SOCIEDAD

CASTELLANA

PUIG ADAM

DE PROFESORES

DE MATEMATICAS

BOLETIN Nº 19

OCTUBRE 1988

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Octubre de 1988 — nº 19 (1988-89)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en

Ronda de Atocha, 2 (INBAD)

- La correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge

INDICE

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS Y CENTROS ADHERIDOS A LA MISMA. NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Francisco Lorenzo Miranda

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Vicesecretario: Francisco Quesada Cobo

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

JOSE FRANCISCO CARBALLIDO QUESADA

Nota necrológica
por
F. Javier López de Elorriaga (*)

El pasado día 10 de Setiembre fallecía en Madrid José Francisco Carballido Quesada, después de 8 días de lucha entre la vida y la muerte en la unidad de cuidados intensivos del Hospital Clínico. Había sido ingresado el día 2 de Setiembre a causa de un grave accidente de circulación en el que había fallecido su madre que le acompañaba. Su novia, que también iba con él,padece varios traumatismos de los que poco a poco se va recuperando.

Desde los sentimientos que me embargan en estos momentos, voy a procurar realizar su semblanza.

1.- Su vida en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Madrid

Conocí a José Francisco cuando comenzó a prestar sus servicios como profesor en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Madrid (1 de Octubre de 1980). Poco antes se había producido una vacante en la Cátedra del Grupo II "Matemáticas II". Como titular de la misma Cátedra tuve que ocuparme de la selección de quien había de ocupar la plaza.

Contacté, entre otros, con Don Enrique Linés (q.e.p.d.) para que, presentara posibles candidatos y José Francisco fue uno de ellos.

Después de las formalidades del caso y de una entrevista, fue el seleccionado.

1.1.- Primeros años

Comenzó como profesor encargado de curso impartiendo clase de Cálculo Infinitesimal en un grupo de Primer año de carrera. Así estuvo dos cursos académicos en que compatibilizó su labor en la Escuela con su trabajo en un Centro de Bachillerato.

En Setiembre de 1982 obtuvo por concurso nacional (convocado en el B.O.E. de 1 de Setiembre de 1982) una plaza de Profesor Agregado contratado de cinco años de duración, a dedicación exclusiva.

Durante estos primeros años (cursos 80/81, 81/82, 82/83 y 83/84) en la Escuela, su labor fue callada pero fecunda. Todos, alumnos y compañeros, lo recuerdan con cariño, por sus clases bien preparadas, bien explicadas, amenas, haciendo hincapié en las aplicaciones, sobre todo en la materia de Segundo curso de carrera, "Ampliación de Matemáticas", que comenzó a explicar durante el curso 82/83. Destacaban ya sus dotes de claridad explicativa, de organización y de atención a los alumnos fuera de clase.

1.2.- <u>Su labor como Secretario</u>

En Junio de 1984 el que ésto suscribe fue elegido por la Junta de la Escuela como Director de la misma, y propuse a José Francisco como Secretario del Centro, siendo efectivamente nombrado para desempeñar el cargo por resolución del Rector de la Universidad Politécnica de Madrid de fecha 1 de Julio de 1984.

En este puesto es donde comenzó a ser conocido y apreciado, no sólo en el ámbito necesariamente más restringido de la Cátedra, como Profesor de Matemáticas, sino por todo el personal del Centro y aún fuera del mismo.

Destacó por sus cualidades de trato humano, atención a todas las necesidades y eventualidades, iniciativa y proyección de futuro.

Gracias a su ayuda se preparó un informe documental de las necesidades materiales del Centro, con abundantes fotografías que él mismo obtuvo pacientemente.

El dossier fue elevado a la superioridad y tuvo una trascendencia impensable, comenzando a rendir sus frutos para la Escuela en forma de una fuente de ayuda para laboratorios, salón de actos, comedor, remodelación de servicios, etc. Fue además el origen de otros varios que habían de seguir en el futuro.

En el año 1985 José Francisco obtuvo brillantemente por concurso la plaza de

Profesor titular de Escuela Universitaria, en el área de Matemática Aplicada. Fuí presidente de la Comisión que juzgó dicho concurso. LLamó la atención su lección magistral, en la que planteó su contenido (teorema de existencia de solución de una Ecuación Diferencial) en tres niveles diferentes:

- El problema y su solución matemática.
- Las aplicaciones.
- Discretizaciones posibles.

1.3.- <u>Su período de Director</u>

En Julio de 1986 fuí nombrado Vicerrector de Ordenación Académica de Escuelas Universitaria de la Universidad Politécnica de Madrid, quedando vacante la Dirección de la Escuela.

En Setiembre de ese mismo año José Francisco fue elegido por la Junta del Centro como Director de la Escuela, poniéndose a trabajar inmediatamente en una doble línea:

- Mejora de medios humanos y materiales.
- Nuevo plan de estudios.

En tan breve período muchas son las metas conseguidas:

- Culminación de la creación de la estructura departamental en el Centro.
- Centro de Cálculo de la Escuela.
- Inauguración de las obras (comedor, salón de actos, laboratorios, servicios, etc.)
- Link's 88 (encuentro internacional).
- Presupuestos extraordinarios para necesidades urgentes de laboratorios.
- Profusa numerización del profesorado.
- Transformación del profesorado contratado.
- Convenios internacionales.
- Intercambios de alumnos.
- Maduración del plan de estudios.

2.- Otros aspectos de la vida de José Francisco Carballido

2.1. El profesor de Matemáticas

Ya se han señalado más arriba sus cualidades como profesor y, específicamente, como profesor de Matemáticas.

Estuvo siempre interesado en todos los aspectos de la Matemática aplicada y de ésta en relación con su didáctica.

Es de destacar a este respecto que ya en el segundo número de este Boletín (año 1983) aparece publicado su, a mi juicio, primer trabajo publicado: "SOBRE LA RESOLUCION DE TRIANGULOS", que él mismo me entregó y yo presenté a nuestro querido compañero José Ramón Pascual Ibarra, entonces presidente de la Junta Directiva de la Sociedad Castellana de Profesores de Matemáticas "Puig Adam". Por aquellas fechas nos encargábamos de la confección del Boletín junto con los amigos José Miguel Pacheco (que hacía de coordinador), Fernando Palancar y Enrique Velázquez. El trabajo ocupa las páginas 59 a 66 del mencionado Boletín número 2.

La vida de José Francisco ha estado muy ligada a nuestra Sociedad. Al cesar como Secretario de la misma Enrique Rubiales Camino (amigo entrañable), propuse y fue aceptado por la Asamblea que José Francisco le sucediera en el cargo (25 de Mayo de 1984).

En el número 6 del Boletín aparece un nuevo trabajo de José Francisco: "GRAFICA DE UNA FUNCION" y en el número 7, otro sobre "EL INFINITO: BREVE RECORRIDO HISTORICO" (Noviembre de 1985).

En el número 14 del mismo Boletín se hace referencia (pags.3 y 4) al cese de José Francisco como Secretario de la Junta Directiva en estos elogiosos y justos términos que honran a su autor (ignoro quien sea) y a quien van dirigidos:

"Ha cesado como Secretario nuestro compañero José Francisco Carballido, que durante tres años ha trabajo con ahínco en los asuntos de la Sociedad, pero al que su cargo

de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial le impide continuar con su esforzada labor en nuestra Secretaría, que todos debemos agradecerle".

2.2.- José Francisco Carballido investigador

Es difícil separar las diferentes facetas de una vida. En este sentido se entremezclan los aspectos didácticos y los trabajos de investigación.

Merecen destacarse los siguientes trabajos, además de los arriba reseñados:

1.- "PRACTICAS EN EL LABORATORIO DE MATEMATICAS", presentado en las IV Jornadas nacionales sobre aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas" (Tenerife 1984).

2.- "THE MATHEMATIC LABORATORY", presentado en el SEFI 85 y publicado en los Proceedings del mismo (pags. 205 a 209).(Madrid 1985).

3.- "EL LABORATORIO DE MATEMATICAS". Comunicación presentada en el I Congreso Internacional sobre investigación en la Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas (Barcelona 1985).

4.- "INDUSTRIAL PRACTICES IN THE MATHEMATICS LABORATORY". SEFI 86.Edimburgo.

5.- "MATHEMATICS AS INTERDISCIPLINARY TOOL FOR TRAINING OF ENGINEERS".SEFI 87. Helsinki. (coautor con Agustín de la Villa).

6.- "HOMOTETIC SETS: COVERING PROBLEMS", presentado en el Congreso sobre "Topology and Measure V". Binz (R.D.A.).(coautor con Agustín de la Villa, compañero de la Escuela)

7.- "MATHEMATICS CURRICULUM IN ENGINEERING", presentado con el compañero Agustín de la Villa en el 5º Seminario Europeo sobre enseñanza de Matemáticas en Ingeniería (Plymouth. Marzo 1988).

8.- "CURRENT STATUS OF THE CONTINUING EDUCATION OF ENGINEERS IN SPAIN: AND SPECIFIC EXEMPLE". Comunicación aceptada para el 1. European Forum for Continuing Engineering Education, a celebrar en Stuttgart (R.F.A.) en Noviembre-Diciembre de 1988, y que desgraciadamente ya no podrá presentar.

Como puede deducirse de todo lo anterior, su máxima preocupación se centró en sus investigaciones sobre la didáctica de las Matemáticas en la Ingeniería.

2.3.- Proyección de José Francisco Carballido

José Francisco no se contentó con enseñar, investigar y realizar funciones directivas. Supo proyectarse fuera del reducido campo de actuación de su querida Escuela y no sólo en el terreno de sus trabajos.

A este respecto hay que destacar:

1.- Visita a la Universidad de Birmingham para estudiar posibles bases de colaboración.(1987)

2.- Asistencia a diversas reuniones sobre planes de Estudio de Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial. (Valencia. Febrero 1988...)

3.- Estudio de las posibilidades de colaboración con la Fachhochschule de Frankfurt y la Universitat de München, en un viaje realizado a ambas ciudades alemanas.

Supo también aprovechar sus dotes de Organizador y con sus colaboradores más directos y contando con la ayuda de empresas y del Colegio Oficial de Peritos e Ingenieros Técnicos Industriales de Madrid montó Link's 88, jornadas de aproximación a la Ingeniería Europea, representada por dos Centros, uno de Gran Bretaña y otro de Alemania, con gran éxito de asistencia y de realizaciones concretas.

3.- Reflexión final

No es fácil cerrar esta nota. Los hechos y los recuerdos de la vida de José Francisco se amontonan y se entrecruzan en la mente. Ha dejado un gran y grato recuerdo en cuantos le conocieron: amigos, compañeros, alumnos, personal todo de la Escuela en la que tanto trabajó, superiores y en toda persona por poco que le tratara en el ámbito de la Universidad Politécnica de Madrid y fuera de ella.

Como cualidades debo destacar su mente pragmática y ejecutiva; su entusiasmo e iniciativa contagiosos; el ser un rematador nato de cuantas acciones emprendía; su lealtad en la colaboración y el ser un gran conversador con un sentido eutrapélico de la vida y una dedicación total a todos.

Desde estas pobres líneas un recuerdo emocionado al compañero, amigo y colaborador leal que siempre fue José Francisco Carballido, cuya vida ha quedado truncada a sus 35 años cuando estaba rindiendo opimos frutos (D.E.P.)

No me resisto a trasladar literalmente las palabras que en el discurso de inauguración del Año académico 1988-1989 en la Universidad Politécnica de Madrid pronunció su Rector Magnífico, Excmo. Sr. D. Rafael Portaencasa Baeza, refiriéndose a José Francisco:

"Quiero también, en el inicio de este acto, recordar a aquéllos que hoy no nos pueden acompañar y que siempre estuvieron a nuestro lado. Muy especialmente me quiero referir al Profesor Carballido, Director de nuestra Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial, fallecido muy recientemente en un ingrato accidente, en la flor de su juventud. El profesor Carballido fue siempre un leal colaborador, un entusiasta universitario, y un excelente Director de uno de nuestros Centros. Nuestro recuerdo y gratitud para él, al que nunca olvidaremos."

* Catedrático de "Matemática Aplicada" de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Madrid y actual Vicerrector de Ordenación Académica de Escuelas Universitarias y Orientación Pedagógica y Profesional de la Universidad Politécnica de Madrid.

In memoriam:

DON ENRIQUE LINES ESCARDO

Por José Javier Etayo

La forzosa incomunicación que el veraneo trae consigo acumula a su terminación las noticias de todos los sucesos que en el han ocurrido: difícilmente falta entre ellas la de algún hecho luctuoso. Esta vez me llegó en el momento mismo de pisar mi casa: había fallecido un entrañable amigo, compañero y maestro, D. Enrique Linés. Para todos fue una sorpresa: no hubo más que dar cuenta de ello en las Jornadas Hispano-Lusas que a la semana siguiente se celebraron en Valladolid para comprobar, junto a lo inesperado, lo doloroso que este triste acontecimiento resultaba para todos.

Yo había conocido a Linés tempranamente, durante el curso 1945-46 que fue el primero de mi licenciatura en Zaragoza y también su primer curso de catedrático de Análisis. Llego ya empezadas las clases y antes del final se había trasladado a la cátedra de Barcelona. Pensamos entonces que habíamos perdido un gran profesor pero también -cosa de chicos- un probablemente duro examinador y calificador. Tal era la impresión que nos producía cuando su mirada inquisitorial iba buscándonos para preguntarnos sobre las cuestiones que en su disertación trataba.

Poco supe ya de él hasta que volví a verle en 1962, en la III Reunión Anual de Matemáticos Españoles que se celebró en Barcelona. Era ya aquel hombre joven que todos hemos conocido y que mantuvo figura y presencia muy por debajo de su edad hasta el punto de resultarnos increíble haber perdido, y tan abruptamente, a este juvenil maestro de casi setenta y cuatro años.

Nació, efectivamente, el 8 de noviembre de 1914 en Logroño, donde comenzó el bachillerato, que continuó en Barcelona, y en esta Universidad, y en la de Madrid, realizó sus estudios de licenciatura y finalmente el doctorado. Es curioso que su tema de tesis estuviera relacionado con el cálculo de probabilidades y también que explicase en la Facultad lecciones de astronomía, y bastantes compañeros me han comentado que fueron alumnos suyos en esa asignatura. Lo que da una idea de su versatilidad y de la gran curiosidad que sentía hacia distintos campos de la matemática. Pero el centro de su interés lo constituye el análisis matemático y así fue como en Barcelona, incorporado ya a aquella cátedra, renueva las enseñanzas introduciendo ya desde el segundo curso el estudio sistemático del cálculo diferencial en espacios normados y la integración en variedades. Allí permanece hasta el curso 1970-71 en que se traslada a la Universidad Complutense y es, por tanto, la etapa barcelonesa la que verdaderamente define su labor.

Rellénese este tiempo con todos aquellos trabajos adicionales y pesadas cargas que, a veces, si no quiere ver perturbada su misión docente, afligen al profesor universitario, sobre todo reúne las cualidades de ponderación, sensatez y discrección que adornaban a Linés. Así fue durante diez años Secretario General de la Universidad de Barcelona, representante en la Comisaría de Protección Escolar, fundador y director durante algún tiempo de "Collectanea Mathematica", autor de distintas memorias de investigación, Consejero adjunto del Patronato "Alfonso el Sabio" del C.S.I.C.; y habría que reseñar que ya en 1942 le había sido concedido el premio de este Consejo. Estudió y explicó en las universidades de Jena, Maryland y, más adelante, en Valencia (Venezuela), y visitó distintas universidades norteamericanas. Pero, sobre todo, cultivó la afición -al final inclinada hacia la teoría de números- de sus discípulos que siempre le manifestaron un cariño sincero.

Ya en Madrid, no disminuyeron las solicitudes para colaborar en aquellas cuestiones que precisasen ideas muy claras o

también que fueran lo bastante molestas y comprometidas para que nadie quisiera cargar con ellas. Y hablo de ponencias, comisiones, informes, tribunales,... Durante seis años fué también presidente de la Real Sociedad Matemática Española y en 1982 ingresó en la Real Academia de Ciencias. Colaboró muy estrechamente con la UNED para la que escribió dos excelentes textos de Análisis II y IV y, por fin, se trasladó a esa Universidad, de cuya Facultad de Ciencias fué Decano, después de haber permanecido algo más de diez años en la Complutense.

En la UNED, nombrado finalmente emérito tras su jubilación, siguió desempeñando su labor sin interrupción, preocupado tan sólo por las dificultades que para ello le oponían unas progresivas cataratas, y sin pensar, probablemente, que otro mal, mucho más agudo y cruel, agotaría en pocos días su permanencia en el tiempo.

Pero más que el resumen de algunas de sus actividades y méritos me asalta ahora su recuerdo traído desde el sentimiento que no de un simple acopio de datos. Porque Linés fue ante todo para mi un amigo sin fisuras desde nuestro reencuentro y, más aún, desde su venida a Madrid. Mi afecto verdadero por él podía contar, estoy seguro, con el suyo, lo mismo que tantos otros de sus amigos. Su amistad era lo bastante generosa para no negarnos nunca su apoyo. De cualquier cosa que se le pidiera, dar una conferencia, escribir un artículo,... podíamos esperar su aquiescencia, aun sin consultarle: casi parecía él el agradecido. Dice en un escrito reciente: *"A finales del curso pasado fui invitado a tomar parte en una semana cultural organizada por uno de los Institutos de la zona sur de Madrid. Atiendo estas invitaciones con gusto y procuro que la temática sea adecuada y de interés para un público joven..."*. En nuestro Boletín tenemos constancia de esta su disposición a colaborar siempre que se le pidió.

La elegancia de sus escritos, el entusiasmo de sus palabras, el hecho de presentar de cada cosa un cúmulo de facetas al estudiarla desde distintos puntos de vista, no sólo ni necesariamente el matemático, hace que sus trabajos sean seguidos casi con glotonería. Todos recordamos, porque fue publicada íntegramente en este Boletín, aquella conferencia dada en la Academia de Ciencias en la que buscaba poner de manifiesto los valores estéticos de la matemática. En Linés se daba el caso, realmente insólito, de que un periódico, "La Vanguardia", le pidiera, creo recordar, ¡la colaboración semanal de un artículo de matemáticas! Esta elocuencia no era rebuscada sino que se sentía en su mismo trato personal, tan agradable, ameno y certero.

Quedaría incompleto este defectuoso dibujo si no aludiera finalmente a otra de sus cualidades, bien que acercándome a ella con delicadeza suma, ya que ahí tocamos el hondón del misterio del alma humana: su fe religiosa. Era la de Linés confiada y firme a la vez que reflexiva y muy meditada. Ni alardeó de ella ni tampoco la ocultó con falsos respetos humanos. Informó todos sus actos y la vivió con sencillez y profundidad de cristiano viejo: "católico, apostólico y riojano", que solía decir. Que, cumplida su esperanza, haya acogido el Señor con clemencia su alma generosa y fiel.

CENTENARIO DEL NACIMIENTO DE REY PASTOR

Se cumple en este año el centenario del nacimiento de don Julio Rey Pastor. Del 4 al 7 de Octubre se ha celebrado en Logroño el II Simposio Internacional sobre este gran maestro, al que han asistido un centenar de matemáticos españoles y extranjeros. En nuestro próximo boletín conmemoraremos este centenario del gran científico español cuya caricatura, surgida de la pluma de Puig Adam, encabeza estas líneas.

\- - -

HOMENAJE A PUIG ADAM

El día 10 de Octubre se le ha rendido un homenaje a la memoria de don Pedro Puig Adam en la Escuela de Ingenieros Industriales, donde él impartió sus clases durante largos años. En el próximo número de este Boletín daremos amplia información sobre este acto.

\- - -

N O T I C I A S

XIII JORNADAS HISPANO-LUSAS DE MATEMATICAS

Se han celebrado en Valladolid durante los días 6 a 9 de septiembre, continuando la costumbre anual de reunir a los matemáticos de todas las especialidades, españolas y portuguesas. El año próximo serán organizadas por la Universidad de La Laguna.

VI COLOQUIO INTERNACIONAL DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

En Santiago de Compostela, durante los días 19 a 23 de septiembre se ha celebrado este nuevo coloquio al que han concurrido notables especialistas de todo el mundo y ha alcanzado un alto nivel científico.

NUEVA ASOCIACION DE MATEMATICA APLICADA

En una reunión de matemáticos celebrada en Marzo pasado se acordó promover la creación de la "Asociación Matemática Aplicada a las Ciencias y a la Industria" (AMACI). Se espera dar forma definitiva a este proyecto aprovechando la celebración del XI CEDYA (Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones) y del Congreso de Matemática Aplicada que tendrá lugar en Málaga en Septiembre u Octubre de 1989. Los interesados en esta iniciativa pueden dirigirse a Manuel Casteleiro, Dpto. de Matemática Aplicada, ETS d'Enginyers de Camins, Universitat Politècnica de Catalunya (c/ Jordi Girona Salgado, 31; 08034 Barcelona).

SEXTO CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS PARA ALUMNOS DE B.U.P. Y F.P.

El Concurso de Resolución de Problemas de 1988, convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras para alumnos de B.U.P. o F.P. seleccionados por sus Centros, según anunciábamos en nuestro Boletín 17, se celebró el pasado día 25 de Junio.

Las pruebas se desarrollaron por la mañana en el Instituto "Beatriz Galindo", que una vez más nos cedió amablemente los locales, y la entrega de premios y diplomas tuvo lugar en el Salón de Actos de ese Instituto, el mismo día, a última hora de la tarde.

Participaron en esta sexta convocatoria de nuestro Concurso, 34 alumnos de primero, 45 de segundo y 35 de tercero, o sea, bastantes menos que en los últimos años, lo que puede achacarse en unos casos al retraso en la recepción de la convocatoria y en otros a las alteraciones de la vida académica registradas en los meses anteriores.

Las pruebas consistieron en la resolución de cuatro problemas, en dos tandas, distintos para cada curso. Damos los enunciados al final de esta crónica.

En el acto de entrega de premios, nuestro Presidente Sr. Lorenzo Miranda pronunció unas palabras de felicitación a los centros que han enviado a competir a sus mejores alumnos, a los participantes en general y en especial a los premiados, e hizo público el agradecimiento de los organizadores a los que han contribuído a que este concurso se haya podido realizar un año más: Particularmente, al Instituto "Beatriz Galindo" y al Colegio Oficial de Doctores y Licenciados que este año ha costeado por com pleto los lotes de libros entregados a los ganadores.

En el grupo de primer curso de B.U.P. sólo pudieron adjudicarse dos premios ya que el resto de los participantes no alcanzaron suficiente puntuación para merecer otros. En los otros dos cursos, se otorgaron cinco premios en cada uno, como estaba previsto. Los ganadores son:

PRIMER CURSO

1ª/ Mª Elena Bascones Fernández de Velasco, del I.B. "Conde de Orgaz" de Madrid.

2ª/ Daniel Crespo Vázquez, del I.B. "Fortuny" de Madrid.

SEGUNDO CURSO

1ª/ José Luis Pérez Caselles, del I.B. "Cervantes" de Madrid.

2ª/ Daniel Almodovar Herraiz (*), del I.B. "Alfonso VIII" de Cuenca.

3ª/ Juan Lahoz García, del I.B. Avda. de los Toreros de Madrid.

4ª/ María Teresa Herrero Zamorano, del Colegio "Mirasierra" de Madrid.

5ª/ Mª del Carmen González Lois (*), del I.B. "Arcipreste de Hita" de Madrid.

TERCER CURSO

1ª/ Vicente Muñoz Velázquez, del I.B. "Dionisio Aguado" de Fuenlabrada (Madrid).

(*) El Sr. Almodovar fué el 1er premio de Primer Curso en nuestro concurso de 1987, y la Srta. González Lois fué el 3ª en la misma ocasión.

PROBLEMA 4°:

Demuestre que el conjunto de los números reales x que satisfacen

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

es unión de intervalos disjuntos cuyas longitudes suman 1988.

PROBLEMA 5°:

En el triángulo rectángulo ABC, sea D el pie de la altura correspondiente a la hipotenusa BC. Sean K y L los puntos de intersección de la recta determinada por los incentros de los triángulos ABD y ACD con los lados AB y AC respectivamente. Las áreas de los triángulos ABC y AKL se denotan por S y T respectivamente. Demuestre que $S \geq 2T$.

PROBLEMA 6°:

Sean a y b números enteros estrictamente positivos tales que $ab+1$ divide a a^2+b^2. Demuestre que $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ es un cuadrado perfecto.

29th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD JULY 9-21
IMO 1988 Canberra

CURSO PRIMERO

PROBLEMA 1ª

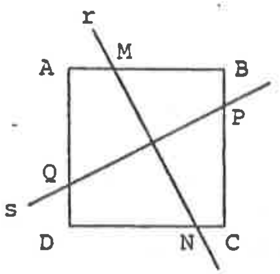
Hallar el mayor número natural n, para el que la expresión

$$(n+1)\ (n^4+2n)\ +\ 3(n^3+57)$$

es divisible por n^2+2.

PROBLEMA 2ª

Se tiene un cuadrado A, B, C, D. La recta r corta a los lados opuestos AB y CD en los puntos M y N. Otra recta s, perpendicular a r, corta a los lados BC y DA en los puntos P y Q. Demostrar, $\overline{MN} = \overline{PQ}$.



PROBLEMA 3ª

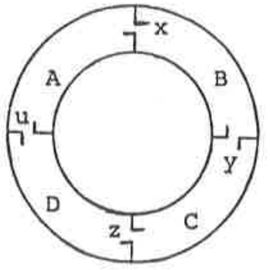
Sabiendo que entre n y 2n $(n > 1)$, existe un número primo, demostrar que, para $n > 1$, n! no es cuadrado perfecto.

PROBLEMA 4ª

El pasillo de unas oficinas tiene forma circular y está dividido en cuatro compartimentos (A, B, C y D); ver figura. A partir de las 9 de la mañana, las únicas puertas por las que se puede entrar o salir son las cuatro señaladas en la figura por (x; y, z, u).

Un ordenanza estaba a las 9 en A. Hasta las 11 ha pasado 7 veces por la puerta x, 4 veces por la puerta y, 6 veces por la puerta z, y 3 ó 4 veces por la puerta u.

¿En qué compartimento está después del recorrido efectuado? ¿Cuántas veces ha pasado por la puerta u?



CURSO SEGUNDO

PROBLEMA 1ª

Probar que si a, b, c, p, q, r son números reales, positivos y distintos de 1. Si,

$$(\log a)\ (\log b)\ (\log c) + (\log p)\ (\log q)\ (\log r) = 0$$

también se verifica

$$(\log_p a)\ (\log_q b)\ (\log_r c) = (\log_a p)\ (\log_b q)\ (\log_c r)$$

PROBLEMA 2ª

La suma de los ángulos de una de las bases de un trapecio es 90°. Demostrar que la longitud del segmento que une los puntos medios de las bases es igual a la semidiferencia de las bases.

PROBLEMA 3ª

Los lados CB y CA del triángulo A, B, C, miden respectivamente, a y b, y el ángulo C comprendido entre dichos lados mide 120°. Expresar, en función de a y b, la longitud de la bisectriz interior del ángulo C.

PROBLEMA 4ª

La función f, de N en N, verifica las siguientes condiciones:

a) es multiplicativa, $f(n_1 \cdot n_2) = f(n_1) \cdot f(n_2)$.

b) $f(1) = 1$.

c) Si p_n representa el término enésimo de la sucesión de números primos ($p_1 = 2$), es

$$f(p_n) = p_n - 3n+4$$

Calcular f(22457).

CURSO TERCERO

PROBLEMA 1ª

Demostrar "si en un triángulo de área S, el producto de dos de sus medianas es igual a 3/2 de S; dichas medianas son perpendiculares".

PROBLEMA 2ª

En la gráfica de la función y = sen x, las rectas tangentes en los puntos, A de abscisa $x_1 = \alpha$ y B, de abscisa $x_2 = \alpha + 2\pi$, son paralelas. ¿Qué distancia hay entre dichas rectas?

PROBLEMA 3ª

Resolver la ecuación trigonométrica

$$\tan x \cdot \tan 2x + \tan x + \tan 2x - 1 = 0$$

PROBLEMA 4ª

Si z representa un número complejo, se piden:

a) Caracterizar y representar gráficamente el conjunto formado por los afijos de los complejos que verifican las

$$(1) \qquad z \cdot \bar{z} \leq 1$$
$$(2) \qquad z \cdot \bar{z} - (z+\bar{z}) \leq 0$$

b) Transformar las (1) y (2) mediante la transformación $w = \frac{1}{z}$. Caracterizar y representar gráficamente los conjuntos transformados de los dados.

XXIX OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

CANBERRA (AUSTRALIA), 1988

La XXIX Olimpiada Internacional de Matemáticas se ha celebrado en Canberra (Australia) entre los días 9 y 21 de Julio de 1988. Ha estado encuadrada en los actos conmemorativos del 200 aniversario de la presencia europea en Australia y los medios de comunicación le han concedido una gran importancia. Fué clausurada por el Primer Ministro del gobierno australiano.

La participación ha superado a todas las registradas en olimpiadas anteriores, reuniendo a 268 estudiantes de 57 países, si bien 7 de ellos han asistido en calidad de observadores, por su proximidad geográfica con Australia y no es probable que participen el próximo año en Alemania. Es de destacar el aumento de países iberoamericanos -debido, sin duda, a la realización de las Olimpiadas Iberoamericanas- lo que ha hecho que este año se considerara el español como idioma oficial. Si bien se ha trabajado prácticamente con exclusividad en inglés, la versión española de los enunciados de los problemas ha sido aprobada por el jurado internacional y servido de patrón para efectuar las versiones en otros idiomas no oficiales.

Los participantes españoles fueron los seis mejores clasificados en la última Olimpiada Nacional (ver nuestro Boletín nª 17) y obtuvieron las siguientes puntuaciones, de un máximo posible de 42 puntos:

Fernando Martínez Puente	13 puntos
Ramón Esteban Romero	12 puntos
Boris Bartolomé Mena	4 puntos
José Ignacio Nogueira Goriba	2 puntos
Javier Campins Pascual	2 puntos
Santiago Pérez-Cacho Fernández-Arguelles	1 punto
TOTAL del equipo español :	34 puntos

resultados muy pobres, sobre todo si se tiene en cuenta que el año pasado, en Cuba, el equipo español obtuvo 91 puntos, con tres terceros premios (ver nuestro Boletín nº 15) y que Ramón Esteban Romero tuvo medalla de plata en Perú, donde Javier Campins no pudo participar por enfermedad (ver Boletín nº 18).

Los participantes españoles fueron acompañados por los profesores María Gaspar y Francisco Bellot y por el observador Mariano Sanz Royo, subdirector general de Promoción Educativa.

El jurado decidió otorgar medalla de oro a los 17 estudiantes con 32 puntos o más, entre los que se encontraban 4 soviéticos, 2 rumanos, 2 chinos, un vietnamita, un francés, un sueco, un canadiense, un israelita, un alemán oriental, otro occidental y un australiano: el pequeño Terence Tao, de 12 años, que obtuvo plata en Cuba y bronce en Varsovia. Hubo 5 puntuaciones máximas (42 puntos, ya que cada problema se valora en 7 puntos).

La plata se otorgó a partir de los 23 puntos y el bronce a partir de los 14. Se dieron también menciones honoríficas a los estudiantes que quedaron al borde de recibir una medalla: fué el caso del español Fernando Martínez, al que faltó un punto para obtener una de bronce. Se otorgó un premio especial por su solución al problema número 6, considerado muy difícil por el jurado, a un estudiante búlgaro.

Por países ha resultado ganadora la Unión Soviética con 217 puntos (4 oros y 2 platas), seguida de Rumanía y China, empatadas a 201 puntos); en cuarto lugar, la República Federal Alemana, con 174, en quinto Vietnam, con 166 y en sexto (sin medallas de oro) los Estados Unidos, con 153. España ocupó el lugar 41.

En la Sección de PROBLEMAS PROPUESTOS de este mismo Boletín damos los enunciados de los seis problemas que fueron propuestos en dos sesiones, cada una de 4 horas y media. La dificultad relativa de los mismos puede valorarse con la siguiente tabla:

NUMERO DE ESTUDIANTES QUE HAN OBTENIDO CADA PUNTUACION EN LOS DISTINTOS PROBLEMAS

Puntos	PROBLEMA NUMERO 1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6°
0	27	92	75	136	76	189
1	56	16	132	25	35	57
2	19	13	13	12	23	3
3	24	19	1	17	10	5
4	22	25	3	3	20	1
5	14	24	4	3	11	1
6	8	7	9	6	7	1
7	98	72	31	66	86	11
MEDIA	3,9	3,2	1,7	2,3	3,3	0,6

El próximo año la Olimpiada Internacional de Matemáticas se celebrará en Alemania Federal. Los alemanes esperan conseguir la participación de los países europeos que nunca han asistido a una Olimpiada: Portugal, Suiza y Dinamarca.

Está en la mente del Jurado, a la hora de seleccionar los problemas que serán finalmente propuestos, el elegir cada día uno considerado asequible, otro de dificultad media y un tercero difícil, reservando el de mayor dificultad para el segundo día.

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlos.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Número y año	Convocado en Boletín	Crónica - Enunciados
I (1983)	1	2, pag 11
II (1984)	3	4, pág 7
III (1985)	5	7, pág 3
IV (1986)	9	10, pág 5
V (1987)	13	15, pág 3
VI (1988)	17	19, pág 17

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA :

Número y año	Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX (1984)		3, pág 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71

OLIMPIADA MATEMÁTICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
I (1986) Colombia	8, págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12, págs. 3 y 75
III (1988) Perú	18, págs. 5 y 73

OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL :

Número, año y lugar		Crónica y enunciados en Boletín nº
XXIV (1983)	París	2, pág. 15
XXV (1984)	Praga	4, pág. 67
XXVI (1985)	Helsinki	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986)	Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987)	Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX (1988)	Australia	19, págs. 23 y 77

LA REFORMA DE LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS

El CONSEJO DE UNIVERSIDADES ha difundido ampliamente unos folletos dando cuenta del estado actual de la Reforma de las Enseñanzas prevista en la Ley de Reforma Universitaria.

Creemos que esta información resulta interesante para aquellos de nuestros socios que no hayan tenido acceso directo a ella. Por este motivo reproducimos en las páginas siguientes el documento del Consejo de Universidades sobre las líneas generales de esa Reforma y el correspondiente a la Licenciatura en Matemáticas. Debemos resaltar que este último es un Informe Técnico del Grupo de Trabajo nº 1, y que por tanto no tiene carácter definitivo, ni mucho menos debe entenderse como un Plan de Estudios, ya que la elaboración de éste, sobre las bases que sean definitivamente aprobadas, es competencia de cada Universidad.

LA REFORMA DE LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS

OBJETIVOS

I. De acuerdo con lo previsto en la Ley Orgánica 11/83, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria, el Consejo de Universidades ha iniciado las tareas para la reforma y modernización en España de las enseñanzas universitarias, que continuarán después las propias Universidades. Se trata, sin duda, de uno de los aspectos de mayor importancia del actual proceso de modernización de la Universidad española, pues como acertadamente señala el preámbulo de la Ley «la previsible incorporación de España al área universitaria europea supondrá una mayor movilidad de titulados españoles y extranjeros, y se hace necesario crear el marco institucional que permita responder a este reto a través de la adaptación de los planes de estudio y la flexibilización de los títulos que se ofertan en el mercado de trabajo».

Esta modernización y reforma de las enseñanzas universitarias tiene cuatro objetivos fundamentales:

1.°. **Actualizar** las enseñanzas y conocimientos que se imparten en las Universidades españolas incorporando otras nuevas que el desarrollo cultural, científico y técnico exige, facilitando la formación interdisciplinar e incluyendo en los currícula universitarios enseñanzas instrumentales (como lenguas modernas o informática) que deben constituir hoy parte del bagaje intelectual de todo universitario.

2.°. **Flexibilizar** las enseñanzas que se imparten de modo que, el carácter estatal de los títulos académicos, reconocido en el artículo 149.1.30 de la Constitución española, se armonice con la autonomía de las Universidades y ésta con el respeto a los intereses de los estudiantes. Así pues, los planes de estudio conducentes a un mismo título oficial podrán variar de una a otra Universidad y, en una misma Universidad, podrán variar también los currícula de los estudiantes en orden a la obtención de un mismo título oficial, potenciándose así la optatividad de los estudios que cursará cada estudiante.

3.°. **Vincular Universidad y sociedad**, aproximando las enseñanzas a las necesidades sociales. A ello responde, aparte la propia flexibilidad de los planes de estudio, la ordenación cíclica de las enseñanzas, que debe permitir una alternancia entre estudio y trabajo, contribuyendo a la disminución del fracaso escolar. Al mismo objetivo se orienta la diversificación del catálogo de títulos oficiales y, sobre todo, de las especializaciones que podrán ofertar libremente las Universidades.

4.°. Finalmente, la reforma pretende también **adaptar** el sistema de enseñanza superior a los requerimientos derivados de diversas directivas de la CEE. De una parte, hay directivas que regulan enseñanzas específicas como son las de medicina, farmacia, veterinaria, arquitectura y otras. De otra, debe tenerse en cuenta que textos importantes en tramitación en la CEE prevén un módulo básico de tres años como preparación inicial para la práctica profesional. Por último, y con carácter genérico, la incorporación de España al área educativa y cultural europea exige homologar y armonizar nuestra ordenación académica (títulos, ciclos y planes) a la de los países más avanzados.

II. Los aspectos y conceptos fundamentales de esta reforma de las enseñanzas universitarias son los siguientes:

1.º. **Títulos oficiales con validez en todo el territorio nacional y títulos propios**

Los primeros son aquellos que tienen validez académica y profesional en todo el territorio nacional; asimismo, las Universidades podrán impartir, en uso de su autonomía, y de acuerdo con su normativa estatutaria, enseñanzas conducentes a la obtención de otros diplomas o títulos.

La actual reforma de las enseñanzas universitarias se refiere única y exclusivamente a los títulos oficiales con validez en todo el territorio nacional que son, actualmente, la mayoría de los títulos que imparten las Universidades (ejemplo: licenciado en derecho o en económicas, diplomado en enfermería o en empresariales, ingeniero agrónomo o industrial, ingeniero técnico o arquitecto técnico).

2.º. **Directrices generales comunes, directrices generales propias, planes de estudio y currícula:**

Las enseñanzas que realmente cursará un estudiante concreto para obtener un título oficial serán el resultado de decisiones tomadas en diversos niveles:

— El Gobierno, a propuesta del Consejo de Universidades, aprobará las directrices generales **comunes**, entendiéndose por tales las normas o exigencias aplicables a **todos** los planes de estudio conducentes a **cualesquiera** de los títulos oficiales.

— El Gobierno, igualmente a propuesta del Consejo de Universidades, aprobará las directrices generales **propias.** Son directrices generales propias las que, en el marco de las anteriores, son de aplicación a planes de estudio conducentes a título universitarios **específicos** y **concretos.** Así pues, habrá una directriz propia para el título de licenciado en derecho o en económicas o para el título de diplomado en enfermería o en empresariales, etcétera.

— Con sujeción a las directrices generales las Universidades elaborarán y aprobarán los **planes de estudio,** que se impartirán en cada una de ellas para la obtención de los títulos oficiales para los que se establezcan. Así pues, habrá un plan de estudios para la licenciatura en derecho de Alicante, y otro para la de Cantabria, etcétera.

Finalmente, y dentro del marco del plan de estudios de su Universidad, cada estudiante podrá elaborar su propio **curriculum,** en función de las asignaturas optativas o de otro orden que pueda escoger. El curriculum es, pues, el conjunto de estudios concreto superado por un estudiante en el marco del plan de estudios y conducentes a la obtención de un título oficial.

3.º. **La ordenación cíclica de las enseñanzas**

El artículo 30 de la Ley de Reforma Universitaria establece que los estudios universitarios se estructurarán, como máximo, en tres ciclos; la superación del primero de ellos dará derecho, en su caso, a la obtención del título de diplomado de arquitecto técnico o de ingeniero técnico, y la del segundo, a la del título de licenciado de arquitecto o de ingeniero (la superación del tercer ciclo da derecho a la obtención del título de doctor). Esto significa que la actual distinción entre enseñanzas de **ciclo corto** (de tres o cuatro años de duración) y enseñanzas de **ciclo largo** (de cinco o seis años de duración) se transforma en una ordenación cíclica con un **primer ciclo** de tres años de duración (excepcionalmente, de dos) conducente a la obtención del título de diplomado arquitecto técnico o ingeniero técnico y, un **segundo ciclo,** de dos años de duración, conducente a la obtención del título de licenciado arquitecto o ingeniero. No obstante, esta norma general tiene diversas excepciones derivadas, bien de exigencias académicas o profesionales, bien de directivas de la CEE, como es el caso de medicina, que seguirá siendo de seis años de duración. Así pues, en aras de la máxima flexibilidad y para poder adaptarse a las más variadas exigencias sociales, se prevé que existan al menos tres tipos o modelos de enseñanzas:

a) Enseñanzas **de primer ciclo.** Es el caso de enseñanzas actuales de ciclo corto (como biblioteconomía y documentación, fisioterapia, etc.) con una clara y nítida orientación profesional que actualmente carecen de continuidad en un segundo ciclo. No obstante, el nuevo modelo cíclico permitirá en algunos casos elaborar cursos de adaptación para que dichos diplomados puedan continuar sus estudios en los segundos ciclos más afines.

b) Enseñanzas **de dos ciclos sin titulación intermedia.** En estos casos las enseñanzas se ordenan por ciclos, pero la superación del primero no da derecho a la obtención de ningún título por cuanto que ni supone un ciclo completo de formación académica, ni otorga una cualificación profesional específica. Es el caso de muchas de las enseñanzas reguladas por directivas de la CEE, que prevén enseñanzas de cinco o seis años de duración (por ejemplo: odontología, medicina). Aparte de estas titulaciones, y excepcionalmente, es posible que otras conserven su actual estructura de enseñanzas de ciclo largo sin título intermedio; se trata, no obstante, de uno de los extremos que deben ser clarificados a lo largo del próximo debate público. En todo caso, la superación de los tres primeros cursos les otorgará los derechos genéricos del título de Diplomado. Para tales titulaciones, además, la actual reforma afectaría a las enseñanzas y planes de estudio, sin incidir sobre la ordenación global de las mismas.

c) Enseñanzas **de dos ciclos con título intermedio.** En todos los demás casos los estudiantes comenzarán cursando un primer ciclo, de duración equivalente a tres años académicos, para obtener el título de diplomado, arquitecto técnico o ingeniero técnico, pudiendo continuar en un segundo ciclo, equivalente a otros dos años académicos, para obtener el título de licenciado, arquitecto o ingeniero.

Cuando se señala que la duración de las enseñanzas será de tres (o dos) años para el primer ciclo y dos para el segundo, no se quiere en absoluto indicar que tal deberá ser el periodo máximo de permanencia de los estudiantes. Se trata, simplemente, de que a efectos de diseñar los planes de estudio se estima que un estudiante, con un aprovechamiento normal, podría terminar sus estudios en esos periodos de tiempo normales.

Conviene igualmente resaltar que las enseñanzas se ordenarán **por ciclos**, y no por cursos académicos, de modo que los estudiantes podrán organizar sus estudios con amplia libertad, matriculándose de más o menos asignaturas, según sus disponibilidades para el estudio, sabiendo que, en orden a la obtención de un título (de primero o segundo ciclo), deberán superar el plan de estudios correspondiente. Esta libertad para organizar el ritmo temporal de los propios estudiantes se entenderá en el marco de la ordenación académica de cada Universidad.

No se introduce limitación alguna a la posibilidad de cursar enseñanzas a tiempo parcial salvo en aquellas (pocas) carreras que las directivas de la CEE (por ejemplo: odontología, medicina) establecen una enseñanza necesariamente a tiempo completo.

Se abre además la posibilidad de pasar de un primer ciclo a un segundo ciclo correspondiente a estudios distintos que tengan afinidad académica con los cursados. En este caso, y como es lógico, será necesario cursar a lo largo del segundo ciclo las materias troncales que no se superaron en el primero.

4.º. Previsiones sobre carga lectiva en las enseñanzas Universitarias

Las directrices generales comunes para todas las enseñanzas prevén un máximo y mínimo de veinte a treinta horas lectivas a la semana, de las cuales no más de quince corresponderán a clases teóricas. Se prevé igualmente unos límites entre 60 a 90 créditos al año, siendo un crédito el equivalente a diez horas lectivas (teóricas o prácticas).

La introducción del mecanismo de **créditos** como unidad de cuenta de las enseñanzas permite una elaboración homogénea de planes de estudio y la convalidación de estudios entre enseñanzas y Universidades. Que a una asignatura le correspondan 10 créditos significa que se le asigna una carga docente de cien horas lectivas (teóricas o prácticas).

En los planes de estudios se relacionarán tres tipos de materias:

a) Materias **troncales**, que constituyen los contenidos homogéneos mínimos correspondientes a un mismo título oficial válido en todo el territorio nacional. Deberán ser al menos el 30 por 100 del total de la carga lectiva, en el caso de enseñanzas de primer ciclo, y del 25 por 100 en el caso de enseñanzas de segundo ciclo.

b) Materias **no troncales**, que serán definidas por las Universidades al aprobar sus planes de estudio, y podrán ser:

— Materias obligatorias de Universidad: libremente establecidas por cada Universidad, que las incluirá en el correspondiente plan de estudios como obligatorias para el alumno.

— Materias optativas de Universidad: libremente establecidas por la Universidad en el plan de estudios para que el alumno escoja entre las ofrecidas.

c) Materias **de libre elección por el estudiante** en orden a la flexible configuración de su currículum. Al menos el 10 por 100 del total de la carga lectiva de un plan de estudios quedará reservado para que el estudiante pueda cursar aquellas materias que libremente escoja de entre las ofrecidas por la Universidad entre un amplio catálogo. Entre ellas se incluirán, preferentemente, materias formativas de carácter general (como puede ser introducción a la filosofía, historia de España, introducción a las ciencias, etc.) y materias instrumentales (especialmente lenguas modernas e informática). Con ello se potencia la formación interdisciplinar y la flexibilidad de la currícula.

Para garantizar un amplio margen de ejercicio de la autonomía universitaria el Consejo de Universidades ha acordado igualmente que, salvo en enseñanzas reguladas por directivas de la CEE, y como norma general, el **máximo** de materias troncales que podrá establecerse en las directrices específicas será del 50 por ciento.

5.º. **Títulos, especialidades y doble titulación**

Las directrices específicas definirán cada uno de los títulos oficiales con validez en todo el territorio nacional. Dado el reducido número de títulos oficiales que hay actualmente en España, que ha variado muy poco en las últimas décadas, y teniendo presente que la mayoría de ellos son títulos de ciclo largo, la reforma de las enseñanzas universitarias debería dar lugar a una ampliación prudente y paulatina del catálogo de títulos, incorporando sobre todo títulos nuevos de primer ciclo, aunque no exclusivamente.

En todo caso, las Universidades, al elaborar sus planes de estudio para enseñanzas oficiales, podrán establecer **especialidades**, que se acreditarán en el mismo título oficial. Teniendo presente que dos estudiantes de la misma o varias Universidades podrán obtener el mismo título oficial con currícula muy diversos, en el anverso del título oficial (que será siempre expedido por la propia Universidad) figurará el currículum concreto cursado por cada estudiante y, por supuesto, la especialización.

Por otra parte, las Universidades, tanto españolas como extranjeras, y previo acuerdo, podrán impartir títulos conjuntos, o bien organizar enseñanzas conducentes a **doble titulación**. Ello significará que una Universidad española y otra extranjera podrán impartir enseñanzas conjuntas conducentes a dos títulos válidos en cada uno de los países, lo que facilitará el aprovechamiento de los programas de Planes Comunes de Estudio, subvencionados por la CEE, y en el futuro, del programa ERASMUS.

6.º. **Elaboración y aprobación de planes de estudio**

Con arreglo a las directrices generales, las Universidades elaborarán y aprobarán sus planes de estudio, en los que reseñarán las materias troncales y no troncales (obligatorias y optativas).

Una vez elaborados y aprobados, los planes de estudios serán remitidos al Consejo de Universidades para su homologación y publicación en el «Boletín Oficial del Estado». El Consejo de Universidades homologará todo plan de estudios que respete las directrices generales.

Están previstos mecanismos simples y ágiles para la actualización y modificación periódica y regular de los planes de estudio.

III. Procedimiento de elaboración de directrices y planes de estudio y calendario.

El Consejo de Universidades pretende que la elaboración de directrices específicas sea efectuada por los propios interesados: Comunidad universitaria, de una parte, y sectores sociales afectados de otra, pues es evidente que la modernización de títulos y enseñanzas no sólo afecta a la Universidad, sino a toda la sociedad española.

Con objeto de facilitar y fomentar el debate público sobre las directrices específicas, se encargó a 16 grupos de trabajo, constituidos por expertos de la Universidad, la comunidad científica y las profesionales, la elaboración de informes **provisionales** que permitan iniciar el debate público. A medida que los grupos de trabajo vayan remitiendo al Consejo de Universidades los correspondientes informes provisionales, y una vez analizados, se iniciará un debate público de al menos dos meses de duración para cada directriz.

La fase de **información y debate público** comenzará, con las primeras directrices específicas, no antes del próximo mes de abril, continuando a lo largo de bastantes meses. En todo caso los periodos no lectivos interrumpirán los plazos de información pública.

Todos los sectores de la comunidad universitaria **participarán** en dicho debate a través de los procedimientos que arbitren las Universidades, bien a través de vías institucionales (Juntas de Departamento, Juntas de Facultad o Centro, Juntas de Gobierno, etc.) o a través de otras vías no institucionales, como debates, simposios, etc. Las universidades recogerán dicha información para su remisión posterior al Consejo de Universidades. Igualmente, otras instituciones interesadas podrán remitir observaciones y sugerencias.

Por supuesto, y con mayor motivo, todos los sectores de cada comunidad universitaria deberán participar igualmente en la elaboración de sus planes de estudio. Puesto que la elaboración y aprobación de los mismos es competencia de cada Universidad, la participación de los diversos estamentos deberá ser igualmente organizada por las propias Universidades, de acuerdo con sus Estatutos.

Dada la magnitud de la tarea de reformar las enseñanzas universitarias, y la necesaria participación de numerosos sectores sociales interesados, el proceso será necesariamente dilatado, pudiéndose señalar fechas aproximadas para el comienzo del mismo, pero de ningún modo para su total y completa puesta en marcha. A lo largo del próximo otoño podrán aprobarse las primeras directrices específicas, momento a partir del cual las Universidades comenzarán a elaborar y aprobar sus planes de estudio. Así pues, la puesta en marcha de los nuevos planes de estudio **no comenzará en ningún caso antes del curso académico 1988-1989**, y para muchas enseñanzas se retrasará al siguiente.

No obstante, las Universidades dispondrán de un plazo de tres años, a partir de la publicación en el «B.O.E.» de cada una de las directrices propias, para elaborar y aprobar sus planes de estudio.

Como es usual, las Universidades comenzarán a impartir los nuevos planes de estudio progresivamente curso a curso, al tiempo que los planes antiguos se extinguen del mismo modo. Los estudiantes que estén cursando los planes antiguos podrán continuar con los mismos, pues así se lo garantizan las directrices generales. En tal supuesto dispondrán de las seis convocatorias que les reconoce la legislación vigente, más las pruebas de conjunto que las Universidades arbitren para quienes todavía tuvieran pendientes asignaturas de tales planes.

* * *

Considerando la trascendencia e importancia del proceso de reforma de enseñanzas universitarias que ahora se inicia, y teniendo en cuenta su natural y prolongada duración, el Consejo de Universidades quiere hacer una llamada a todas las personas o instituciones interesadas para que analicen las propuestas, que en su momento se les remitirán, y elaboren sus sugerencias y observaciones con el máximo rigor crítico, pero también con la máxima generosidad personal, anteponiendo en todo momento el interés general de los españoles a obtener una educación universitaria de calidad y adaptada a las exigencias de una sociedad moderna, a los intereses individuales o de grupo, ya sean tales grupos internos o externos a la comunidad universitaria. La tolerancia, la serenidad y la racionalidad deben presidir este debate.

Febrero de 1987.

CONSEJO DE UNIVERSIDADES

INFORME TECNICO DEL GRUPO DE TRABAJO N.º 1

TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Estructura de las enseñanzas
- de 1.er ciclo y título terminal ☐
- de 1.er ciclo (con título terminal) y 2.º ciclo (1) ☒
- de 1.er ciclo (sin título terminal) y 2.º ciclo ☐
- de sólo segundo ciclo ☐

PERFIL DE LAS ENSEÑANZAS (2)

DE PRIMER CICLO:

La formación conducente al título de Diplomado en Matemáticas (1) proporcionará conocimientos básicos de Matemáticas tanto a nivel teórico como aplicado. El Graduado en este primer ciclo debe ser capaz de profundizar en el campo de la Matemática o de incorporarse al mundo profesional de manera inmediata.

DE SEGUNDO CICLO:

Otorgará una formación amplia, rigurosa y básica sobre aspectos que son fundamentales por su carácter formativo, instrumental o por sus aplicaciones a otras áreas del saber; así como el conocimiento de metodologías útiles para el ejercicio profesional y para estudios posteriores.

DURACION ESTIMADA DE LAS ENSEÑANZAS: 3+2 años

TOTAL CARGA LECTIVA: Mínimo 200+120 créditos; Máximo 225+150 créditos

(1) Véase observación de la Ponencia
(2) Véase con más detalle en las Aclaraciones del Grupo técnico.

MATERIAS TRONCALES

Total de carga lectiva troncal: 103+30 créditos

% sobre el máximo de carga total: 51.5+25

RELACION DE MATERIAS TRONCALES (por orden alfabético)	Créditos Teóricos	Créditos Prácticos	Créditos Total	AREAS DE CONOCIMIENTO
DE PRIMER CICLO:				
Algebra Lineal y Geometría. Espacios vectoriales, afines y euclídeos. Geometría Proyectiva. Interpretación proyectiva de las Geometrías afín y métrica.			15	— Algebra — Geometría y Topología
Ampliación de Algebra Lineal. Algebra multilineal. Clasificación de formas cuadráticas. Módulos finito-generados sobre anillos principales.			9	— Algebra — Geometría y Topología
Análisis Matemático. La recta real. Funciones continuas de una variable real. Diferenciación e integración de funciones de una variable real. Espacios métricos. Continuidad. Funciones de varias variables reales. Diferenciabilidad. Integración múltiple. Introducción a las funciones de variable compleja. Teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sistemas diferenciales lineales.			31,5	— Análisis Matemático — Matemática Aplicada
Cálculo Numérico. Aproximación numérica de funciones. Cálculo de ceros de funciones. Solución numérica de sistemas lineales y de problemas de valores propios.			7,5	— Matemática Aplicada — Análisis Matemático
Ecuaciones Algebraicas. Anillos y cuerpos. Divisibilidad. Teoría de Galois de ecuaciones algebraicas.			7,5	— Algebra
Estadística Matemática. Inferencia estadística. Modelos lineales estadísticos.			7,5	— Estadística e Investigación Operativa

RELACION DE MATERIAS TRONCALES (por orden alfabético)	Créditos Teóricos	Créditos Prácticos	Créditos Total	AREAS DE CONOCIMIENTO
Geometría Diferencial. Curvas y superficies del espacio ordinario. Introducción a las variedades diferenciables y a la geometría riemanniana.			7,5	— Geometría y Topología
Introducción a la Informática. Elementos básicos de Informática. Algoritmos. Tipos de estructuras. Estudio de un lenguaje de programación.			5	— Algebra — Análisis Matemático — Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial — Estadística e Investigación Operativa — Geometría y Topología — Matemática Aplicada
Modelos matemáticos en las Ciencias Experimentales. Modelos matemáticos en las Ciencias Experimentales.			5	— Algebra — Análisis Matemático — Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial — Estadística e Investigación Operativa — Geometría y Topología — Matemática Aplicada
Teoría de la Probabilidad. Fundamentos de la teoría de la probabilidad. Cálculo de probabilidades.			7,5	— Estadística e Investigación Operativa

RELACION DE MATERIAS TRONCALES (por orden alfabético)	Créditos Teóricos	Créditos Prácticos	Créditos Total	AREAS DE CONOCIMIENTO
DE SEGUNDO CICLO: Los estudios conducirán al título de Licenciado en Matemáticas, que especificará el currículum seguido. Las Universidades establecerán las especialidades que puedan cursarse en este 2.° ciclo, en función de sus recursos y necesidades. A título orientativo, se sugieren como especialidades: Matemática Fundamental, Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa, Ciencias de la Computación. Por la diversidad de opciones que se pueden ofrecer al estudiante, no se cree oportuno fijar materias troncales en 2.° ciclo, sean comunes o propias de cada especialidad. El alumno en función de las especialidades que cada Universidad establezca elegirá un mínimo de cuatro materias (30 créditos a razón de 7,5 créditos por materia) entre las siguientes:				
ALGEBRA CONMUTATIVA.				— Algebra
ALGEBRA NO CONMUTATIVA.				— Algebra
ANALISIS FUNCIONAL Y APLICACIONES.				— Análisis Matemático
ANALISIS NUMERICO.				— Matemática Aplicada — Análisis Matemático

RELACION DE MATERIAS TRONCALES (por orden alfabético)	Créditos Teóricos	Créditos Prácticos	Créditos Total	AREAS DE CONOCIMIENTO
COMPUTABILIDAD.				— Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial — Matemática Aplicada — Algebra — Análisis Matemático — Geometría y Topología — Estadística e Investigación Operativa
ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES				— Matemática Aplicada — Análisis Matemático
ESTADISTICA MATEMATICA.				— Estadística e Investigación Operativa
GEOMETRIA DIFERENCIAL.				- Geometría y Topología
INVESTIGACION OPERATIVA.				— Estadística e Investigación Operativa
INTELIGENCIA ARTIFICIAL.				— Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial — Matemática Aplicada — Algebra — Análisis Matemático — Geometría y Topología — Estadística e Investigación Operativa

RELACION DE MATERIAS TRONCALES (por orden alfabético)	Créditos Teóricos	Créditos Prácticos	Créditos Total	AREAS DE CONOCIMIENTO
MECANICA.				— Matemática Aplicada — Geometría y Topología — Física Teórica
PROCESOS ESTOCASTICOS.				— Estadística e Investigacón Operativa
TEORIA DE AUTOMATAS Y LENGUAJES.				— Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial — Matemática Aplicada — Algebra — Análisis Matemático — Geometría y Topología — Estadística e Investigación Operativa
TEORIA DE LA MEDIDA.				— Análisis Matemático
TOPOLOGIA ALGEBRAICA.				— Geometría y Topología

1. Sobre los estudios de Primer Ciclo

Los estudios del Primer Ciclo deben permitir una formación básica y rigurosa sobre todos aquellos aspectos que son fundamentales por su carácter formativo o instrumental o por sus aplicaciones a otras áreas del saber.

Los contenidos específicos de los programas deben asegurar no sólo una cultura matemática básica sino un conocimiento de las metodologías que luego puedan ser esenciales tanto para los estudios de 2.º y 3.er Ciclo como para el ejercicio profesional del matemático.

El estudio del Primer Ciclo dará lugar al título de «Diplomado en Matemáticas» (1). Tendrá una duración de 3 años académicos, estructurados en seis cuatrimestres, pudiendo el alumno cursar estos estudios a tiempo parcial. Deberá contener las materias troncales cuatrimestrales que se explicitan en este documento. Dichas materias troncales se complementarán con las asignaturas cuatrimestrales obligatorias u optativas determinadas por cada centro y con las asignaturas optativas de Universidad elegidas libremente por el alumno. En total la Diplomatura en Matemáticas deberá tener un mínimo de 200 créditos y como máximo una carga lectiva semanal de 12 horas teóricas, 8 horas prácticas y 5 horas de laboratorio. En cualquier caso el alumno podrá usar 22,5 créditos correspondientes a asignaturas de su libre elección durante su diplomatura.

Con vistas a la oferta de asignaturas no troncales se recomienda que se incluyan tanto materias que puedan resultar interesantes para el desarrollo posterior del 2.º ciclo como asignaturas que por su carácter instrumental, aplicado, fundamental, histórico o educativo puedan dar lugar a una formación básica integral durante el 1.er ciclo. El título de «Diplomado en Matemáticas» se emitirá una vez acabados los estudios de 1.er ciclo (1).

2. Sobre el Segundo Ciclo

Se cree conveniente mantener la unidad del título de Licenciado en Matemáticas, si bien se contempla la posible existencia de varias especialidades. Sin embargo, por la diversidad de opciones que se pueden ofrecer al estudiante no se cree oportuno fijar materias troncales en el 2.º ciclo, sean comunes o propias de cada especialidad.

El título que se otorgue deberá especificar el currículum seguido.

Dependiendo de las posibilidades de cada Universidad y de las especialidades que se oferten, cada Universidad podrá establecer asignaturas obligatorias de las especialidades cursadas.

El 50 % de los créditos, incluidos los troncales, deberá ser cursado en enseñanzas correspondientes a una o varias de las áreas de conocimiento siguientes: Algebra; Análisis Matemático; Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial; Estadística e Investigación Operativa; Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica; Geometría y Topología; Matemática Aplicada.

Un mínimo de 15 créditos quedarán a libre disposición del estudiante.

La parte restante de los créditos podrán pertenecer a otras áreas de conocimiento cuya incidencia en el tema de la especialidad sea manifiesta.

Cualquier Diplomado en Matemáticas podrá elegir cualquiera de las especialidades en la Licenciatura no pudiendo éstas señalar como prerrequisitos determinadas asignaturas de 1.er ciclo.

(1) Véase la reflexión de la Ponencia

Observaciones:

1. No parece conveniente que existan limitaciones inferiores o superiores al período de escolaridad.

Esto permitiría tanto el cursar los estudios a tiempo parcial como el favorecer a estudiantes especialmente dotados.

2. Para estudiantes que cursen la Diplomatura en Matemáticas puede contemplarse la posibilidad de que inicien los estudios de la Licenciatura antes de haber completado la totalidad de los requisitois exigidos para la Diplomatura.

3. Para estudiantes con título de Diplomado distinto del Diplomado en Matemáticas las Universidades podrán ofrecer cursos puente para el paso a la Licenciatura en Matemáticas con un total máximo de créditos, para dichos cursos puente, de 75.

SUGERENCIAS DE LA PONENCIA DE REFORMA DE ENSEÑANZA EN RELACION CON EL INFORME

TECNICO DEL GRUPO: N.º 1

TITULO DE **LICENCIADO EN MATEMATICAS**

A) **Sobre la propuesta del Primer Ciclo:**

— El Grupo de Trabajo propone que a la superación de los estudios de Primer Ciclo se obtenga el título de Diplomado en Matemáticas. La Ponencia cree necesario se reflexione sobre la conveniencia y funcionalidad de este título, habida cuenta de su eventual falta de especificidad en relación con el también propuesto de Licenciado en Matemáticas que se obtendría a la superación del 2.º ciclo.

— Si bien el Grupo de Trabajo, en la Justificación y Aclaraciones del Informe técnico, recomienda una distribución de la carga lectiva entre teoría, práctica y laboratorio, esta distribución no se recoge ni pormenoriza en el catálogo de materias troncales sugerido.

— El Grupo de Trabajo, además de la propuesta mayoritaria que se recoge en las hojas anteriores, ha remitido a la Ponencia una propuesta minoritaria, alternativa, coincidente con la anterior en la obtención de un título terminal de Diplomado en Matemáticas, carga lectiva y troncal, de la que, sin embargo, se separa en la concepción de las materias troncales. En esta propuesta minoritaria, las materias troncales se identifican con tres grandes bloques: Bloque Analítico; Bloque algebraico-geométrico-topológico; y Bloque aplicado-estadístico-informático.

B) **Sobre la propuesta de Segundo Ciclo:**

La Ponencia entiende que no queda suficientemente justificado en el informe técnico la opción adoptada por el mismo de no determinar materias troncales en el segundo ciclo. Es más, cree que, precisamente, mediante la determinación de bloques troncales y la diversificación de las titulaciones hoy existentes se podrían perfilar mejor en este campo las directrices generales de los planes de estudio. Especialmente habida cuenta de que, como eventual resultado de la amplia optatividad de especialidades y materias propuestas por el Grupo técnico, podrían darse «curriculums» de 2.º ciclo que no correspondieran propiamente a un Licenciado en Matemáticas.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN ALGUNAS OPOSICIONES

PARA PROFESORES AGREGADOS DE MATEMATICAS

DE INSTITUTOS DE BACHILLERATO

Damos en las páginas siguientes los enunciados de los problemas propuestos por algunos tribunales en recientes oposiciones para la provisión de plazas de Profesores Agregados de Institutos de Bachillerato de la asignatura de Matemáticas.

Hemos creído que esta información puede ser de interés para nuestros socios, por lo que la incluimos en este Boletín. También damos los enunciados de las Oposiciones a Profesores de Matemáticas de Escuelas de Maestría Industrial celebradas en Andalucía.

OPOSICIONES PARA PROFESORES AGREGADOS DE I.B.

PROBLEMAS PROPUESTOS POR EL TRIBUNAL Nº 3 DE MATEMATICAS, DE MADRID, EN 1988

1. Se considera la familia de elipses en forma canónica que pasa por el punto (1, 1). Se pide calcular la ecuación de la elipse de la familia que engendra al girar en torno al eje de abscisas un elipsoide de volumen mínimo.

2. Sea G un grupo de orden 2n que contiene n elementos de orden 2 y los otros n forman un subgrupo H. Demostrar que H es abeliano y que n ha de ser impar.

3. Demostrar que en cualquier sistema de numeración los números 10101, 101010101, 1010101010101, ... no son primos.

4. Sean dos circunferencias de centros O_1 y O_2 y de radios R y r respectivamente. Dichas circunferencias son tangentes en un punto A por el que se traza la recta tangente común a las dos circunferencias. Por un punto B de dicha recta se trazan las tangentes a cada una de las circunferencias, C_1 y C_2 son sus puntos de contacto respectivos. Calcular el límite del cociente de las áreas de los triángulos ABC_1 y ABC_2 cuando B tiende al punto A.

5. Determinar un polinomio P(x) tal que cumpla la identidad:

$$P(x+2) - 2\,P(x+1) + P(x) = x$$

y además verifique $P(0) = 1/6$ y $P(3) = 2/3$. Calcular sus raíces.

6. Dada la ecuación de segundo grado $x^2 + bx + c = 0$, calcular la probabilidad de que sus raíces sean imaginarias cuando b se escoge al azar entre (-A, A) y, o entre (-B, B).

7. Un barco A se encuentra a 9 km de una costa rectilínea. A 15 km del punto B, pie de la perpendicular trazada desde el navío a la costa, se encuentra un puerto C. Un marinero del barco tiene que llevar un mensaje de A a C. Sabiendo que remando va a 4 km/h y caminando a 5 km/h determinar el punto entre B y C en el que tiene que desembarcar para que el tiempo empleado en llevar el mensaje de A a C sea mínimo.

8. Sea P un polígono plano convexo de ángulos iguales y N lados, que designaremos por $l_1, l_2, l_3, \dots, l_N$. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que P sea regular es que la suma de razones de cada lado a su contiguo, según el orden dado, coincida con el número N de lados.

PROBLEMAS PROPUESTOS POR EL TRIBUNAL Nº 1 DE MATEMATICAS, DE SEVILLA, EN 1988

1. Dentro de una esfera maciza de 80 cm de diámetro existe una oquedad que tiene la forma de un cono equilátero inscrito en dicha esfera. Traza un plano normal al eje del cono de tal manera que la corona circular que determina al cortar a la esfera y al cono tenga área máxima. ¿Cuál es su ecuación?

2. Sea G un grupo cíclico de orden n, denotado multiplicativamente. Sea a un generador de G.
   (a) Demostrar que todo subgrupo de G es cíclico.
   (b) Dado m natural no nulo, demostrar que $a^m = e$ sii n divide a m.
   (c) Sea $M = (a^p)$ (subgrupo engendrado por a^p) con $0 <= p <= n$. Demostrar que $M = (a^q)$ siendo $q = mcd(n, p)$.
   (d) Deducir que M = G sii p y n son primos entre sí.

3. En un triángulo rectángulo cuyos lados son números naturales. Probar que el producto de los catetos es:

   (a) Múltiplo de 3.

   (b) Múltiplo de 4.

4. Dada la sucesión $(s_n) = (1/1, 5/2, \ldots, p_n/q_n, \ldots)$ siendo $p_1 = q_1 = 1$ y $p_n = p_{n-1} + 4q_{n-1}$, $q_n = p_{n-1} + q_{n-1}$ para $n > 1$, responder a las siguientes cuestiones:

   (a) Demostrar que, para todo n, la fracción p_n/q_n es irreducible.

   (b) Demostrar que, para todo n se verifica: $(-1)^n = p_n - 2q_n$.

   (c) Utilizando la igualdad anterior, demostrar que (s_n) es convergente.

   (d) Calcular al límite de la sucesión (s_n).

5. Seleccionamos aleatoriamente dos puntos de un segmento de longitud L de manera que estén en lados opuestos del punto medio. Hallar la probabilidad de que la distancia entre ellos sea menor que L/3.

6. Se considera la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Se traza por el origen 0 una recta que corta a la circunferencia en un punto P. Halla el lugar geométrico del punto de intersección de la tangente a la circunferencia en P con la perpendicular por 0 a la recta OP.

7. Sea f(x) un polinomio de tercer grado con coeficientes reales que tiene sus tres raíces iguales y distintas. Se considera la ecuación:

$$P(x) = (f'(x))^2 - 2f(x)\, f''(x) = 0$$

   Se pide determinar al número de raíces reales de la ecuación $P(x) = 0$.

   Considera también el caso en que f(x) tenga una raiz triple.

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN DE INSCRIPCION

D. ____

Dirección particular ______________________________

Código postal ____________ Teléfono ______________

Centro de trabajo _________________________________

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO NUMERARIO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco __________________

____

para que cargue en mi cuenta numº _________________

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1988-89 y siguientes.

________________ de __________ de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ______________ Banco ________________________

____

Ruego abonen con cargo a mi cuenta ____________ de número ____________________, los recibos de mi cuota anual en la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: __________________________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SOLICITUD DE ADHESION DE CENTRO

D. ____

como _______________ del Centro ___________________

____

domiciliado en ____________________________________

_______________ Código postal ________ Tfno. ________

SOLICITA LA ADHESION A LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco __________________

____

para que cargue en la cuenta nº ____________________, los recibos correspondientes al curso 1988-89 y siguientes.

________________________de __________de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ______________ Banco ________________________

____

Ruego abonen con cargo a la cuenta __________ de número ______________________, los recibos de la cuota anual de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: __________________________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.

8. Calcula los productos

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} (e^{2k\pi i/n} - 1) \quad \text{y} \quad S = \prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}(k\ \pi/n)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS POR EL TRIBUNAL Nº 2 DE MATEMATICAS, DE GRANADA, EN 1988

1. Sean m y n números enteros positivos.

   (a) Hallar para qué valores de n existe un número m impar tal que $(m+2) \mid (m^2+4n)$.

   (b) Hallar todos los valores de m que verifiquen la condición anterior en los casos $n = 6$ y $n = 89$.

2. Se considera el subconjunto de los números reales de la forma

$$D = a + b\sqrt{5}; \quad a,\ b \text{ enteros}$$

   con la adición y multiplicación ordinarias. Es fácil demostrar que D con esas operaciones tiene estructura de anillo. Se pide:

   (a) Demostrar que D es un dominio de integridad.

   (b) ¿Tienen inverso respecto de la multiplicación los elementos $9 - 4\sqrt{5}$, $2 + 3\sqrt{5}$?

   (c) Caracterizar los elementos que tienen inverso.

   (d) Demostrar que si $a + b\sqrt{5}$ es un elemento no nulo sin inverso entonces se verifica:

$$|a^2 - 5b^2| \geq 4$$

   (e) Si $1 < |a^2 - 5b^2| < 16$, entonces $a + b\sqrt{5}$ es primo.

   (f) Encontrar dos factorizaciones distintas del 4.

3. Determinar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes trazadas por el punto $P(-6, 0)$ a las elipses que tienen por semiejes $b = 3$ y a variable.

4. Estudiar la continuidad y derivabilidad en los puntos $x = 0$ y $x = 1$ de la función $f: R \to R$ definida por

$$f(x) = \max\{x^2, \frac{1}{x}\} \quad \forall x \in R$$

5. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + kx & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Se pide:

(a) Calcular, si existen: $f'(x)$ si $x \neq 0$, $f'(0)$, $\lim_{x \to 0} f'(x)$

(b) Discutir el crecimiento y decrecimiento en $x = 0$, según los valores del parámetro k.

(c) Para $k = 1/2$, demostrar que f no es monótona en ningún entorno de 0.

6. En una circunferencia de radio $\underline{R}$ se traza una cuerda de longitud $\underline{a}$. Tomando dicha cuerda como diámetro, se traza una semicircunferencia que, con el arco correspondiente a la cuerda, determina una lúnula (figura plana cóncava limitada por dos arcos de diferente radio). Se pregunta:

(a) Determinar el área de dicha lúnula en función de $\underline{a}$ y de $\underline{R}$.

(b) Demostrar que, para todo triángulo inscrito en una semicircunferencia, se tiene que su área es igual a la suma de las lúnulas construidas sobre sus dos lados menores.

7. Dada la ecuación $x^4 - \alpha x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$, hallar $\alpha \in R$ para que tenga dos raíces, cuya suma sea igual a -1. Resolver la ecuación en este caso.

8. Siendo P_n el número de permutaciones p sobre el conjunto $(1, 2, \ldots, n)$ tales que $\forall x,\ p(x) \neq x$.

(a) Probar que

$$n! = P_n + \binom{n}{1} P_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-2} P_2 + 1$$

(b) Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{n!} = \frac{1}{e}$$

OPOSICIONES A PROFESORES DE MATEMATICAS DE ESCUELAS DE MAESTRIA INDUSTRIAL

PROBLEMAS PROPUESTOS EN ANDALUCIA EN 1988

1. Calcular el límite de la función

$$y = \sqrt[n]{(x+c_1)\,(x+c_2)\,\ldots\,(x+c_n)} - x$$

cuando x tiende a infinito.

2. Se da una parábola $y^2 = 4x$. Por un punto P se trazan dos normales PA y PB a la parábola. Las tangentes MA y MB correspondientes a dichas normales se cortan en un punto M. Hallar el lugar geométrico de M cuando P describe la circunferencia:

$$(x-4)^2 + y^2 = 4$$

3. Estudios realizados sobre la población americana, han demostrado que se puede admitir que la probabilidad P(n) de que una familia tenga exactamente n hijos está definido por

$$P(n) = \alpha \cdot p^n \;, \qquad P(0) = 1 - \alpha(p + p^2 + p^3 + \ldots .)$$

donde α y p son reales positivos con $p < 1$ y $1 + \alpha \leq \frac{1}{p}$.

(a) Demostrar que, para $k \geq 1$ la probabilidad de que una familia tenga exactamente k hijos varones es

$$\frac{2\,\alpha \cdot p^k}{(2-p)^{k+1}}$$

(b) Sea una familia que tiene al menos un niño, ¿cuál es la probabilidad p de que tenga 2 o más? (Los nacimientos de niños y niñas son equiprobables).

4. Aplicando el desarrollo de $(M+N)^2$, donde M y N son matrices de dimensión nxn, encontrar una solución de la ecuación

matricial

$$A + A^{-1} + 2 \cdot I = 0$$

donde I, 0 son las matrices unidad y nula respectivamente, de dimensión nxn.

5. Calcular la longitud de la curva

$$4(x^2 + y^2) - a^2 = 3(a^2\, y)^{2/3}$$

6. Se denomina sucesión de Fibonacci a la formada a partir de los números $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, según la ley $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

(1) Demostrar que dos términos consecutivos cualesquiera de esta sucesión son primos entre sí.

(2) Demostrar la relación: $u_{n+2} = 1 + \sum_{1}^{n} u_k$

(3) Demostrar que cada tres términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci se verifica: $u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

7. Sea la expresión $x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{\ldots\ldots}}}}$, $a \in N$.

Calcular el valor de x.

8. Sea f una función real definida en R, que satisface la relación

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para cualquier par de puntos x,y. Sabiendo que f es continua en x = 0:

(1) Probar que entonces f es continua en a para todo a.

(2) Determinar explícitamente esta función.

Como socio de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín (señalar con unas aspas los que interesen):

3	4	5	9	10	11	12	13	14	15	16	17
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo (20 pts. por número para Madrid y 30 pts. por número para provincias).

Hagan el envío utilizando como dirección la que consigno en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7 y 8 están agotados. De los números 9 y 12 quedan tan solo unos pocos ejemplares.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la Sociedad, Apartado 9479 - 28080-MADRID.

PROBLEMA EN EL BILLAR CIRCULAR

Por J. Ochoa

En una charla con los componentes del equipo que iba a representar a España en la O.M.I., celebrada este año en Australia, se me planteó el siguiente problema: "En un billar circular de centro O, hay situadas dos bolas B_1 y B_2. Supuesto que en el choque de bola con banda se cumplan rigurosamente las leyes de la reflexión, determinar el punto P de la banda al que se debe dirigir una de las bolas, para que después de rebotar en la banda, choque con la otra bola".

Mi respuesta, "*no merece la pena pensar este problema porque, creo que no es cuadrático*", sorprendió a los alumnos. No me extrañó que, aún tratándose de alumnos muy seleccionados, desconocieran la teoría referente a los problemas resolubles con regla y compás. Se trata de la debatida cuestión de la frontera entre información y conocimiento, digamos, total. Con respecto al problema planteado, yo pienso que un alumno que participa en la O.M.I. debe estar informado de ciertas proposiciones matemáticas, aunque no conozca, ni deba conocer, su demostración. En este caso concreto, el alumno debe estar informado de que un problema geométrico es resoluble con regla y compás si planteado analíticamente con toda generalidad, la determinación de las soluciones depende de la resolución de una cadena finita de ecuaciones de grado no superior a dos y cuyos coeficientes pertenezcan al cuerpo generado por los datos del problema. Si en lugar de plantear el problema con toda generalidad, se plantea en un caso particular, de la constructividad con regla y compás del caso particular no se infiere dicha constructividad en el caso general. Por el contrario, de la no constructividad con regla y compás del caso particular, sí se infiere la no constructividad con regla y compás del caso general.

Consideremos "el problema del billar" en el caso particular siguiente: ejes ortogonales con el origen en el centro O del billar, la bola B_1 en el punto (a, 0), la bola B_2 en el punto (0, b), el radio del círculo igual a 1 y P el punto $(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$.

En estas condiciones tenemos:

- Ecuación de la recta B_1P —— $(1-t)^2 x + (at^2-2t+a) y + a(t^2-1) = 0$

- Ecuación de la recta B_2P —— $(1-b-(1+b)t^2) x - 2ty + 2bt = 0$

Condición de reflexión, $d(0, B_1P) = d(0, B_2P)$ nos da,

$$\frac{a^2(t^2-1)^2}{(1-t^2)^2 + (at^2-2t+a)^2} = \frac{4b^2t^2}{4t^2 + (1-b-(1+b)t^2)^2}$$

ecuación equivalente a

$$a^2(1+b)^2 t^8 - 4(a^2b^2+a^2b+b^2) t^6 + 16ab^2t^5 - 2(5a^2b^2+4b^2+a^2) t^4 +$$
$$+ 16ab^2t^3 - 4(a^2b^2-a^2b+b^2) t + a^2(1-b)^2 = 0$$

que se puede escribir en la forma,

$$(1+t^2)\ (a(b+1)t^2-2bt+a(b-1))\ (a(b+1)t^4+2bt^3 - 6abt^2+2bt +$$
$$+ a(b-1)) = 0$$

La ecuación $a(b+1)t^2 - 2bt + a(b-1) = 0$, determina los puntos de intersección de la recta B_1B_2 con la circunferencia, por tanto, sus soluciones son extrañas respecto al problema planteado. Por consiguiente, las soluciones del "problema del billar" vienen dadas por la ecuación:

$$a(b+1)t^4 + 2bt^3 - 6abt^2 + 2bt + a(b-1) = 0 \qquad \text{(I)}$$

Si hacemos en I $b = -1$, resulta:

$$t^3 - 3at^2 + t + a = 0 \qquad \text{(II)}$$

La ecuación II, para valores arbitrarios de a, no se puede resolver mediante radicales cuadráticos, por tanto, la ecuación I tampoco se puede resolver mediante raíces de índice dos, ya que si fuera posible, haciendo en la expresión de los valores de t, soluciones de I, $b = -1$, tendríamos soluciones de II mediante raíces de índice dos, lo cual ya hemos indicado que es imposible. En consecuencia queda demostrado que "el problema del billar circular" no es resoluble con regla y compás.

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

LA CURIOSA HISTORIA DE ......

Por Mariano Martínez Pérez

IV. LOS CALZONCILLOS (CON PERDON) DE MÖBIUS

Casi todo el mundo sabe lo que es una "banda de Möbius", la curiosa superficie de una sola cara, que se puede construir fácilmente a partir de una simple tira rectangular de papel, pegando entre sí los dos lados cortos, una vez girado uno de ellos 180°.

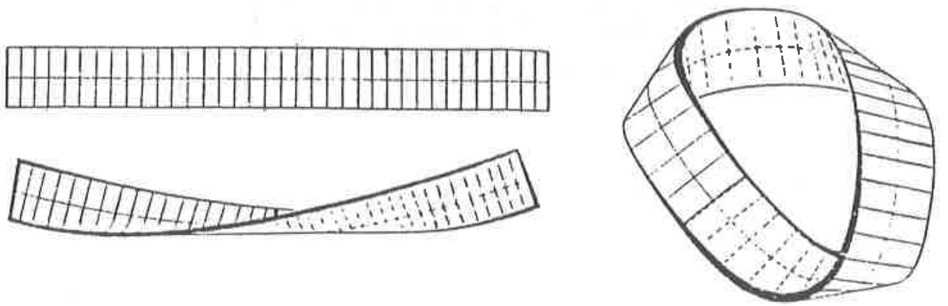


Figura 1

Muchos menos (naturalmente) conocen los "calzoncillos de Möbius", que, como era de esperar en todas las prendas de vestir de Mobius, también tienen una sola cara (se ruega abstenerse de comentarios soeces o de mal gusto). La figura muestra cómo construir estos interesantes calzoncillos y es fácil comprobar que, efectiva, mente, tienen solo una cara.

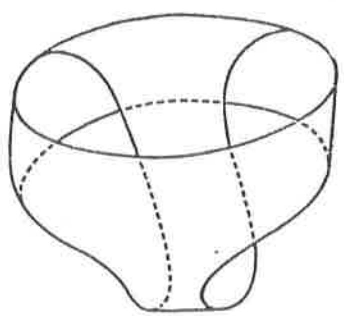


Figura 2

LA CURIOSA HISTORIA DE ......

Por Mariano Martínez Pérez

V. LA DIGNIDAD DE LOS DIPLOMATICOS, PUESTA EN ENTREDICHO

Una vez terminados los estudios universitarios en su ciudad natal, Leizpig, y de conseguir su doctorado en la Universidad de Altdorf, en Nuremberg, en 1667, a los 21 años, rechazó Leibniz la oferta de una cátedra de derecho en esa misma Universidad, y ya no se dedicaría nunca en su vida a la enseñanza (al contrario que Newton, por ejemplo).

Entró, en cambio, al servicio del Príncipe Elector de Mainz como embajador profesional y consultor jurídico, cargo que ocuparía hasta 1676 (los años más fecundos de su vida, desde el punto de vista de su obra matemática), para entrar a continuación al servicio de la casa de Hannover, también como diplomático, consejero jurídico, historiador-cronista y bibliotecario, cargo en el que permanecería ya hasta su muerte en 1716.

Este tipo de actividad exigía hacer frecuentes viajes por toda Europa y ocuparse de asuntos muy diversos, que impidieron a Leibniz hacer un estudio reposado y a fondo de la matemática de la época. Todo ello vino a dificultar considerablemente el que las ideas matemáticas de Leibniz sobre el nuevo "cálculo infinitesimal" pudieran desarrollarse y madurar en la calma y el reposo necesarios.

Erich Temple Bell, en su famoso libro "Men of Mathematics", dedicó a Leibniz un capítulo titulado elogisamente "Master of all Trades" (es decir, "Maestro en todos los oficios"), capítulo que termina con las siguientes palabras, refiriéndose a la profesión de diplomático que ejerció Leibniz durante largos años:

"There is but one profession in the world older than his, and until that is made respectable, it would be premature to try any man for choosing diplomacy as his means to a livelihood".

Es decir:

"No hay más que una profesión en el mundo que sea más antigua que la suya, y mientras ésta no consiga hacerse respetable, sería prematuro juzgar a un hombre cualquiera por el hecho de elegir la diplomacía como medio de ganarse la vida".

NOTA SOBRE LA INTEGRACION POR PARTES

Por Santiago Calviño Castelo y Fernando Revilla Jiménez
I.B. Emperatriz Mª de Austria

La integración por partes es un método para hallar primitivas aplicable cuando la función a integrar es producto de otras dos, una de ellas con derivadas sencilla y otra fácil de integrar.

Su conocida formulación:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

procede de la derivada del producto de dos funciones

$$(f(x)\, g(x))' = f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)$$

En muchas ocasiones este procedimiento ha de aplicarse repetidamente para obtener la función primitiva deseada. Cuando esto ocurre presentaremos una disposición en forma de tabla aplicable a cualquier proceso de integración por partes. Escribiremos Ifg' por $\int f(x)\ g'(x)\, dx$ para no alargar los símbolos e indicaremos $\int (\int g(x)\, dx)\, dx$, por ejemplo, por $I^2 g$ para simplificar la notación. Según esto la aplicación reiterada del método de integración por partes conduce a la serie de igualdades:

$$Ifg' = fg - If'g$$

$$If'g = f'Ig - I(f''\, Ig)$$

$$I(f''\, Ig) = f''\, I^2 g - I(f'''\, I^2 g)$$

$$\cdots$$

$$I(f^{n)}\ I^{n-1}\ g) = f^{n)}\ I^n g - I(f^{n+1)}\ I^n\ g)$$

o la igualdad

$$Ifg' = fg - f'Ig + f''I^2g + \dots + (-1)^n f^{n)} I^n g +$$

$$+ (-1)^{n+1} I(f^{n+1)} I^n g)$$

cuyo segundo miembro puede disponerse como una tabla de dos filas: la primera $f, f', f'', \dots$ y la segunda $g, Ig, I^2g, \dots$; donde cada sumando es el producto de las columnas que aparecen con signos alternos, excepto el último que es la integral del producto de la función de la columna n, en la segunda fila, por la función de la columna n+1, en la primera fila, con el signo correspondiente. Por tanto la tabla será:

		$+$	$-$	$+$	$-$		$(-1)^n$	$(-1)^{n+1}$
DERIVACION		f	f'	f''	f'''	...	$f^{n)}$	$f^{n+1)}$
INTEGRACION	g'	g	Ig	I^2g	I^3g	...	I^ng	

En la tabla se pueden presentar los siguientes casos:

1ª) Que el proceso se detenga cuando una de las derivadas f se anule, tal como ocurre en las integrales del tipo $\int p(x)\, e^{ax}\, dx$, $\int p(x)\, \text{sen}\, ax\, dx$ ó $\int p(x) \cos ax\, dx$, donde p(x) es un polinomio.

Calcular $\int x^3 e^{2x}\, dx$

	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
	x^3	$3x^2$	$6x$	6	0
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$\frac{1}{4}e^{2x}$	$\frac{1}{8}e^{2x}$	$\frac{1}{16}e^{2x}$	

luego

$$\int x^3 e^{2x} = \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3x^2 e^{2x}}{4} + \frac{6x\, e^{2x}}{8} - \frac{6e^{2x}}{16} + C =$$

$$= \frac{e^{2x}}{8}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) + C$$

2ª) Que el proceso se detenga porque la integral del producto $f^{n+1)} I^n g$, sea inmediata.

Calcular $\int x^4 \ln x\, dx$

	$+$	$-$
	$\ln x$	$1/x$
x^4	$x^5/5$	

$$\int x^4 \ln x\, dx = \frac{x^5 \ln x}{5} - \int \frac{x^4}{5}\, dx = \frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{x^5}{25} =$$

$$= \frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + C$$

3ª) Que el proceso se detenga porque $(-1)^{n+1} I(f^{n+1)} \cdot I^n g)$ sea igual a $-I f g'$ salvo una constante positiva, como aparece en integrales del tipo $\int e^{ax} \cos bx\, dx$, $\int e^{ax}\, \text{sen}\, bx\, dx$ o bien se descomponga en la original por una constante y una integral inmediata, tal como ocurre en $\int \text{sen}^2 x\, dx$ y $\int \cos^2 x\, dx$.

Calcular $e^{3x} \cos 2x\, dx$.

	$+$	$-$	$+$
	e^{3x}	$3e^{3x}$	$9e^{3x}$
$\cos 2x$	$\text{sen}\, 2x/2$	$-\cos 2x/4$	

luego,

$$\int e^{3x} \cos 2x\, dx = \frac{e^{3x} \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{3e^{3x} \cos 2x}{4} - \frac{9}{4} \int e^{3x} \cos 2x\, dx + C =$$

$$= \frac{e^{3x}}{13} (2\operatorname{sen} x + 3\cos x) + C$$

Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

	+	-
	sen x	cos x
sen x	-cos x	

luego

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx =$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} + C$$

4ª) Que el proceso no tenga fin, pero que permita hallar una ley de formación de modo que la primitiva pueda ser expresada por una serie uniformemente convergente, en cierto intervalo tal como puede aparecer en el cálculo de algunas integrales definidas.

Calcular $\int e^{-x^2} dx$

	+	-	+	-	
	e^{-x^2}	$-2x\, e^{-x^2}$	$-2e^{-x^2} + 4x^2\, e^{-x^2}$	$12xe^{-x^2} - 8x^3\, e^{-x^2}$	...
1	x	$x^2/2!$	$x^3/3!$	$x^5/5!$	...

luego,

$$\int e^{-x^2} dx = x\, e^{-x^2} + x^3\, e^{-x^2} - \frac{1}{3} x^3\, e^{-x^2} + \frac{2}{3} x^5\, e^{-x^2} - \frac{1}{2} x^5\, e^{-x^2} +$$

$$+ \frac{1}{3} x^7\, e^{-x^2} + \frac{1}{10} x^5\, e^{-x^2} - \frac{2}{15} x^7\, e^{-x^2} + \ldots$$

$$\int e^{-x^2} dx = e^{-x^2} (x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{4}{15} x^5 + \ldots) = e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + C$$

En este último caso el método de integración por partes es poco práctico. Para hallar el valor aproximado de una integral definida es más manejable el polinomio de Taylor dado, y las series que se obtienen por este método plantean problemas de convergencia y acotación, en muchos casos, difíciles de estudiar.

CALENDARIOS MATEMATICOS

Por Agripina Sanz García
I.B. "Giner de los Rios, Segovia.

Teniendo en cuenta la dificultad, proverbial a veces, del aprendizaje de las matemáticas especialmente en 1ª de B.U.P., el grupo de profesores miembros del Seminario de Matemáticas, que impartimos la asignatura en 1ª de B.U.P., nos planteamos la necesidad de conjugar el necesario rigor de la materia con aspectos lúdicos que motivaran a los alumnos a ejercitar y desarrollar su capacidad matemática mediante pequeñas investigaciones de cálculo, aspectos históricos, biográficos, juegos, etc., y a fomentar su capacidad creativa mediante la invención de problemas, conocida su solución.

En contacto con el Seminario de Dibujo, propusimos a los alumnos realizar unos CALENDARIOS MATEMATICOS, que tendrían la particularidad de que la solución de cada problema o juego, sería el día correspondiente a la casilla donde se encontraba.

La experiencia se realizó durante el curso 1986-87, en los grupos de 1ª de B.U.P., que había en el Centro. Cada curso, dividido en equipos de trabajo, hizo su propio calendario.

Y organizó su trabajo de manera distinta. Fundamentalmente, la organización corrió a cargo de los alumnos, que decidieron dividirse en grupos de tres o cuatro para formar equipos de trabajo. Cada equipo eligió un mes y procedieron a buscar problemas cuya solución estuviera entre el 1 y el 31. Después de encontrar los enunciados, elegían los más curiosos e interesantes, y procedían a comprobar los resultados. Así aprendían a valorar el trabajo de sus compañeros.

Otros grupos prefirieron repartirse los días, de modo que cada equipo buscaba doce problemas de solución fija.

Los diseños estuvieron a cargo de otros alumnos que preferían este trabajo al de buscar problemas. Cada calendario guarda unidad de diseño en la técnica empleada: punteado, rayado, figuras geométricas.

PROBLEMAS HISTORICOS Y JUEGOS MATEMATICOS

Destacamos que cada grupo, intentó que sus problemas fuesen interesantes y divertidos.

En cada mes, incluyeron algún juego sencillo (ruedas, estrellas, problemas con el nª 4 en el mes de abril, etc.), o alguna situación histórica, por ejemplo, la conjetura de Fermat.

Y sobre todo, el mes de Diciembre, totalmente dedicado a la aritmética (sistemas de numeración), y calendarios Mayas, debido a la proximidad del milenio de la caída del primer Imperio Maya.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- "Aventuras Matemáticas".- Miguel de Guzmán. Labor.
- "Ruedas, vida y otros divertimentos matemáticos". Gardner. Alianza Edit.
- "Problemas y experimentos recreativos". Perelman. Edit. Mir.
- "Curiosidades matemáticas". R. Escandón. Editorial Riana.

CONCLUSIONES

Como es de suponer, este trabajo llevó mucho tiempo. El hacer que intervinieran todos los alumnos de cada grupo, produjo retrasos.

Destacamos el valor educativo de la experiencia: cada equipo conocía y era responsable de la importancia de su trabajo en el conjunto, unos apremiaban a otros, se animaban a buscar e incluso "inventar" sus problemas, consultaban bibliografía totalmente desconocida para ellos, hasta entonces, y competían sanamente en lograr el calendario más bonito y mejor realizado, que luego expusieron en sus respectivas aulas.

Esto y la novedad de un "trabajo matemático" suscitó interés y gran espíritu de colaboración.

La labor del profesor de matemáticas consistió en orientar y revisar la actividad de cada equipo y la del profesor de dibujo fue un intenso seguimiento del trabajo de los alumnos, labores recompensadas por la satisfacción de presentar los calendarios terminados a fin de año.

RESEÑA DE LIBROS

"EXPERIENCIA MATEMATICA", por Philip H. Davis y Reuben Hersh. Ministerio de Educación y Ciencia y Editorial LABOR, S.A. Barcelona, 1988. 314 páginas.

No es éste un libro de Matemáticas, sino un libro acerca de las Matemáticas; y de paso sobre sus discutidos fundamentos, sobre los matemáticos y su manera de pensar, sobre la creación matemática, sobre la fé en las Matemáticas de los que la utilizan, sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia y sobre los problemas abiertos que presenta hoy día.

Sus autores son investigadores en ciertas parcelas de las Matemáticas que, lejos de dejarse absorber por completo por los detalles de su creación especializada, no han dejado de formularse las grandes preguntas sobre las Matemáticas: ¿Cuál es su naturaleza? ¿Qué significado tienen? ¿De qué se ocupan? ¿Cómo se crean y se utilizan? ¿Qué beneficios o daños emanan de ellas? Su preocupación por estos temas ha dado lugar a la publicación de diversos artículos y ha culminado en la del libro que ahora comentamos.

La obra va dirigida preferentemente a aquellas personas que tienen alguna relación con las Matemáticas, ya sea porque la utilizan, porque las enseñan o aprenden o porque investigan contribuyendo a su creación, y que alguna vez se han parado a reflexionar sobre su naturaleza, su significado y su fuerza. Para todos ellos es de fácil y amena lectura. Proporciona una visión fascinante del mundo lleno de vida de las Matemáticas, muy alejada de esa visión superficial que intenta reducir las Matemáticas a un conjunto de definiciones y teoremas, lo que es tan poco esclarecedor como sentenciar que una obra literaria se reduce a un conjunto de frases o una escultura a un pedazo de piedra.

La versión original fue publicada en Boston en 1982 y tu vo una gran aceptación en los Estados Unidos. Aplaudimos la idea de traducirla a nuestro idioma y facilitar así el acceso a ella de nuestra comunidad matemática.

El libro consta de unas introducciones y de ocho capítulos y se completa con un glosario de términos, con una extensa bibliografía y con un índice analítico. Damos los titulares de los capítulos, con breves indicaciones sus contenidos:

1.- El paisaje matemático. (¿Qué son las Matemáticas?).

2.- Variedades de experiencia matemática. (El matemático ideal. Las Matemáticas vistas por un físico. Heterodoxos).

3.- Aspectos externos. (¿Por qué funcionan las Matemáticas? Modelos. Utilidad y potencia de las Matemáticas).

4.- Aspectos internos. (Símbolos. Abstracción. Formalización. Existencia. Demostración. Estética. El carácter enigmático de las Matemáticas).

5.- Selección de temas matemáticos. (Grupos. Números primos. Geometría no euclídea. Análisis no estándar).

6.- Enseñar y aprender. (La crisis de la comprensión. La técnica del descubrimiento de Pólya. La heurística de Lakatos. Aspectos no analíticos de las Matemáticas).

7.- De la certeza a la fiabilidad. (Platonismo, formalismo y constructivismo. El mito de Euclides. La filosofía formalista. Lakatos y la dubitabilidad).

8.- La realidad matemática. (La hipótesis de Riemann. Modelos matemáticos, computadoras y platonismo. La clasificación de los grupos finitos. La intuición. Hechos verdaderos acerca de objetos imaginarios).

La lectura de este libro es muy recomendable para todos los profesores de Matemáticas que sentimos la inquietud de encontrar el sentido profundo de nuestra actividad docente y el significado real de lo que estamos enseñando.

J.F.B.

- -- -

"ACTIVIDADES MATEMATICAS", por Brian BOLT. Editorial Labor, S.A. Barcelona, 1988. VIII + 126 págs.

En el número 16 de nuestro Boletín hablábamos de la obra "Divertimentos Matemáticos", del mismo autor que la que ahora comentamos, cuya versión española nos ofrece la Editorial Labor con el título de "Actividades Matemáticas".

Como en el anterior, la presentación de este libro es muy atractiva, sobre todo por las numerosas y acertadas figuras que lo ilustran. También tiene en común con aquel la gran riqueza y variedad de contenido, que sorprende en relación con el número de páginas empleadas. Pero el objetivo de este nuevo libro es distinto que el del anterior. Se trata en él de proporcionar a los profesores en matemáticas, a los maestros en general e incluso a padres interesados en la educación matemática de sus hijos, un extenso repertorio de actividades que pueden contribuir a fomentar, en los muchachos de 8 a 15 años de edad, el interés por la resolución de problemas, el razonamiento deductivo, el análisis de situaciones reales mediante modelos matemáticos, las propiedades de los números y la intuición espacial.

Las 73 actividades que propone están seleccionadas entre las utilizadas por el autor en los "Clubs de Matemáticas" que organizó durante muchos cursos, con alumnos de 9 a 12 años interesados en estos temas que se prestaban a realizar esas actividades los sábados por la mañana. La experiencia suscitó entre esos alumnos tal entusiasmo que animó al autor a publicar el libro. Si un profesor trata hoy día de realizar una experiencia parecida, encontrará en esta obra una fuente de ideas brillantes, imaginativas y llenas de ingenio que le facilitarán enormemente la labor.

Al igual que el otro libro de Brian Bolt que ya comentamos, éste muestra gran sobriedad en la exposición, absteniéndose de dar "recetas para su uso" que señalen la posible utilización didáctica de las actividades que describe. El autor aporta un riquísimo repertorio de ideas y confía en que el profesor que lea el libro sabrá aprovechar para sus fines docentes las posibilidades que ofrece cada una de ellas en forma adecuada.

Como en "Divertimentos Matemáticos", la segunda parte del libro recoge comentarios o soluciones a las situaciones o problemas propuestos en la primera.

J. F. B.

"ENJAMBRE MATEMATICO", por R. Rodríguez Vidal, Editorial Reverté, S.A. Barcelona, 1988. 166 + XIV págs.

En más de una ocasión hemos traído a estas páginas al autor de esta obrita que completa la trilogía de la que forman también parte las tituladas "Diversiones matemáticas" y "Cuentos y cuentas de los matemáticos", esta última comentada ya en el número 11 de nuestro Boletín. Y la verdad es que se nos hace penoso aceptar el propósito del autor de dar por terminada la serie, una serie que nos ha proporcionado abundantes momentos de reflexión, de interés y también de solaz.

Los distintos capítulos de que el libro consta recogen los temas siguientes:

I. "Las manos y la aritmética", que se refiere a la numeración y a las operaciones hechas con los dedos ya desde antiguo o bien utilizando mecanismos

que responden a determinadas identidades numéricas.

II. "Reducción de problemas típicos", donde en enunciados distintos se descubre un mismo problema, que a veces se remonta a Diofanto; así, diferentes situaciones se reducen a un mismo tratamiento matemático.

III. "Muestrario de recreaciones numéricas": curiosidades en las que se combinan cifras, números y letras enunciados de problemas y de juegos repetidos a lo largo de la historia, igualdades numéricas sorprendentes, etc.

IV. "Seis problemas poemáticos": verdadero alarde de ingenio en una insuperable imitación de los antiguos enunciados en verso de problemas, uno de los cuales fue ya publicado en el número citado del Boletín, pues que el autor tuvo la amabilidad de ofrecérnoslo como primicia.

V. "¿Ciencia contra poesía?": relaciones no siempre comprendidas entre matemática y poesía.

VI. "Divagación desde un refrán: pares y nones": todo un sugestivo recuerdo de propiedades y curiosidades sobre números pares e impares.

VII. "El 'in' y el 'con' de lo inconmesurable": episodio dedicado a los números a partir de una mala interpretación popular de lo inconmesurable.

VIII. "De lo inmenso a lo infinito": sorprendentes relaciones, algunas bien conocidas, entre los números, los primos, el infinito, los números transfinitos, etc.

IX. "Medida del círculo", dedicado sobre todo al número pi y sus vicisitudes, incluso las de los falsos cuadradores y de los falsos "matemáticos" que se las dan de genios.

X. "¿Qué números reales existen realmente?": sobre números algebraicos y trascendentes, demostraciones varias y anécdotas.

XI. "Dos matemáticos del Romanticismo". Dos pequeñas biografías, magistralmente escritas, de Abel, el Mozart de la matemática, y Galois, con un gran profundización, más que en su obra matemática, en las circunstancias sociales y políticas de su vida y de su muerte.

XII. "Apuntes de varia lección". Relatos de d'Alembert, Vallejo, las matemáticas y la esgrima en el Siglo de Oro, a través de Cervantes y Quevedo, mitificación de las matemáticas, etc.

Como puede apreciarse, y siguiendo la línea del autor en anteriores textos de porte similar, recoge también en éste una variada colección de fichas que recorren toda una gama de escritos, aun los más alejados aparentemente de la matemática, encontrando siempre la cita oportuna, la referencia aprovechable, para de ella sacar una lección, una advertencia o la ilustración de un concepto o el comentario ocurrente y preciso.

Por añadidura el libro está escrito con suma limpieza, literariamente muy cuidado, cosa no demasiado frecuente en nuestros pagos, y nos embebe la atención con una bocanada de grato y ameno sabor.

J.J.E.

PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA XXIX OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL (CANBERRA, 15-16 JULIO 1988):

PROBLEMA 1º:

Se consideran dos circunferencias concéntricas y coplanares de radios R y r ($R > r$). Sea P un punto fijo de la circunferencia menor y B un punto variable de la circunferencia mayor. La recta BP vuelve a cortar a la circunferencia mayor en el punto C. La perpendicular l a BP por P vuelve a cortar a la circunferencia menor en el punto A (si l es tangente a la circunferencia en P, entonces $A = P$).

(i) Determine el conjunto de valores de $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

(ii) Determine el lugar geométrico descrito por el punto medio de AB.

PROBLEMA 2º:

Sea n un número entero estrictamente positivo. Sean A_1, A_2, ..., A_{2n+1} subconjuntos de un conjunto B tales que

(a) cada A_i tiene exactamente $2n$ elementos,

(b) para todo (i,j), $1 \le i < j \le 2n+1$, $A_i \cap A_j$ contiene uno y sólo un elemento,

(c) cada elemento de B pertenece al menos a dos de los conjuntos A_i.

Determinar para qué valores de n se puede asignar a cada uno de los elementos de B uno de los números 0 ó 1, de tal manera que cada uno de los conjuntos A_i tenga exactamente n elementos a los cuales se ha asignado 0.

PROBLEMA 3º:

Sea f la función cuyo dominio es el conjunto de los enteros estrictamente positivos definida por

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3,$$
$$f(2n) = f(n),$$
$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n),$$

para todo n.

Determine el número de enteros estrictamente positivos n, menores o iguales que 1988, tales que $f(n) = n$.

2ª/ José Mª Font Hernández(*), del Colegio de Huérfanos de la Armada.

3ª/ Alfredo García Hernández, del Colegio "Joyfe" de Madrid.

4ª/ Jesús Fraile Cuesta(*). del I.B. "Padre Juan de Mariana" de Talavera de la Reina.

5ª/ Enrique García Simón, del I.B. "Buero Vallejo" de Guadalajara.

Quedaron con puntuaciones cercanas a las de los ganadores en 2ª Curso: Francisco Moya Fernández del I.B. "Gran Capitán" de Madrid y Lorena Martín Carbonell del Colegio "Amor de Dios" de Alcorcón (Madrid), y en 3er Curso: Lorenzo Rubio Pliego del Colegio "Joyfe" de Madrid, y Domingo Sánchez Ruiz del I.B. "Buero Vallejo" de Guadalajara.

A los ganadores citados se les entregó el correspondiente diploma y un lote de libros; fueron muy aplaudidos por el numeroso público que presenció el acto. Esta Sociedad les da también su enhorabuena desde este Boletín, extensiva también a los Centros y Profesores que les han preparado.

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en el Concurso.

(*) El Sr. Fraile fué el 2ª premio de Segundo Curso en nuestro concurso de 1987 y el Sr. Font fué 3er premio de Primer Curso en el de 1986.

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTROS BOLETINES Y DE AQUELLOS PARA LOS QUE TODAVIA NO SE HAN RECIBIDO SOLUCIONES (INDICADOS CON XX)

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números										obs.
		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	CME-f2 1984	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finlª)	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-86(Bogotá)	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2 1986	18	19	XX	18	19	19	-	-	-	-	
	Varios	-	-	-	-	-	-	17	17	11	17	C
10	China y Austª	XX	15	XX	XX	15	XX	XX	XX	XX	-	*
11	CME-f1 1986	13	14	14	14	14	XX	XX	15/	XX	12	
	OMI-86(Varsoª)	XX	XX	12	XX	-	-	-	-	-	-	*
12	OIM-87(Urug.)	16	14	14	17	15	17	-	-	-	-	C
	OME-f1-Extremª	-	-	-	-	-	-	15	15	15	XX	
13	OME-f2 1987	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	18	18	18	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
16	OME-f1 1987	XX	XX	XX	18	XX	XX	XX	XX	-	-	
17	OME-f2 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
18	OIM-Perú 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
19	OMI-88(Austlia)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
CME = Olimpiada Matemática Española - fase 1ª o 2ª.

Obs. C = Completada la publicación de soluciones
* = Esperamos especialmente de nuestros socios el envío de soluciones a estos problemas señalados con XX .

C O R R I G E N D A

En el enunciado del **PROBLEMA 8°** del **BOLETÍN N° 16** se omitió el signo " + " entre " 2x " y " z " ; debe leerse $2x + z = 3$.

\- - -

En el enunciado del **PROBLEMA 6°** del **BOLETÍN N° 17** aparece el término " - 858x ", cuando debería aparecer en su lugar " + 858x " .

\- - -

Recordamos también el error deslizado en el PROBLEMA 6° del BOLETÍN N° 16, advertido en la pág. 74 del BOLETÍN N° 18

\- - -

P R O B L E M A S   R E S U E L T O S

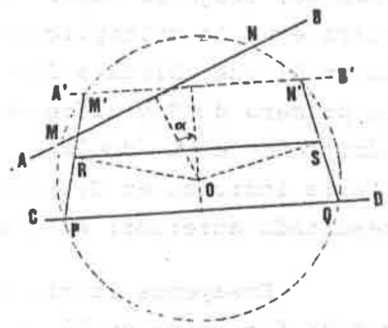
PROBLEMA 1ª (Boletín nª 3)

En una posición O de un aeropuerto de campaña está emplazado un cañón que puede girar 360°. Dos tanques atacan dicho lugar siguiendo trayectorias rectilíneas AB y CD, dadas. Hallar gráficamente el alcance del cañón sabiendo que la suma de los trozos de trayectorias de ambos tanques en los cuales éstos quedan bajo el fuego del cañón es una longitud conocida l.

Solución

Sean AB y CD las trayectorias rectilíneas seguidas por los tanques. Supongamos el problema resuelto; se tendría

$$MN + PQ = l$$



Girando la recta AB, con centro O, un ángulo α igual al que forman AB y CD, se tiene la recta A'B' y la figura PM'N'Q es un trapecio; la paralela media RS medirá $\frac{1}{2}(PQ + M'N') = \frac{1}{2}(PQ + MN) = \frac{l}{2}$. Por otra parte P y M' equidistan de O, luego RO es la mediatriz de M'P y análogamente SO lo es de N'Q.

La construcción resulta evidente: girada la recta AB para que resulte paralela a CD, se dibuja una recta equidistante de ambas y se le traza la perpendicular por O; a partir del punto de intersección se toman a un lado y a otro dos segmentos de longitud $\frac{l}{4}$, hallándose los puntos R y S. Las perpendiculares a RO por R y a SO por S, cortan, respectivamente, a A'B' y a CD en M' y N' y en P y Q. La distancia de O a cualquiera de estos puntos (radio del círculo circunscrito al trapecio PM'N'Q) es el alcance del cañón.

José V. García Sestafé. (Madrid)

PROBLEMA 2ª (Boletín nª 3)

Determinar un número de 5 cifras tal que su cuadrado termine en las mismas 5 cifras colocadas en el mismo orden.

Solución

1^{er} procedimiento

El problema equivale a reconstruir la multiplicación que se indica en A).

La cifra *e* tiene que ser necesariamente 0, 1, 5 ó 6. Si fuera $e=0$, el cuadrado terminaría en dos ceros, o sea $d=0$ y así sucesivamente; luego el número sería 00000. Si la cifra $e=1$ la multiplicación sería la indicada en B) que obliga a $2d=d$ o bien $10+d=2$; de la primera $d=0$ y la segunda $d=10$ (absurdo). Admitiendo $e=1$, $d=0$, la multiplicación sería la indicada en C), que conduce al mismo resultado anterior; el resultado sería 00001.

Ensayemos la cifra 5; como toda potencia de 5 termina en 25, $e=5$, $d=2$; la multiplicación es la que se muestra en D), de donde $10c+6$ termina en *c*, ésto es $c=6$.

Para obtener b se forma el esquema E) de donde $10b+10$ termina en $b \Rightarrow b=0$. Finalmente en F) se indica el método para hallar a; $10a+1+7+1$ (nos "llevamos" 1) $=10a+9$ debe terminar en $a \rightarrow a=9$. Luego un número solución es

$$90625^2 = 8212890625$$

A)

$$\begin{array}{r} abcde \\ abcde \\ \hline \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\ \, \\ \cdots\cdots\ \ \ \\ \cdots\cdots\ \ \ \ \ \\ \cdots\cdots\ \ \ \ \ \ \ \\ \hline \cdots\cdots abcde \end{array}$$

B)

$$\begin{array}{r} \cdots d1 \\ \cdots d1 \\ \hline \cdots d1 \\ \cdots d\ \ \\ \cdots\cdots\ \ \ \\ \hline \cdots\cdots\ d1 \end{array}$$

C)

$$\begin{array}{r} \cdots c01 \\ \cdots c01 \\ \hline \cdots c01 \\ \cdots c\ \ \ \\ \hline \cdots c01 \end{array}$$

D)

$$\begin{array}{r} \cdots c25 \\ \cdots c25 \\ \hline (5c+1)25 \\ 5\ 0\ \ \\ 5\ c\ \ \ \\ \cdots\cdots\ \ \ \ \\ \hline \cdots\cdots c25 \end{array}$$

E)

$$\begin{array}{r} b625 \\ b625 \\ \hline (5b+3)125 \\ 250\ \\ 50\ \ \\ 5b\ \ \ \\ \hline b625 \end{array}$$

F)

$$\begin{array}{r} a0625 \\ a0625 \\ \hline 5a3125 \\ 1250\ \\ 750\ \ \\ 5a\ \ \ \\ \hline a0625 \end{array}$$

Ensayando la cifra 6, siguiendo el mismo procedimiento se obtiene

$$09376^2 = 87909376$$

Luego, la única solución de cinco cifras es 90625.

2ª procedimiento

Sea x el número buscado; entonces

$$x^2 = 100000y + x$$

de donde $x(x-1) = 2^5 \cdot 5^5 \cdot y$.

Como 2 y 5 son primos entre sí, al igual que x y x-1 se puede escribir,

$$\begin{cases} x = 2^5\,\lambda \\ x-1 = 5^5\,\lambda' \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = 5^5\,\lambda' \\ x-1 = 2^5\,\lambda \end{cases} \quad \text{donde} \quad \lambda\lambda' = y$$

De la primera se obtiene

$$2^5\lambda - 5^5\lambda' = 1$$

y de la segunda

$$5^5\lambda' - 2^5\lambda = 1$$

Desarrollando $\frac{5^5}{2^5} = \frac{3125}{32}$ en fracción continua, se obtiene

$$\frac{3125}{32} = (97,\ 1,\ 1,\ 1,\ 10)$$

siendo $\frac{293}{3}$ la penúltima reducida.

La solución general de la primera ecuación diofántica es

$$\lambda = 293 - 3125t\ ; \qquad \lambda = 293,\ 3418, \ldots$$

$$\lambda' = 3 - 32t\ ; \qquad \lambda' = 3,\ 35, \ldots$$

y como $\lambda\lambda' = y < 10^6$, la única solución es $\lambda = 293$, $\lambda' = 3$, de donde $x = 32.293 = 9376$, $y = 879$, que conduce a

$$9376^2 = 87909376$$

La solución general de la segunda ecuación diofántica es

$$\lambda' = -3 - 32t \qquad \lambda' = 29,\ 61, \ldots$$

$$\lambda = -293 - 3125; \qquad \lambda = 2832,\ 5957$$

Como $\lambda\lambda' < 10^6$, la única solución es $\lambda' = 29$, $\lambda = 2832$ y de aquí

$$x = 3125.29 = 90625, \qquad y = 29.2832 = 82128$$

de donde,

$$90625^2 = 8212890625$$

que es la única solución de cinco cifras.

José V. García Sestafé, (Madrid).

PROBLEMA 3ª (Boletín nº 3)

Dados dos números reales positivos p y q tales que $p+q = 1$, y sabiendo que todo par x, y de números reales positivos verifica $(x-y)^2 \geq 0$, se pide demostrar:

a) $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$.

b) $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

c) $\left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

Solución

a) Como $x > 0$, $y > 0$ existen $\sqrt{x}$ y $\sqrt{y}$, tales que:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0; \qquad x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$$

de donde

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

b) Partiendo de $(x-y)^2 \geq 0$, se obtiene

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Sumando en ambos miembros $x^2 + y^2$ y dividiendo por el número positivo 4

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{(x+y)^2}{4}; \qquad \frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

c) Como $p+q = 1$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq} = \frac{1}{pq} \geq 4$ (puesto que es sabido que el producto de dos números de suma dada es máximo si ambos son iguales, se tiene:

$$p + \frac{1}{p} + q + \frac{1}{q} \geq 5$$

o bien,

$$(p+\frac{1}{p})^2 + (q+\frac{1}{q})^2 \geq 25 - 2(p+\frac{1}{p})\ (q+\frac{1}{q}) \qquad |A|$$

Por otra parte,

$$\left[(p+\frac{1}{p}) - (q+\frac{1}{q})\right]^2 \geq 0; \quad (p+\frac{1}{p})^2 + (q+\frac{1}{q})^2 \geq 2(p+\frac{1}{p})(q+\frac{1}{q}) \quad |B|$$

Sumando A y B y dividiendo por 2:

$$(p+\frac{1}{p})^2 + (q+\frac{1}{q})^2 \geq \frac{25}{2}$$

José V. García Sestafé, (Madrid).

PROBLEMA 4ª (Boletín nª 3)

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} (\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\ \ldots\ \cos\frac{x}{2^n})$$

Solución

Se trata de hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, siendo $a_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ \cdots\ \cos\frac{x}{2^n}$.

Llamemos $b_n = \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}\ \cdots\ \operatorname{sen}\frac{x}{2^n}$ y calculemos $a_n b_n$:

Agrupando convenientemente los factores y teniendo en cuenta la expresión del seno del ángulo doble:

$$a_n b_n = \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}\right)\cdots\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{2}\ \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{2}\ \cdots\ \frac{\operatorname{sen}(x/2^{n-1})}{2} = \frac{1}{2^n}\operatorname{sen} x\ \operatorname{sen}\frac{x}{2}\ \cdots\ \operatorname{sen}\frac{x}{2^{n-1}}.$$

Por lo tanto, $a_n = \dfrac{a_n b_n}{b_n} = \dfrac{1}{2^n}\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}$. Recordando que

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$, se tiene, por último; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{sen} x\ \frac{1/2^n}{\operatorname{sen}(x/2^n)}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Javier Peralta

Recibidas otras soluciones de Paz Lucas Padín y de José V. García Sestafé.

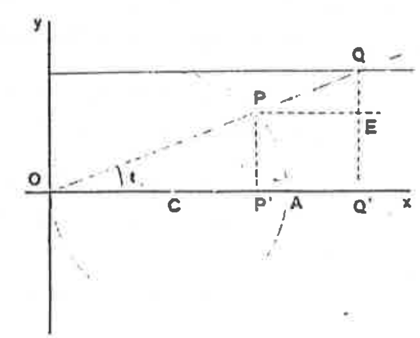
\- ■ - ■ - ■ - ■ -

PROBLEMA 6ª (Boletín nª 3)

Se considera la circunferencia c de centro (3,0) y radio 3, y la recta r paralela al eje OX y que dista tres del origen. Se traza por el origen una recta variable que corta a c en M y a r en P. Determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las paralelas a OX y a OY trazadas por M y P respectivamente.

Solución

Sea la circunferencia de centro C y la recta r paralela a OX. Sea t el ángulo que la secante variable forma con OX. Se tiene



OP = OA · cos t = 6 cos t

ya que OA = 6. De aquí,

P'P = 6 cos t sen t = 3 sen 2t

Por otra parte,

OQ' = Q'Q · cot t = 3 cot t

Por tanto las coordenadas de E, punto genérico del lugar son

E(3 cot t, 3 sen 2t)

e proporcionan las ecuaciones paramétricas del lugar

$$x = 3 \cot t; \quad y = 3 \operatorname{sen} 2t$$

Eliminando el parámetro t

$$\operatorname{tg} t = \frac{3}{x} \longrightarrow \frac{3 \cdot 2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$$

donde

$$y = \frac{18x}{x^2 + 9}$$

ue es la ecuación cartesiana del lugar.

Jose V. García Sestafé, (Madrid).

ROBLEMA 7ª (Boletín nª 3)

e consideran los números naturales escritos del modo usual en base 10. Se pide:

) Encontrar el menor número que al suprimirle la primera cifra quede reducido a su quinta parte. ¿De qué forma son todos los números que poseen esta propiedad?

) Demostrar que no existe ningún número que al suprimirle su primera cifra quede reducido a la duodécima parte.

) Formular un criterio general que nos permita afirmar cuando un número queda reducido k veces al suprimir su primera cifra.

Solución

a) Sea un número cuya primera cifra es a; se puede escribir $10^p\, a + x$, donde x es el número de p cifras que resulta de su

primir la primera. Del enunciado se obtiene

$$10^p\, a + x = 5x; \quad x = \frac{10^p\, a}{4}$$

Distingamos dos casos, según a sea par o impar; en el caso del menor número a = 2 ó a = 1:

$$a = 2, \quad x = \frac{10^p . 2}{4} = 5^p\, 2^{p-1}; \qquad \text{para } p = 1,\ x = 5$$

y el número es 25.

$$a = 1, \quad x = \frac{10^p . 1}{4} = 5^p\, a^{p-2}; \qquad \text{para } p = 2,\ x = 25$$

y el número es 125.

La solución es, pues 25.

b) Análogamente,

$$10^p\, a + x = 12x; \quad x = \frac{10^p\, a}{11}$$

como a (de una cifra) no puede ser divisible por 11, no existe solución.

c) De la misma forma,

$$10^p\, a + x = kx; \quad x = \frac{10^p\, a}{k-1}$$

o sea, bastará que el número $a\,0\,0 \overset{p}{\ldots} 0$ (formado por la primera cifra seguida de p ceros) sea divisible por k-1, y el cociente resultante igual a x; o expresado de otra forma, el producto de las p últimas cifras por k-1 tiene que ser igual a 10^p a.

Jose V. García Sestafé, (Madrid).

PROBLEMA 8ª (Boletín nª 3)

Hallar el resto de la división por $x^2 - 1$ del determinante

$$\begin{vmatrix} x^3+3x & 2 & 1 & 0 \\ x^2+5x & 3 & 0 & 2 \\ x^4+x^2+1 & 2 & 1 & 3 \\ x^5+1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución

El determinante es un polinomio de quinto grado que designaremos por $P(x)$.

Por tanto,

$$P(1) = \begin{vmatrix} 1^3+3\cdot 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1^2+5\cdot 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1^4+1^2+1 & 2 & 1 & 3 \\ 1^5+1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

$$P(-1) = \begin{vmatrix} (-1)^3+3\cdot(-1) & 2 & 1 & 0 \\ (-1)^2+5\cdot(-1) & 3 & 0 & 2 \\ (-1)^4+(-1)^2+1 & 2 & 1 & 3 \\ (-1)^5+1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -69$$

Si llamamos $ax+b$ y $c(x)$ al resto y al cociente de la división de $P(x)$ entre x^2-1, será

$$P(x) = (x^2-1)\cdot C(x) + ax + b$$

$$P(x) = (x+1)(x-1)\cdot C(x) + ax + b$$

$$P(1) = 2\cdot 0\cdot C(1) + a + b = a+b$$

$$P(-1) = 0\cdot(-2)\cdot C(-1) - a + b = -a+b$$

Luego,

$$\left.\begin{aligned} a+b &= 15 \\ -a+b &= -69 \end{aligned}\right\} \quad 2b = -54; \quad b = -27; \quad a = 42$$

Por tanto, el resto es

$$42x - 27$$

Vicente Mendiola, (Ciudad Real).

- Otra solución enviada por José V. García Sestafé, (Madrid).

PROBLEMA 2ª (Boletín nº 9)

Un segmento $\bar{d}$, divide al segmento $\bar{s}$, si existe un número natural n, tal que $n\bar{d} = \bar{d} + \bar{d} + \overset{n}{\ldots} + \bar{d} = \bar{s}$. Se pide:

a) Demostrar que si el segmento d divide a los segmentos $\bar{s}$ y s' ($\bar{s} < \bar{s}'$), entonces el segmento $\bar{d}$ divide al segmento diferencia $\bar{s}' - \bar{s}$.

b) Demostrar que ningún segmento divide al lado $\bar{l}$ y a la diagonal $\bar{d}$ de un pentágono regular. (Razonar sobre un pentágono regular, sin efectuar cálculos numéricos).

Solución

a) Es trivial; si $\bar{d}$ divide a $\bar{s}$ y a $\bar{s}'$, existen sendos números naturales n y n' tales que:

$$\bar{s} = \bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{n} + \bar{d}, \qquad \bar{s}' = \bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{n'} + \bar{d}$$

de forma que

$$\bar{s}' - \bar{s} = (\bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{n'} + \bar{d}) - (\bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{n} + \bar{d}) = \bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{n'-n} + \bar{d}$$

luego existe el número natural n' − n, tal que

$$\bar{s}' - \bar{s} = (n' - n)\,\bar{d}$$

o sea $\bar{d}$ divide a $\bar{s}' - \bar{s}$.

Obsérvese que la propiedad anterior se generaliza al caso de los segmentos $p \cdot \bar{s}$ y $q \cdot \bar{s}'$, siendo $p, q \in \mathbb{N}$, esto es, si $\bar{d}$ divide a $\bar{s}$ y a $\bar{s}'$, también divide a $p\bar{s} - q\bar{s}'$ ($p\bar{s} > q\bar{s}'$) En efecto,

$$p\bar{s} = \bar{s} + \bar{s} + \overbrace{\cdots}^{p} + \bar{s} = (\bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{n} + \bar{d}) + (\bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{n} + \bar{d}) +$$

$$+ \overbrace{\cdots}^{p} + (\bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{n} + \bar{d}) = \bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{np} + \bar{d}$$

Análogamente,

$$q\bar{s}' = \bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{n'q} + \bar{d}$$

luego

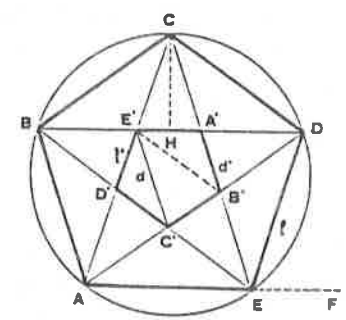
$$p\bar{s} - q\bar{s}' = \bar{d} + \bar{d} + \overbrace{\cdots}^{np-n'q} + \bar{d}$$

existiendo el entero np − n'q y por tanto $\bar{d}$ divide a $p\bar{s} - q\bar{s}'$

b) Dibujadas las diagonales del pentágono ABCDE se obtiene el A'B'C'D'E', homotético del anterior. La figura AE'DE es un rombo, puesto que sus lados opuestos son paralelos:

$$\widehat{EAE'} = \frac{\overline{CE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{DE}}{2} = \widehat{FED}$$

y por tanto $\overline{AE'} \parallel \overline{ED}$ y análogamente $\overline{AE} \parallel \overline{E'D}$ y además $\overline{AE} = \overline{ED}$ por ser lados de un pentágono regular.



Designando por l y l' las longitudes de los lados y por d y d' las de las diagonales, respectivamente, de los pentágonos ABCDE y A'B'C'D'E', se tiene

$$l' = \overline{E'A'} = \overline{BD} - 2\overline{A'D} = d - 2(l-d) = 2l - d$$

Por otra parte EC'E'B', también es un rombo, puesto que $\overline{BE} \parallel \overline{B'E'}$ y $\overline{EC} \parallel \overline{E'C'}$, por ser homotéticos los pentágonos y $\overline{EC'} = \overline{EB'}$, por ser ambos iguales a d − l; luego d' = d − l.

Además, recordando que las áreas de dos triángulos, que tienen un ángulo igual, son proporcionales a los productos de los lados que forman el ángulo igual (el teorema es válido si los ángulos son suplementarios) se tiene

$$\frac{S_{\widehat{CE'B}}}{S_{\widehat{CE'A'}}} = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CE'}}{\overline{CE'}\cdot\overline{CA'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}}$$

ya que $\widehat{BCE'} = \widehat{ACE}$ por inscritos en arcos iguales; como, por otra parte $CA' = CE' < \overline{CB}$, (por oblicua que se aparta menos del pie de la perpendicular) resulta

$$S_{\widehat{CE'B}} > S_{\widehat{CE'A'}} \longrightarrow \overline{BE'}\cdot\overline{CH} > \overline{E'A'}\cdot\overline{CH}; \qquad \overline{BE'} > \overline{E'A'}$$

que nos dice que $l' < \frac{1}{3}d$, que junto con $l' = 2l - d$, proporciona $l' < \frac{1}{2}$.

Todo segmento $\bar{s}$ que estuviese contenido un número exacto de veces en $\bar{l}$ y en $\bar{d}$, por lo demostrado en a) estaría, también, contenido un número exacto de veces en $l' = 2l - d$ y en $d' = d - l$, esto es, $\bar{s}$ sería parte alícuota del lado y de la diagonal de otro pentágono regular de lado menor que la mitad del del pentágono dado. Reiterando el proceso se llega a la conclusión de que $\bar{s}$ tiene que ser menor que cualquier segmento, puesto que

$$\bar{s} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ \ldots\ \cdot\bar{l}$$

luego $\bar{d}$ y $\bar{l}$ no admiten ningún segmento que les divida simultáneamente; son, por tanto, inconmesurables.

José V. García Sestafé, (Madrid).

PROBLEMA 5ª (Boletín nª 9)

Dada la curva definida por la ecuación $y^2 = x^3 + bx + b^2$, donde la constante b es un número racional no nulo, se pide inscribir en dicha curva un triángulo cuyos vértices tengan coordenadas racionales.

Solución

Es evidente que para $x = 0$, se obtienen los puntos incidentes con la curva, $(0, b)$, $(0, -b)$.

Para obtener otros puntos hay que encontrar otros valores de x, que para todo valor de b, hagan al segundo miembro cuadrado perfecto, para lo cual hacemos

$$(z + b)^2 = x^3 + bx + b^2$$

de donde $z^2 = x^3$, $2z = x$; de aquí,

$$z = \frac{x}{2}, \qquad \frac{x^2}{4} = x^3$$

que proporciona $x = \frac{1}{4}$; (además de $x = 0$, obtenida directamente).

$$\text{Para } x = \frac{1}{4},\ y^2 = \frac{1}{64} + \frac{b}{4} + b^2$$

$$y = \pm\left(\frac{1}{8} + b\right)$$

Se han obtenido los cuatro puntos

$$(0, b),\quad (0, -b),\quad \left(\frac{1}{4}, b + \frac{1}{8}\right),\quad \left(\frac{1}{4}, -b - \frac{1}{8}\right)$$

elegidos tres de ellos se obtiene un triángulo solución. Como $C_{4,3} = 4$, existen cuatro soluciones.

José V. García Sestafé, (Madrid).

PROBLEMA 6ª (Boletín nº 9)

Calcular

$$\prod_{k=1}^{14} \cos k \frac{\pi}{15}$$

Solución

Se multiplica y se divide por la expresión

$$2^{14} \operatorname{sen} \frac{\pi}{15} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{15} \cdots \operatorname{sen} \frac{14\pi}{15}$$

con lo que resulta

$$\prod_{k=1}^{14} \cos k\frac{\pi}{15} = \frac{(2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{15})\ (2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15}) \cdots (2 \operatorname{sen} \frac{14\pi}{15} \cos \frac{14\pi}{15})}{2^{14} \operatorname{sen} \frac{\pi}{15} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{15} \cdots \operatorname{sen} \frac{14\pi}{15}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{16\pi}{15} \operatorname{sen} \frac{18\pi}{15} \cdots \operatorname{sen} \frac{28\pi}{15}}{2^{14} \operatorname{sen} \frac{\pi}{15} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{15} \cdots \operatorname{sen} \frac{13\pi}{15}} = \frac{(-\operatorname{sen} \frac{\pi}{15})\ (-\operatorname{sen} \frac{3\pi}{15}) \cdots (-\operatorname{sen} \frac{13\pi}{15})}{2^{14} \operatorname{sen} \frac{\pi}{15} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{15} \cdots \operatorname{sen} \frac{13\pi}{15}}$$

El número de factores del numerador es 7. Luego resulta:

$$\prod_{k=1}^{14} \cos k \frac{\pi}{15} = \frac{-1}{2^{14}}$$

Paz Lucas Padín, (Madrid).

Recibida otra soluciòn de J. V. García Sestafé.