Fernando CHAMIZO pop71

sociedad castellana "Puig Adam" de profesores de matemáticas

Boletín nº 18 **junio 1988**

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Junio de 1988 nº 18 (1987-88)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en: Ronda de Atocha, 2 (INBAD)

- La correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:
PASCUAL IBARRA, José R.
FERNÁNDEZ BIARGE, Julio

- La portada está tomada de un grabado antiguo acerca de los dos métodos de cálculo: El de Pitágoras (con ábacos) y el de Boecio (con cifras).

INDICE Pág.

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y CENTROS ADHERIDOS A LA MISMA. NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Francisco Lorenzo Miranda

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Vicesecretario: Francisco Quesada Cobo

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

ASAMBLEA GENERAL

Con no muy numerosa asistencia, tuvo lugar, el día 21 de mayo, la Asamblea General de la Sociedad.

Siguiendo el orden del día después de aprobar el acta de la sesión anterior, el Presidente hizo un amplio informe de las actividades desarrolladas, deteniéndose particularmente en la publicación del Boletín, lo cual originó la más efusiva felicitación al profesor Fernández Biarge, organizador del mismo.

Seguidamente el tesorero profesor Aizpún da cuenta del desarrollo del presupuesto anterior, situación que es satisfactoria. No obstante, el profesor Aizpún recuerda la buena cantidad de profesores que se trasladan de domicilio o trasladan sus cuentas bancarias, originando retrasos en la recepción de los boletines o en los cobros de los mismos; además de los gastos de correo y devolución de efectos. En consecuencia recuerda a todos los socios la necesidad de comunicar a la Sociedad dichos cambios.

Se trata seguidamente del próximo concurso de problemas a celebrar el día 25 de junio. No se designó definitivamente el local de su celebración por la posible coincidencia de fechas con las pruebas del Instituto.

El Presidente propone seguidamente la renovación de todos los cargos directivos que corresponde al cese, excepto la suya, alegando razones suficientes, que la Asamblea, lamentándolo, se ve obligada de aceptar. Propone para su sustitución al profesor don Francisco Lorenzo Miranda, catedrático del Instituto Cervantes. Se trata evidentemente de un nuevo acierto del profesor Etayo, que es reconocido así por toda la Asamblea. Todos esperamos que Lorenzo Miranda ha de proseguir con acierto la labor de aumento de la sociedad y de sus actividades.

Unas palabras simpáticas del profesor Miranda ponen fin a la Asamblea.

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlos.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Número y año	Convocado en Boletín	Crónica - Enunciados
I (1983)	1	2, pag 11
II (1984)	3	4, pág 7
III (1985)	5	7, pág 3
IV (1986)	9	10, pág 5
V (1987)	13	15, pág 3
VI (1988)	17	

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA :

Número y año	Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX (1984)		3, pág 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71

OLIMPIADA MATEMÁTICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
I (1986) Colombia	8, págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12, págs. 3 y 75
III (1988) Perú	18, págs. 5 y 73

OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
XXIV (1983) París	2, pág. 15
XXV (1984) Praga	4, pág. 67
XXVI (1985) Helsinki	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986) Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987) Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX (1988) Australia	

III OLIMPIADA IBEROAMERICANA MATEMATICA

Como estaba anunciado, durante los días 20 de abril y 1 de mayo se han celebrado en Perú, en dos lugares cercanos a Lima, las pruebas de esta Olimpiada. La participación de países va aumentando. En efecto, en la I Olimpiada de Colombia asistieron 10 países; que fueron 11 en la II, Uruguay, y en la III ya han sido 13.

Como cada país puede presentar cuatro alumnos, y Venezuela sólo aportaba dos, el número de alumnos ha sido de 50; pero, desgraciadamente, uno de los mejores participantes españoles fué afectado de una fuerte fiebre grástica que le obligó a permanecer en cama y no pudo presentarse a las pruebas, por lo que el número de participantes realmente se redujo a 49. ¡España sólo con tres!

- El ganador absoluto de las pruebas ha sido el español Fernando GALVE MAURICIO, de Zaragoza, el cual sobre un total de 60 puntos posibles, alcanzó 59, obteniendo así la primera medalla de oro.

- Ramón ESTEBAN ROMERO, de Valencia, que fué 2ª en la Nacional, obtuvo ahora 46 puntos, medalla de plata.

- El tercer español presentado, Santiago VILA DONCEL de Badajoz, fué tercer premio en Cuba y aquí obtuvo 33 puntos, medalla de bronce.

Los 13 países asistentes han sido: Argentina, Bolivia, Brasil, Colombia, Costa Rica, Ecuador, España, Paraguay, Puerto Rico, Uruguay, Perú, Venezuela y Cuba.

Al realizar la media de cada país sobre los cuatro alumnos que podían presentar, la calificación por países ha sido:

ganador Perú, seguido de Brasil, Colombia y España. Pero si se hubiera hecho la media por el número de alumnos presentados la clasificación hubiera sido: 1ª) Perú con 47 puntos y 2ª) España con 46.

La organización del certamen, buena. Directamente bajo la supervisión de la Ministra para el progreso de la Educación, la Ciencia y la Cultura, profesora Mercedes Cabanillas, ayudada por el Secretario de la O.E.I., Simón Román, y otros altos funcionarios.

Los profesores especiales que han acompañado a los alumnos han sido María Gaspar Alonso Vega y Javier Etayo Gordejuela. También han sido acompañados por una Comisionada del Ministerio de Educación, Mª Jesús Luelmo.

En otro lugar de este mismo Boletín publicamos, en la sección de problemas propuestos, los correspondientes a este Certamen.

La IV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas se celebrará el próximo año de 1989 en Cuba. Existe el propósito de que la V, correspondiente a 1990, tenga lugar en España.

NOTICIAS

CURSO DE CONFERENCIAS SOBRE "HISTORIA DE LA CIENCIA ESTADISTICA"

La Real Academia de Ciencias viene organizando desde hace algunos años diversos Cursos dentro del área de Historia de las Ciencias; por ejemplo: Historia de la Física hasta el siglo XIX, de las Obras Públicas, de la Bioquímica y de las Matemáticas hasta el siglo XVII. Ha organizado ahora un curso de "Historia de la Ciencia Estadística" con el siguiente programa:

8-XI -88 "El Concepto de Probabilidad"
Francisco Javier Girón
Académico Correspondiente
Catedrático de la Universidad de Málaga.

10-XI -88 "Los Teoremas del Límite de la Teoría de la Probabilidad"
Pilar Ibarrola Muñoz
Catedrática de la Universidad Complutense.

15-XI -88 "Los Procesos Estocásticos"
Antonio Insúa
Catedrático de la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid.

17-XI -88 "Análisis de Datos y Métodos Bayesianos"
José Miguel Bernardo
Catedrático de la Universidad de Valencia.

22-XI- 88 "La Inferencia Estadística"
Francisco Azorín Poch
Académico Numerario.

24-XI- 88 "Las Aplicaciones de las Probabilidades y de la Estadística a la Física y a la Biología"
Darío Maravall Casesnoves
Académico Numerario.

29-XI -88 "Las Aplicaciones de la Estadística a las Ciencias Humanas"
Vicente Lozano
Catedrático de la Universidad Autónoma de Madrid.

1-XII-88 "La Teoría de la Decisión"
Sixto Ríos García
Académico Numerario.

Las conferencias tendrán lugar, como de costumbre, en su sede de la calle de Valverde nº 22.

CURSOS DE VERANO DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

Con el fin de llegar a constituir una Universidad de Verano, la Complutense ha adquirido el Hotel Felipe II de El Escorial. Para iniciar sus tareas ha proyectado unos cursos y unos simposios, que se celebrarán durante los meses de julio y agosto próximos. Podemos ofrecer los programas de los cursos, pero el de los simposios todavía no están ultimados.

Los cursos versarán sobre todas las materias científicas y filosóficas contemporáneas; serán 29. La conferencia inaugural, el 4 de julio, a cargo del profesor Enrique Fuentes Quintana, y la de clausura el 30 de agosto será pronunciada por el profesor Joaquín Ruíz Jiménez.

De los 29 cursos, destacamos los más relacionados con nosotros. El primero, **"Las Corrientes del Saber Científico Contemporáneo"** (del 1 al 12 de agosto), será dirigido por el profesor R. Saumells, y tomarán parte entre otros sabios, los conocidos profesores I. Prigogyne y G. Chatelet y el miembro de nuestra Sociedad, Julio Fernández Biarge. El segundo curso en relación con la matemática (del 3 al 26 de agosto) dirigido por el profesor, miembro de nuestra Sociedad, M. de Guzmán, versará sobre "La Matemática de Hoy: Teoría de Fractales y aplicaciones". Está asegurada también la participación de los más destacadas investigadores en esta materia, españoles y extranjeros.

Además de los cursos específicos se desarrollarán programas de actividades musicales, cine, exposiciones y deportivas.

Puede haber alumnos becarios. Las solicitudes de becas pueden realizarse, cumpliendo requisitos especiales, en el Secretariado del curso EUROFORUM - FELIPE II de El Escorial. Los alumnos oyentes, no becarios, abonarán 8.000 ó 4.000 pesetas, según se trate de un curso mensual o semanal.

SOCIEDAD ISACC NEWTON, DE CANARIAS

Esta meritoria Sociedad continúa desarrollando frecuentes actividades sobre las cuestiones más importantes hoy, en orden a la mejora de la enseñanza de la matemática. En primer lugar su Revista "Números", sigue presentando artículos y trabajos del mayor interés, a la vez que no olvida la celebración de reuniones de profesores para coordinar normas de acción válidas así como asambleas para la toma de posiciones respecto a los problemas actuales presentados con motivo de las reformas en marcha. Tema este que es motivo principal en las reuniones de Seminarios de los Centros, en ocasiones conjuntados por su proximidad.

El próximo mes de octubre se iniciará el Debate en torno a los programas de proyecto de Reforma por el M.E.C. (punto 21.12). Para su mejor preparación, antes de esta fecha, la Sociedad ha organizado dos Encuentros, simultáneos en Las Palmas y en Tenerife, los días 16 y 17 de mayo. En el primer día hablará en Las Palmas el profesor Miguel de Guzmán y en Tenerife, Eliseo Borrás. Al día siguiente, los profesores mencionados cambiarán de lugar.

Al mismo tiempo en estas reuniones se tomará acuerdo de adhesión de la Sociedad a la "Federación Estatal de Sociedades de Profesores de Matemáticas".

Para las IX Jornadas del mes de octubre la Sociedad tiene invitados a una decena de profesores, seis extranjeros y cuatro españoles.

UN CONCEPTO DE DIFERENCIABILIDAD DEBIL

Por José Antonio Fernández Viña
Catedrático de la Universidad de Murcia

INTRODUCCION

Sean E y F dos espacios vectoriales normados sobre el cuerpo de los números reales, sea A un conjunto abierto no vacío de E y f una aplicación de A en F. En relación con la diferenciabilidad de la función f en un punto $a \in A$ son usuales las definiciones de Fréchet (que generaliza la clásica de Stolz) y de Gateaux.

En el sentido de Fréchet f es diferenciable en a cuando existe una (única) aplicación lineal continua L de E en F y un infinitésimo ρ en el punto $0 \in E$, definido en un entorno reducido U de este punto y con valores en F, tales que:

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + ||h|| \, \rho(h) \qquad (1)$$

para todo $h \in U$. Esto es equivalente a afirmar que exista una aplicación lineal y continua de E en F tal que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{||f(a+h) - f(a) - L(h)||}{||h||} = 0 \qquad (2)$$

En el sentido de Gateaux la función f es diferenciable en el punto a cuando para todo vector v del espacio E existe el

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \qquad (3)$$

Es bien conocido que toda función diferenciable en un punto en el sentido de Fréchet lo es en el de Gateaux pero que el recíproco no es cierto. De hecho la diferenciabilidad en el sentido de Fréchet en un punto implica la continuidad de la función en ese punto mientras que la diferenciabilidad en el sentido de Gateaux no implica en general dicha continuidad.

Nuestro propósito es exponer una noción de diferenciabilidad "intermedia" entre las dos citadas probando con detalle algunos teoremas de demostración sencilla y omitiendo las de otros que son más complicadas.

Para acercarnos a la noción que se definirá seguidamente observemos que en (2) el vector h tiende hacia 0 de una manera totalmente arbitraria mientras que en (3) el vector $h = tv$ tiende hacia 0 permaneciendo siempre en la dirección dada por v. Ahora se permitirá que h tienda hacia 0 por los puntos de cualquier curva continua con tangente en el puno 0 del espacio E.

DEFINICION 1

Conservando las notaciones anteriores, diremos que la función f es semidiferenciable en el punto a sí es continua en A y existe al menos una aplicación lineal y continua S de E en F tal que, cualquiera que sea la curva $\gamma: I \longrightarrow A$ (donde I es un intervalo de R que contiene al 0 en su interior), continua en I, derivable en 0 y con $\gamma(0) = a$, la función $f_0\gamma$ es derivable en el punto $0 \in I$ y se verifica

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} = S(\gamma'(0))$$

UNICIDAD

Si una función tal como la f es semidiferenciable en el punto a, la aplicación lineal y continua S es única.

Supongamos que S' fuese otra aplicación lineal y continua de E en F con la misma propiedad que la S. Tomemos un punto cualquiera x de E a fin de ver que $S(x) = S'(x)$. Si $x = 0$ esto es evidente, así que supondremos $x \neq 0$. Como A es un conjunto abierto existe un número real r positivo tal que la bola abierta $B(a;r)$ se halla contenida en A. Elijamos el intervalo I de la forma $I =]-\alpha, \alpha[$ con $\alpha > 0$ y la curva definida por $\gamma(t) = a + kt$ donde

$$k = (r/\alpha\|x\|)\, x$$

Se comprueba inmediatamente que $\gamma(I) \subset B(a;r) \subset A$. Es claro por otra parte que γ es continua en I y derivable en $0 \in \mathbb{R}$ siendo $\gamma(0) = a$ y $\gamma'(0) = k$. Pues bien, para esta curva γ se tendría, en virtud de la semidiferenciabilidad de f en a:

$$(f\circ\gamma)'(0) = S(\gamma'(0)) = S(k) \quad \text{y} \quad (f\circ\gamma)'(0) = S'(\gamma'(0)) = S'(k)$$

luego $S(k) = S'(k)$. Sustituyendo aquí k por su valor resulta $S(x) = S'(x)$ como queríamos demostrar.

DEFINICION 2

Sea f una aplicación semidiferenciable en a. Llamaremos semidiferencial de f en el punto a a la única aplicación lineal continua S de E en F que responde a las exigencias de la definición 1.

Pasemos ahora a demostrar que toda función semidiferenciable es diferenciable en el sentido de Gateaux.

Sea v un vector cualquiera de E distinto del 0. Elijamos la curva $\gamma(t) = a + tv$ de modo que, como hemos visto más arriba, para $|t| < \alpha$ es $\gamma(t) \in A$. Como f es semidiferenciable en a tendremos

$$S(v) = S(\gamma'(0)) = (f\circ\gamma)'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

luego f admite derivada respecto del vector v en el punto a y esta vale S(v). Para v = 0 se obtiene trivialmente el mismo resultado.

El recíproco no se verifica. Basta para verlo considerar la función real f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = y^2/x \quad \text{si } x \neq 0; \quad f(0,y) = 0$$

Esta función no es semidiferenciable en el punto (0,0) como se comprueba considerando la curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ y sin embargo es diferenciable en el sentido de Gateaux como se ve fácilmente. Hemos demostrado así el teorema siguiente:

TEOREMA 1.- Toda función semidiferenciable en un punto es diferenciable en el sentido de Gateaux, pero el recíproco no se verifica.

Comparemos ahora los conceptos de semidiferenciabilidad y de diferenciabilidad en el sentido de Fréchet.

Supongamos que la función f es diferenciable en el sentido de Fréchet en el punto a y elegida una curva γ reemplacemos en (1) a + h por $\gamma(t)$ lo cual es posible si t varía en un cierto entorno de 0 por la continuidad de γ y por ser $\gamma(0) = a$; tendremos:

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = \frac{L(\gamma(t)-\gamma(0)) + ||\gamma(t)-\gamma(0)||\,\rho(\gamma(t)-\gamma(0))}{t} =$$

$$= L\left(\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t}\right) + \frac{||\gamma(t) - \gamma(0)||}{t}\,\rho(\gamma(t) - \gamma(0))$$

El primer sumando de los dos últimos escritos, que adopta esta forma por ser L lineal, tiene límite cuando $t \to 0$, $t \neq 0$, y el valor de este límite es $L(\gamma'(0))$ por ser L continua. El segundo sumando tiene límite 0 ya que

$$\left|\left|\frac{||\gamma(t) - \gamma(0)||}{t}\,\rho(\gamma(t) - \gamma(0))\right|\right| = \left|\left|\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}\right|\right|\,||\rho(\gamma(t)-\gamma(0))||$$

de modo que el primer factor tiende hacia $||\gamma'(0)||$ y el segundo hacia 0 cuanto $t \to 0$. Así pues, $f\circ\gamma$ es derivable en $0 \in \mathbb{R}$ y se tiene $(f\circ\gamma)'(0) = L(\gamma'(0))$, luego f es semidiferenciable en a y su semidiferencial es igual a la diferencial ordinaria.

El recíproco no se verifica. Para verlo consideremos el espacio vectorial real

$$E = \ell^1 = \{x = (x_n);\quad x_n \in \mathbb{R},\quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$$

provisto de la norma habitual

$$||x|| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

y la función real $f(x) = ||x||$ definida en él. Tomemos un punto $a \in E$ tal que sea $a_n > 0$ para todo n. Se puede demostrar, aunque la demostración es laboriosa, que f es semidiferenciable en a y que su semidiferencial es la aplicación lineal y continua S definida por

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Una demostración igualmente laboriosa nos lleva a la conclusión de que nuestra función f no es diferenciable en a en el sentido de Fréchet. Podemos, pues, enunciar el teorema siguiente:

TEOREMA 2.- Toda función diferenciable en un punto en el sentido de Fréchet es semidiferenciable en ese punto y su semidiferencial coincide con la diferencial ordinaria, pero el recíproco no se verifica en general.

Nota.- Un caso particular importante en que el recíproco del teorema anterior se verifica es aquel en que el espacio E tiene dimensión finita. La demostración es algo laboriosa.

A continuación estudiamos la transitividad del concepto de semidiferenciabilidad.

Sean E, F y G tres espacios vectoriales normados. Sean $f:A \to B$ y $g:B \to G$ dos aplicaciones que se supondran continuas y semidiferenciables en los puntos $a \in A$ y $b = f(a) \in B$ respectivamente, siendo S y S' las semidiferenciales correspondientes de f en a y de g en b. Tomemos una curva $\gamma:I \to A$ continua y derivable en el punto $0 \in \mathbb{R}$ con $\gamma(0) = a$. Se tiene $(g\circ f)\circ\gamma = g\circ(f\circ\gamma)$, donde $\Gamma = f\circ\gamma:I \to B$ es continua en I, con $\Gamma(0) = f(a) = b$ y derivable en $0 \in \mathbb{R}$ con

$$\Gamma'(0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\Gamma(t) - \Gamma(0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = S(\gamma'(0))$$

en virtud de la semidiferenciabilidad de f en el punto a. Pero como g es semidiferenciable en b se tiene que $g\circ\Gamma$ es derivable en $0 \in \mathbb{R}$ y se verifica:

$$(g\circ\Gamma)'(0) = S'(\Gamma'(0))$$

Luego,

$$((g\circ f)\circ\gamma)'(0) = (g\circ\Gamma)'(0) = S'(\Gamma'(0)) = S'(S(\gamma'(0))) = (S'\circ S)(\gamma'(0))$$

lo que demuestra que la función compuesta $g\circ f$ es semidiferenciable en a y su semidiferencia es la composición de las semidiferenciales.

Se ha establecido así el siguiente teorema:

TEOREMA 3.- La función compuesta de dos funciones semidiferenciables es también semidiferenciable y su semidiferencial es la composición de las semidiferenciales de estas funciones.

CARACTERIZACION DE LAS FUNCIONES CONSTANTES

Se comprueba inmediatamente que si una aplicación tal como la f que venimos considerando es constante, es semidiferenciable y su semidiferencial en cualquier punto es nula. Vamos a ocuparnos del recíproco.

Sea f una aplicación de un conjunto abierto y conexo del espacio normado E en los números reales y supongamos que es nula su semidiferencial en todos los puntos de A. Entonces f es constante en A.

En efecto, sean a y a+h dos puntos de A tales que el segmento determinado por ellos esté contenido en A. La función real $\phi(t) = a+th$ está definida en un entorno abierto del intervalo $[0,1]$; consideremos la función compuesta $f^* = f\circ\phi$ que está definida en dicho entorno y toma valores reales; su semidiferencial es nula por serlo la de f, habida cuenta del teorema anterior. Entonces su derivada es nula, como luego se demostrará, así que f^* es constante y por tanto $f^*(0) = f^*(1)$, de donde $f(a) = f(a+h)$. Sea ahora b un punto cualquiera de A. Como este conjunto es abierto y conexo será conexo por poligonales luego los puntos a y b se pueden unir mediante una poligonal contenida en A. La conclusión anterior se aplica en cada uno de los segmentos que componen la poligonal y resulta finalmente que $f(a) = f(b)$ de modo que f es constante en A como queríamos demostrar.

En la demostración anterior hemos utilizado el hecho de que toda función real de una variable real que sea semidiferenciable es derivable siendo su derivada en el punto en cuestión la constante que determina la aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es la semidiferencial en dicho punto. Este resultado es consecuencia de lo que se dijo en la Nota anterior pero vamos a dar una demostración directa de él, porque es muy sencilla.

Sea f una función real definida en un intervalo abierto J de $\mathbb{R}$ y sea $a \in J$. Suponiendo que f es semidiferenciable en a para cualquier curva continua $\gamma: I \to J$ derivable en $0 \in \mathbb{R}$ y con $\gamma(0) = a$, se tiene

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = S(\gamma'(0))$$

donde $S:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la semidiferencial en a, que está determinada por una constante $\alpha \in R$ de modo que $S(\gamma'(0)) = \alpha\gamma'(0)$. En particular, para $\gamma(t) = a+t$, resulta que

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \alpha$$

ya que $\gamma'(0) = 1$. Luego f es derivable en a y su derivada vale $f'(a) = \alpha$.

ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE LAS FUNCIONES SEMIDIFERENCIABLES

Sean f y g dos funciones con valores en el espacio normado F definidas y continuas en un conjunto abierto del espacio normado E; sea a un punto de A. Si las funciones f y g son semidiferenciables en a la función suma f+g es semidiferenciable en a y su semidiferencial es la suma de las semidiferenciales de f y g en el punto a.

La demostración de este teorema es inmediata aplicando las definiciones. También es inmediata la demostración del teorema siguiente:

El producto de un número real cualquiera por una función semidiferenciable en un punto es una función semidiferenciable en ese punto y su semidiferencial es el producto del citado número por la semidiferencial de la función en el punto en cuestión.

Así pues el conjunto de todas las aplicaciones continuas de A en F semidiferenciables en $a \in A$ es un espacio vectorial, subespacio del que forman todas las aplicaciones de A en F. La aplicación del espacio vectorial anterior en el de las aplicaciones lineales continuas de E en F que atribuye a cada función su semidiferencial es lineal.

Sean ahora f y g dos funciones con valores en los espacios normados F_1 y F_2 respectivamente, definidas y continuas en un mismo conjunto abierto A del espacio normado E. Sea $B:F_1 \times F_2 \to G$ una aplicación bilineal continua con valores en otro espacio normado G. Consideremos la función B(f,b) definida en A por $B(f,g)(x) = B(f(x), g(x))$. Supongamos que f y g son semidiferenciables en un punto $a \in A$ siendo S_1 y S_2 sus respectivas semidiferenciales. Tomemos arbitrariamente una curva continua $\gamma: I \to A$ derivable en $0 \in \mathbb{R}$ y con $\gamma(0) = a$. Por ser B bilineal tendremos:

$$\frac{B(f,g)(\gamma(t)) - B(f,g)(\gamma(0))}{t} = \frac{B(f(\gamma(t)),g(\gamma(t))) - B(f(\gamma(0)),g(\gamma(0)))}{t} =$$

$$= \frac{B(f(\gamma(t)),g(\gamma(t))) - B(f(\gamma(0)),g(\gamma(t)))}{t} + \frac{B(f(\gamma(0)),g(\gamma(t))) - B(f(\gamma(0)),g(\gamma(0)))}{t} =$$

$$= B\left(\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(0))}{t}, g(\gamma(t))\right) + B\left(f(\gamma(0)), \frac{g(\gamma(t)) - g(\gamma(0))}{t}\right)$$

Cuando $t \to 0$, $t \neq 0$, el primer sumando del último término de estas igualdades tiene límite ya que B es continua respecto de sus dos variables, f es continua y semidiferenciable y g es continua; este límite vale $B(S_1(\gamma'(0)), g(a))$. Análogamente el segundo sumando tiene tmabién límite y vale $B(f(a), S_2(\gamma'(0)))$. Como la aplicación S de E en G dada por

$$S(x) = B(S_1(x), g(a)) + B(f(a), S_2(x)) \qquad (5)$$

es lineal y continua, concluímos así el siguiente teorema:

TEOREMA 4.- En las condiciones del párrafo anterior, al actuar una aplicación bilineal continua sobre dos aplicaciones semidiferenciables en un punto resulta otra aplicación también semidiferenciable en ese punto y su semidiferencial se expresa en función de las semidiferenciales de las aplicaciones dadas por la fórmula final (5).

En el caso particular en que $F_1 = F_2 = \mathbb{R}$ y B es la multiplicación ordinaria de números reales, se obtiene que la función producto f g es semidiferenciable en $a \in A$ y su semidiferencial vale

$$S(x) = g(a)\ S_1(x) + f(a)\ S_2(x)$$

Si además se supone E = R resulta la regla elemental para la derivación de un producto de funciones reales de variable real.

TEOREMA 5.- Sea E un álgebra normada con elemento unidad, A el conjunto (abierto) de sus elementos invertibles y $f:A \to E$ la aplicación definida por $f(x) = x^{-1}$. La función f es semidiferenciable en todo punto $a \in A$ y su semidiferencial es la aplicación lineal continua de E en E dada por $S(x) = -a^{-1}\ xa^{-1}$.

En efecto, tomemos una curva continua $\gamma: I \to A$ derivable en $0 \in I$ y con $\gamma(0) = a$. Tomando t ($\neq 0$) en un entorno de 0 conveniente para que $\gamma(t)$ pertenezca a A, se tiene

$$\frac{\gamma(t)^{-1} - \gamma(0)^{-1}}{t} = \frac{\gamma(0)^{-1}(\gamma(0)-\gamma(t))\ \gamma(t)^{-1}}{t}$$

El segundo miembro tiene límite cuando $t \to 0$, $t \neq 0$, puesto que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(0) - \gamma(t)}{t} = -\gamma'(0); \quad \lim_{t \to 0} \gamma(t)^{-1} = \gamma(0)^{-1}$$

luego el primer miembro también tiene límite y éste vale $-a^{-1} \cdot \gamma'(0)\ a^{-1}$, lo cual demuestra el teorema (ya que la aplicación S definida en el enunciado es lineal y continua como puede comprobarse inmediatamente.

Si el álgebra E es conmutativa la expresión de la semidiferencial toma la forma $S(x) = -(a^{-1})^2 x$. En el caso particular, en que $E = R$ se obtiene la fórmula de la derivada de la función $x \to 1/x$.

TEOREMA 6.- Sea f una biyección continua de un conjunto abierto A del espacio normado E sobre un abierto B del espacio F; sea f^{-1} su biyección recíproca, que supondremos también continua. Si f es semidiferenciable en $a \in A$ y f^{-1} lo es en $b = f(a)$ siendo S y S' estas respectivas semidiferenciales, entonces S es una biyección de E en F y S' es precisamente su biyección recíproca.

En efecto, por hipótesis $f \circ f^{-1} = id_B$ y $f^{-1} \circ f = id_A$ donde $id_{A\,(res.)}\ id_B$ es la aplicación identidad de A sobre A (resp. B sobre B). Estas son aplicaciones semidiferenciables en todo punto y sus semidiferenciales son id_E e id_F respectivamente. Aplicando el Teorema 3 tendremos $S \circ S' = id_F$ y $S' \circ S = id_E$, lo que demuestra el teorema.

APLICACIONES DE LA NOCION DE SEMIDIFERENCIABILIDAD

Vamos a mostrar cómo la noción de semidiferenciabilidad puede utilizarse con éxito en algunas cuestiones de Cálculo Diferencial (sustituyendo a la diferenciabilidad que es un concepto más fuerte) al igual que lo vimos en la caracterización de las funciones constantes.

Para facilitar la comprensión usaremos ahora la notación $Sf(a)$ para denotar la semidiferencial de la función f en el punto a.

Observemos que si f toma sus valores en un espacio normado F, está definida en un intervalo J de la recta real que contiene al punto en su interior y es derivable en este punto, entonces:

$$f'(a) = Sf(a)(1)$$

dondel el número 1 es la base del espacio vectorial R. En efecto, tomando la curva (t) = a+t se tiene

$$f'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} = Sf(a)(\gamma'(0)) = Sf(a)(1)$$

EL TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS

Sea A un conjunto abierto de un espacio normado E y sean a y a+h dos puntos de A tales que el segmento $[a, a+h]$ determinado por ellos esté contenido en A. Sea f una función real definida y semidiferenciable en A. Entonces existe al menos un número real $\theta \in]0, 1[$ tal que

$$f(a+h) - f(a) = Sf(a+\theta h)(h) \tag{6}$$

En efecto consideremos la función de una variable real $\phi(t) = a+th$ que está definida en un entorno abierto J del intervalo $[0, 1]$. Esta función es semidiferenciable en todo punto (al igual que cualquier aplicación afin entre dos espacios vectoriales normados) y su semidiferencial es la aplicación lineal $t \to th$. La función compuesta $f\circ\phi$ es una función real definida en J a la que se le aplica el teorema elemental de los incrementos

finitos, teniéndose,

$$(f\circ\phi)(1) - (f\circ\phi)(0) = (f\circ\phi)'(\theta)$$

con $\theta \in]0,1[$. Ahora bien

$$(f\circ\phi)(1) = f(a+h) \quad \text{y} \quad (f\circ\phi)(0) = f(a)$$

y además,

$$(f\circ\phi)'(\theta) = S(f\circ\phi)(\theta)(1) = Sf(\phi(\theta))\circ S\phi(\theta)(1) = Sf(a+\theta h)(\phi'(0)) = Sf(a+\theta h)\ (h)$$

así que sustituyendo, resulta la fórmula (6).

CONDICION NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS

Si una función real f presenta en el punto $a \in A$ un extremo relativo, la función compuesta $f\circ\phi$ tiene en el punto $0 \in \mathbb{R}$ un extremo de la misma naturaleza, como es fácil comprobar. Entonces $(f\circ\phi)'(0) = 0$ y ésto se traduce, según los cálculos del epígrafe anterior en que $Sf(a) = 0$.

Así pues, para que una función semidiferenciable en un punto de un espacio normado tenga en este punto un extremo relativo es condición necesaria que la semidiferencial en el punto sea nula.

FUNCIONES HOMOGENEAS. TEOREMA DE EULER

Sea f una función real homogénea de grado α definida en un cono abierto A con vértice en el punto 0 de un espacio vectorial normado E. Se verifica, pues, por definición que

$$f(tx) = t^{\alpha} f(x) \tag{7}$$

para todo $t > 0$ y todo $x \in A$.

Para un vector x fijo consideremos la aplicación $\phi(t) = tx$ de $\mathbb{R}_+$ en E la cual es semidiferenciable en todo punto, siendo $S\phi(t) = \phi$ evidentemente. Si suponemos que la función f es semidiferenciable en todos los puntos de A podemos derivar respecto de t en la (7) y será

$$(Sf(\phi(t))\circ S\phi(t))\ (1) = \alpha\ t^{\alpha-1}\ f(x)$$

y haciendo aquí $t=1$ resulta $Sf(x)(\phi(1)) = \alpha f(x)$, es decir

$$Sf(x)(x) = \alpha\ f(x) \tag{8}$$

que es la generalización de la igualdad de Euler relativa a las funciones homogéneas de varias variables reales.

Esta igualdad caracteriza a las funciones homogéneas semidiferenciables al igual que ocurre en el caso clásico. En efecto, considerando como antes fijo el vector x, se tiene

$$\frac{d}{dt}\ f(tx) = Sf(tx)(x)$$

luego

$$\frac{d}{dt}\ \frac{f(tx)}{t^\alpha} = \frac{tSf(tx)(x) - \alpha\ f(tx)}{t^{\alpha+1}} = \frac{Sf(tx)(tx) - \alpha f(tx)}{t^{\alpha+1}} = 0$$

ya que el numerador es nulo por verificarse (8) en el punto tx, pues esa fórmula es válida para todo x. Así que

$$\frac{f(tx)}{t^\alpha}$$

es independiente de t y por tanto su valor constante es igual al que toma para $t=1$ llegándose entonces a la fórmula (7) lo que demuestra que f es homógenea de grado α.

UN PROBLEMA DE CRESPO LANDALUCE

Por Vicente Fraile Ovejero

1.- En una revista o libro francés (no lo recuerdo) aparecía hace años un problema de M.A. Longchamps cuyo enunciado era: "Hallar el lugar geométrico de los centros de los paralelogramos inscritos en un cuadrilátero dado". Longchamps al resolverlo sólo consideraba los paralelogramos inscritos cuyos lados eran paralelos a las diagonales del cuadrilátero. Con tal condición, el lugar es el segmento rectilíneo cuyos extremos son los puntos medios de esas diagonales. Pero es evidente que en un cuadrilátero genérico es posible inscribir también paralelogramos cuyos lados no son paralelos a las diagonales del cuadrilátero.

El problema general lo resolvió de una manera muy elegante C. Crespo Landaluce que, por aquella época (año 1932) era estudiante de ingeniería en Bilbao. Su talento y agudeza, no sólo en matemáticas sino también en ensayo e investigación histórica, quedaron patentes en sus pocos, cortos, pero sabrosos artículos sobre lugares geométricos y sobre algún teorema de geometría proyectiva -publicados casi todos ellos-, y en escasos ensayos y trabajos literarios, uno de los cuales obtuvo un premio importante de ámbito nacional de la Diputación de Bilbao. Más tarde marchó a México, y su brevísimo brillo es hoy prácticamente desconocido entre los estudiosos.

Este problema de Crespo, generalización del de Longchamps, está recogido en un libro de Rey Pastor y Gallego Díaz titulado: "Norte de Problemas" donde, además, se me da a mí parte en él , cuando en realidad no tuve en dicho problema parte ni arte.

Por tratarse del primer lugar de puntos no trivial que es un recinto plano, y porque la solución que se da del mismo en "Norte de Problemas" está expuesta de un modo excesivamente compacto y, además, una parte del texto no se corresponde con una de las figuras, creo que merece la pena resolverlo aquí con la misma intención didáctica que empleó Crespo.

2.- Tengamos en cuenta, en primer lugar, que el centro de un paralelogramo es, naturalmente, el de sus diagonales; y si está inscrito en un cuadrilátero ABCD -que supondremos convexo-, su centro será, pues, el de dos segmentos rectilíneos, uno de ellos inscrito en los lados opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y el otro en $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$. Si hallamos el lugar S_1 de los puntos medios de todos los segmentos inscritos en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (superficie media de estos lados del cuadrilátero), y hallamos después el lugar S_2 de los centros de los segmentos inscritos en $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, la solución al problema de Crespo será $S_1 \cap S_2$,

Empecemos recordando cómo se inscribe un segmento -de longitud no conocida *a priori*- en un ángulo dado, de tal manera que el centro del segmento sea un punto P, también dado, interior al ángulo (figura 1).

Basta trazar por P la paralela a uno cualquiera de los lados del ángulo hasta que corte al otro (paralela $\overline{PP'}$ en la figura) y hallar el simétrico del vértice V respecto de P'. Dicho simétrico es V', y ya se ve inmediatamente que el segmento inscrito que pasa por V' y por P (o sea, $\overline{V'V''}$) es la solución que evidentemente, es única.

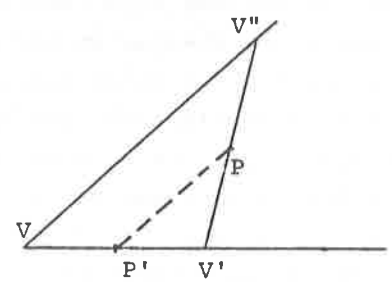


Figura 1

Resolvamos ahora el problema siguiente: "Hallar el l.g. de los centros de los segmentos rectilíneos inscritos en un ángulo dado, de tal modo que tengan uno de sus extremos en un trozo $\overline{AB}$ de uno de los lados del ángulo.

Sea V el vértice del ángulo y $\overline{AB}$ el trozo elegido en su lado a (figura 2). Hallemos los puntos medios de los segmentos $\overline{VA}$ y $\overline{VB}$, que serán Q y R respectivamente. Los puntos V y A son simétricos respecto de Q; y V y B lo son respecto de R. Por Q y por R tracemos sendas paralelas al otro lado b del ángulo, y tendremos una franja ϕ, que hemos rayado en la figura. Todo punto P de la franja pertenece al lugar; o sea, es centro de un segmento inscrito en el ángulo, con uno de sus extremos $\overline{AB}$. En efecto, recordando la construcción hecha en la figura 1, si por $P \in \phi$ trazamos la paralela al lado b, dicha paralela cortará al lado a en un punto P' situado entre los centros de simetría Q y R (o coincidiendo con ellos). Por lo tanto, el simétrico de V respecto de P' pertenecerá a $\overline{AB}$. Cualquier punto del ángulo que sea exterior a la franja no pertenece al lugar.

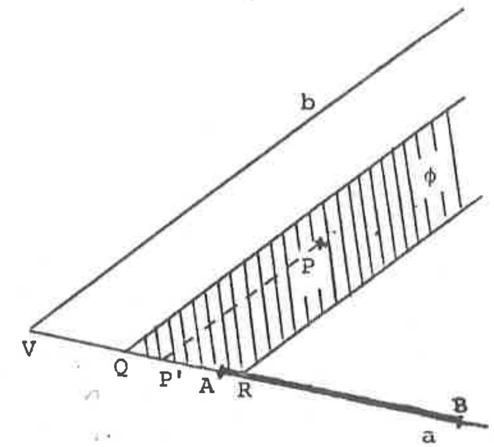


Figura 2

Pues bien, si también en el lado b del ángulo consideramos un trozo o segmento cerrado $\overline{CD}$, y hacemos lo mismo que antes, tendremos otra franja γ cuyos puntos son centros de los segmentos inscritos en el ángulo con uno de sus extremos en $\overline{CD}$. La intersección de las dos franjas es el paralelogramo de contorno MSNTM (figura 3), y será el l.g. de los centros de los segmentos inscritos en el ángulo, con

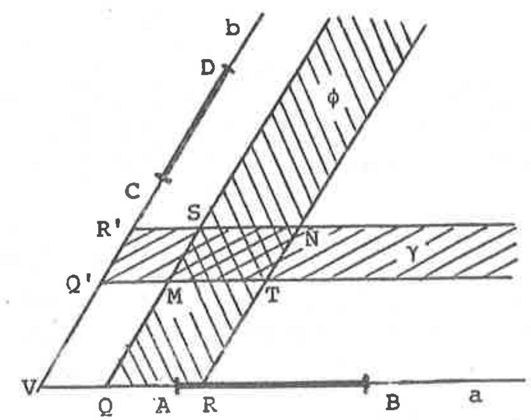


Figura 3

sus extremos en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Además, A, M y C están alineados, y M es el centro de $\overline{AC}$. Porque siendo Q el punto medio de $\overline{VA}$, la paralela por Q al lado b del ángulo ha de cortar al segmento $\overline{AC}$ (no dibujado) en su punto medio; y por ser Q' el centro de $\overline{VC}$, la paralela por Q' al lado a del ángulo ha de cortar al segmento $\overline{AC}$ también en su punto medio. Luego ambas paralelas se cortan en el centro M del segmento $\overline{AC}$, siendo M un vértice del paralelogramo lugar. De manera análoga se prueba que los puntos B, N y D están alineados, y N es el centro de $\overline{BD}$ (no dibujado).

De aquí se desprende una manera muy sencilla de dibujar el lugar de los puntos medios de los segmentos inscritos en otros dos lados. Sean AB y CD los dos segmentos conocidos (figura 4). Unamos C y A, y también D y B. Por los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, que son M y N respectivamente, tracemos paralelas a los segmentos dados, formándose el paralelogramo de contorno MTNSN, que es el lugar pedido. Además, A, S y D están alineados, y S es el centro de $\overline{AD}$, como se prueba sin dificultad. También están alineados C, T, B, y el centro de $\overline{BC}$ es el punto T. Es decir, los vértices S y T son los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero ABDC.

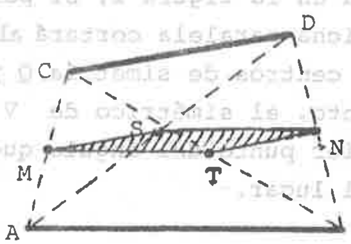


Figura 4

3.- La solución al problema de Crespo es ahora inmediata. Tenemos el cuadrilátero de contorno ABCDA (figura 5). El lugar σ_1 de los centros de los segmentos inscritos en el par de lados opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es el paralelogramo que se obtiene trazando por los puntos medios M y N de los otros dos lados las paralelas a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Análogamente, el l.g. σ_2 de los centros de los segmentos inscritos en los lados opuestos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ es el paralelogramo que se forma trazando por G y H (puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente) las paralelas a $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

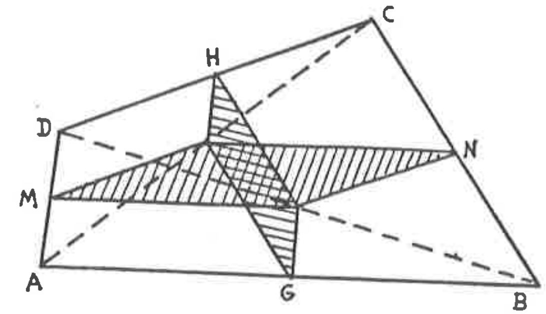


Figura 5

Un razonamiento sencillo nos aclara que los dos pares de vértices interiores al cuadrilátero de estos dos paralelogramas coinciden. O sea, que S y T son vértices comunes a ambos. Y además, como ya hemos dicho, S y T son los centros de las diagonales del cuadrilátero.

La intersección de estos dos paralelogramas es, pues, la solución del problema. Dicha intersección es, por lo tanto, otro paralelograma de lados paralelos a los que envuelven al cuadrilátero completo.

4.- El problema de Crespo, en su primera parte, tiene una solución más breve. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos (figura 6). Tomemos un punto Q cualquiera en $\overline{AB}$. El lugar de los centros de los segmentos inscritos en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tales que un extremo sea siempre Q y el otro varíe en CD es, evidentemente, la llamada "paralela media" $\overline{ST}$, al desplazarse, conserva siempre su longitud = $\frac{1}{2}$ $\overline{CD}$ y su paralelismo a $\overline{CD}$, y barre un recinto que es un paralelogramo, puesto que $\overline{ST}$ efectúa una traslación cuya dirección es la de $\overline{AB}$. Por lo tanto, el lugar de los centros de todos los segmentos inscritos en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es el paralelogramo de contorno MGNHM, donde M y N son los puntos medios de AC y BD, respectivamente.

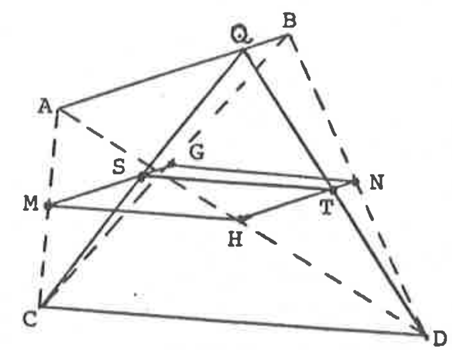


Figura 6

A partir de aquí, todo es igual a lo expuesto en el apartado nº 3 anterior.

SONETO

Por Enrique Velázquez
Profesor del Colegio "Raimundo Lulio" de Madrid

Yo guardo en mi baúl de matemático
ideas y conceptos racionales:
asíntotas, entornos, integrales
y el punto, que es tan raro y axiomático.

Tomando las funciones de gramático
reciclo palabrejas magistrales:
afijos, decrementos, ideales;
y pretendo ser claro y sistemático.

¿Más cómo han de faltar en esta glosa
los vectores, el "pi" de tanta fama,
la tangente, de imagen tan hermosa,
la bella derivada, que es su hermana?
Hay mucho que nombrar, hay tanta cosa
que acaso yo precise otra mañana.

RESOLUCION GRAFICA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

Por Javier Peralta
Catedrático del I.B. "Conde de Orgaz" (Madrid)
Profesor Asociado de la Universidad Complutense

1. INTRODUCCION

En 1637 aparece el "Discurso del Método" de Descartes, en cuyo último apéndice: "Geometría" se ocupa de "cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría"; es decir, se unifica el álgebra con la geometría, dando lugar al nacimiento de la Geometría Analítica. Descartes y también Fermat -de quien no nos ocuparemos en estas notas- son considerados, en consecuencia, los padres de esta rama de las matemáticas.

La teoría de Descartes se fundamenta en dos conceptos: el de coordenadas y el de poder representar en forma de curva plana cualquier ecuación algebraica con dos incógnitas. Se logra, por tanto, estudiar problemas geométricos por procedimientos algebraicos.

Sería prolijo y, por otra parte, estaría lejos de la intención de este artículo, enumerar tan siquiera los problemas tratados por Descartes en los tres libros que componen "Geometría". Nos limitaremos únicamente a desarrollar el procedimiento utilizado para hallar gráficamente las raíces reales de las ecuaciones de tercer y cuarto grado por intersección de la parábola $y = x^2$ con una circunferencia.

Precisamente, esa ha sido la idea que nos ha guiado a resolver, también gráficamente, ecuaciones de tercer y cuarto grado e incluso de grados quinto y sexto, empleando la cúbica $y = x^3$.

En concreto, se prueba que las raíces reales de una ecuación de tercer grado pueden obtenerse como intersección de $y = x^3$ con una recta, las de cuarto grado mediante la intersección con una hipérbola, y las de quinto y sexto grado al cortar, en general, con una cónica.

Se indica también como podría generalizarse este método a algunas ecuaciones de grado superior, a partir de $y = x^n$.

Se finaliza este trabajo con una reflexión metodológica sobre su posible aplicación.

2. REDUCCION DE UNA ECUACION ALGEBRAICA A OTRA EQUIVALENTE SIN SEGUNDO TERMINO

Comencemos diciendo que todas las ecuaciones algebraicas que utilizaremos tendrán como coeficiente de la máxima potencia de x a la unidad (si no fuera así, bastaría con dividir toda la ecuación por el coeficiente de la máxima potencia). Podemos, por tanto, referirnos exclusivamente, y sin restringir la generalidad, a ecuaciones del tipo:

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Si realizamos el cambio de variable $x = y + k$, la ecuación se convierte en:

$$(y+k)^n + a_{n-1}(y+k)^{n-1} + \dots + a_1(y+k) + a_0 = 0 \qquad (2)$$

que es de la forma

$$y^n + b_{n-1} y^{n-1} + \dots + b_1 y + b_0 = 0 \qquad (3)$$

Operando en (2), se deduce que el coeficiente de y^{n-1} es,

$$b_{n-1} = n\,k + a_{n-1}$$

En consecuencia, si quisiéramos que desapareciera el segundo sumando en (3), bastaría con elegir en el cambio de variable anterior $k = -a_{n-1}/n$.

En lo sucesivo, fijaremos nuestro estudio a ecuaciones del tipo:

$$x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (4)$$

sin término en x^{n-1}, a las que, como hemos visto, puede reducirse las demás.

En particular, toda ecuación de tercer grado

$$X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0$$

se transforma en

$$x^3 + ax + b = 0 \qquad (5)$$

mediante $X = x - a_2/3$.

Y toda ecuación de cuarto grado

$$X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0$$

con el cambio $X = x - a_3/4$, se convierte en

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (6)$$

3. PROCEDIMIENTO DE DESCARTES PARA LA RESOLUCION GRAFICA DE ECUACIONES DE TERCER Y CUARTO GRADO

Si multiplicamos los dos miembros de (5) por x, se tiene

$$x^4 + ax^2 + bx = 0$$

que es del tipo (6) con $c = 0$, y cuyas raíces, excluyendo a $x=0$, son las de (5).

Por consiguiente, para tratar conjuntamente las ecuaciones de tercer y cuarto grado, es suficiente limitar nuestro estudio a la ecuación (6).

Empecemos hallando la ecuación de la circunferencia de centro el punto de coordenadas (p, q) y radio r:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

o bien, desarrollando,

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 \qquad (7)$$

Para calcular los puntos de intersección de esta circunferencia con la parábola $y = x^2$, habrá que resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 &= 0 \\ y &= x^2 \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo la y de la segunda ecuación en la primera, se tiene:

$$x^4\ (1-2q)\,x^2 - 2px + p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

que es del tipo (6), con $a = 1-2q$, $b = -2p$, $c = p^2 + q^2 - r^2$.

En consecuencia, para resolver la ecuación (6), dibuja-

remos la parábola $y = x^2$ y la circunferencia de centro $(p, q) = \left(\frac{-b}{2}, \frac{1-a}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{p^2 + q^2 - c}$. Las abscisas de los puntos de intersección de ambas curvas serán las soluciones de la ecuación propuesta.

Si $p^2 + q^2 - c = \frac{b^2}{4} + \frac{(1-a)^2}{4} - c < 0$, no es posible hallar r. Esto significa que la ecuación no tiene raíces reales.

Ejemplos

Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones:

1) $x^4 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$.

Se tiene: $a = -5$, $b = -2$, $c = 1$, luego $p = \frac{-b}{2} = 1$, $q = \frac{1-a}{2} = 3$, $r = \sqrt{p^2 + q^2 + c} = 3$.

El problema se reduce, pues a hallar la intersección de centro el punto (1, 3) y radio 3.

En la figura 1 se observa que la ecuación tiene las cuatro raíces reales:

$x_1 \in (-2,-1)$, $x_2 \in (-1,0)$, $x_3 \in (0,1)$, $x_4 \in (2,3)$

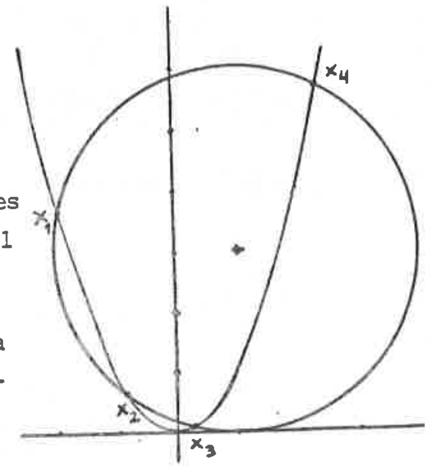


Fig. 1

Si se desea mayor aproximación, bastará con aplicar el Teorema de Bolzano a la función $f(x) = x^4 - 5x^2 - 2x + 1$.

Como $f(-2) > 0$, $f(-1.9) < 0$, se tiene: $-2 < x_1 < -1.9$.

Análogamente: $f(-0.8) < 0$, $f(-0.7) > 0$, luego $-0.8 < x_2 < -0.7$; $f(0.2) > 0$, $f(0.3) < 0$, luego $0.2 < x_3 < 0.3$; $f(2.3) < 0$, $f(2.4) > 0$, luego $2.3 < x_4 < 2.4$.

2) $\underline{x^3 + x + 1 = 0}$.

Multiplicamos por x para convertirla en una ecuación de cuarto grado: $x^4 + x^2 + x = 0$.

Luego $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, y por lo tanto, $p = -1/2$, $q = 0$, $r = 1/2$.

Hay que hallar, consecuentemente, la intersección de la parábola $y = x^2$ con la circunferencia de centro $(-1/2,\ 0)$ y radio 1/2.

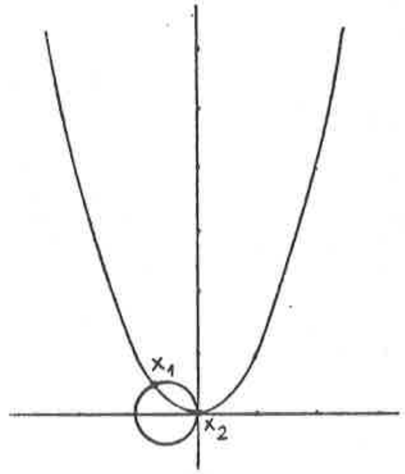


Fig. 2

En la figura 2, se observan dos raíces: $x_1 \in (-1,0)$, $x_2 = 0$.

Obviamente, esta última no es raíz de la ecuación inicial que tiene, por lo tanto, dos raíces imaginarias y una raíz real x_1. Se puede comprobar que $-0.7 < x_1 < -0.6$.

3) $\underline{x^4 - x^2 - 6x + 9 = 0}$.

Como $a = -1$, $b = -6$, $c = 9$, se tiene: $p = 3$, $q = 1$, $r = 1$.

Según puede verse en la Figura 3, la parábola $y = x^2$ y la circunferencia de centro (3, 1) y radio 1 no tiene puntos comunes, luego la ecuación no tiene ninguna raíz real.

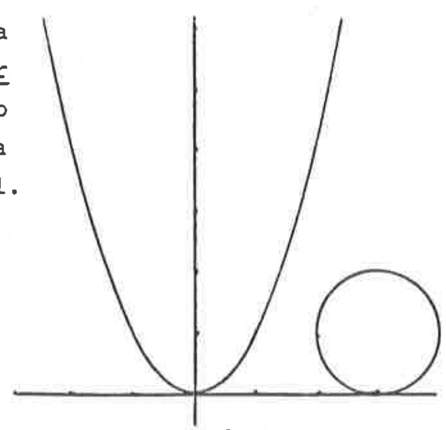


Fig. 3

4) $\underline{x^4 + 2x^2 + x + 2 = 0}$.

Como $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, se tiene: $p = -1/2$, $q = -1/2$, $r = \sqrt{p^2 + q^2 - c} = \sqrt{1/4 + 1/4 - 2} \notin \mathbb{R}$.

La ecuación no tiene, por tanto, raíces reales

4. OTRO METODO PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DE TERCER Y CUARTO GRADO

Si en lugar de resolver la ecuación de tercer grado (5) valiéndonos de la parábola $y = x^2$, consideramos la cúbica $y = x^3$, es evidente que las abscisas de los puntos de intersección de las curvas

$$\left.\begin{array}{r} y + ax + b = 0 \\ y = x^3 \end{array}\right\}$$

nos darán las raíces reales de (5). Por lo tanto, las soluciones reales de una ecuación de tercer grado se pueden determinar gráficamente como intersección de $y = x^3$ y de una recta.

En cuanto a las ecuaciones de cuarto grado, si en (6) hacemos $y = x^3$, queda:

$$ax^2 + xy + bx + c = 0 \tag{8}$$

Así pues, se pueden hallar gráficamente las raíces reales de la ecuación (6) dibujando las curvas:

$$\left.\begin{array}{r} ax^2 + xy + bx + c = 0 \\ y = x^3 \end{array}\right\}$$

Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas anteriores nos proporcionan las raíces reales de (6).

Ahora bien, (8) representa una cónica, y es fácil ver que dicha ecuación corresponde a una hipérbola si $c \neq 0$. En efecto, su matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} c & b/2 & 0 \\ b/2 & a & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

y como $|A| = -c/4$, se trata de una cónica irreducible si $c \neq 0$.

Como además

$$A_{00} = \begin{vmatrix} a & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -1/4 < 0$$

es una hipérbola.

En el caso de que $c = 0$, se tiene:

$$|A| = 0, \quad A_{00} < 0$$

lo que corresponde al par de rectas secantes $x = 0$, $ax + y + b = 0$. De cualquier forma, este caso no ofrece interés, pues si $c = 0$, la ecuación (6) es $x^4 + ax^2 + bx = 0$, y separando la raíz $x = 0$ se reduce a resolver una ecuación de tercer grado, caso que ya ha sido estudiado más arriba.

Este procedimiento de resolución gráfica de ecuaciones puede explicarse a alumnos de C.O.U., e incluso de 3ª de B.U.P. (una vez que se hayan visto las cónicas y la representación de curvas), pues aunque no sepan clasificar la cónica (8), si que pueden representar su gráfica. Basta para ello con despejar y, con lo que queda:

$$y = -\frac{ax^2 + bx + c}{x}$$

y esta función es perfectamente asequible para esos niveles, y pueden dibujarla con poco más que el cálculo de las asíntotas: $x = 0$, $y = -ax - b$.

Ejemplos

Resolver gráficamente las ecuaciones:

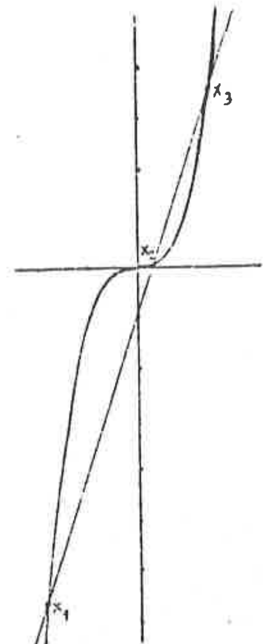


Fig.4

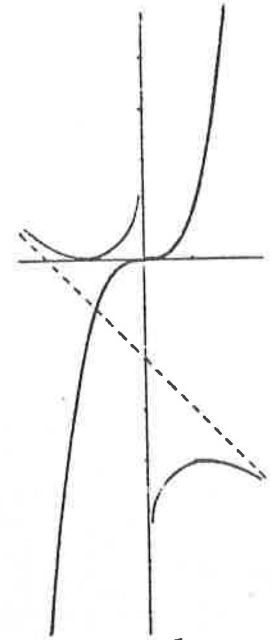


Fig.5

5) $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Equivale a dibujar la cúbica $y = x^3$ y la recta $y - 3x + 1 = 0$.

En la figura 4 se observa que la ecuación tiene las tres raíces reales: $x_1 \in (-2, -1)$, $x_2 \in (0, 1)$, $x_3 \in (1, 2)$.

Por el Teorema de Bolzano aplicado a la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$, se tiene: $f(-1.9) < 0$, $f(-1.8) > 0$, luego $-1.9 < x_1 < -1.8$; $f(0, 3) > 0$, $f(0.4) < 0$, luego $0.3 < x_2 < 0.4$; $f(1.5) < 0$, $f(1.6) > 0$, luego $1.5 < x_3 < 1.6$.

6) $x^4 + x^2 + 2x + 1 = 0$.

Hay que dibujar las curvas

$$\left.\begin{aligned} y &= x^3 \\ x^2 + xy + 2x + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

La hipérbola

$$y = -\frac{x^2 + 2x + 1}{x} = -\frac{(x+1)^2}{x}$$

corta a los ejes coordenados en el punto $(-1, 0)$, tiene como asíntotas a las rectas $x = 0$, $y = -x-2$, y presenta un máximo en el punto $(1, -4)$ y un mínimo en $(-1, 0)$.

Según se aprecia en la figura 5, la cúbica y la hipérbola no se cortan, lo que equivale a afirmar que la ecuación no tiene raíces reales.

7) $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$.

Se dibujan la curva $y = x^3$ y la hipérbola $xy - x^2 + 2x - 1 = 0$.

Despejando la y de esta última, se tiene:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x - 1)^2}{x}$$

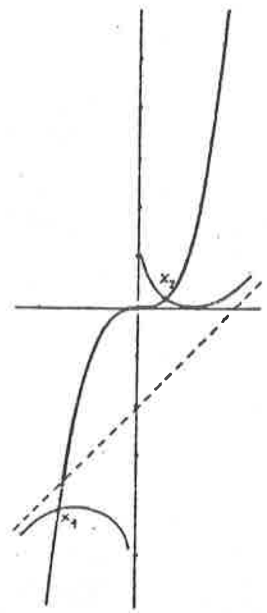


Fig. 6

que corta a los ejes en el punto (1, 0), tiene por asíntotas a las rectas $x = 0$, $y = x-2$, y presenta un máximo en (-1, -4) y un mínimo en (1, 0).

De la figura 6 se deduce que hay dos raíces reales: $x_1 \in (-2, -1)$, $x_2 \in (0, 1)$.

Si se desea afinar más, se tiene que $-1.7 < x_1 < -1.6$, $0.6 < x_2 < 0.7$.

En los ejemplos 5) y 6) se podría haber llegado a las mismas conclusiones al observar que:

$$x^4 + x^2 + 2x + 1 = x^4 + (x+1)^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = x^4 - (x-1)^2 = (x^2 + x - 1)\ (x^2 - x + 1)$$

La ecuación $x^2 - x + 1 = 0$ no tiene raíces reales, y las de $x^2 + x - 1 = 0$ son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

5. RESOLUCION GRAFICA DE ECUACIONES DE QUINTO Y SEXTO GRADO

Utilizando el procedimiento anterior para ecuaciones de grados superiores, se deduce que las raíces reales de la ecuación

$$x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (9)$$

pueden obtenerse haciendo $y = x^3$ en la misma. De esta forma, es posible determinar gráficamente sus raíces, dibujando $y = x^3$ y la cónica

$$cx^2 + y^2 + axy + dx + by + e = 0 \qquad (10)$$

Las abscisas de los puntos de intersección de las dos curvas anteriores, nos proporcionan las raíces reales de (9).

Si se tratara de una ecuación de quinto grado:

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (11)$$

multiplicando por x, se convierte en (9) con $e = 0$, luego se reduce al caso anterior. De las raíces obtenidas gráficamente, habrá que excluir $x = 0$, que se ha introducido como mero artificio de cálculo.

Para poder explicar este método de resolución gráfica de ecuaciones a alumnos de 3ª de B.U.P. o C.O.U., habrá que elegir cuidadosamente la ecuación para que la cónica resultante sea sencilla. Creemos que debe limitarse a algunos de los siguientes tipos:

(i) $\frac{(x-p)^2}{m^2} + \frac{(y-q)^2}{n^2} = 1$: elipse o circunferencia.

(ii) $\frac{(x-p)^2}{m^2} - \frac{(y-q)^2}{n^2} = \pm 1$: hipérbola.

(iii) $(y-q)^2 = m(x-p)$: parábola. (El caso $(x-p)^2 = m(y-q)$ procede de la resolución de la ecuación de tercer grado $(x-p)^2 = m(x^3-q)$, que ha sido estudiado en 4.

(iv) Cónicas que una vez despejada la y dé lugar a una curva que se pueda dibujar fácilmente hallando sus elementos más significativos: máximos, mínimos, asíntotas, etc.

(v) Par de rectas reales, que pueden obtenerse identificando coeficientes.

Ejemplos

Resolver gráficamente las ecuaciones:

8) $x^6 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 1 = 0$.

Haciendo $y = x^3$, resulta $y^2 - 2y + 4x^2 - 8x + 1 = 0$, que es una elipse.

Mediante cálculos elementales, se obtiene:

$$0 = y^2 - 2y + 4x^2 - 8x + 1 = (y-1)^2 + (4x^2-8x) = (y-1)^2 + 4(x^2-2x+1) - 4 =$$

$$= (y-1)^2 + 4(x-1)^2 - 4, \quad (y-1)^2 + 4(x-1)^2 = 4, \quad (x-1)^2/1 + (y-1)^2/4 = 1$$

que es una elipse de centro el punto (1, 1) y semiejes $m = 1$, $n = 2$.

En la figura 7 se ha dibujado $y = x^3$ y la elipse $(x-1)^2/1 + (y-1)^2/4 = 1$, y se observa que tienen dos puntos de corte. Sus abscisas, $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, 2)$ son las raíces de la ecuación propuesta.

Por el teorema de Bolzano, se deduce que $0.1 < x_1 < 0.2$ y $1.4 < x_2 < 1.5$.

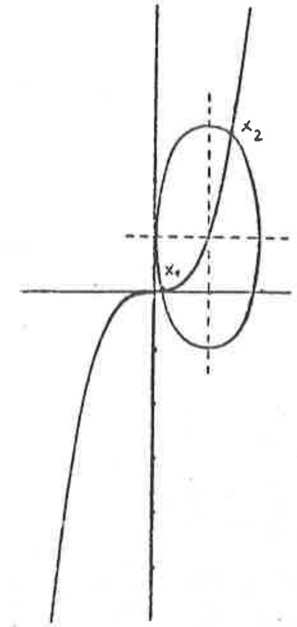


Fig. 7

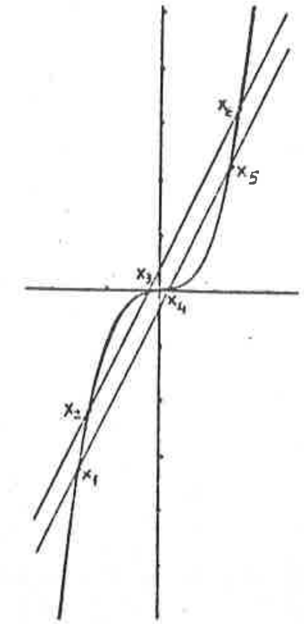


Fig. 8

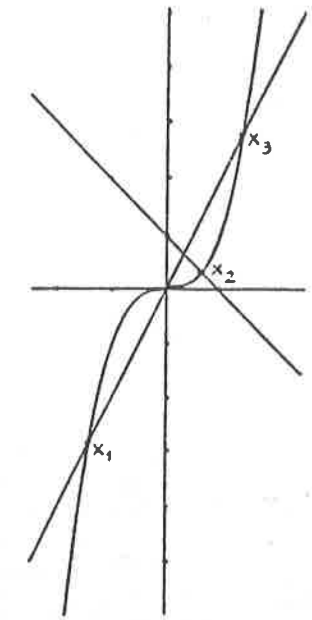


Fig. 9

9) $x^6 - 4x^4 + 4x^2 - 1/9 = 0$.

Sustituyendo $y = x^3$, queda: $y^2 - 4xy + 4x^2 - 1/9 = 0$, que corresponde a un par de rectas paralelas.

Mediante sencillas transformaciones, se tiene:

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 1/9 = (y-2x)^2 - 1/9 = (y-2x+1/3)\cdot(y-2x-1/3)$$

O bien, identificando coeficientes:

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 1/9 = (y+ax+b)\cdot(y+cx+d)$$

queda el sistema

$$a+c = -4, \quad a\cdot c = 4, \quad b+d = 0, \quad a\cdot d + b\cdot c = 0, \quad b\cdot d = -1/9$$

cuyas soluciones $a = c = -2$, $b = \pm 1/3$, $d = \mp 1/3$, conducen al resultado anterior.

En la figura 8 se observa que hay seis puntos de intersección de $y = x^3$ con el par de rectas $y - 2x + 1/3 = 0$, $y - 2x -$

$- 1/3 = 0$ en que se descompone la cónica degenerada $y^2 - 4xy + 4x^2 - 1/9 = 0$; luego la ecuación tiene las seis raíces reales.

Se comprueba que

$$-1.5 < x_1 < -1.4, \quad -1.4 < x_2 < -1.3, \quad -0.2 < x_3 < -0.1$$

y como el primer miembro de la ecuación es una función par:

$$0.1 < x_4 < 0.2, \quad 1.3 < x_5 < 1.4, \quad 1.4 < x_6 < 1.5$$

10) $\underline{x^5 - x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0}$.

Multiplicando por x se tiene la ecuación de sexto grado:

$$x^6 - x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x = 0$$

y haciendo $y = x^3$, la cónica

$$y^2 - xy - y - 2x^2 + 2x = 0$$

Dicha cónica es un par de rectas reales secantes. Descomponiendo el primer miembro en $(y+ax+b)\cdot(y+cx+d)$ e identificando coeficientes, se tiene:

$$y^2 - xy - y - 2x^2 + 2x = (y-2x)\cdot(y+x-1)$$

En la figura 9 se observa que hay cuatro puntos comunes a la curva $y = x^3$ y el par de rectas $y - 2x = 0$, $y + x - 1 = 0$. Excluyendo la raíz $x = 0$ que se había introducido para convertir la ecuación de quinto grado en otra de sexto grado, se deduce que la ecuación propuesta tiene dos raíces imaginarias y tres raíces reales: $x_1 \in (-2, -1)$, $x_2 \in (0, 1)$, $x_3 \in (1, 2)$.

Se comprueba que

$$-1.5 < x_1 < -1.4, \quad 0.6 < x_2 < 0.7, \quad 1.4 < x_3 < 1.5$$

6. GENERALIZACION A ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

El método utilizado para la resolución gráfica de ecuaciones de grados 3, 4, 5 y 6 puede generalizarse para ciertas ecuaciones de grado superior a 6.

Si la ecuación es de grado par, el procedimiento es válido para ecuaciones del tipo

$$x^{2n} + ax^{n+1} + bx^n + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (12)$$

En efecto, haciendo $y = x^n$, se obtiene la cónica:

$$y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = 0$$

Por lo tanto, bastará con dibujar dicha cónica y la curva $y = x^n$. Las abscisas de los puntos de intersección de las dos serán las soluciones de la ecuación (12).

Si la ecuación es de grado impar, el método se puede aplicar para resolver ecuaciones de la forma

$$x^{2n-1} + ax^n + bx^{n-1} + cx + d = 0 \qquad (13)$$

ya que multiplicando por x, resulta otra del tipo (12) con $e = 0$. Las raíces de esta última, exceptuando $x = 0$, nos proporcionan las raíces de (13).

<u>Ejemplo</u>

Resolver gráficamente la ecuación:

11) $\underline{x^8 - 6x^4 - 2x + 5 = 0}$.

Es del tipo (12) con $n = 4$, $a = 0$, $b = -6$, $c = 0$, $d = -2$, $e = 5$.

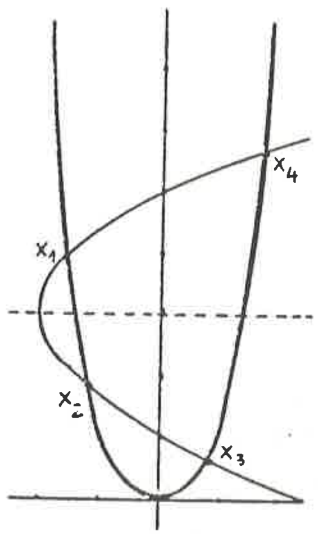


Fig. 10

Haciendo $y = x^4$, se tiene la cónica:

$$y^2 - 6y - 2x + 5 = 0$$

Despejando x, queda:

$$x = \frac{y^2 - 6y + 5}{2}$$

que es una parábola de eje la recta $y = 3$, vértice el punto $(-2, 3)$, y que corta a los ejes en los puntos $(0, 1)$, $(0, 5)$, $(5/2, 0)$.

En la figura 10 se han dibujado la parábola y la curva $y = x^4$, y se observa que hay cuatro puntos de intersección; luego la ecuación propuesta tiene cuatro raíces reales y cuatro imaginarias.

Las raíces reales son: $x_1 \in (-2, -1)$, $x_2 \in (-2, -1)$, $x_3 \in (0, 1)$, $x_4 \in (1, 2)$.

Se comprueba que:

$$-1.5 < x_1 < -1.4, \quad -1.2 < x_2 < -1.1, \quad 0.8 < x_3 < 0.9, \quad 1.5 < x_4 < 1.6$$

7. COMENTARIO FINAL

Es una realidad palpable la absoluta desconexión existente entre las distintas asignaturas que componen el Bachillerato y el C.O.U. Dicha conexión dificulta que, al final de esta etapa educativa, el alumno haya adquirido una visión general del saber científico y humanístico -aunque obligadamente elemental-, y que se encuentre en condiciones de relacionar entre sí diversos hechos o ideas que fueron introducidos desde distintos puntos de

vista; finalidad a nuestro juicio, muy deseable al término de la Enseñanza Media.

Admitimos, sin embargo, la gran dificultad que entraña abordar teorías científicas o hechos históricos desde distintas ópticas. Las causas son varias y, en nuestra opinión, se deben no sólo a la amplitud de los programas -lo que exige olvidarse de los "aspectos accesorios" para poder llevar el ritmo adecuado (aún cuando dichos aspectos serían un buen campo en el que los alumnos podrían desarrollar trabajos más creativos)-, sino también a una preocupación (posiblemente encomiable) de no hablar más que de aquello que se conoce mejor. Se acepta, por ejemplo, como hecho normal la total independencia de la Física y la Matemática, aún cuando es evidente que podrían tratarse conjuntamente algunos aspectos (vectores, derivadas, etc.).

La situación es todavía más grave si tan siquiera se intentan relacionar entre sí diferentes partes de la Matemática, y se presentan las lecciones encuadradas en unidades temáticas independientes a lo largo de distintos cursos, e incluso dentro de un mismo curso.

En el caso concreto de la enseñanza de la Matemática hay también un defecto, no siempre fácilmente subsanable, y que impide que la enseñanza cumpla ese fin formativo, en cuanto a su carácter integral, del que hablábamos más arriba. Nos referimos a la introducción de ideas y teorías matemáticas desligadas de los procesos históricos donde tuvieron lugar.

Una y otra carencia dificultan que el alumno vaya formándose una concepción unitaria de la Ciencia y, en nuestro caso, una visión de la unidad intrínseca de la Matemática; objetivo importante, especialmente para aquellos alumnos que pretendan iniciar próximamente una carrera científica. Creemos aconsejable, en consecuencia, la organización de seminarios dirigidos a dichos alumnos, que permitan enlazar partes distintas de la Matemática y ayudar a captar esa panorámica más general a la que nos referíamos antes. Y ese es el motivo que nos ha animado a escribir estas líneas.

El pequeño ejemplo que hemos presentado puede contribuir a relacionar la teoría general de resolución de ecuaciones con las cónicas, el dibujo de curvas y el Teorema de Bolzano, además de encuadrar históricamente el comienzo de la Geometría Analítica y la figura y el procedimiento de Descartes.

Nos atrevemos, para concluir, sugerir otros caminos que se podrían seguir a partir de este trabajo, y que esbozamos a continuación:

1. La resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado, y en general, un estudio más completo de las ecuaciones, con una visión panorámica de los descubrimientos en este sentido de los algebristas del Cinquecento.

2. Una introducción al Cálculo Numérico, con otros procedimientos de resolución de ecuaciones por métodos aproximados.

3. Estudio de los problemas matemáticos tratados por Descartes en su "Geometría", tales como la resolución del ejemplo tomado de Pappus, la determinación de normales, la regla de los signos, diversos teoremas sobre transformación de ecuaciones algebraicas, etc.

4. Un seminario interdisciplinar de Filosofía y Matemáticas para el estudio conjunto de la obra de Descartes.

Sería una gran satisfacción para nosotros que estas líneas contribuyeran a mover a algún lector en las direcciones apuntadas.

LOS JUEGOS EN LA MATEMATICA DE LA E.G.B.

Por Mª Paz Bujanda Jaúregui
Universidad Complutense

EL FRACASO ESCOLAR

Un problema preocupante y del que se viene tratando ya hace años es el del fracaso escolar. La única medida objetiva posible viene dada por la proporción entre los alumnos que comienzan la E.G.B. y no llegan a terminarla. En 1981 se hablaba de un 31%, porcentaje que justifica ampliamente la gravedad del problema si se tiene en cuenta que se refiere a un nivel obligatorio de la enseñanza.

Se han estudiado las posibles causas de este fracaso, que para muchos niños de "los que fracasan" condicionará su futuro, pero para todos ellos es ya, y quizá en ésto no se insiste demasiado, un motivo de frustación, de saberse incapaces y de sentirse inseguros; de infelicidad en suma.

CAUSAS DEL FRACASO ESCOLAR

Entre las causas del fracaso escolar, se han señalado las siguientes:

- El fracaso social. La sociedad entera vive hoy una situación de crisis de valores, de cambios demasiado rápidos a los que no ha terminado de adaptarse, de un desgaste de instituciones fundamentales... Todo ello incide de inevitablemente en la situación y en los comportamientos del niño en la escuela.

- Unos planteamientos educativos poco claros.

- Una gran falta de motivación, unida a la conciencia de ella. Esto es, muchos niños no encuentran ningún aliciente en su vida escolar y se preguntan el "para qué" de sus esfuerzos.

- Unos modos defectuosos o poco eficaces de aprender.

EL JUEGO COMO UNA POSIBLE SOLUCION ASEQUIBLE

Vaya por delante que no pretendemos haber dado con la solución mágica de este importante problema. Ningún problema humano admite soluciones únicas y definitivas. Nuestra aprotación es pues modesta y realista.

Se trata de dar una respuesta a las dos últimas causas que señalábamos, que son las que están más al alcance del profesor, las que permiten una intervención suya más directa. Esta respuesta consiste en la introducción del juego en la escuela. Con ella se pretende:

A) Un planteamiento de la vida escolar más vinculado a la vida ordinaria y a los intereses espontáneos del niño.

El niño juega fuera del colegio; puede jugar también en el colegio. Es posible orientar una parte de sus juegos extraescolares y es también posible dar forma de juego a una parte de su actividad escolar.

En "El juego educativo" (1) se hacen unas consideraciones muy interesantes sobre el juego y el trabajo y sus formas transicionales. Remitimos al lector al interesante estudio que en el libro se hace sobre el tema. Aquí señalamos solamente un hecho puesto de relieve por Claparède y que creemos que es perfectamente válido hoy: la tarea impuesta a la mayor parte de los niños se parece demasiado, en cuanto a esfuerzo y fatiga, al trabajo del adulto. Y no tiene la parte gratificante del trabajo del adulto: el fin real de la educación es demasiado remoto, demasiado elevado para ser mantenido en la conciencia. La introducción del juego puede acercar la actividad escolar a los intereses naturales del niño.

No se trata de evitar que el niño trabaje; se pretende solamente dar un aspecto y una motivación propia de juego a parte de su trabajo.

B) Favorecer la creación de unos adecuados métodos de aprendizaje. Y ello puede hacerse con el manejo de una serie de juegos, cuidadosamente diseñados.

ALGUNAS CUESTIONES SOBRE LOS JUEGOS

Casi todos los juegos ofrecen unas buenas posibilidades educativas. Destacamos las siguientes:

- Favorecen el cultivo de las relaciones humanas.

- Inician el hábito de la aceptación y respeto de unas reglas. Nótese que son elementos esenciales para la consecución de una buena convivencia.

- Acostumbran a mantener la atención.

- En los juegos que no son puramente de azar, se potencian habilidades y se estimula el ingenio.

- Se comienza a aprender que perder forma también parte del juego.

- Se aprende también a ganar con alegría, pero sin arrogancia, lo que es casi tan difícil como perder con dignidad.

LOS JUEGOS MATEMATICOS

Decía Leibnitz, que nunca es el hombre más creativo que cuando juega y muchos grandes matemáticos han ideado ingeniosos juegos y han vivido como un gran juego su aportación a la ciencia.

En este apartado vamos a referirnos a una colección de juegos, pensados desde la preocupación del educador por hacer más eficaz, asequible y atrayente el estudio de las matemáticas en su nivel elemental. Han sido diseñados con la doble finalidad que señalabamos al principio: hacer más motivadora la vida escolar y procurar unas buenas técnicas para el aprendizaje de las matemáticas en la E.G.B.

ALGUNAS CARACTERISTICAS DE NUESTROS JUEGOS

- Muchos de ellos reproducen con ligeras variantes los esquemas de los juegos a los que el niño esta más habituado: bingo, dominó, oca, "quién es quién", trivial, etc.

  Esto facilita su aceptación y la posibilidad de proporcionar esa deseable continuidad entre la vida ordinaria y la vida escolar del niño.

- Están situados dentro del marco "Juego y Aprendo". Pese a la intencionalidad educativa de cada uno de los juegos, no pierden su condición fundamental de juegos, atractivos y motivadores. Para el niño el orden es exactamente este: "juego" (primero) y "aprendo matemáticas" (es una consecuencia).

- Cada juego tiene sus objetivos específicos: unos pretenden que el niño comprenda y maneje mejor los números y las magnitudes. Es muy interesante que "sepa muchas cosas" de un número: dibujarlo, relacionarlo con cosas familiares, obtenerlo como resultado de un cálculo, etc. Como ejemplo de este objetivo de los juegos, tenemos distintos tipos de bingos (con números naturales en tres grados de dificultad, con fracciones y números decimales, con magnitudes, etc.) dominó (dominó de cuentas, dominó romano, dominó de números racionales, de magnitudes, etc.). "Quién es quién", etc.

Hay otros juegos que pretenden mejorar su agilidad de cálculo. Como ejemplo, tenemos las barajas de completar (completar a 15, completar impares, completar pares, completar la unidad), el creativo "Operator", los "Navegante", "Marco Polo" y "Barcarola", que presentan además una bonita relación con el lenguaje, etc.

Finalmente hay otros juegos de carácter más abierto y global, con una mayor componente lúdica: "La oca calculadora", "Pitágoras en las Olimpiadas", etc.

BARAJA DE "COMPLETAR A 15"

Detallamos uno de los juegos. Su elección se ha debido, fundamentalmente, a la mayor facilidad de su reproducción en el marco de una revista. Nos permitimos reproducir la descripción del juego que se propone al alumno (2):

"COMPLETAR A 15"

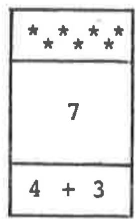
¿Qué te hace falta para poder jugar?

Basta con que conozcas:

- Los números del 1 al 15.
- Sumar números menores que 15.

Descripción del juego

Es una baraja de 40 cartas, como las que reproducimos aquí... Fijaté como es cada carta. Hay tres bandas



En la banda central hay un número (7). En la banda superior hay un dibujo con 7 objetos (7 estrellas); en la banda inferior, hay una suma que da como resultado 7.

Número de jugadores

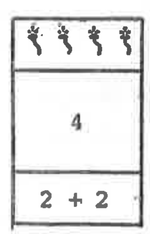
Pueden jugar 2, 4 ó 5 jugadores. La manera más cómoda de jugarlo suele ser con cuatro.

Modo de jugar

1) Se barajan las cartas y se reparte una a cada jugador. El que saca el mayor número dirige el juego. Si hubiera dos o más jugadores con este número mayor, se vuelve a repartir una carta a cada uno de estos jugadores hasta que se desempata.

2) El que dirige el juego, reparte ordenadamente una carta a cada jugador hasta que se acaban las cartas. Si hay cuatro jugadores, cada jugador debe quedarse con 10 cartas.

3) Una vez repartidas las cartas, el director del juego coloca una de las suyas sobre la mesa. Supongamos que coloca ésta:

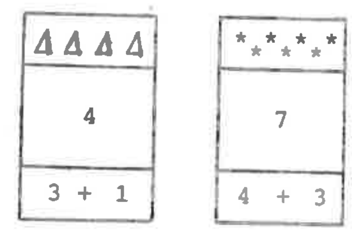


4) Continúa el jugador que está a la derecha del que dirige. Debe buscar entre sus cartas las necesarias para completar a 15 con la que ha sacado su compañero.

Por ejemplo, supongamos que este segundo jugador tiene sus cartas con estos números:

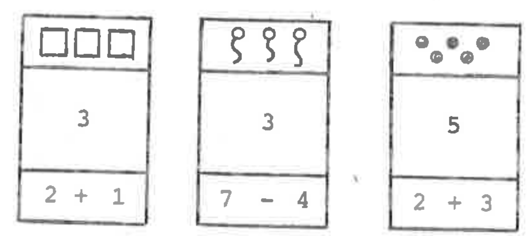
3, 3, 2, 4, 5, 7, 12, 14, 6, 7

Puede completar a 15 poniendo:



(4 + 4 + 7 = 15)

o también en la forma:



(4 + 3 + 3 + 5 = 15)

Supongamos que elige la primera posibilidad. Una vez completado 15, recoge las tres cartas (4, 4 y 7) y coloca una de las que le quedan. Por ejemplo, saca el 14.

5) Continúa el siguiente jugador. Debe completar 15. Solamente podrá hacerlo si tiene una carta con 1. Si tiene, la pone, retira las dos cartas y coloca otra suya.

Si no tiene una carta con el número 1, pasa (tiene que esperar a la jugada siguiente) y cede su turno al jugador situado a su derecha.

6) Se continúa jugando de la misma manera.

GANA EL PRIMER JUGADOR QUE SE QUEDE SIN CARTAS.

Para ser un ganador....

. Es conveniente que conozcas bien tus cartas. Ordénalas de menor a mayor.

. Si puedes completar a 15 de varias maneras, la mejor jugada es la que te quite más cartas. En el ejemplo: el segundo jugador lo hubiera hecho mejor completando a 15 con las cartas 3, 3 y 5, en lugar de hacerlo con las 4 y 7.

. Cuando coloques tu carta, procura poner la más alta posible.

Así haces más difícil la jugada del siguiente y en cualquier caso es bastante probable que pueda poner menos cartas para completar a 15.

Si juegas a completar a 15

Además de divertirte, sumarás cada vez más rápido y sin equivocarte.

BIBLIOGRAFIA

(1) "El juego educativo".- O. Decroly y E. Monchamp. Ed. Morata. Madrid 1986.

(2) "Juego y aprendo matemáticas".- M.P. Bujanda y A.M. de la Fuente. Madrid 1988.

ANECDOTARIO

EL PROBLEMA, 3x + 1

Sea N^+ el conjunto de los enteros positivos, para $x \in N^+$ ponemos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{2} & \text{si } x \text{ impar} \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ par} \end{cases}$$

Existe la siguiente conjetura, llamada "conjetura $3x+1$": "Para todo $x \in N^+$, existe un i, tal que $f^i(x) = 1$, en donde f^i indica la i-ésima iterada de la función f.

El problema $3x+1$, también es conocido como: problema de Collatz, problema de Kakutani, algoritmo de Hasse y problema de Ulam. El problema $3x+1$, está considerado como extraordinariamente difícil y, en este sentido, se le compara con la célebre conjetura de Fermat. Paul Erdös, refiriéndose al problema $3x+1$, comentaba: *"La Matemática no está preparada para este tipo de problemas"*. A pesar del pesimismo de Erdös, el estudio del problema $3x+1$, ha sido lucrativo; han surgido interesantes conexiones del problema con:

a) Las aproximaciones diofánticas de $\log_2 3$.

b) La distribución (mod 1) de la sucesión $\{(3/2)^k: k = 1,2,...\}$.

c) Cuestiones de teoría ergódica sobre los enteros de Z_2.

d) La teoría de computabilidad.

El problema $3x+1$, conocido desde hace años por la comunidad matemática mundial, no es de origen claro. Generalmente se le atribuye a Lothar Collatz, hacia 1930, en su época de estudiante en Hamburgo, cuando estuvo interesado en la iteración de funciones de la Teoría de Números y sus correspondientes grafos, pero Collatz no publicó nada relacionado con la iteración de funciones. El problema $3x+1$, se dió a conocer en el Congreso de Matemáticas de Cambridge, Masachusetts, en el año 1950. En el tiempo transcurrido, el problema $3x+1$ ha sido bautizado con varios nombres. H. Hasse, colega de Collatz, se ocupó del problema $3x+1$ y sus generalizaciones, lo que dió lugar al "algoritmo de Hasse". El nombre de "problema de Syracusa" fué propuesto por Hasse durante su visita a la Universidad de Syracusa en el año 1950. Hacia el año 1960, S. Kakutani conoció el problema, se interesó por él, lo propagó y comenta: *"durante un mes, todo el mundo en Yale trabajó, sin éxito, en el problema 3x + 1, y lo mismo sucedió cuando lo dí a conocer en la Universidad de Chicago".* Lo anterior explica que haya quien lo denomine "problema de Kakutani". En los Alamos el difusor del problema fué S. Ulam y, por ello, en algunos círculos, se le denomina "problema de Ulam".

En los diez últimos años, revistas y libros han difundido el problema $3x+1$ y su calidad de problema abierto.

Se han ofrecido varios premios por la solución del problema $3x+1$; en 1970, H.S.M. Coxeter ofreció 50 dólares, algo después, P. Erdös ofrecía 500 dólares y más recientemente B. Thwaites prometía 1000 libras.

Las personas interesadas pueden encontrar abundante bibliografía en: J.C. Lagarias, "The 3x + 1 Problem and its Generalizations", Amer.Math.Monthly, 92 (1985), 3-23.

J. Lobo

EL ULTIMO TEOREMA DE FERMAT

Por Juan Lobo

El pasado mes de Marzo se difundió la noticia de la resolución del último teorema de Fermat por el matemático japonés, de 38 años, Yoichi Myayoka, profesor invitado en el Instituto matemático Max-Planck de Bonn. La noticia fué acogida con el natural alborozo por la gran familia matemática, pues suponía la vitoria final en el desafío planteado a los matemáticos por Fermat, hace tres siglos y medio. Inmediatamente se crearon comités para el estudio de la demostración en las más importantes Universidades del mundo. A principios de Abril, circuló el rumor de que la demostración tenía alguna laguna, y, en el momento actual, finales de Abril, parece totalmente confirmado el rumor, así como los esfuerzos de los citados comités para subsanar la laguna. Según mi información, la demostración de Myayoka se basa en una desigualdad, aplicable asintóticamente a potencias, deducida utilizando los métodos empleados en Geometría Diferencial para el estudio de superficies.

En el momento actual, por una parte, tras la aportación efectuada en los últimos años por Falting, comentada en el Boletín nª 16, y por otra, por la comprobación hecha, mediante calculadoras, de que la conjetura es cierta para todo $n < 125\ 000$, no sería extraño que llegara la demostración definitiva del último teorema de Fermat. ¡Ojalá en el próximo Boletín podamos darle la bienvenida!

Fermat leyendo la traducción de la Arithmetika de Diophantus, en la página que trata el problema de la determinación de todos los números pitagóricos, soluciones de la ecuación (1) en el caso $n = 2$, al margen escribió su conjetura:

$$x^n + y^n = z^n \; ; \quad n \in N \quad \text{y mayor que 2} \qquad (1)$$

no tiene soluciones con x, y, z, enteros racionales, $x \cdot y \cdot z \neq 0$ y añadió, *"he descubierto una demostración, verdaderamente notable de este teorema, pero no cabe en este estrecho margen".*

Para valores pequeños de n, la conjetura fué demostrada hace largo tiempo: para n = 3 por L. Euler (1770), para n = 4 por el propio Fermat y Euler, para n = 5, por Legendre (1825) y para n = 7, por G. Lamé (1839). S. Germain y Legendre aportaron resultados para otros valores de n, pero los más valiosos fueron logrados por Kümmer en sus célebres trabajos, publicados en los años 1850 y 1857. Siguiendo el camino emprendido por Kümmer, las contribuciones más importantes las realizaron: Mirimanov (1905), A. Wieferich (1909), H.S. Vandiver (1929, 1934), J.B. Roser (1940, 1941).

LA CURIOSA HISTORIA DE ......

Por Mariano Martínez Pérez

I. UN PEQUEÑO ERROR DE IMPORTANCIA

Se sabe que Leibniz desarrolló sus ideas básicas sobre el cálculo infinitesimal a finales de octubre y principios de noviembre de 1675. Fué entonces cuando extendió al caso de una variable "continua" la idea de las diferencias primeras de una sucesión "discreta" $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, que tan útiles le habían sido para sumar series numéricas. Ahora bien, para que las diferencias primeras (o "diferenciales") de los "sucesivos" valores de la variable continua no entrasen en excesiva contradicción con el carácter esencial de "variación continua", es decir "lisa" de dicha variable, Leibniz se vió obligado a admitir que los "saltos sucesivos" o "diferenciales" de una tal variable continua deberían ser números dx, dy, dz, etc. "infinitamente pequeños". Pero ¡lástima!, tales animales, como le pasa al unicornio, sencillamente no existen.

Leibniz propuso entonces tratar a tales "infinitésimos" como números nuevos, "ideales", que se utilizarían en los cálculos pero que no aparecerían en los resultados finales. Sin embargo, tal solución de compromiso estaba llena de dificultades y nunca llegó a satisfacerle por completo desde el punto de vista de los fundamentos, digamos "metafísicos", del nuevo cálculo, y así, cuando en 1684 (¡después de nueve años de dudas, nada menos!) se decide a publicar en el número de octubre del Acta Eruditorum lo que iba a ser la primera publicación en el mundo sobre el cálculo diferencial, en su artículo titulado "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationale quantitates moratur, et singulari pro illis calculi genus", (Acta Euroditorum, octubre 1684, págs. 466-473), cambia Leibniz totalmente de idea y decide definir las diferenciales de una manera sorprendente, al estilo "moderno" y con toda la corrección formal exigible, eliminando por completo los temidos "infinitésimos", de la manera siguiente, en la que sólo modernizamos un poco la notación utilizada:

Sea la función $y = f(x)$ y el valor $x = a$. Sea PM la tangente a la curva en el punto P de coordenadas $(a, f(a))$, (figura 1).

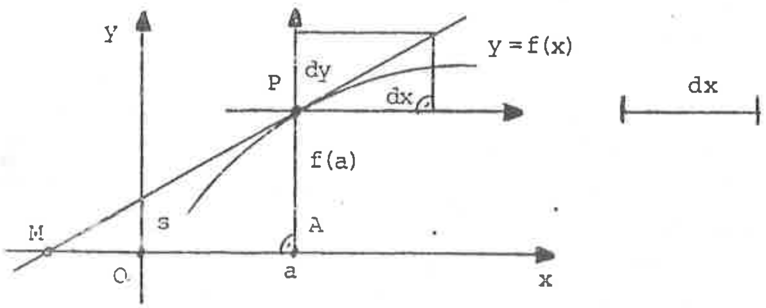


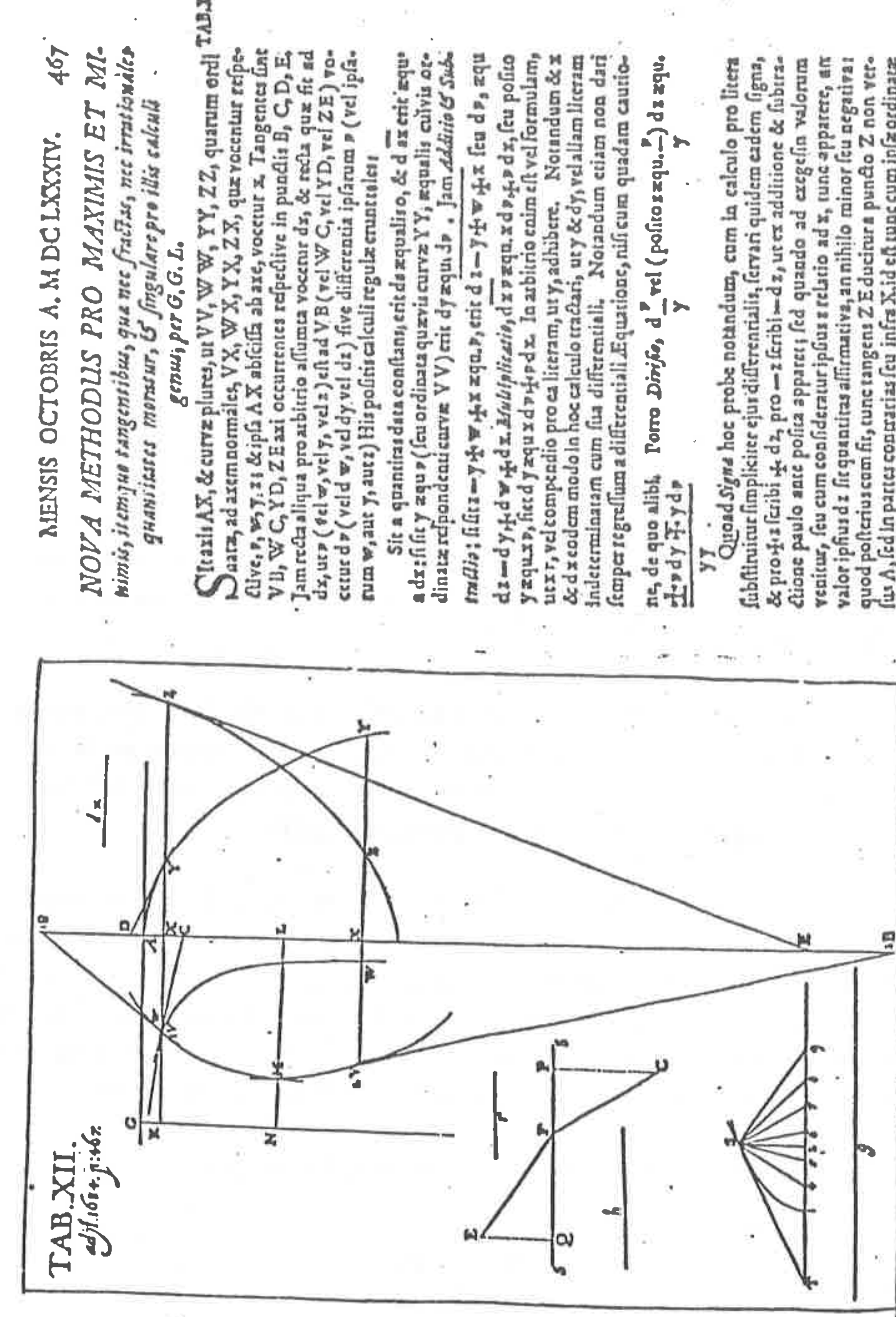
FIGURA 1

Sea dx un segmento cualquiera; entonces dy (para $x = a$ y para el dx tomado) será el segmento tal que

$$\frac{PA}{MA} = \frac{dy}{dx}$$

Esto es, más o menos, lo que Leibniz deberla haber escrito. **Sin** embargo, no fué así, y tal como se puede ver en la reproducción sigue del comienzo del artículo en el Acta Eruditorum, las cosas están sensiblemente (y gravemente) cambiadas (figura 2).

La traducción del comienzo del artículo (sin la figura adjunta), es la siguiente:



MENSIS OCTOBRIS A. M DC LXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dw, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d $\overline{ax}$ erit æqu. a dx: si sit y æqu v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*; si sit z − y + w + x æqu. v, erit d $\overline{z - y + w + x}$ seu dv, æqu dz − dy + dw + dx. *Multiplicatio*, d $\overline{xv}$ æqu. x dv + v dx, seu posito y æqu. xv, fiet dy æqu x dv + v dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro + z scribi + dz, pro − z scribi − dz, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ z decre-

Nnn 3

FIGURA 2

NUEVO METODO PARA LOS MAXIMOS Y MINIMOS, y para las tangentes, que no se ve obstaculaizado ni por las cantidades fraccionarias ni por las irracionales, así como un notable tipo de cálculo para ellos.

Sea un eje AX dado y varias curvas tales como VV, WW, YY, ZZ, cuyas ordenadas normales al eje, VX, WX, YX, ZX llamaremos v, w, y, z respectivamente, mientras que a la abscisa misma AX según el eje, la llamaremos x. Sean VB, WC, YD, ZE las tangentes, que cortan al eje en los puntos B, C, D, E respectivamente. Tomemos, por otra parte, una cierta recta arbitraria a la que llamaremos dx, y a la recta que sea a dx como (ó w, ó y, ó z) <u>es a VB</u> (<u>ó WC, ó YD, ó ZE</u>) la llamaremos dv (ó dw, ó dy, ó dz) o bien la diferencia de estas mismas v (o de las mismas w, o de las y, o de las z). Supuesto todo esto así, las reglas del cálculo serán las siguientes. (Subrayado nuestro; véase más adelante).

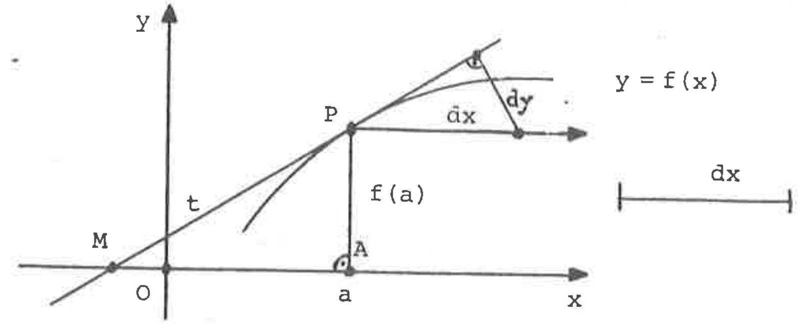
Y a continuación siguen las fórmulas de diferenciación de una constante, una función lineal, una suma o diferencia de variables, un producto, un cociente, una potencia, una raíz, etc., todas ellas correctas pero <u>sin demostraciones</u>.

Tal como habíamos anunciado, la definición de diferencial de una función es errónea. La frase que hemos subrayado debería decir, para ser correcta, <u>"es a XB (ó XC, ó XD, ó XE)"</u>. Con la definición tal como aparece en las líneas reproducidas, el segmento que Leibniz llama dy, para un punto concreto x = a y un dx dado, es el que aparece en la figura 3 (página siguiente).

Es decir, verificando la condición de que

$$\frac{PA}{PM} = \frac{dy}{dx}$$

que no es, ciertamente, lo que <u>"tenía que ser"</u> dy.



<u>FIGURA 3</u>

¿Se trataría quizás de una miserable errata sin importancia, achacable al tipógrafo de la revista? Así podría suponerse si sólo afectase a una de las cuatro curvas simultáneamente en escena (que, por cierto, más que contribuir a aclarar la situación la lían bien liada) pero que <u>el mismo error</u> se repita en las cuatro resulta una casualidad prácticamente imposible. No puede uno menos que pensar que el error tenía que estar ya tal cual en el manuscrito de Leibniz, cosa que viene a apoyar el considerable descuido con que está escrito todo el artículo.

Bien, en cualquier caso parece, ciertamente, "un pequeño error"; pero ¿por qué tuvo tanta "importancia"?

El hecho fué que los discípulos y admiradores de Leibniz entre los que hay que situar en primerísimo lugar a los hermanos Jakob y Johann Bernoulli, se dispusieron con gran entusiasmo a aprender y tratar de dominar las finuras del "<u>Nuevo Método</u>" a partir de las fuentes directas del maestro.

¡Gran desilusión! En las primeras líneas se definían lacónicamente las diferenciales, sin motivación alguna y en términos aparenemente arbitrarios e ininteligibles (aunque, en principio, correctos, como sabemos hoy), y además <u>se definían mal</u>, con un grave error, ya de entrada. Obviamente los Bernoulli no podían consultar el Apóstol o el Spivak para detectar el error. Pero aún había más. A continuación inmediatamente venían, como hemos dicho las reglas de diferenciación, tales como:

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$$

$$d\,\frac{u}{v} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

$$d(u^n) = n\,u^{n-1} \cdot du$$

etc., todas ellas sin demostración. Y lo peor de todo era que los Bernoulli lógicamente no conseguían entender de dónde salían tales y tan sencillas fórmulas, utilizando la definición anterior de diferencial.

La explicación de la aparente incongruencia es sencilla: Leibniz había obtenido todas esas fórmulas utilizando la idea original y "vergonzante" (¡pero útil!) de diferencial "infinitamente pequeña", de la manera trivial, prescindiendo de los "infinitésimos de orden superior":

$$d(uv) = (u+du)\,(v+dv) - uv =$$

$$= uv + u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv - uv =$$

$$= u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv$$

y como $du \cdot dv$ es infinitamente pequeño frente a $u \cdot dv$ y a $v \cdot du$, entonces podemos poner

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$$

y así todas las demás.

Realmente, el famoso artículo de Leibniz es, todo hay que decirlo, uno de los mejores ejemplos que se pueden poner a

lo largo de toda la historia de la matemática, de artículo mal escrito.

Para completar la historia, es necesario decir que Leibniz mismo corrigió, muy de pasada, el error en la definición de diferencial, pero en 1695 (¡once años después!), en otro artículo en el Acta Eruditorum dedicado en principio a responder a las objecciones formuladas por Bernard Nieuwentyt. Dice allí Leibniz, refiriéndose al "Nova Methodus" del Acta Euroditorum de octubre de 1684:

> *"Hay allí un error a corregir, error que se deslizó por culpa de no se qué negligencia, de manera que, en vez de las partes XD, XB, XC, XE interceptadas en el eje, aparecen equivocadamente las partes de las tangentes VD, VB, WC, ZE, corrección que ya se venía a sugerir en realidad en la página 470".*

-¡Ay, don Godofredo, don Godofredo ....!

LA CURIOSA HISTORIA DE ......

Por Mariano Martínez Pérez

II. LOS CEREBROS DE LOS PROFESORES DE MATEMATICAS

Cuenta Howard Eves, en el "grado" 205 de su libro "Mathematical Circles Revisited, la siguiente y divertida historia de ciencia-ficción, que traducimos y adaptamos un poco.

Había una vez, muy avanzado ya el siglo XXI, un cirujano neurólogo que había inventado una maravillosa técnica, totalmente segura, para trasplantar cerebros, de tal manera que podía cambiarle a una persona su cerebro por cualquier otro tipo de cerebro que desease. Lógicamente, y en buena economía de mercado, los diferentes tipos de cerebros en oferta costaban distintos precios.

Un buen día se le presentó al cirujano un cliente pidiéndole que le cambiara el cerebro.

-"Muy bien", dijo el médico, "¿qué tipo de cerebro le gustaría a usted tener? Los hay de varios precios. Por ejemplo, el cerebro de un abogado le costaría a usted a 1.000 pesetas los cien gramos, mientras que el de un juez a 5.000 pesetas los cien gramos, y así van subiendo los precios".

-"¡Oh, no!, esos tipos de cerebros no me gustan nada", contestó el paciente, "lo que me gustaría es tener el cerebro de un profesor".

-"¡Ah, ya entiendo; a usted le gustan las cosas caras!", replicó el cirujano. "Verá, el cerebro de un profesor de Lengua y Literatura le vendrá a costar a razón

de 10.000.000 de pesetas los cien gramos; en cambio, los cerebros de los profesores de Historia están ya a 20.000.000 de pesetas los cien gramos. Así que, dígame qué tipo de cerebro de profesor desearía usted que le pusiese".

-"Me gustaría el cerebro de un profesor de Matemáticas", afirmó el paciente.

-"¡Vaya, vaya!, veo que le gustan a usted las cosas realmente exquisitas y carísimas", dijo el médico, "ésos son los cerebros más caros de todos; están a 100.000.000 de pesetas los cien gramos".

-"¡Es increíble!", replicó el paciente, "por qué tienen que ser tan caros? Si el cerebro de un buen abogado sólo cuesta a 1.000 pesetas los cien gramos, y el de un honorable juez vale a 5.000 pesetas los cien gramos, ¿por qué tiene que costar a 100.000.000 de pesetas los cien gramos el cerebro de un profesor de Matemáticas?".

-"¡Oh!, eso tiene una explicación muy sencilla, y lo entenderá usted enseguida", dijo el médico, "¿se da usted cuenta de la cantidad de matemáticos que se necesitan para reunir tan sólo cien gramos de cerebro?".

LA CURIOSA HISTORIA DE ......

Por Mariano Martínez Pérez

III. UN EXCELENTE CONSEJO PEDAGOGICO

"Lisez Euler, lisez Euler; c'est le maître à tous nous".

P.S. Laplace.

Leonhard Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basel, Suiza, hijo de Paul Euler, pastor protestante (calvinista) y graduado en teología por la Universidad de Basel, donde también había estudiado matemáticas elementales con Jakob Bernoulli. Leonhard Euler estudió por su cuenta durante varios años el difícil libro del "Algebra" de Christoff Rudolf (en la vieja edición de Stifel, de 1553), y mientras estudiaba en el Gymnasium local recibió clases particulares de matemáticas. En 1720, tras haber pasado la mayor parte de su infancia en el campo, ingresa Euler en la Facultad de Artes de la Universidad de Basel. Esta Universidad era entonces pequeñísima: ¡poco más de cien estudiantes y diecinueve profesores! En ella enseñaba la matemática elemental Johann Bernoulli, que había ocupado la cátedra a la muerte de su hermano Jakob en 1705. Johann Bernoulli daba, además de sus clases regulares, clases particulares de matemáticas y física más avanzadas para los que así lo deseasen (¡los sueldos de siempre en la enseñanza!).

Euler nos cuenta, en la breve autobiografía que dictó, ya casi completamente ciego, a su hijo mayor, en 1767, al año siguiente de su regreso a San Petersburgo desde Berlín:

"Pronto encontré la oportunidad de ser presentado a un famoso profesor, llamado Johann Bernoulli .... En realidad él estaba muy ocupado, y así rehusó de plano darme lecciones particulares, pero me dió en cambio consejos mucho más valiosos para comenzar a leer por mi propia cuenta libros de matemáticas más difíciles, y estudiarlos con toda la diligencia que pudiera; si me encontraba con algún obstáculo o dificultad, tenía permiso para visitarle con plena libertad todos los sábados por la tarde, y él me explicaba entonces amablemente todo lo que yo no consiguiera entender ...... y éste es, sin duda, el mejor método para tener éxito en el estudio de temas matemáticos". (Subrayado mío).

¡Hay que imaginarse al joven Leonhard peleándose duramente a lo largo de toda la semana con las dificultades que se le presentaban en sus estudios matemáticos, para tratar de llegar al sábado con el menor número posible y sólo las más importantes, después de resolver por sí mismo la mayoría de ellas!

Creo que bien vale la pena reflexionar un poco sobre la afirmación que hemos subrayado, tan clara y tan directa, del viejo Euler.

Efectivamente, la enseñanza usual de la matemática viene a consistir en aclarar dificultades antes de que tales dificultades se le presenten al alumno de una manera natural, antes de que las sienta como dificultades suyas propias y no fingidas o simuladas.

Una aclaración o explicación de una dificultad sólo adquiere su sentido por la luz que arroja sobre la región en sombra de lo que no se consigue entender, lo cual exige sin remedio, precisamente, el esfuerzo previo por entenderlo. Sin él, la aclaración más diáfana carecerá de sentido casi por completo.

Yo estoy convencido de que buena parte de la sensación de fracaso con que se vive a menudo la enseñanza, proviene de incumplir sistemáticamente esta ley pedagógica tan trivial y tan básica, sobre todo en el caso de los niveles de enseñanza razonablemente avanzados, y en la Universidad de una manera muy especial.

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTROS BOLETINES Y DE AQUELLOS PARA LOS QUE TODAVIA NO SE HAN RECIBIDO SOLUCIONES (INDICADOS CON XX)

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números										obs.
		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2 1984	XX	XX	XX	XX	18	XX	XX	XX	-	-	
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finl^{a})	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-86(Bogotá)	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2 1986	18	XX	XX	18	XX	XX	-	-	-	-	
	Varios	-	-	-	-	-	-	17	17	11	17	C
10	China y Aust^{a}	XX	15	XX	XX	15	XX	XX	XX	XX	-	*
11	OME-f1 1986	13	14	14	14	14	XX	XX	15/	XX	12	
	OMI-86(Varso^{a})	XX	XX	12	XX	-	-	-	-	-	-	*
12	OIM-87(Urug.)	16	14	14	17	15	17	-	-	-	-	C
	OME-f1-Extrem^{a}	-	-	-	-	-	-	15	15	15	XX	
13	OME-f2 1987	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	18	18	18	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
16	OME-f1 1987	XX	XX	XX	18	XX	XX	XX	XX	-	-	
17	OME-f2 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
18	OIM-Perú 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OME = Olimpiada Matemática Española - fase 1^{a} o 2^{a}.

Obs. C = Completada la publicación de soluciones
* = Esperamos especialmente de nuestros socios el envío de soluciones a estos problemas señalados con XX .

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA III OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS CELEBRADA EN LIMA (PERU), DURANTE LOS DIAS 20 DE ABRIL A 1 DE MAYO DE 1988

PROBLEMA 1ª

Las medidas de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y las longitudes de las alturas del mismo triángulo también están en progresión aritmética.

Demuestre que el triángulo es equilátero.

PROBLEMA 2ª

Sean a, b, c, d, p y q números naturales no nulos que verifican

$$ad - bc = 1 \quad y \quad \frac{a}{b} > \frac{p}{q} > \frac{c}{d}$$

Demuestre:

i) $q \geq b + d$.
ii) Si $q = b + d$ entonces $p = a + c$.

PROBLEMA 3ª

Demuestre que entre todos los triángulos cuyos vértices distan 3, 5 y 7 de un punto dado P, el que tiene mayor perímetro admite a P como su incentro.

PROBLEMA 4ª

Sea ABC un triángulo cuyos lados son a, b, c. Se divide cada lado del triángulo en n segmentos iguales. Sea S la suma de los cuadrados de las distancias de cada vértice a cada uno de los puntos de división del lado opuesto distintos de los vértices.

Demuestre que $\dfrac{S}{a^2 + b^2 + c^2}$ es un número racional.

PROBLEMA 5ª

Considere las expresiones de la forma $x + yt + zt^2$ con x, y, z números racionales y $t^3 = 2$.

Demuestre que si $x + yt + zt^2 \neq 0$, entonces existen u, v y w racionales tal que $(x + yt + zt^2).(u + vt + wt^2) = 1$.

PROBLEMA 6ª

Considere los conjuntos de n números naturales diferentes de cero en los cuales no hay tres elementos en progresión aritmética.

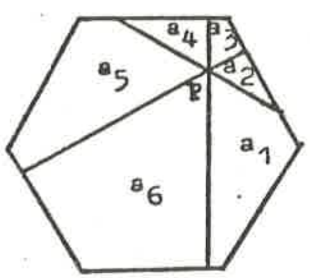
Demuestre que en uno de esos conjuntos la suma de los inversos de sus elementos es máxima.

= = = = = = =

C O R R I G E N D A

En el enunciado del PROBLEMA 6° DEL BOLETIN N° 16, donde dice $\boxed{a_1+a_2+a_3 =}$, debería decir $\boxed{a_1+a_3+a_5 =}$ y donde dice $\boxed{a_1+a_2+a_3\ ?}$, también $\boxed{a_1+a_3+a_5\ ?}$.

Esta es la fotocopia del enunciado tal como se propuso en la Primera fase de la O. M. E. de 1987:



6.- Un exágono regular de área a se descompone en seis partes trazando por un punto P interior rectas perpendiculares a los lados del exágono. Numeramos estas partes correlativamente en sentido antihorario, y llamamos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a sus áreas. ¿Para que puntos se cumple que $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6$? ¿Entre que valores puede variar $a_1 + a_3 + a_5$?

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 5° del Boletín n°3:

Llévense arcos iguales $AB = A'B' = x$ sobre dos circunferencias iguales a partir de sendos puntos A y A' fijos en ellas.

Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos BB' al variar x:

1°. Cuando los arcos se llevan en igual sentido.

2°. Cuando se llevan en sentidos opuestos.

Solución:

Se pretende obtener un lugar de puntos afectados conjuntamente por giros y proporcionalidad. Facilita la operatividad la aplicación de una primera traslación que superponga las circunferencias dadas (en la que se analiza y resuelve la obtención de puntos) y, luego, se restituyen las soluciones a la posición definitiva mediante otra segunda traslación, de sentido contrario y conforme a la proporción propuesta (*).

Sean ,c,c', las circunferencias (fig.1), de radio R, centros 0,0' y A,A' los puntos dados, cuyos respectivos radios forman sendos ángulos α, α' con la recta de los centros.

En la primera traslación $\overrightarrow{O'O}$, A" es homólogo de A', y al arco AA" le corresponde un ángulo δ, tal que $\delta = \alpha + \alpha'$, al que se denominará "ángulo de desfase".

a) Supuesto inicial (fig.2).

Si $x = 0$, el primer punto del lugar es M, medio de A'A. Para situarlo basta tener en cuenta que el punto M', medio de la cuerda AA", es el pié de la altura de un triángulo isósceles AOA", cuyo ángulo desigual es el de desfase.

Así pues, M resulta de aplicar la segunda traslación $\overleftarrow{M'M}$, de sentido contrario a la primera, tal que $M'M = 1/2\,(OO')$, ya que los triángulos AA'A" y AMM' son semejantes, de razón = 1/2 y $A"A' = OO'$.

a1) Supuesto 1°. Cuando los arcos se llevan en igual sentido (fig.3).

Para cualquier valor de x, los arcos iguales AB y A'B' tienen por ángulo β. En la primera traslación se obtiene un triángulo BOB" isósceles igual al del supuesto inicial con el mismo ángulo δ de desfase, pero afectado por un giro, de ángulo β y centro O, luego el pié M_1' de su altu-

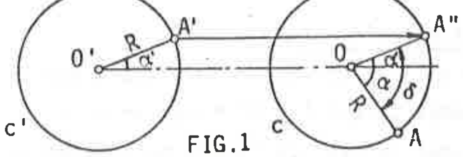


FIG.1

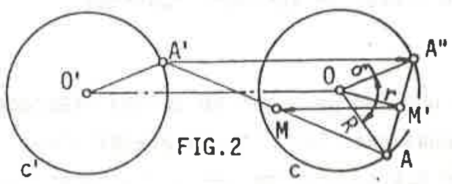


FIG.2

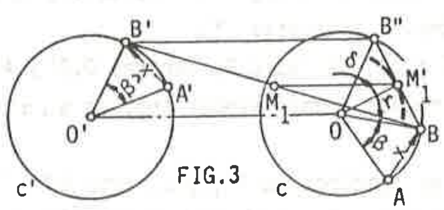


FIG.3

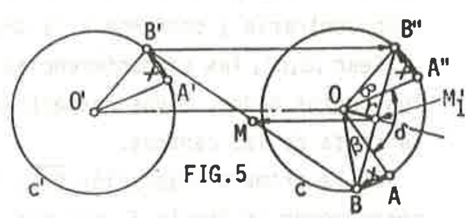


FIG.5

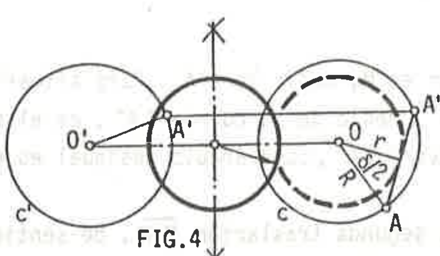


FIG.4

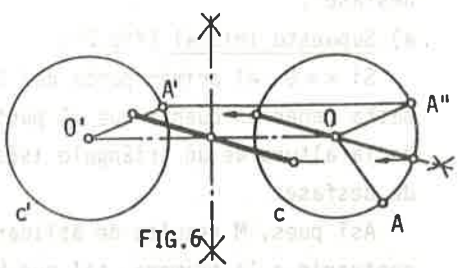


FIG.6

ra r constante describe una circunferencia (concéntrica de c) cuando varía x , a la que aplicándole la segunda traslación (fig. 4), $M'M = M'_1 M_1 = 1/2\ (O\,O')$, proporciona la solución.

Discusión.

Caso del lugar del punto medio situado a (B'B)/2:

$r = R\cdot\cos(\delta/2)$

Si $\delta = 0$, entonces $r = R$ y $B'B = $ cte.(bielas de tracción de locomotoras).

Si $\delta = 180°$, " $r = 0$, el lugar es el punto medio de O'O.

Caso del lugar del punto situado a (B'B)/n ó bien a (B'B)·n

Se obtienen nuevas circunferencias solución aplicando análogo procedimiento (compruébese).

a2) Supuesto 2°. Cuando los arcos se llevan en sentidos opuestos (fig.5).

Para cualquier valor de x , en la primera traslación se obtiene un triángulo B O B" isósceles, cuyo ángulo desigual puede variar de 0° a 360°, con lo que su altura , r , varía de $r = 0$ a $r = \pm R$, pero permanece sobre la bisectriz de δ , luego el lugar (constituido por todos los piés, M'_1, de la altura de los posibles triángulos B O B" isósceles que pueden construirse variando x) es un segmento que pertenece a la bisectriz de δ y tiene longitud igual al diámetro de c . La segunda traslación (fig.6) transporta dicho segmento a la posición de solución, de forma que su punto medio coincide con el de O'O.

Discusión.

Caso del lugar del punto medio situado a (B'B)/2:

La inclinación del segmento solución, respecto de la recta de los centros, es la misma que la de la bisectriz del ángulo δ de desfase y depende, por tanto, de la posición inicial de A y A'.

Caso del lugar del punto situado a (B'B)/n ó bien a (B'B)·n

Se obtienen elipses por procedimiento análogo (compruébese, justifíquese y discútase su excentricidad).

(*) Si las circunferencias dadas no fuesen iguales, la primera traslación las convertiría en concéntricas (entonces podría plantearse el problema, p.ej., animando a los puntos con velocidades angulares iguales).

D.Corbella

PROBLEMA 1 (Boletín nª 9)

Es sabido que si x es un número real, se llama parte entera de x, E(x), al entero m que cumple $m \leq x < m+1$, y mantisa de x, m(x), a la diferencia $x - E(x)$. Llamaremos ahora "distancia entre dos números reales x,y al valor de

$$\sqrt{(E(x) - E(y))^2 + (m(x) - m(y))^2}$$

Determinar (como unión de intervalos) el conjunto de los números reales que "distan" del número $\frac{3}{2}$ menos de $\frac{202}{100}$.

Solución

Sea D el conjunto de todos los x tales que

$$d(x, \tfrac{3}{2}) = \sqrt{[E(x) - 1]^2 + [m(x) - 0'5]^2} < 2'02$$

es decir que:

$$[E(x) - 1]^2 + [m(x) - 0'5]^2 < 4'0804$$

Es claro que debe ser

$$0 \leq [E(x) - 1]^2 \leq 4 \Longrightarrow -2 \leq E(x) - 1 \leq 2$$

y por lo tanto

$$-1 \leq E(x) \leq 3$$

Si $E(x) = 0$, es claro que $x \in D$ independientemente de m(x), así pues, $[0, 1) \subset D$.

Si $E(x) = 1$, $x \in D$ independientemente de m(x), luego $[1, 2) \subset D$.

Si $E(x) = 2$, es claro que $[2, 3) \subset D$.

Si $E(x) = -1$, entonces debe ser $4 + [m(x) - 0'5]^2 < 4'0804$, o sea $[m(x) - 0'5]^2 < 0'0804$. Si $\alpha = \sqrt{0'0804} < 0'5$ debe ser $-\alpha + 0'5 \leq m(x) < \alpha + 0'5$, y por lo tanto $(-0'5 - \alpha, 0'5 + \alpha) \subset D$.

Si $E(x) = 3$ razonando de igual forma se obtiene que $x \in (3'5 - \alpha, 3'5 + \alpha) \subset D$.

Así pues el conjunto buscado es:

$$D = (-0'5 - \alpha, -0'5 + \alpha) \cup [0, 3) \cup (3'5 - \alpha, 3'5 + \alpha)$$

siendo

$$\alpha = \sqrt{0'0804}$$

José Pablo Sánchez Mielgo
Alcorcón (Madrid).

Recibida otra solución de F. Lorenzo.

- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 4 (Boletín nª 9)

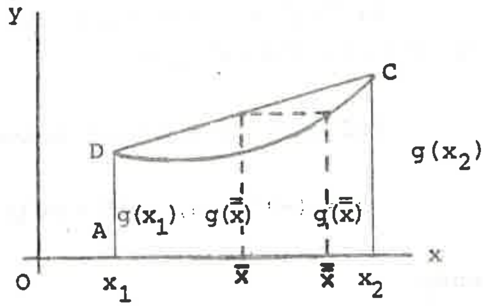
Además de la media aritmética $\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$, se define la media $\bar{\bar{x}}$ relativa a la función g mediante

$$2g(\bar{\bar{x}}) = g(x_1) + g(x_2)$$

donde g es una función real positiva que tiene sus dos primeras derivadas positivas. Se pide ordenar razonablemente los números $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$.

Solución

El número $\bar{x}$, ex como se sabe, el punto medio del intervalo (x_1, x_2). Puesto que las dos primeras derivadas de g son positivas, la función g es creciente y convexa (véase la figura adjunta); luego $g(\bar{\bar{x}})$ es la paralela media del trapecio rectángulo ABCD. En consecuencia es $\bar{x} < \bar{\bar{x}}$.



F. Lorenzo

PROBLEMA 1ª (Boletín nª 15)

Sea S un conjunto de n elementos y sea $p_n(k)$ el número de las permutaciones de S que tienen k puntos fijos. Demuestre que:

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!$$

Solución

Para obtener una permutación de S que tenga n-k puntos fijos, debemos escoger un subconjunto de n-k puntos (los fijos) y entre los k restantes hacer una permutación que no deje ninguno fijo, por tanto:

$$p_n(n-k) = \binom{n}{n-k} p_k(0) = \binom{n}{k} p_k(0)$$

Es evidente que,

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1}(k) = (n-1)!$$

entonces,

$$(n-1)! = \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1}(n-1-k) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p_k(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} \binom{n}{k} p_k(0) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{k} p_k(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, p_n(n-k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k)$$

y de esta cadena de igualdades se deduce:

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!$$

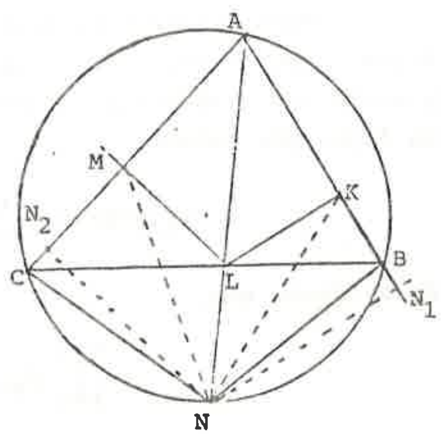
Fernando Chamizo Lorente
(3ª de C. Matemática de la U. Autónoma de Madrid).

PROBLEMA 2ª (Boletín nª 15)

La prolongación de la bisectriz AL del triángulo acutángulo ABC interseca en el punto N a la circunferencia circunscrita al triángulo. Desde el punto L se trazan las perpendiculares LK y LM a los lados AB y AC respectivamente. Probar que el área del triángulo ABC es igual al área del cuadrilátero AKNM.

Solución

Sean N_1, N_2 las proyecciones ortogonales de N sobre AB y AC; se puede suponer $|AB| < |AC|$ (si no permutaríamos B y C) para que $B \in AN_1$.



Por ser AN bisectriz:

$$ML = LK \Longrightarrow AK = AM,$$

$$MN = KN \Longrightarrow \widehat{AKN} = \widehat{AMN}$$

entonces,

$$S_{AKNM} = 2S_{\widehat{AKN}} = 2\left(\frac{|AK|\ |NN_1|}{2}\right) = |AK|\ \frac{|NN_1|}{|KL|}.|KL| = |AN_1|\ |KL|$$

Por otra parte, por ser un cuadrilátero inscrito

$$\widehat{N_2CN} = 180 - \widehat{ABN}$$

entonces,

$$\widehat{N_1BN} = 180 - \widehat{ABN} \Longrightarrow \widehat{N_2CN} = \widehat{N_1BN}$$

y como $NN_2 = NN_1$, se deduce

$$BN_1 = N_2C$$

Calculemos ahora S_{AKNM}

$$S_{AKNM} = |AN_1|\ |KL| = \frac{|AN_1| + |AN_2|}{2}\ |KL| = \frac{|AN_1| - |BN_1| + |AN_2| + |N_2C|}{2}\ |KL| =$$

$$= \frac{|AB| + |AC|}{2}\ |KL| = \frac{|AB|\ |KL|}{2} + \frac{|AC|\ |KL|}{2} = S_{\widehat{ABL}} + S_{\widehat{ACL}} = S_{\widehat{ABC}}$$

Fernando Chamizo Lorente
(3ª de C. Matemática de la U. Autónoma de Madrid).

- ⊠ ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 3ª (Boletín nª 15)

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$, números reales tales que $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Demuestre que para cualquier valor entero $k > 1$, existen enteros e_i, no todos nulos, con la propiedad de que $|e_i| < k$ y tales que

$$|e_1 x_1 + \dots + e_n x_n| \le \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

Solución

Se puede suponer $x_i \ge 0\ \forall i$ ya que en otro caso basta cambiar el signo de los e_i que multiplican a los x_i negativos.

Si en la desigualdad de Schwichtz, $(\Sigma a_k b_k)^2 \le (\Sigma a_k^2)(\Sigma b_k^2)$ tomamos $a_i = x_i$ y $b_i = 1$, se tiene que

$$\Sigma x_i \le \sqrt{n}$$

Sean $\bar{a}_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$ vectores tales que,

$$0 \le a_i^j \le k-1 \qquad a_i^j \in \mathbb{N}$$

Hay $VR^n_k = k^n$ vectores $\bar{a}_i$; renumerémoslos de manera que:

$$0 \le \bar{a}_1\cdot\bar{x} \le \bar{a}_2\cdot\bar{x} \le \dots \le \bar{a}_{k^n}\cdot\bar{x}$$

donde,

$$\bar{x} = (x_1,\dots, x_n)$$

Se cumple que

$$\bar{a}_{k^n}\cdot\bar{x} \le (k-1)\ \Sigma x_i \le (k-1)\sqrt{n}$$

Sean los vectores $\bar{b}_i = \bar{a}_{i+1} - \bar{a}_i$, entonces tenemos $\bar{b}_i\cdot\bar{x} \ge$ ≥ 0 y además,

$$0 \le \bar{b}_1\cdot\bar{x} + \bar{b}_2\cdot\bar{x} + \dots + \bar{b}_{k^n-1}\cdot\bar{x} = \bar{a}_{k^n-1}\cdot\bar{x} \le (k-1)\sqrt{n}$$

Por tanto existe un m tal que

$$\bar{b}_m\cdot\bar{x} \le \frac{k-1}{k^n-1}\sqrt{n}$$

Si llamamos b^i_m a la i-ésima coordenada de $\bar{b}_m$

$$\bar{b}_m = \bar{a}_{m+1} - \bar{a}_m \Longrightarrow |b^i_m| \le k-1$$

y en estas condiciones basta tomar

$$e_i = b^i_m$$

Fernando Chamizo Lorente
(3ª de C. Matemática de la U. Autónoma de Madrid).

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Problema 4° del Boletín n°16:

Los egipcios aproximaban el área de un círculo de diámetro d del siguiente modo: En cada uno de los cuatro vértices de un cuadrado de lado d, se considera un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos de longitud d/3, se superponen a un tercio del lado del cuadrado. Eliminando del cuadrado estos cuatro triángulos, resulta un octógono (irregular) cuya área se toma como aproximación del área del círculo. ¿Cual es la razón del área del círculo al área del octógono?

Tratemos de hacer algo parecido para una esfera de diámetro d. Dado un cubo de arista d, en tres de cuyas caras de vértice común se han dibujado los octógonos antes mencionados, se consideran tres prismas rectos de bases respectivas dichos octógonos y altura d, contenidos en el cubo. El volumen del cuerpo de intersección de esos tres prismas no es mala aproximación del volumen de la esfera. ¿Cual es la razón del volumen de la esfera al volumen del cuerpo?

Solución:

Para simplificar la descripción de formas se emplearán los siguientes vocablos (no usuales), cuya interpretación es:

"semicuadrado", s, triángulo isósceles que resulta de la partición de un cuadrado por una de sus diagonales, cuya área es mitad de la del cuadrado.

"semicubo", S, prisma triangular que resulta de la partición de un cubo por un plano que contiene un par de aristas paralelas opuestas, cuyo volumen es mitad del del cubo.

"bipirámide", B, cuerpo compuesto por dos pirámides adosadas por su base común, cuyo volumen es igual al tercio del área de dicha base por la altura total (suma de las respectivas alturas de las pirámides).

Primer caso.(fig.1) Polígono (irregular).

Dividido el cuadrado de lado d, en 9 cuadrados iguales, cada uno de superficie = c, y suprimidos los 4 semicuadrados, s, de los vértices, la superficie del octógono resultante puede expresarse como:

$9c - 4s = 9c - 2c = 7c$ y, siendo $c = (d/3)^2$,

Area polígono $= (7/9)d^2$

Así, la relación entre las áreas del círculo y del polígono es

$$(\pi \cdot d^2/4) : (d^2 \cdot 7/9) = (\pi/4) : (7/9) \simeq 1 : 0{,}99029$$

Es decir, la superficie del octógono es menor que la del cículo, con un error aproximado del 1%.

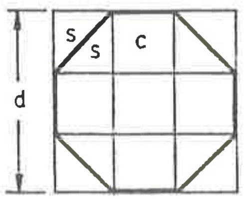


FIG.1

Segundo caso. (fig.2) Poliedro (irregular).

Se parte de un cubo inicial de arista d, seccionado convenientemente para dividirlo en 27 cubos ,C, iguales de arista d/3.

El sólido común a los tres prismas propuestos puede obtenerse achaflanando (truncando) todas las aristas del cubo inicial a 1/3 de d. Así se tiene que el eje ,e, de cada chaflán es paralela media del rectángulo que lo limita y que, po ello, e, pasa por los centros ,E, de las correspondientes caras de los cubos C interceptados por el chaflán.

De lo anterior se infiere que en cada uno de los 8 cubos C situados en los vértices del inicial se obtiene una bipirámide B, de base común J K L (sección típica del cubo) triángulo equilátero, de lado ,f, diagonal de cara de C, de modo que $f = d\sqrt{2}/3$ y el área de J K L es $= f^2\sqrt{3}/4$.

Completan la bipirámide los vértices ,I,V . Uno de ellos ,I, lo es del cubo C y, el otro ,V, es el centro de simetría de dicho cubo (pues los ejes ,e, que concurren en V son paralelos a las aristas y pasan por los centros ,E, de sendas caras). Así que ,IV, es semidiagonal del cubo C y es perpendicular a la sección típica J K L y es asimismo la altura total de la bipirámide, de modo que $IV = 1/2(d\sqrt{3}/3)$.

Ahora, pueden expresarse en función de d los volúmenes siguientes:

volumen del cubo de arista d/3 ,	$C = (d/3)^3$
" " semicubo " " " ,	$S = C/2$
" de la bipirámide ,J K L I V ,	$B = (d/3)^3/4 = C/4$

Si se mantienen las secciones aplicadas inicialmente para subdividir al

cubo de partida y se "estallan" los cuerpos resultantes, se concluye que el volumen total del poliedro está compuesto por:

$$7C + 12S + 8B = 7C + 6C + 2C = 15\,C$$

que expresado en función de d, es:

$$15(d/3)^3 = (15/27)d^3$$

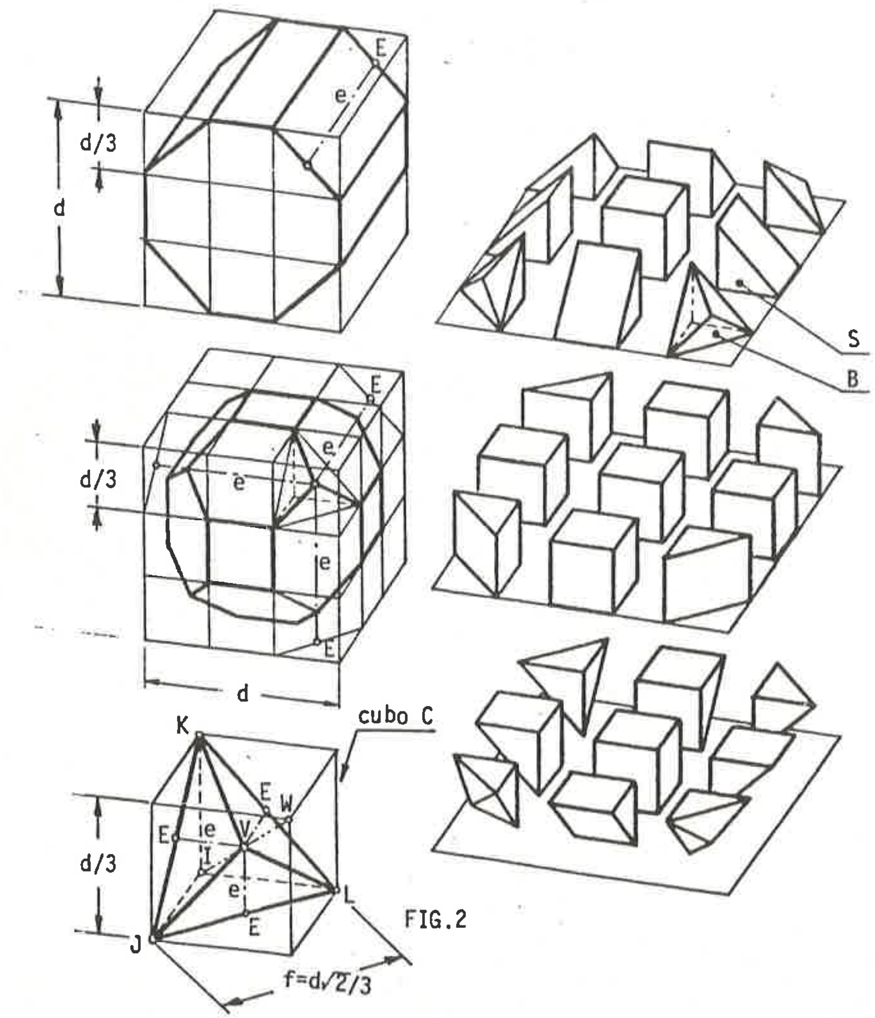


FIG.2

Finalmente, la relación entre los volúmenes de la esfera y del poliedro puede darse como:

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 : \frac{15}{27}d^3 = \frac{\pi}{6} : \frac{15}{27} \simeq 1 : 1{,}06103$$

Es decir, el volumen del poliedro es mayor que el de la esfera, con un error aproximado del 6%.

Observaciones:

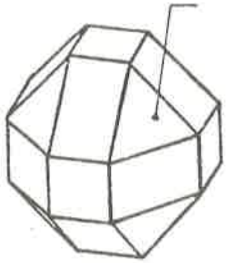


FIG.3

1ª. Si antes de achaflanar las aristas se truncan los vértices del cubo inicial a 1/3 de su arista d, resulta un sólido (fig.3) formado por $7C + 12S + 8P$, siendo P la mayor pirámide de las dos que componen la bipirámide B.
Dado que por este procedimiento se suprime de B la pirámide menor, cuyo volumen es mitad del de la otra (pues la semidiagonal del cubo es interceptada a 1/3 de su longitud por la sección típica), resulta que el volumen de $P = 2/3\,B = C/6$. Así el volumen total del nuevo poliedro es:

$$7C + 6C + (4/3)C = (43/3)C = (43/81)d^3$$

que relacionado con el volumen de la esfera resulta:

$$\frac{\pi}{6} : \frac{43}{81} \simeq 1 : 1{,}01387$$

2ª. Si se toma la mitad de un cubo de arista d, su volumen, $d^3/2$, relacionado con el de la esfera de diámetro d, da una proporción esfera/sólido $\simeq 1 : 1{,}04719$, mejor que la del problema.

D. Corbella