos 3 x 2 cm son suficientes, y con un serrucho les hacemos un corte de 1 cm de profundidad por el punto medio de una de las bases mayores, cuidando que quede perpendicular a ésta. Habremos construido así las alzas y ahora las pegaremos, por el canto opuesto al corte y perpendicularmente a la línea antes dibujada, una en el tablero y otra en el interior del círculo lo más cerca posible del borde donde estén los 180°, y cuidando de que el corte quede encima de la línea antes dibujada.

Sobre otros dos rectángulos de madera de 3 x 1 cm clavaremos un alfiler o un clavo fino en uno de los cantos de la base mayor y por el centro de ésta, cuidando que quede perpendicular, así tendremos los puntos de mira, y los pegaremos por el canto opuesto al alfiler, lo mismo que las alzas, en lugares simétricos a éstas respecto del centro del círculo, cuidando de que el clavo sea perpendicular a la línea.

Con este goniómetro mediremos el ángulo que forman las direcciones desde donde nos encontramos a dos puntos, y para ello procederemos de la siguiente forma: Colocamos el goniómetro en un sitio con buena base horizontal, dirigimos una visual por el alza y el punto de mira del tablero a uno de los puntos, y luego girando el círculo, sin mover el tablero, dirigimos una visual por el alza y el punto de mira del círculo al otro punto. El valor del ángulo será el del transportador que esté encima de la línea del tablero donde antes estaba 0°.

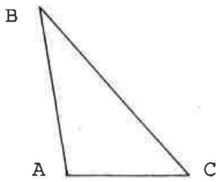


PRACTICAS

Una vez que tenemos todo el material, propondría las siguientes prácticas:

1ª. <u>Medición de la distancia desde el sitio donde nos encontramos A hasta otro alejado de él y visible B</u>

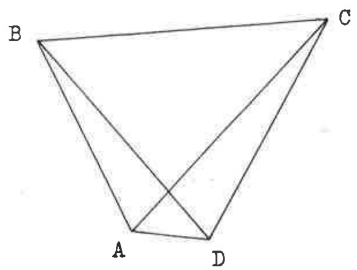
Solución: Con la cuerda fijaremos un nuevo punto C, no situado en la recta AB, mediremos con el goniómetro los ángulos BAC y BCA, el valor de AC lo conocemos, y mediante el teorema del seno calculamos AB



$$\frac{AB}{\text{sen } BCA} = \frac{AC}{\text{sen } (180 - (BAC+BCA))}$$

2ª. <u>Medición de la distancia entre dos puntos B y C alejados entre sí, pero visibles, y alejados del punto A donde nos encontramos</u>.

Solución: Con ayuda de la cuerda fijamos otro punto cercano D, no situado ni en la recta AB ni en la AC, siendo pues conocida la distancia AD. Medimos los ángulos CAD y ADC lo que nos permite calcular AC, puesto que ACD = 180 - (CAD+ADC).



$$\frac{AC}{\text{sen } ADC} = \frac{AD}{\text{sen } ACD}$$

Después medimos los ángulos BAD y BDA, con lo que hallamos AB, puesto que:

$$\frac{AB}{\text{sen } BDA} = \frac{AD}{\text{sen } ABD}$$

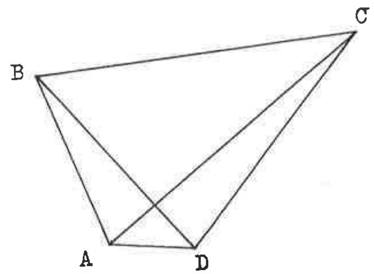
Calculamos ahora BAC = BAD - CAD, y conociendo AB y AC tenemos, gracias al teorema del coseno:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos BAC$$

3ª. <u>Localización en el plano del lugar donde nos encontramos, conociendo dos puntos visibles y estando todos situados aproximadamente a la misma altura</u>.

Solución: Realmente es una forma distinta de enfocar la práctica 2ª.

Supongamos que nos encontramos en un terreno del que tenemos un plano y reconocemos sobre el terreno y sobre el plano dos puntos B y C, y queremos situar en el plano el punto A donde nos encontramos, estando A, B y C situados aproximadamente a la misma altura.



Nuestras incógnitas en este caso serán los ángulos ABC y BCA, ya que trazando en el plano unas rectas que pasen por B y C y formen con la recta BC los ángulos antedichos, tal como indica la figura, su punto de corte será el A donde nos encontramos.

Nos trasladamos, como en la práctica anterior, a otro punto D cuya distancia AD es conocida y que no esté situado en las rectas AB y AC.

Medimos CAD y ADC con los que podemos obtener AC, como ya sabemos.

Después medimos BAD y BDA lo que nos permite hallar AB. Así pues

$$\left.\begin{array}{l} ABC = 180 - (BCA+BAC) \\[2ex] \dfrac{\text{sen } ABC}{AC} = \dfrac{\text{sen } BCA}{AB} \end{array}\right\} \text{Sistema del que obtenemos ABC y BCA}$$

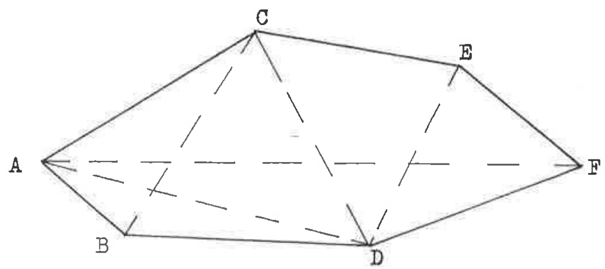
4ª. <u>Levantamiento del plano de una parcela poligonal</u>

El profesor mostrará a los alumnos el contorno de una parcela poligonal de la cual deberán medir los lados y los ángulos, y con todo ello levantar un plano a una escala determinada que previamente les habrá sido fijada.

Queda a la libre elección del profesor la complicación de la parcela en cuanto al número y longitud de sus lados dependiendo del tiempo disponible, lugar de realización, número de alumnos, etc.

5ª. Medición de la distancia desde el punto A donde nos encontramos hasta otro F no visible desde A, bien porque esté alejado de él, bien porque haya un obstáculo entre ambos.

Solución: Tomaremos el siguiente ejemplo:



Desde A trazamos con la ayuda de la cuerda el lado AB; tomamos otro punto visible C y formamos el primer triángulo ABC, del que medimos los ángulos interiores con lo que hallaremos BC, gracias al teorema del seno. Tomamos otro nuevo punto D y medimos los ángulos interiores del triángulo BCD. Como conocemos BC, podemos calcular BD y formamos el triángulo ABD del que sabemos el ángulo ABD y los dos lados AB y BD, aplicando el teorema del coseno hallamos AD. Así tomaríamos otro nuevo punto E que nos formaría dos nuevos triángulos CDE y EDF de los que mediríamos sus ángulos interiores y calcularíamos DF.

Por último consideramos el triángulo ADF del que conocemos los lados AD y DF y el ángulo ADF de los que obtendríamos AF, gracias al teorema del coseno.

ORGANIZACION

Existen multitud de formas distintas de organizar estas prácticas y es difícil dar un modelo que se adapte perfectamente a todas las distintas situaciones. Hecha esta salvedad voy a describir un posible modelo organizativo.

Para las tres primeras prácticas se insta a los alumnos que bajo su criterio formen grupos de 3 ó 4. Cada uno de estos grupos deberá disponer del material descrito anteriormente y el profesor les asignará un lugar donde realizar la práctica (o prácticas) en el cual abrirán un sobre que contiene el enunciado; a continuación cada grupo deberá hallar la solución del problema, tomar las medidas, efectuar los cálculos y reflejarlo en una pequeña memoria que entregarán al finalizar al profesor. Las medidas deberán ser tomadas por todos los miembros del grupo y efectuar los cálculos con la media de ellas. Mientras tanto, el profesor irá visitando a los diversos grupos tomando notas sobre lo que observe y resolviendo pequeñas dificultades que puedan surgir.

Cada profesor discernirá sobre la conveniencia o no de que los alumnos lleven libros y apuntes.

Las prácticas 4ª y 5ª aunque pueden ser realizadas también mediante este esquema, permiten otro tipo de organización distinta: Con los mismos grupos anteriores se trata ahora de realizar la práctica entre toda la clase, debiendo cada grupo ejecutar una parte. Tomemos por ejemplo la 5ª, el profesor distribuirá a los grupos por las estaciones A, B, C, D,... y después con los datos de todos se deberá llegar al resultado final.

EVALUACION

Existen dos formas claramente diferenciadas de concebir estas prácticas; bien utilizándolas solamente por su valor intrínseco, ésto es, dejando que los alumnos tomen conciencia de las posibilidades que tienen en las Matemáticas como herramienta, o bien como un sistema distinto de hacer un examen, para lo cual sería más conveniente que las realizaran individualmente.

Yo sugeriría algo a medio camino entre ambos extremos. Pienso que es fundamental su aspecto pedagógico, pero considero también importante obtener de ellas una nota que nos servirá como un indicativo más y a los alumnos les espolea para realizar la práctica lo mejor posible.

A la hora de poner la nota a los alumnos de un grupo, el profesor, con la memoria delante, puede dirigir a cada uno algunas preguntas cortas que enseguida le delatarán el grado de participación, trabajo y aprovechamiento que ha tenido. Si bien yo incluso recomendaría que sólo se contabilizaran los resultados positivos, pues me parece importante que haya un ambiente distendido, aunque serio, y no desperdiciar la oportunidad de que muchos alumnos pasen un rato, que me atrevería a calificar de agradable, con las Matemáticas, además de contribuir indirectamente a que dominen mejor los casos de resolución de triángulos y la trigonometría en general.

De todas formas, éstas son recomendaciones que a mí en la práctica me han resultado las mejores lo cual no quiere decir que necesariamente lo sean para todos; de todas formas eso es lo de menos porque si estamos de acuerdo en el fondo, poco importa que la forma la establezca cada profesor adaptándose al grupo y a la situación que tiene delante.

LA INFORMATICA EN LA ENSEÑANZA MEDIA

En los momentos presentes se habla, se comenta, se discute la importancia de la Informática en las Enseñanzas Medias, ya sea como objeto de estudio, ya sea como auxiliar, o simplemente como motivo de debate. En la primavera de 1981, bastante adelantados a la actual proliferación didáctica, tuvo lugar una "mesa redonda", organizada por el ICE de la U. Politécnica, de Madrid, con el fin de puntualizar esta situación. Como resumen de lo tratado en dicho simposio, los profesores R. Aguado-Muñoz, J. Fernández Biarge y J.R. Pascual Ibarra, elaboraron el siguiente informe, que, debidamente autorizados, nos complacemos en reproducir.

1. INTRODUCCION

El desarrollo de la Informática en la sociedad actual y su creciente influencia en todas las ramas de la actividad humana hace necesaria la introducción de enseñanzas de informática en el bachillerato, con objeto de preparar al alumno para el profundo cambio operado por la informática dentro de la sociedad.

Numerosos países han incluído temas de informática en los estudios generales y en nuestro país existen experiencias concretas de enseñanza de informática en el bachillerato. Es necesario, por tanto, preparar la introducción de las enseñanzas de informática en el bachillerato estudiando los resultados de las experiencias ya realizadas, los objetivos que se pretenden con la introducción de estos nuevos contenidos y los medios humanos y materiales de que disponemos.

El objetivo de este documento es presentar una síntesis de las ponencias presentadas en el Seminario de Profesores de Matemáticas de Bachillerato que con el título "La Informática en el Bachillerato" se celebró en Madrid los días 11, 12 y 13 de mayo de 1981.

En el documento se exponen los objetivos de las enseñanzas de informática en el bachillerato, las posibilidades de implantación dentro del actual esquema de B.U.P. y algunas orientaciones metodológicas.

2. OBJETIVOS

La introducción de la informática en las enseñanzas del bachillerato debe tender a la consecución de los siguientes objetivos:

2.1. Conocer el vocabulario y los conceptos de carácter informático de uso habitual en la vida moderna, tales como proceso de datos, cinta magnética, etc.

Es obvio que este objetivo elemental debe estar presente debido al papel relevante del tratamiento de la información en la sociedad actual. Pero el propio desarrollo de la informática ha supuesto un cambio tan radical en la concepción y modo de trabajo de prácticamente todas las actividades humanas que se hace necesario renovar la enseñanza en todas las disciplinas. En este sentido se presentan otros objetivos más importantes, como son los siguientes:

2.2. Capacitar al alumno para expresar con claridad los diversos procesos empleados para la resolución de problemas ya sea por medio de algoritmos u otros recursos de lenguajes.

El término "problema" no se refiere sólo a los de tipo matemático y ni siquiera exclusivamente a los de tipo científico, sino a problemas de cualquier carácter y más próximos a las realidades humanas. Este objetivo es claramente imprescindible, si, como es normal hoy día, el trabajo para la resolución efectiva de los problemas se va a encomendar a una máquina.

2.3. Capacitar al alumno para el manejo de una información de carácter complejo como la suministrada por la realidad.

Esta capacitación presenta dos aspectos. En primer lugar, la jerarquización de la información compleja que se consigue ordenándola y clasificándola con vistas a hacer posible su manipulación eficiente. En segundo lugar, la obtención de unidades de información de estructura más compleja.

2.4. Preparar al alumno para el uso de las nuevas formas de lenguaje que requiere la comunicación con las máquinas informáticas.

Estos lenguajes tienen unas exigencias muy distintas de los habituales lenguajes hablado y escrito, y por ello es necesario acostumbrar al alumno a este nuevo tipo de comunicación.

2.5. Preparar al alumno para discernir la eficacia de los distintos procesos de resolución de un problema en función de su economía y de los medios materiales que requieren.

Es importante que el alumno aprenda a relacionar los distintos métodos de resolución de un problema con los medios de cálculo de que dispone, con la economía de tiempo y con la exactitud en los resultados.

3. IMPLANTACION DE LOS ESTUDIOS DE INFORMATICA EN EL BACHILLERATO

Para la consecución de los objetivos señalados se presentan las opciones que exponemos a continuación y que no se excluyen entre sí:

- Orientar la enseñanza de cada una de las materias del Bachillerato con un nuevo espíritu que tenga en cuenta la importancia del tratamiento de la información. Para ello es preciso que los profesores sean conocedores de la transformación que ha supuesto la presencia de la informática en su propia asignatura.

- Establecer la informática como una disciplina nueva, aparte de las demás.

- Introducir temas específicos de informática en los cursos de matemáticas o incluso de física, atendiendo a una cierta afinidad con estas dos disciplinas.

- Por último, como solución más inmediata y prudente, implantar la informática como asignatura optativa dentro del grupo de las E.A.T.P.

De las cuatro opciones, la primera debería subsistir aún en el caso de que se establecieran las otras. Sin embargo, por el momento sus posibilidades son muy limitadas porque requieren planes específicos de formación del profesorado, pero no debe dejar de señalarse como una tendencia para el futuro próximo.

En cuanto a la última opción conviene señalar que sólo puede llevarse a cabo en centros que cuenten con el profesorado y los medios adecuados.

4. ORIENTACION METODOLOGICA

La metodología a emplear en la introducción de las enseñanzas de informática en el bachillerato debe tener en cuenta la edad y los conocimientos del alumno.

Como se ha dicho antes, el mejor enfoque de las enseñanzas de informática sería el multidisciplinar, lo que permitiría ofrecer al alumno una visión más completa de la influencia del tratamiento de la información en cada uno de esos campos.

La comunicación hombre-máquina exige un lenguaje mucho más preciso que los lenguajes hablado o escrito, y requiere además un esquema previo en el que se expresa con claridad el proceso que ha de seguir la máquina en la resolución de problemas. Esto obliga al alumno a realizar un considerable esfuerzo por lo que será necesario partir de ejemplos muy sencillos y aumentar gradualmente la dificultad.

Por otra parte, la introducción de enseñanzas de informática en este nivel permite ofrecer al alumno ejemplos de problemas con datos más reales, acercando más a la realidad algunas disciplinas que tradicionalmente se han presentado de un modo excesivamente simplificado para evitar la complejidad de los cálculos. El manejo de datos reales obliga a un especial cuidado en la selección, clasificación y jerarquización de los mismos, a diferencia de lo que ocurre con los problemas tradicionales en los que se dan únicamente los datos necesarios y en los que el mismo enunciado establece todas las simplificaciones que permitan resolverlo sin excesivos cálculos.

Por último, se considera conveniente proporcionar al alumno suficiente número de ejemplos concretos tomados de aplicaciones reales de la informática en los más variados campos. Esto contribuye, por una parte, a dar a conocer la influencia de la informática en esos campos y, por otra, a habituar al alumno a los métodos de trabajo que se emplean al resolver problemas con ayuda de la informática, tales como consideraciones sobre los medios disponibles, la relativa economía de distintos métodos de resolución, etc.

5. CONCLUSIONES

En vista de la importancia alcanzada por el tratamiento de la información en la sociedad actual, se considera oportuno incluir en el bachillerato enseñanzas de informática.

La introducción de estas enseñanzas de informática, convenientemente enfocadas, significaría un cambio considerable en el modo de enseñanza tradicional de todas las demás materias que constituyen el bachillerato. Esta tarea naturalmente requiere unas acciones en el campo de la formación del profesorado que conlleva una implantación gradual en los centros comenzando con aquellos que poseen el profesorado y los medios adecuados.

Es necesario por tanto fomentar las experiencias que se están llevando a cabo en distintos centros, dando a conocer a otros profesores interesados los resultados de las mismas.

***
*****

- 3. PEQUEÑAS IDEAS -

"Pequeñas Ideas" es una experiencia de los ICEs de las Universidades Autónomas y Politécnica cuyo objetivo era la recogida y difusión de contribuciones con experiencias de clase, nuevos enfoques de temas conocidos, demostraciones interesantes, problemas especialmente adecuados, etc., etc., que constituyen una parte importante de nuestro bagaje profesional y que muy raras veces se comparten.

A pesar de la modestia de nuestros medios, "Pequeñas Ideas" estaba teniendo una estimulante acogida entre el profesorado. Por ello nos sentimos muy satisfechos de saludar la aparición del Boletín que a partir de ahora incorpora a "Pequeñas Ideas" como nueva sección.

Así pues volvemos a animar a nuestros colegas a enviarnos sus colaboraciones que desde este momento podrán contar con un marco mucho más adecuado.

J. Colera
I.C.E. de la U. Autónoma

M. Pacios
I.C.E. de la U. Politécnica

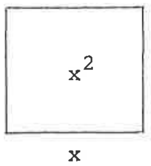
Aplicaciones de la geometría a la obtención de relaciones aritméticas

Entre las "pequeñas ideas" que hemos recibido seleccionamos para este número del Boletín varias que tienen algo en común: utilizar la intuición geométrica para obtener relaciones algebráicas.

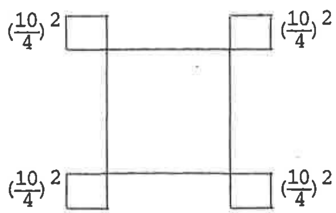
Comenzaremos por dos métodos para la resolución de ecuaciones. El primero de ellos es válido para resolver ecuaciones del tipo $x^2 + p x = q$ con p y q positivos, mientras que el segundo resuelve $x^2 = p x + q$ con p y q positivos y $x > p$. Ambos métodos se deben al matemático árabe Al-Juwarizmi (S. IX).

I. Encontrar una de las soluciones de la ecuación $x^2 + 10 x = 39$.

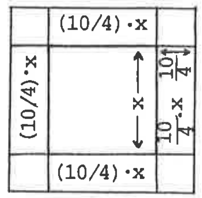
Construimos un cuadrado cuyo lado, x, será la solución de la ecuación



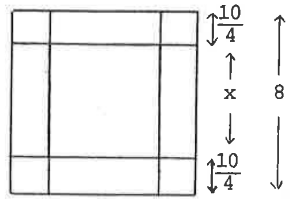
Añadimos en cada vértice un cuadrado de lado 10/4 (Coeficiente de la x dividido por 4)



El nuevo cuadrado tendrá un área: $x^2 + 4(10/4\ x) + 4(10/4)^2 = x + 10 x + 25 = 39 + 25 = 64$, (donde se ha tenido en cuenta que, por la ecuación, es $x^2 + 10 x = 39$).



Puesto que el área es 64, el lado del cuadrado es 8, es decir, $10/4 + x\ 10/4 = 8$; $\boxed{x = 3}$



Los datos han sido tomados de:

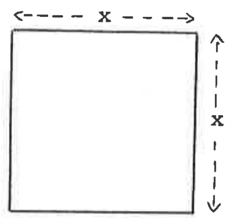
- Historia de la Matemática, Rey Pastor y José Babini, Espasa Calpe.
- Historia de la Ciencia Arabe. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid (1981).

Grupo Azarquiel de Matemáticas de Madrid (GAMMA).

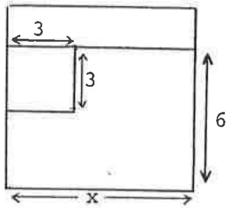
*****

II. Encontrar una solución de $x^2 = 6 x + 16$.

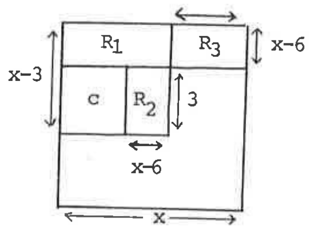
Construimos un cuadrado de lado x.



Sobre un lado llevamos el coeficiente de la x y construimos un cuadrado de lado la mitad del coeficiente



Ahora trazamos el cuadrado de lado x-3 y vemos que se forman dos rectángulos de lado menor x-6 y lado mayor 3 como se ve en la figura.



Por tanto, el área del cuadrado de lado x-3 es igual a la suma de las áreas del cuadrado C y los rectángulos R_1 y R_2. El rectángulo R_2 es igual al R_3, luego:

$$(x-3)^2 = 3^2 + x(x-6)$$

Como la ecuación $x^2 - 6x$ es igual a 16, nos queda:

$$(x-3)^2 = 9 + 16; \quad (x-3)^2 = 25$$

de donde x-3 = 5, y

$$\boxed{x = 8}$$

Esta nota ha sido obtenida de:

- Histoire des Mathématiques pour les Colleges, Marie-Louise Hocquenghem et. al. Edit. CEDIC, 1980.

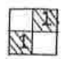
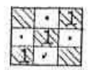
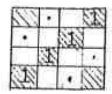
Enrique RUBIALES CAMINO.

*****

En los siguientes ejemplos se utilizan cuadrículas para visualizar propiedades algebráicas: la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales; la suma de los n primeros números impares y la suma de los n primeros números pares. Los tres ejemplos ilustran el método de inducción.

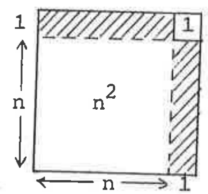
III. Fórmula de la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales.

Tomamos una unidad de dibujo |-| y representamos x^2 por el área de un cuadrado de lado x. El área de cada cuadrado la descompondremos en la suma de las áreas de zonas simétricas respecto de la diagonal.

1^2 $\quad 2^2 = 1+1+2\cdot1 \quad 3^2 = 1+1+1+2(1+2) \quad 4^2 = 1+1+1+1+2(1+2+3)$

Veamos que verificándose esta fórmula para n, también se verifica para n+1.



$$(n+1)^2 = n^2 + 2\cdot1\cdot n+1$$

Sustituyendo

$$n^2 = \overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{\leftarrow n \text{ sumandos} \rightarrow} + 2(1+2+3+\ldots+(n-1))$$

resulta

$$(n+1)^2 = 1+1+1+\ldots 1+2(1+2+3+\ldots(n-1)) + 2\cdot 1\cdot n + 1 =$$

$$= \overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{\leftarrow n+1 \text{ sumandos} \rightarrow} + 2(1+2+3+\ldots+(n-1)+n)$$

como queríamos demostrar.

Por tanto, tendremos que sumar las siguientes igualdades: (sumaremos por columnas)

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1+1+2\cdot 1$$

$$3^2 = 1+1+1+2(1+2)$$

$$4^2 = 1+1+1+1+2(1+2+3)$$

....

$$n^2 = 1+1+1+\ldots+1+2(1+2+3+\ldots+(n-1))$$

$$\sum_1^n x_i^2 = n+(n-1)+\ldots+1+2((n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\ldots+(n-1)(n-(n-1)))$$

$$\sum_1^n x_i^2 = \frac{1+n}{2}\cdot n + 2(n(1+2+3+\ldots+(n-1)) - (1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)$$

Sumando y restando n^2 resulta:

$$\sum_1^n x_i^2 = \frac{n^2+n}{2} + 2(n\cdot n/2(n-1) - \sum_1^n x_i^2 + n^2)$$

$$3\sum_1^n x_i^2 = \frac{n^2+n}{2} + n^2(n-1) + 2n^2$$

$$\sum_1^n x_i^2 = 1/3\ \frac{2n^3+3n^2+n}{2}$$

$$\boxed{\sum_1^n x_i^2 = n^3/3 + n^2/2 + n/6}$$

M. RICO.- I.B. Fortuny.

*****

IV. Suma de los n primeros números impares.

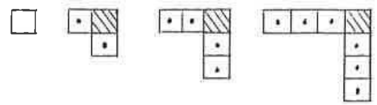
Veamos cómo se escribe un número impar teniendo en cuenta el lugar que ocupa en la sucesión de números impares:

El 1^{er} número impar $= 1 = 2\cdot 0+1$

El 2º número impar $= 3 = 2\cdot 1+1$

El 3^{er} número impar $= 5 = 2\cdot 2+1$

El 4º número impar $= 7 = 3\cdot 2+1$

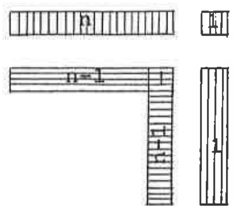


1 $3=2\cdot 1+1$ $5=2\cdot 2+1$ $7=2\cdot 3+1$

⋮

El número impar que ocupa el lugar veinte $= 2\cdot 19+1$

⋮



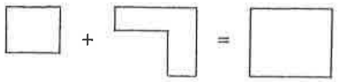
El número impar que ocupa el lugar $n = 2(n-1)+1$	Rayado horizontalmente el número impar de lugar n $= 2(n-1)+1$
$\vdots$	Rayado verticalmente el número impar siguiente, o sea el de lugar n+1 $= 2n+1$
El número impar que ocupa el lugar $n+1 = 2n+1$	

Es fácil ver fijándonos en los gráficos que:

Sumando dos impares se forma un cuadrado de lado dos.

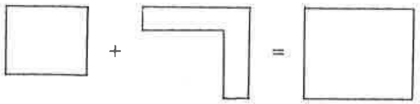
$$1 + 3 = 2^2$$

Sumando tres impares resulta un cuadrado de lado tres.



$$1+3 + 5 = 3^2$$

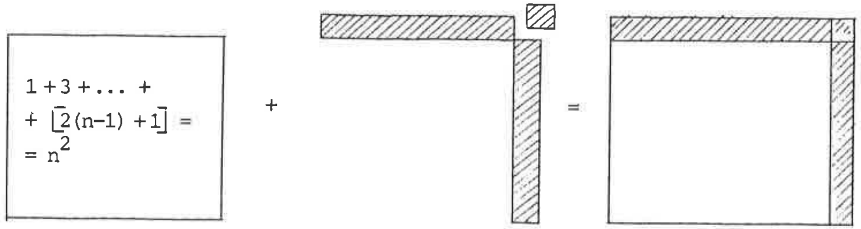
Sumando cuatro números impares resulta un cuadrado de lado cuatro.



$$1+3+5 + 7 = 4^2$$

Llamando orlar un cuadrado a pasar al cuadrado cuyo lado es la unidad mayor, observamos que sumados un número de números impares sumar el siguiente impar es "añadir" una orla.

Admitimos que sumando "ene" números impares resulta un cuadrado de lado n.



$$n^2 + \underbrace{2 \cdot n+1}_{\text{impar de lugar } n+1} = (n+1)^2$$

Demostramos que sumando n+1 números impares resulta un cuadrado de lado n+1.

Es fácil ver en la figura que admitido que la suma de n números impares es n^2 se ha demostrado que la suma de n+1 números impares es $(n+1)^2$.

Queda demostrado por INDUCCION completa que

$$1 + 3 + 5 + \dots + [2(n-1)+1] = n^2$$

V. <u>Suma de los n primeros números pares</u>.

Expresamos los números pares en función del lugar que ocupan la sucesión de números pares

El 1^{er} número par $= 2 = 2\cdot 1$

El 2ª número par $= 4 = 2\cdot 2$

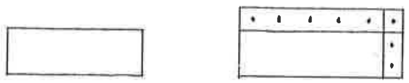
El 3^{er} número par $= 6 = 2\cdot 3$

$\vdots$

El número par de lugar n = $2\cdot n$

El número par de lugar n+1 = $2(n+1)$

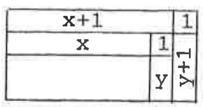
Dado un rectángulo, llamaremos rectángulo orlado al que resulta de aumentar la base en una unidad y la altura en una unidad



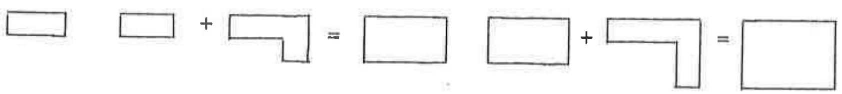
Veamos que:

Si tenemos un rectángulo orlado cuya orla es un número par y lo orlamos de nuevo, la nueva orla es precisamente el número par siguiente.

Decimos que la 1ª orla = $x + y + 1$ es un número par. La 2ª orla = $(x+1) + (y+1) + 1 = (x+y+1) + 2$ es el número par siguiente.



Representación gráfica de varios casos de sumas de números pares:



$2 \qquad 2 + 4 = 2\cdot(2+1) \qquad 2+4 + 6 = 3\cdot 4 =$

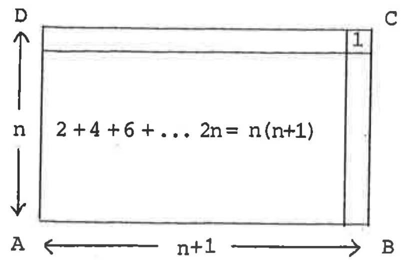
$= 3\cdot(3+1)$

(1) En general, tendremos que demostrar que la suma de n números pares es igual a un rectángulo de base n+1 y altura n, es decir:

$$2 + 4 + \ldots + 2n = n\cdot(n+1) \qquad (1)$$

Demostración por inducción completa.

Supongamos que es cierto que la suma de n números pares es un rectángulo de base n+1 y altura n



La orla es igual

$$(n+1) + n + 1 = 2n + 2 = 2(n+1)$$

Luego el rectángulo

$$ABCD = 2 + 4 + \ldots + 2n + 2(n+1)$$

es igual también a

$$(n+1)\cdot(n\cdot 2)$$

Luego queda demostrado que si sumamos n números pares resulta

$$n\cdot(n+1)$$

M. Rico; I.N.B. Fortuny.

***
*****

- 4. VARIA -

- En Salamanca se han celebrado a finales de Septiembre las II Jornadas de Didáctica Matemática patrocinadas por el Seminario Permanente de Matemáticas de aquella ciudad.

- Durante el mes de Septiembre ha tenido lugar en Madrid un Congreso de Didáctica, con diversas secciones, entre las que destacó la de Matemáticas.

- El Seminario de Historia de las Matemáticas, que dirige Mariano Martín en la Fac. de Matemáticas de la U. Complutense (Madrid-3) ha comenzado su actividad este VI curso con el programa que se detalla:

Tema I	:	"LA MATEMATICA EN PLATON Y ARISTOTELES". (Tres sesiones). MARIANO MARTINEZ.
Tema II	:	"LOS LIBROS 'SOBRE CONOIDES Y ESFEROIDES' Y 'SOBRE LAS ESPIRALES' DE ARQUIMEDES". (Tres sesiones). FRANCISCO HERRERO.
Tema III	:	"EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE ESPACIO DURANTE LOS SIGLOS XV Y XVI". (Tres sesiones). MARIANO MARTINEZ.
Tema IV	:	"LA OBRA MATEMATICA DE FERMAT". (Dos sesiones). MARIO RODRIGUEZ.
Tema V	:	"LA 'INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM' DE EULER". (Tres sesiones). MARIANO MARTINEZ.
Tema VI	:	"LA EPOCA DE PLENITUD DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA HACIA MEDIADOS DEL SIGLO XIX". (Tres sesiones). GREGORIO HERNANDEZ.
Tema VII	:	"EL DESARROLLO DEL ALGEBRA DURANTE LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XIX". (Cuatro sesiones). IGNACIO LUENGO.
Tema VIII	:	"LA TEORIA DE LA DIMENSION DESDE CANTOR A MENGER Y URYSHON". (Tres sesiones). JUAN TARRES
Tema IX	:	"LA TEORIA DE ALGEBRAS DE OPERADORES (VON NEUMANN, GELFAND)". (Tres sesiones). JUAN MARIA LOPEZ DE SA - FERNANDO BOMBAL.

- La falta de publicaciones en español sobre didáctica de las Matemáticas es patente. Además de la archiconocida publicación francesa de la APMEP, los interesados pueden consultar en la Biblioteca de Profesores de la Facultad de Matemática de la U. Complutense (Madrid 3), las siguientes (ninguna en catellano, por desgracia):

    - The Mathematical Gazette.
    - Mathematics Magazine.
    - The Mathematics Teacher.
    - Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik.
    - Educational Studies in Mathematics.
    - The American Math. Monthly.

  El acceso a la Biblioteca es pública y hay facilidades para obtener fotocopias.

- Los profesionales de las Matemáticas y la Física han recibido este año la reposición de Galileo, aunque con "cierto" retraso, con la natural alegría.

- Todo profesor de Matemáticas deberá tener presenta la frase de Max Dehn (recuérdese el famoso teorema de Dehn sobre el cálculo de volúmenes de poliedros): "Las Matemáticas son la única disciplina que puede presentarse de forma totalmente adogmática" (Discurso en Frankfurt am Main, 1928).

- En la enseñanza de las matemáticas, en cualquiera de sus niveles se han perdido ingentes cantidades de información. El siguiente ejercicio, propuesto a alumnos de 1º de BUP, no fue resuelto por <u>ninguno</u> entre más de 80 chicos.

  "Probar que si n y n+1 son enteros consecutivos, son primos entre sí".

  Por otra parte, la enseñanza superior ha visto desaparecer capítulos enteros de análisis "serio" en beneficio de otras formalizaciones. Pocos licenciados actuales serán capaces de sumar una serie como

$$\frac{1}{5} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2n-1)!!}{n!\ 5^{n+1}} \quad ; \quad \text{Solución: } \frac{1}{\sqrt{15}}$$

(Utilícese la fórmula de Wallis...).

- Proponemos desde aquí la incorporación a la enseñanza de las Matemáticas elementales de más geometría y de una iniciación a la astronomía de posición. Es claro que la introducción de los microcomputadores deberá aliviar (¿o no?) el miedo a los terribles cálculos logarítmicos.

- El Servicio de Publicaciones del M.E.C., a instancia de nuestra Sociedad, se propone reeditar la obra del profesor Puig Adam, <u>"La Matemática y su enseñanza actual"</u>.

***
*****