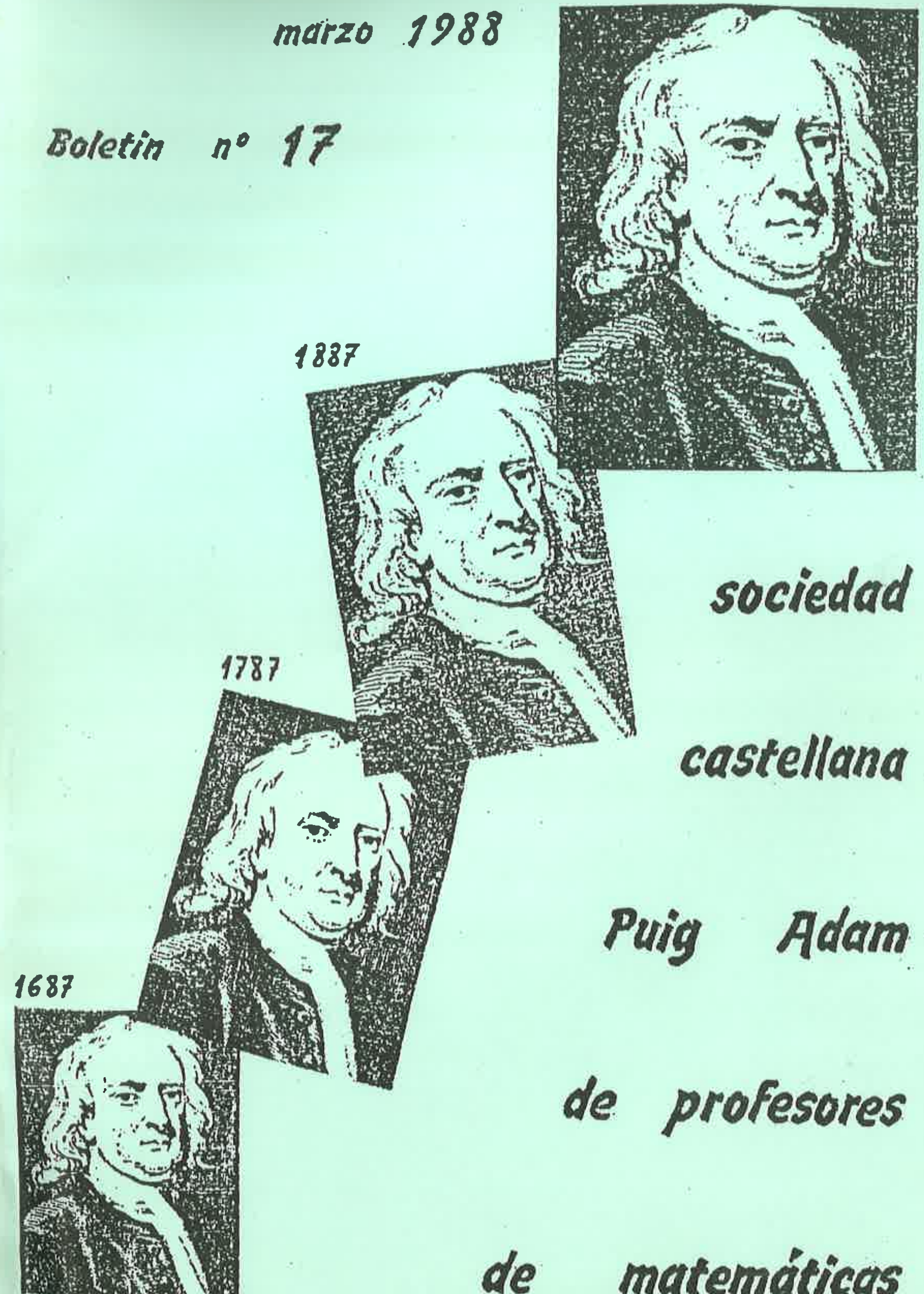
marzo 1988

Boletín nº 17



sociedad castellana Puig Adam de profesores de matemáticas

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Marzo de 1988 nº 17 (1987-88)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en: Ronda de Atocha, 2 (INBAD)

- La correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

FERNÁNDEZ BIARGE, Julio

- La portada recuerda que la figura de Isaac Newton se ha ido agrandando de siglo en siglo. El año pasado se cumplió el tercer centenario de la publicación de sus famosos Principia

VER CONVOCATORIAS

INDICE Pág.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: José Javier Etayo Miqueo

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Vicesecretario: Francisco Quesada Cobo

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

VIDA DE LA SOCIEDAD

La Sociedad va a celebrar próximamente su Asamblea General ordinaria de 1988. Publicamos en esta número del Boletín su convocatoria, y esperamos una nutrida asistencia de nuestros socios, dada la importancia de los temas a debatir, especialmente el relativo a la posible incorporación de nuestra Sociedad a la proyectada Federación Nacional.

*****

FEDERACION DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Desde hace algún tiempo se viene estudiando la posibilidad de federar varias de las sociedades de profesores de Matemáticas que se han ido formando a nivel regional, a tenor de la preocupación generalizada por la didáctica y de las inquietudes por la mejora de la enseñanza. Un buen exponente de ello puede ser, para nosotros, la creación de nuestra propia Sociedad.

Hemos recibido el proyecto de estatutos para tal federación, que publicamos en este Boletín, con el fin de debatirlo en la próxima Asamblea General.

Se ruega a todos el estudio de este proyecto, tanto en relación con la conveniencia o no de formar parte de esa Federación como, en caso afirmativo, para la discusión del articulado.

*****

VI CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS

También en este Boletín incluímos la convocatoria de nuestro VI Concurso, organizado con la colaboración del Colegio Oficial de Doctores y Licenciados.

VEA LA
CONVOCATORIA
DE NUESTRA
ASAMBLEA
GENERAL

ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE 1988. CONVOCATORIA

La Junta Directiva ha acordado convocar la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente a 1988, para el sábado 21 de Mayo de este año, a las 11 h 30 m, en primera convocatoria y a las 12 h en segunda, en el Instituto "Beatriz Galindo" (c/ Goya, 10).

Se seguirá el siguiente Orden del Día:

1. Lectura y aprobación, en su caso, del Acta de la Asamblea anterior.
2. Informe del Sr. Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Colaboración con el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados.
5. Propuesta de constitución de una Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
6. Elecciones para la renovación de la mitad de la Junta Directiva.
7. Ruegos y preguntas.

Los miembros de la Junta cuya renovación establecen los Estatutos para este año son los siguientes: Presidente, Vicepresidentes de Toledo, Cuenca y Segovia, Vicesecretario y Tesorero.

Esperamos vuestra asistencia y participación.

*****

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlos.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA :

OLIMPIADA MATEMÁTICA IBERO-AMERICANA :

OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL :

VI CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

Convocado por:

La Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas y el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras.

B A S E S

PRIMERA

Podrán participar los alumnos de B.U.P. y F.P. de los Centros de Albacete, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara, Madrid, Segovia y Toledo. Los de F.P.1 lo harán con los de primero de B.U.P., los de 1º de F.P.2 con los de segundo de B.U.P. y los de 2º o 3º de F.P.2, con los de tercero de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas del Concurso se realizarán en Madrid, en la segunda quincena del mes de Junio (probablemente el sábado, 25) y consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles).

TERCERA

Se concederán diplomas para los mejores de cada nivel, acompañados de los premios correspondientes.

CUARTA

Aquellos Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de dos en cada uno de los tres niveles) deberán realizar la preinscripción antes del día 31 de Mayo de 1988, dirigiéndose por carta a esta Sociedad, apartado de Correos nº 9.479, 28080 - Madrid. En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados.

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos Centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales en las que se haga constar el curso en que están matriculados en el año académico 1987-88 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

= = = = = = = =

XXIV OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

FASE FINAL

La Fase Final de la XXIV Olimpiada Matemática Española se ha celebrado en Madrid y en Canarias, los dias 12 y 13 de Febrero.

Como es sabido, se encarga de la organización de esta Olimpiada la Real Sociedad Matemática Española, con la colaboración de la Subdirección de Becas y Ayudas de Estudios. A la segunda fase concurren los ganadores de la Primera Fase, tres como máximo por cada uno de los distritos en que se organiza, que coinciden aproximadamente con los antiguos distritos universitarios. En nuestro número anterior dábamos cuenta de los resultados de esta Primera Fase en el distrito de Madrid. Los ganadores de esa fase, de cada distrito, reciben como premio la oportunidad de disfrutar de una beca para seguir los estudios de la licenciatura de Matemàticas. Los mejores clasificados en la Fase Final suelen formar parte en los equipos que representan a España en la Olimpiada Internacional de Matemáticas y en la Olimpiada Iberoamericana, además de recibir los correspondientes galardones.

Este año han concurrido 44 aspirantes de los 45 clasificados, 41 en Madrid y otros 3 en Canarias, donde se realizaron las pruebas simultáneamente y con los mismos problemas.

Los enunciados de los seis problemas que constituían la prueba, aparecen en la sección de Problemas Propuestos de este mismo número del Boletín, e invitamos a nuestros socios a resolverlos y a que nos envíen las soluciones, para su publicación. Se propusieron tres en cada sesión de cuatro horas.

El jurado encargado de la evaluación de las soluciones presentadas se reunió el dia 26 de Febrero, una vez recibidas las enviadas desde Canarias. Se otorgaron 10 puntos para cada problema, como máximo, por lo que había una posibilidad teórica de alcanzar 60 puntos. El nivel de los resultados obtenidos fué algo decepcionante, tratándose de una competición entre los mejores de cada distrito, ya que la media de las puntuaciones no llegó a 10 puntos. No obstante, un grupo de participantes superó ampliamente esa media, y de ellos fueron seleccionados los que relacionamos a continuación, con indicación de las puntuaciones obtenidas:

1. D. Javier Campins Pascual, del Liceo Frances de Barcelona 33
2. D. Ramón Esteban Romero, del I. B. "Distrito Marítimo" de Valencia 28
3. D. Santiago Pérez-Cacho Fernando-Argüelles, del Clogio "San José" de Valladolid .. 19
4. D. José Ignacio Nogueira Coriba, del I.B. "Gran Capitán", de Madrid 18
5. D. Boris Bartolomé Mana, del Liceo Francés de Barcelona 17
6. D. Fernando Martínez Puente, del Colegio "La Salle" de Burgos 16

Siguen en putuación a los anteriores:

D. Alberto Gómez Vicente, de Oviedo 15

D. Manuel alegre Esteban, de Castellón . .. 14

y empatados, con 13 puntos: Dña. Carmen Casares Antón (Madrid), D. Joaquín Pérez Romero (Granada), D. Luis Miguel Pozo Coronado (Madrid) y D. Miguel Reboreda Turón (Vigo). Solamente dos participantes mas alcanzaron puntuaciones superiores a 10.

Entre los citados se encuentran D. José Ignacio Nogueira Coriba (18 puntos) , Dña. Carmen Casares Antón (13 puntos) y D. Luis Miguel Pozo Coronado (13 puntos), ganadores de la primera fase en el distrito de Madrid (en los puestos 2º, 1º y 3º, respectivamente), como puede verse en la crónica del número 16 de nuestro Boletín. Como se explicaba en ella, Dña. Carmen Casares Antón ha sido premiada repetidamente en nuestros concursos de resolución de problemas de los años 1985, 1986 y 1987.

Parece ser que los participantes encontraron serias dificultades para la resolución de algunos de los problemas propuestos. Damos a continuación las calificaciones medias alcanzadas por los participantes en cada uno de los problemas (sus enunciados, con la numeración a que hacemos referencia, pueden verse en la sección de Problemas Propuestos de este Boletín):

Problema número	1	2	3	4	5	6
Puntuación media alcanzada por la totalidad de los participantes	0,8	1,8	1,9	0,7	3,0	0,4
Puntuación media alcanzada por los ocho participantes mejor clasificados	1,6	4,5	4,3	2,0	7,0	0,6

Estos datos pueden proporcionar a nuestros lectores informaciones interesantes sobre la dificultad relativa de los problemas. Sobre su dificultad absoluta, podrán juzgar subjetivamente a la vista de sus enunciados: por supueto, no eran triviales, pero en modo alguno alcanzaban la dificultad que suelen presentar los que se proponen en las Olimpiadas Internacionales.

La Olimpiada Iberoamericana de 1988 se celebrará en Lima (Perú) del 22 de Abril al 2 de Mayo. A

ella concurrirá un equipo español formado por alguno de los participantes en olimpiadas anteriores que aún están en condiciones reglamentarias para competir en ésta y otros escogidos entre los ganadores de esta Olimpiada Matemática Española. Estos podrán formar parte también del equipo que represente a España en la Olimpiada Matemática Internacional que tendrá lugar en Australia en el mes de Junio de este año. Les deseamos los mayores éxitos.

- ■ - ■ - ■ -

N O T I C I A S

INSTITUCIONALIZACION DE LA PARTICIPACION ESPAÑOLA EN LAS OLIMPIADAS MATEMATICAS INTERNACIONALES

Por Orden Ministerial se ha creado la Comisión coordinadora de la Participación Española en las Olimpiadas Matemticas Internacionales. La Orden es de fecha 4 de Febrero de 1988 y puede verse en el B. O. E. del 9 de Febrero.

En su Preámbulo recoge la historia de la participación de España en las O. M. I., así como en la Iberoamericana, y con el propósito de mantener esa participación y garantizar su organización en forma eficaz y coordinada, dispone la creación de la mencionada Comisión, que estará presidida por el Director general de Promoción Educativa y tendrá seis vocales, entre los que estará el Presidente de la Real Sociedad Matemática Española y un profesor de Matemáticas, designado por ella, en representación del equipo que tenga a su cargo la preparación de los participantes.

Esta Comisión tendrá la función de garantizar la participación española en dichas competiciones, con el mayor exito posible, y para ello, aprobar los criterios de selección que haya de realizar la Real Sociedad Matemática Española y el programa de preparación específica propuesto por la misma para los paticipantes, proponer los planes de financiación, gestionar el apoyo diplomático preciso, organizar, llegado el caso, la celebración de la Olimpiada Internacional en España, emitir informes, etc.

- ■ - ■ - ■ -

Como ya anunciamos, la XXIX Olimpiada Internacional de Matemáticas se celebrará en Junio de 1988, en Australia y la III Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, del 22 de Abril al 2 de Mayo próximos, en Lima (Perú).

- ■ - ■ - ■ -

X ANIVERSARIO DE LA SOCIEDAD CANARIA
"ISAAC NEWTON" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

La Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas celebra ahora el décimo aniversario de su fundación; es la primera Sociedad de este tipo que se creó en España, por lo que podemos considerarla como nuestra hermana mayor.

En estos diez años ha promovido ocho Jornadas de Matemáticas, que han tenido como marco distintos lugares del Archipiélago Canario y también tuvo su protagonismo en la organización de las Jornadas Nacionales de 1984, que se celebraron en Santa Cruz de Tenerife. Comenzó publicando un Boletín, elaborado casi artesanalmente, que después se transformó en la revista "NÚMEROS", de la que ya han aparecido 16 números, que sumados a los 9 del Boletín, dan un total de 25. La Sociedad ha organizado también cursos, seminarios, etc., realizando una meritoria labor para la mejora de la Enseñanza de las Matemáticas en la región.

Felicitamos a nuestros compañeros canarios por la tenacidad y entusiasmo con que han alentado la marcha de su Sociedad y por los frutos que ha conseguido en estos diez años, ayudando en su labor a los profesores de Matemáticas y conectándolos en sus comunes preocupaciones por la mejora de la enseñanza que imparten.

- ■ - ■ - ■ -

CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACION MATEMATICA

El ICME/88 se celebrará en BUDAPEST (Hungría) del 27 de Julio al 3 de Agosto de 1988.

- ■ - ■ - ■ -

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Esta Real Academia celebró el día 2 de Marzo una Sesión Científica, de su Sección de Ciencias Exactas a la que se presentaron las siguientes Comunicaciones:

- "Aritmética de los Semigrupos de ARF y Saturados", por A. Campillo, F. Delgado y C.A. Núñez.
- "Exactitud de Complejos y Sistemas de Ecuaciones", por T. Sánchez Giralda.
- "Geometría Proyectiva de Trivariedades Algebraicas Complejas", por J. Finat Codes.
- "Resultados de F. Cano sobre una Conjetura de Thom", por J.M. Aroca Hernández-Ros.

Todos los autores citados pertenecen al Departamento de Algebra y Geometría de la Universidad de Valladolid.

*****

A lo largo del mes de Marzo vienen pronunciándose las Conferencias que anunciamos en el nº 15 de nuestro Boletín, dentro del Curso sobre la Historia de la Matemática en los Siglos XVII y XVIII. La del Profesor Etayo tuvo lugar el día 3 y los siguientes están programadas para los días 8, 10, 15, 17, 22 y 24 del mes de Marzo.

*****

XII JORNADAS HISPANO-LUSAS DE MATEMATICAS

También en Septiembre, probablemente entre el 6 y el 9 se celebrarán estas Jornadas en la Universidad de Valladolid. Próximamente se anunciarán con más precisión.

*****

VI COLOQUIO INTERNACIONAL DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Se celebrará en Santiago de Compostela, organizado por el Departamento de Geometría y Topología de aquella Universidad, durante los días 19 a 23 de Septiembre de 1988. Puede obtenerse información en el citado Departamento de la Facultad de Matemáticas, 15705, Santiago de Compostela.

*****

ACTIVIDADES DEL C. E. P. DE CIUDAD REAL

Dentro de este CEP funciona un SEMINARIO DE DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS en el que tienen lugar las actividades del Grupo "Promoción Matemática del Alumnado" y del Aula "Puig Adam"; éstas están dirigidas a los alumnos de EGB, BUP y FP y en ocasiones a alumnos universitarios. En el presente curso se ha desarrollado un cursillo sobre "Aritmética del Número", al que ha asistido un grupo de alumnos reducido en número, pero muy interesado en el tema. El segundo cursillo versará sobre "Construcciones geométricas en el plano".

REAPARICION DE " GACETA MATEMATICA "

Como anunciábamos en nuestro anterior Boletín, el pasado mes de Febrero ha sido entregado en la imprenta el original del número 1 de la nueva serie de "Gaceta Matemática", cuya aparición será aproximadamente simultánea a la este Boletín.

En este primer número, además de cuatro artículos sobre aspectos varios de las Matemáticas, hay noticia de las pasadas Olimpiadas Matemáticas Iberoamericana e Internacional de 1987 y de las Jornadas Luso-Españolas de Matemática celebredas en Braga (portugal).

Está prevista la aparición de dos números más a lo largo del presente año de 1988.

- ■ - ■ -

CONFERENCIA

El catedrático recientemente jubilado don ALBERTO AIZPÚN, que tan activamente colabora con nuestra Sociedad, pronunció una conferencia en la Escuela Universitaria del Profesorado de E. G. B. "Pablo Montesino", el pasado dia cuatro de febrero, con el título " LOS MATEMATICOS, LA MATEMATICA Y SU ENSEÑANZA ". Concurrieron al acto numerosos profesores de Matemáticas, además de un nutrido grupo de alumnos de la mencionada Escuela.

Sería nuestro deseo ofrecer a nuestros socios el texto de esta interesante conferencia en uno de nuestros próximos números del boletín.

- ■ - ■ -

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

ANTEPROYECTO DE ESTATUTOS

DE LA FEDERACION ESTATAL DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMATICAS

T I T U L O I

"DE LA CONSTITUCION, OBJETO Y DOMICILIO DE LA FEDERACION"

Artículo 1.-Bajo la denominación de FEDERACION ESTATAL DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMATICAS, se constituye una Federación que comprenda a todas las sociedades de ámbito Comunidad Autónoma o superior de profesores de Matemáticas que por su voluntad deseen integrarse en la misma y que tenga por fin la mejora de la enseñanza de las Matemáticas en todos sus niveles.

Son fundadores de esta Federación las siguientes asociaciones y sociedades de profesores de Matemáticas:

-Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía.

-Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "THALES".

-Sociedad Aragonesa "PEDRO SANCHEZ CIRUELO" de Profesores de Matemáticas.

-Sociedad Canaria "ISAAC NEWTON" de Profesores de Matemáticas.

-Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas.

Artículo 2.-La Federación tendrá personalidad jurídica propia e independiente de las sociedades que la constituyan y se regirá por los presentes estatutos.

Artículo 3.-Son sus fines:

1.-Orientar, como órgano coordinador, a las sociedades federadas en el objetivo de mejorar la enseñanza de las Matemáticas en todos sus niveles.

2.-Asesorar a las mismas en cuantos problemas e iniciativas se planteen.

3.-Representar, en todas las ocasiones en que se considere precisa una acción colectiva, a las entidades federadas ante los poderes públicos, entidades y organismos.

4.-Entablar y mantener relación con los organismos oficiales que incidan en su campo de acción, colaborando con ellos en cuanto redunde en beneficio de las asociaciones federadas.

5.-Estimular y organizar el intercambio e información entre las e tidades federadas, respecto principalmente a sus actividades propias, y establecer la natural colaboración entre éllas, así como establecer relaciones con sociedades afines y organismos de carácter internacional.

6.-Promover encuentros nacionales e internacionales para debatir la enseñanza de la Matemática, así, como participar en cuantos se convoquen y sean considerados de interés.

Artículo 4.-La Junta de Gobierno, por períodos no superiores a cuatro años, eligirá de entre las capitales sedes de las sociedades federadas, el domicilio de la Federación para el período que se indique

T I T U L O II

Artículo 5.- La Federación abarcará todo el territorio del Estado Español Las sociedades que cumplan los requisitos señalados en el artículo 1, tendrán derecho a formar parte de la Federación, siempre que hayan sido legalmente constituídas.

Artículo 6.-Para ingresar en la Federación, la Sociedad solicitante dirigirá la petición al Presidente de áquella, acompañada de certificado literal del acta en que conste el acuerdo de adhesión, la aceptación tanto de los presentes estatutos como de las normas de régimen interno de la Federación, domicilio social, objeto de la Sociedad y texto de los estatutos correspondientes.

Artículo 7.-La propuesta de ingreso será presentada por la Presidencia de la Federación a la Junta de Gobierno de la misma, momento a partir del cual pasará a tomar parte como miembro de pleno derecho.

Para el su puesto de determinar la pérdida de la condición de sociedad federada, se necesitará una mayoría de dos terciosde votos de la Junta de Gobierno.

Artículo 8.-La Federación respeta el funcionamiento autónomo de las sociedades federadas.

T I T U L O I I I

"DE LOS ORGANOS DE GOBIERNO"

Artículo 9.-Los órganos de Gobierno serán:

a/.-Unipersonales: Presidente, Vicepresidente, Secretario General, Tesorero y hasta tres vocalías que cubran por áreas los fines de la Federación.

b/.-Colegiados: Comisión Permanente y Junta de Gobierno.

Artículo 10.-Los órganos colegiados se considerarán constituídos cuando estén presentes la mitad más uno de sus componentes, en primera convocatoria y cualquiera qúe sea su número en segunda, debiendo transcurrir entre una y otra convocatoria un lapso mínimo de tiempo de media hora.

Los acuerdos de los órganos colegiados se adoptarán por mayoría absoluta de votos, siendo cualificado el del Presidente.

Artículo 11.- a/.-Los cargos de Presidente y Vicepresidente de la Federación serán ocupados, con carácter rotatorio y por periodos máximos de tres años, por los Presidentes de las Sociedades Federadas a quienes corresponda. A cada Presidente de la Federación, le sucederá su Vicepresidente.

b/.-La presencia en la Jun-ta de Gobierno puede ser delegada si así lo estima la Sociedad Federada.

Artículo 12.-Son funciones del Presidente:

a/.-Ostentar la representación de la Federación.
b/.-Convocar y presidir las Juntas de Gobierno.
c/.-Convocar y presidir la Comisión Permanente.
d/.-Cuantas le sean atribuídas por la Junta de Gobierno.
e/.-Autorizar, con su visto bueno, cuantos escritos y certificaciones elabore el Secretario General.

Artículo 13.-El Vicepresidente colaborará con el Presidente en todos sus cometidos y le sustituirá en caso de delegación, ausencia o enfermedad.

Artículo 14.-El Secretario General será elegido por la Junta de Gobierno entre los candidatos presentados. Su mandato será de cuatro años.

Artículo 15.-Son funciones del Secretario General:

a/.- Actuar como Secretario en la Comisión Permanente y en la Junta de Gobierno, custodiando sus actas.

b/.- Librar los certificados que procedan con el visto bueno del Presidente.

c/.-Ordenar los gastos.

d/.-Informar a los asociados de las actividades de la Federación.

e/-Organizar los servicios aprobados en Junta de Gobierno.

f/.-La coordinación general de las actividades de la Federación

g/.-Organizar la elaboración de estudios y trabajos que redunden en beneficio de la Federación y que hayan sido aprobados en la Comisión Permanente o en la Junta de Gobierno.

h/.-Llevar la correspondencia de la Federación.

Artículo 16.-El Tesorero será elegido por la Junta de Gobierno entre las personas que proponga el Secretario General. Su mandato será de cuatro años.

Artículo 17.-Son funciones del Tesorero:

a/.-Llevar los libros de contabilidad.

b/.-Controlar e informar sobre el gasto de la Federación.

c/.-Recaudar las aportaciones económicas.

d/.-Elaborar el balance anual.

e/.-Ejecutar los gastos ordenados por el Secretario General.

Artículo 18.-Los vocales por áreas serán designados por la Junta de Gobierno, su mandato será de cuatro años y tendrán aquellas funciones que les asigne la Junta de Gobierno.

Artículo 19.-Los cargos unipersonales (a excepción del Presidente y Vicepresidente de la Federación), se renovarán cada dos años en la siguiente forma:

a/.-Secretario General, Tesorero y un vocal.

b/.-Los otros dos vocales.

Artículo 20.-La Comisión Permanente la forman los cargos unipersonales.
Se reunirán ordinariamente tres veces al año.

Artículo 21.-Son funciones de la Comisión Permanente:

a/.-La representación permanente de los intereses de las asociaciones federadas con sujeción a las directrices de la Junta de Gobierno.

b/.-Elaborar el proyecto de presupuesto.

c/.-Elaborar el proyecto anual de actividades.

d/.-Recabar ayudas y subvenciones.

e/.-La gestión, administración y ejecución de los acuerdos de la Junta de Gobierno.

f/.-Cualquiera otras que le delegue la Junta de Gobierno.

Artículo 22.-La Junta de Gobierno es el órgano máximo de la Federación y está compuesta por las personas que ocupan los cargos de Presidentes y Secretarios Generales de cada una de las Sociedades Federadas. Las votaciones se realizarán por voto personal, salvo en aquellas cuestiones que excepcionalmente se fijen en el reglamento para las que se utilizará el voto ponderado.

Se reunirá ordinariamente una vez al año. La convocatoria se realizará con, al menos, diez días de antelación. Para las reuniones extraordinarias el plazo de convocatoria será de, al menos, cinco días.

Artículo 23.-Son funciones de la Junta de Gobierno:

a/.-Aprobar el presupuesto.

b/.-Fijar la cuantía con que han de participar las asociaciones en la financiación de la Federación. Cada una aportará lo que corresponda en proporción a su número de socios.

c/.-Interpretar los presentes estatutos.

d/.-Aprobar el plan anual de actividades.

e/.-Proponer a las personas que representen a la Federación en aquellas actividades para las que se requiera.

f/.-Facultar a la Comisión Permanente para realizar cuantas gestiones sean necesarias en beneficio de la Federación.

g/.-Nombrar censor de cuentas.

h/.-Disponer y enajenar los bienes contando con el voto favorable de los dos tercios de sus miembros.

i/.-Nombrar administrador y representante.

j/.-Solicitar la declaración de utilidad pública.

k/.-Elegir los miembros de la Comisión Permanente.

l/.-Acordar propuestas de federación y convenios con organismos similares de otros paises.

m/.-Decidir sobre la pérdida de la condición de socio en los supuestos fijados en estos estatutos.

T I T U L O IV

"DE LOS SOCIOS"

Artículo 24.-Las sociedades federadas utilizarán para el voto ponderado sólo el número correspondiente a los socios que sean personas físicas.

Artículo 25.-Son derechos de los asociados:

a/.-Participar en las actividades que organice la Federación.

b/.-Beneficiarse de cuantas acciones desarrolle la Federación.

c/.-Proponer a la Junta de Gobierno cualquier actividad o mejora encaminada a la consecución de los objetivos.

Artículo 26.-Son deberes de los asociados:

a/.-Acatar los presentes Estatutos.

b/.-Acatar los acuerdos de la Junta de Gobierno en cuanto afecte al funcionamiento de la Federación.

c/.-Contribuir economicamente al sostenimiento de la Federación en las cuantías que se fijen.

Artículo 27.-La condición de socio se pierde:

a/.-Por incumplimiento de forma reiterada de los presentes estatutos o de los acuerdos de los órganos de gobierno.

b/.-Por solicitud de la Sociedad.

T I T U L O V

"DEL PATRIMONIO"

Artículo 28.-La Federación en el momento de su constitución carece de patrimonio.

Artículo 29.-La Federación se financiará:

a/.-De cuantas donaciones, ayudas, subvenciones, etc..reciba de los entes públicos o privados.

b/.-De los ingresos que produzcan las actividades, publicaciones, etc.. elaborados por la Federación.

c/.-De las aportaciones de sus asociados.

T I T U L O VI

Artículo 30.-Los presentes estatutos pueden ser modificados a propuesta de los dos tercios de los miembros de la Junta de Gobierno.

Artículo 31.-En caso de disolución, el patrimonio existente en es momento será valorado y repartido entre las asociaciones federadas en proporción al número de miembros, que sean personas físicas, una vez cumplidas las obligaciones pendientes.

TRANSITORIAS

1.-Hasta tanto se constituya la Junta de Gobierno, se creará una Comisión Gestora que estará compuesta por un miembro de cada Sociedad que forme la Federación y será presidida por el miembro de mayor edad, actuando como Secretario el de menor edad.

2.-Son funciones de la Comisión Gestora:

a/.-Elaborar y tramitar los Estatutos de la Federación.

b/.-Convocar la constitución de la primera Junta de Gobierno

3.-Una vez constituída la Junta de Gobierno, se elaborará un reglamento de funcionamiento en el plazo máximo de tres meses.

4.-El orden de votación para ocupar la Presidencia y Vicepresidencia de la Federación será fijado en la sesión constituyente de la Junta de Gobierno fijándose, así mismo, en esa sesión el tiempo de duración.

5.-La Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "THALES" y la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía manifiestan que en el momento de constitución de la Federación, se encuentran inmersas en un proceso de fusión para constituir una única asociación, la "Sociedad Andaluza de constitución definitiva de esta sociedad, la Federación acepta la participación diferenciada de ambas asociaciones, quedando obligadas éstas a adoptar representación única en un plazo máximo de diez meses.

6.-La sede provisional de la Federación se fija en la sede de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas.

D. FRANCISCO BOTELLA RADUAN, SACERDOTE Y CATEDRATICO (*)

Por Joaquín Arregui

El día 29 de septiembre de 1987 falleció en Madrid, D. Francisco Botella Raduán, Sacerdote, Catedrático de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, y Ex-presidente de la Real Sociedad Matemática Española. Tenía 72 años de edad.

Nació D. Francisco Botella en Alcoy, el 18 de junio de 1915. Hizo la Licenciatura en Ciencias Exactas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense, en la que se graduó de Doctor con su Tesis doctoral "Los Espacios de Riemann y la Teoría de Funciones", Memoria que recibió el Premio del Consejo Superior de Investigaciones Científicas en el año 1941.

En el año siguiente realizó oposiciones a la Cátedra de "Geometría Analítica y Topología de la Universidad de Barcelona, de la que fue nombrado Catedrático con fecha 5 de mayo de 1942. En el año 1950 pasaría, por Concurso de Traslado, a la Cátedra de Geometría Analítica y Topología de la Universidad Complutense, donde permaneció hasta el día de su jubilación, el 18 de junio de 1985.

Fue ordenado sacerdote el 29 de septiembre de 1946, vocación que le llevó a realizar una intensa labor pastoral, que, con unidad de vida, supo hacer compatible con una ejemplar dedicación a la Universidad y a sus alumnos.

(*) Nota de la Redacción

El Catedrático de la Universidad Complutense don Joaquín Arregui nos ha cedido amablemente, para su publicación, este artículo, escrito para "Gaceta Matemática", donde aparecerá próximamente. Con él nuestra Sociedad se une a honrar la memoria del querido profesor.

En los años 1951, 1952 sufrió una grave enfermedad que, aunque felizmente logró superar en su fase crítica, fue la causa de que D. Francisco padeciera un permanente estado de debilitamiento físico que hacía su salud muy delicada.

Inicialmente orientó D. Francisco su investigación científica al campo de la Geometría diferencial, y de modo especial hacia el estudio de los espacios de Riemann, con resultados que aparecen en su Tesis doctoral y en varios artículos publicados en la Revista Matemática Hispano-Americana en los años 1941-1952.

Posteriormente, en la década de los años sesenta, se orientó hacia la Topología, tratando de generalizar el concepto de fibrado tangente a espacios más generales que una variedad diferenciable. A esta línea de investigación corresponde una quincena de trabajos que publica en la Revista Matemática Hispano-Americana a partir de 1960.

Como profesor de Matemáticas, creo que se puede decir de D. Francisco que era un geómetra. Procuraba fomentar en sus alumnos la intuición geométrica yendo al núcleo de las cuestiones. Sus clases carecían del riguroso orden bourbakista que estuvo de moda, sustituyéndolo por una explicación viva que, aunque no siempre completamente formalizada, logró en muchas ocasiones mover la capacidad creadora de los alumnos: fueron las ideas propuestas por D. Francisco en sus clases las que suscitaron las primeras notas de investigación de varios de sus alumnos, que fueron luego sus discípulos. Sin duda es aquí donde se manifestó su carácter de maestro, facilitando por su humanidad cordial y sencilla, que acortaba distancias con los alumnos. No es de extrañar ésto, pues reflejaba su origen mediterráneo, con un temperamento muy vivo y profundo que trataba de captar y transmitir lo esencial de los conceptos matemáticos.

A la hora de contemplar la figura de profesores de matemáticas de generaciones que nos han precedido parece oportuno recordar las circunstancias, tan distintas de las actuales, en

las que tuvieron que realizar su labor científica y académica; y si no se puede decir que en nuestros días los medios de que se puede disponer para realizar esta labor sean abundantes, la situación de España en los años que siguieron a la Guerra Civil, y después de la II Guerra Mundial, hacia que el ambiente para la investigación matemática fuera particularmente adverso, pues faltaban bibliotecas con libros de actualidad, no se encontraban revistas especializadas ni existía la posibilidad práctica de intercambios con profesores extranjeros, y era muy difícil realizar viajes fuera de España. En una palabra: aislamiento; que en algunos casos puede ser beneficioso, pero que, en general, es más bien esterilizador.

El título de la Cátedra de D. Francisco Botella era "Geometría Analítica y Topología" cuando la Topología era muy poco conocida en España. D. Francisco se dio cuenta de la importancia de la Topología -algún matemático insigne ha afirmado que el siglo XX será conocido en la historia de la Matemática como el siglo de la Topología- y puso todo su interés en promocionar la enseñanza de esta rama de la Matemática. El Plan de Estudios de 1964 de la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense recogió algunas de las ideas de D. Francisco en este sentido, que creo contribuyeron de modo importante, dado el papel especial que entonces aún tenía la Universidad Complutense dentro de la Unidad española, a la promoción de una enseñanza más sistemática y más profunda de la Topología en las distintas Facultades de Ciencias de España. Cuando poco después las Facultades Universitarias se estructuran en Departamentos, D. Francisco Botella, juntamente con D. Germán Ancochea y D. José Javier Etayo, constituyen el núcleo del actual Departamento de "Geometría y Topología" de la Universidad Complutense, donde se forma una activa generación de topólogos que cultivan este campo de la Matemática en varias de sus facetas, como se plasma en "Contribuciones Matemáticas", libro homenaje que hace el Departamento en honor de D. Francisco con motivo de su jubilación académica: allí aparecen, refiriéndonos sólo al área de la Topología, artículos de Topología General, Topología Diferencial, Teoría de las formas, Topología de dimensión baja, Grupos cristalográficos hiperbólicos, Teoría de cubiertas, etc.

D. Francisco fue Consejero de número del Consejo Superior de Investigaciones Científicas por el Patronato Alfonso X el Sabio, y durante varios años formó parte de la Junta Directiva del Instituto Jorge Juan de Matemáticas. También estuvo varios años en la Junta Directiva de la Real Sociedad Matemática Española, de la que fue Presidente desde 1963 hasta 1970.

¡Descanse en paz!

COMENTARIO DE TEXTOS

Por Hixem

Uno de los últimos números, el 881, correspondiente a octubre de 1987, de la revista Cruz Roja, dedica un par de páginas a la exposición del logotipo de la Institución. Incluso define suficientemente, aunque sin gran perfección gramatical, la palabreja: "Logotipo: se entiende como tal el nombre de una entidad, institución, organismo o asociación, diferenciado gráficamente por un tipo de letra o grafismo que se caracteriza por sus rasgos típicos que la hacen diferente de cualquier otro y que le individualiza en la mente de las personas".

Depués de lo cual incluye su logotipo en cuatro versiones, que dicen: "Cruz Roja Española", "Creu Roja Espanyola" , "Cruz Vermella Española" y "Españako Gurutze Gorria". ¡Ay, pero cómo lo dice! Así:

"El logaritmo podrá usarse en las distintas lenguas del Estado español".

Esta confusión entre logotipo y logaritmo es sólo una errata, naturalmente, pero puede servir de prólogo y ocasión para que también nosotros nos dediquemos a esta tarea de comentar textos que, por una vez, y como es nuestra obligación, la aplicaremos a aquéllos que tengan algo que ver con las matemáticas. Y además los sacaremos, como el anterior, de relatos periodísticos, no sé si para estar más cerca de eso que ahora se llama cultura popular". Así que nos hemos lanzado a exhumar viejos recortes guardados por ahí y vamos a ver qué pasa.

La densidad de la población, clave de los problemas de Madrid

A cada madrileño le corresponden 1,8 metros cuadrados de superficie.

No hay sitio suficiente para que los vecinos aparquen sus coches en Madrid, tampoco para que éstos puedan circular con fluidez. Los madrileños esperan largas colas para poder subir a los autobuses, y en todos los transportes públicos es normal que viajen apiñados. La raíz del problema es que Madrid tiene una densidad de población excesiva. Ni siquiera hay espacio suficiente para que los vecinos se desplacen andando.

Según las últimas estadísticas municipales publicadas, la densidad de la población es de 55 habitantes por hectárea. A cada madrileño le corresponde 1,8 metros cuadrados de superficie en nuestra ciudad. Hemos hecho los cálculos con los 3.355.720 habitantes que figuran en las mismas estadísticas, aunque en estos momentos somos algunos más.

Si tenemos en cuenta que, por lo menos, la mitad de la superficie de Madrid está edificada, nos encontramos con el hecho curioso de que si a todos se nos ocurre salir a pasear a la calle al mismo tiempo, no dispondríamos del espacio físico suficiente para permanecer de pie y parados.

Si la densidad de la población de Madrid es ya alarmante, considerada en términos globales, resulta todavía más preocupante el que en algunos barrios esa densidad está más que centuplicada. En el de Arapiles, donde se registra la máxima, la densidad llega a los 732 habitantes por hectárea. Lo que significa que a cada vecino le corresponde una superficie de 13 centímetros en el barrio.

Por milagro del crecimiento vertical, Madrid se ha convertido en una colmena. Con la desventaja de que nosotros, a diferencia de las abejas, no podemos volar y nos resulta realmente problemático desplazarnos de un panal a otro.

Mientras en otras ciudades europeas se ha planeado razonadamente el crecimiento, nosotros nos hemos concentrado, dirigidos por los especuladores de la tierra, de forma que ahora todos tenemos espacio para dormir —o al menos la mayoría—, pero para nada más.

La distribución del espacio en Madrid es tan desproporcionada como la de la riqueza. Mientras que hay barrios como Valdemartín, en Moncloa y Horcajo, en Moratalaz, que tiene una densidad de un habitante por hectárea, y hay otros muchos que no llegan a la decena, más de treinta barrios pasan de los trescientos habitantes por hectárea.

Las diferencias se acusan incluso dentro de los distritos. En Moratalaz, mientras que uno de sus barrios, Horcajo, tiene un habitante por hectárea, el vecino barrio de Vinateros tiene quinientos cincuenta y seis.

1. GEOMETRIA, GEOMETRIA, TIENES NOMBRE DE MUJER

Para empezar, vea el joven, y comente, ese pequeño artículo que reproducimos en facsímil y que apareció en el diario Ya de 23-12-1979. ¿Qué hallará?

Algo destinado a poner el corazón en un puño al sufrido madrileño y si, además del corazón, fuera todo el cuerpo, mejor que mejor: así cabría más gente en tan pequeño espacio. A nuestro concejal de transportes, o como se llame, ya no es que se le atascan a cada paso los coches, sino también los peatones. ¿Para qué quejarse la delegada del Gobierno de las manifestaciones si, simplemente con que la gente salga a sus cosas, quedan todas las calles atiborradas? ¿Cómo saber si esas ingentes multitudes que colapsan la ciudad están protestando por la discriminación del feo o por el alto precio de las chirimoyas o es que simplemente van a echar unas cartas o a comprar la berza diaria?

Leamos con cuidado: *"Hemos hecho los cálculos..."*, se dice en el alarmista artículo. ¡Pues los han hecho con las patas! El autor ha cogido sus hectáreas y las ha igualado a hectómetros cuadrados; ha "pensado" luego que un hectómetro cuadrado tiene cien metros cuadrados y, ¡zas!, ahí tienen el resultado ¡Pero hombre, que una hectárea tiene diez mil metros cuadrados! Así, a cada vecino, le van a corresponder casi 182 metros cuadrados, no los 1,8 que el roñoso periodista le daba. Libérese, pues, de su angustia el honrado ciudadano madrileño. ¿A qué se siente ahora mejor, más desahogado, más libre de movimientos y con mayor amplitud a su alrededor que hace un instante? Salga pues, pasee tranquilo, aunque sea por el populoso barrio de Vinateros, que está Vd. en su casa.

Y esta es otra: ¿cabremos en casa? El autor, sin hacer esta vez, afortunadamente, los cálculos, dice: *"... ahora tenemos espacio para dormir, pero nada más"*. ¿Y si hace esos cálculos creyendo que un hectómetro cúbico tiene cien metros cúbicos?

Estarían perdidos los pobres habitantes de la Villa: ni pueden salir a la calle, ni pueden quedarse en casa: ¿do irán? Hombre, mal están las cosas, la verdad, pero no nos las ponga Vd. aún más prietas.

Lo malo es que todo esto ya no es una errata, de esas que los periódicos despachan limpiamente diciendo que el buen juicio del lector habrá sabido advertir, sino un craso error, el desconocimiento de las más elementales nociones del sistema métrico y de área, y en ese error consiste todo el artículo. Quiten Vds. el error y el artículo desaparece: ya no puede ser escrito. ¡Ay, aquella enseñanza primaria!

Pero no vayan a creer que sólo Madrid padece graves problemas geométricos. En Diario de Navarra de 23-8-1980 se habla del camino que en Pamplona une el polígono de Azpilagaña y el cruce de la carretera de Barañain con Sancho el Fuerte, ante la esquina de Ermitagaña, nada menos, y añade:

> *"Ese cruce ya se está convirtiendo en un eje de gran importancia y avisa realmente de lo que será en el futuro. Iturrama y Sancho el Fuerte discurren como paralelas convergentes hasta tocarse en ese cruce".*

Extraordinario cruce, ciertamente. No se contenga sólo con servir de eje sino que en él se tocan las paralelas convergentes. ¡A qué va a resultar que han levantado Pamplona sobre un plano hiperbólico!

2. SI QUIERES SER FELIZ, COMO ME DICES...

No analices, muchacho, no analices. ¡Porqué es que también en análisis salta cada una! Vamos a entrar en materia con una cosa ambigua, que no se sabe si está bien, mal o ni bien ni mal sino todo lo contrario: dependerá de lo que hayan querido decir quienes la escribieron.

Se refiere a las especulaciones sobre los autores de los discursos oficiales y, en particular, el del Príncipe don Felipe en su respuesta al nombramiento de Astrofísico de Honor. Parece que le hicieron decir:

> *"... la ciencia y el arte de la Astronomía no constituyen un hecho aislado e impenetrable, prohibido a quienes no hayan investigado en sus misterios y conozcan sus cálculos infinitesimales".*

Un sibilino comentarista pone a este párrafo la siguiente apostilla en la revista Epoca, nº 18, de julio de 1985:

> *"Dícese 'infinitesimal', según la Academia de la Lengua, de las cantidades infinitamente pequeñas y de lo relacionado con ellas".*

Nada más. Será que quiere dar un palmetazo al redactor del discurso, al pensar que las cantidades que se manejan en Astronomía han de ser forzosamente muy grandes. Quién sabe también si el tal redactor quiso explicar a su vez que la resolución de determinados problemas astronómicos requiere la herramienta del análisis infinitesimal. ¿Tendrán razón los dos? Chi lo sa, que diría don Mendo.

No le vendría mal, sin embargo, discurrir sobre ésto a un tal J. Infiesta que en Gaceta Ilustrada, de 21-1-1979 nos comenta algunas particularidades de un viaje del Papa, me parece que a Méjico:

> *"Entre la miscelánea de los números destaca la de un avispado comerciante que vendió 20.000 periscopios para poder ver al Papa durante las ceremonias. Estampas, medallas, fotografías, baldosines, pegatinas, ceniceros, calendarios, monedas, pancartas, toda una fauna de souvenirs se han agotado en cantidades infinitesimales".*

¡Pues nada, que santa Lucía les conserve la vista.... para los negocios!

Ya que tenemos aquí a este Infiesta, vamos a transcribir un trocito de una entrevista que le hizo al Obispo Auxiliar monseñor Iniesta en el número de 20-2-1977 de la misma revista. Así dice que dice el Obispo:

> *"Pero bueno es seguir reconociendo el ideal para acercarse a él, aunque sea, como se dice a veces con una palabra un tanto pedante, asintomáticamente".*

No sabemos de quién será la culpa: de Iniesta, de Infiesta o de la infausta linotipia. Por otra parte, ¿a Vds. les resultaría pedante decir "asintóticamente"? No lo parecería seguramente si fuera una palabra más usada. Y es curioso porque, con tantas palabras nuestras, y aun frases, que hoy se emplean vengan o no a cuento, ésta de "asíntota", que sería tan aprovechable, parece que no cala en la cultura popular.

Pero no crean, al contrario que en este último caso, es a veces el mismo periodista el que corrige al comentado. Así, en Ya de 7-12-1982 se alude a los errores que el nuevo presidente del Gobierno cometió en el discurso de investidura:

> *"... La cosa no tiene mayor importancia. Como no la tiene que, respondiendo al señor Bandrés, dijera que él -el presidente- siempre buscaba, como dijo en Anoeta, el 'mínimo común divisor' de todos. No cayó entonces -lo repitió por dos veces- en que el 'mínimo común divisor' es sólo uno".*

¡Muy bien, eh! Lástima que lo chafe a continuación con algo que no hacía ninguna falta:

> *"y menos que uno... no se puede sumar enteros".*

Ahora que, para innecesario, lo que afirma Pilar Urbano en el mismo diario, el 7-1-1988, o sea, casi recién salido del horno:

> *"Hasta 'infinito' multiplicado por cero, da cero".*

¡¿Pero qué me dice?!

La última nota que vamos a traer aquí se repetía durante unos días en la página de espectáculos de Ya; si queremos elegir una fecha, pongamos la del 12-10-1982, por ejemplo. Era el anuncio del programa que por aquellos días iba a ofrecer en el Real la Orquesta Nacional de España. Junto a un concierto para piano y orquesta de Mozart y una sinfonía, la cuarta, de Brahms, incluye también:

> *" 'Corolario' (Beethoven)".*

Todos sabemos que lo que Beethoven compuso fué "Coriolano". Ahora bien, si Pasolini rodó una película titulada "Teorema", ¿por qué no va a poder Beethoven escribir un "Corolario"?

3. EL PAPELIN GENERAL

La Codorniz, aquella agotada revista de inagotable humor que más de una vez ha aparecido citada en este Boletín, llamaba así a una graciosa parodia que hacía del otro Boletín: el Oficial del Estado. Al que hoy, por cierto, han dado en llamar el Boe, como fiel exponente de esa cultureja aburrida, gris y chirle que nos gastamos. ¡El Boe, vaya nombre! Parece, en feo, el de uno de aquellos disparatados hampones de la banda de Joe el Tuercebotas, Harry el Caballo y Bo el Dioptrías.

Bueno, pues al tal Boe ya no hay Codorniz que lo parodie porque se parodia él solo. En el número del 5-4-1986, página 12001 por más señas, se convocan unas oposiciones de Meteoro logía y, entre otros extremos, se expone el cuestionario sobre el que versará uno de los ejercicios: es como para que el pobre opositor se frote los ojos al llegar al tema 21:

> *"Campos vectoriales y escaleras. Operadores y vectores de divergencia y rotación de datos".*

El buen juicio del lector competente en el asunto pondrá enseguida "escalares" en lugar de "escaleras". Lo otro ya no está tan claro, así que vamos a facilitárselo: "Operadores y vectores de divergencia y rotacional dados" ¿Ven qué bien? Y, para que no ardan de ira, aquí vienen los bomberos, puesto que en dos temas, el 26 y el 28, se lee:

> *"Acuaciones diferenciales".*

¡Pobres ecuaciones! Se ve que el Boe no las traga. En su número del 26-7-1982 publica una resolución de la Dirección General de Ordenación Universitaria y Profesorado en la que se relaciona:

> *"... la lista definitiva de aspirantes admitidos y excluídos al concurso-oposición, en turno restringido, para la provisión de la plaza de 'Análisis matemático 3º (Educaciones diferenciales)' de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada".*

Y, no contento con ello, vuelve a las andadas el 7-12-1982 con la convocatoria a un concurso de traslado.

> *"... a plazas de Profesor Agregado de 'Análisis matemático 3º (Educaciones en derivadas parciales)', de la Universidad de Santander".*

Para que se vea claramente cómo nuestro Ministerio cuida con tanta solicitud la Educación como la Ciencia. ¿Y qué me dicen de aquella excrecencia suya que duró muy poco y se llamó

Ministerio de Universidades e Investigación? Podemos echarle la culpa de la siguiente ocurrencia: en el suplemento al número 235, publicado el 30-9-1980, que recoge los índices de todas las disposiciones aparecidas durante el mes, distribuídas, como todo el mundo sabe, en epígrafes, titula así dos de ellos, correspondientes al día 13 y estampados en la pagína 99:

> *"Cuerpo de Profesores Agregados de Universidad".*
>
> *"Grupo de Catedráticos de Universidad".*

¡Pues miren, ya sólo falta el Anillo de Profesores Titulares de Universidad!

Con todo esto no es de extrañar que lo más chusco del amigo Boe resalte en las innumerables correciones de errores que se ve obligado a hacer. Como la siguiente, del 12-10-1987:

> *"En la página 13702, en la especialidad de 'Investigación Operativa', donde dice: 'Modelos Cibernéticos y Autócratas', debe decir: 'Modelos Cibernéticos y Autómatas' ".*

¡Qué alivio! Así también, el 24-6-1981 rectifica dos resoluciones que había publicado el 13-6-1981 por las que, respectivamente, una cátedra se declaraba desierta por concurso de traslado y se convocaba a continuación a concurso de acceso. Y se explica así:

> *"En el anexo, donde dice: " 'Teoría de la compatibilidad' de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid", debe decir: " 'Teoría de la Computabilidad' de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid".*
>
> *"En el anexo, donde dice: " 'Teoría de la Complutense' de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid", debe decir: " 'Teoría de la Computa-*

bilidad' de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid".

¿Qué tendrá la Computabilidad? ¡Si es que la qué nace fea...!

4. ¡PROPORCIONALIDAD, CUANTOS CRIMENES SE COMETEN EN TU NOMBRE!

No sé si tantos como en el de la libertad, pero por ahí debe de andar la cosa. Y me refiero a la proporcionalidad simple y directa, a la purita regla de tres, al cálculo de un porcentaje. Ya no hablamos de la regla de tres compuesta, de la proporcionalidad inversa, de las mezclas y aleaciones, repartimientos proporcionales y reglas de compañía o problemas de interés o fondos públicos que en nuestra aritmética elemental se derivaban de la proporcionalidad. Fijándonos sólo en ésta, reducida a su más simple expresión, hay que ver qué cosas se dicen; y cuántas. Seleccionaremos unas pocas.

Ha sido, para empezar, muy comentada por los "mass media", y lo tomamos de Epoca, en su número 24, publicado en 1985, la frase del ministro de Cultura,

> *"... al anunciar que el Museo del Prado aumentaba su espacio en un 50%, 'o sea, añadió, que duplica su superficie actual'. Pues tampoco, don Javier, eso sería un 100%".*

Bueno, pues de éstas, "asín, asín", como diría el dúo Sacapuntas. Esto escribe Ya, por ejemplo:

> *"... en 1960 el número de estudiantes universitarios ascendía a un total de 77.123, cifra que en 1978 superaba los setecientos mil alumnos, lo que supone un incremento del 381 por 100".*

Ayúdenme a hacer las cuentas, por favor, que a mí no me

salen. Ahora que lo dramático es la pobre gente que trabaja y encima tiene que poner dinero. Como Pedro Erquicia, que se lamenta en Hola de 13-8-1983:

> *"Estoy cobrando el ciento seis por ciento menos que antes".*

Y eso no es anda comparado con lo que un atribulado colega escribe a la revista Muface y ésta publica en su número 70, de 1985. Alude a los perjuicios económicos producidos por la nueva normativa sobre la jubilación que, además de anticiparse en cinco años, se ve afectada por estos estragos:

> *"Que la pensión que hubiera podido corresponderte de acuerdo con el sistema vigente hasta el 31-XII-84, queda disminuída, para los profesores agregados de I.B., entre un 20 por 100 si se cuenta con treinta años de servicios y un ¡cuatrocientos por cien! si sólo se llevan nueve años en el Cuerpo".*

El subrayado lo puso el autor y reconocerán Vds. que no es para menos. Claro que éstas son sopas y pan pintado al lado de lo que escribe Eloy Rosillo en Gaceta Ilustrada del 24-12-1978:

> *"En 1975 había unos seiscientos profesionales de la música dándole al do, re, mi, fa, sol. En 1978 hay tan sólo sesenta y tantos. La disminución anda casi por el mil por cien".*

¡Acabáramos, hombre! A ver si va a resultar que una disminución -o un aumento, como en el caso del ministro- del n por 100 quiere decir que lo que antes era n se ha convertido en 100... Entonces, una disminución del 100 por 100 equivaldría a que todo quedase igual. ¡Pues ya hay qué tener ganas de decirlo mal! Y de que nadie lo entineda, por consiguiente: porque, ¡qué sería, entonces, la disminución del 20 por 100 del agregado de instituto? ¡El misterio sigue siendo insondable!

Algunos son más cucos y no quieren meterse en esas honduras. Observen la rara astucia de un tal Stanton B. Clayton que en el número 174 de Historia y Vida, del año 1982, hace este comentario esclarecedor:

"Un diamante no vale sólo su peso en quilates, sino que su valor aumenta proporcionalmente. Y así, un diamante de diez quilates no vale diez veces más que un diamante de un diamante de un quilate: vale mucho más".

¿Cuánto más? Nuestro hombre no ha querido que le pille el toro. Pero le pilla: porque, entonces, ¿cómo puede decir que su valor aumenta proporcionalmente?

He aquí otra prueba indicativa de lo abrumador y espinoso que a veces puede resultar el cálculo de una proporción. Lo leemos en Epoca, nº 58, de abril de 1986:

"Los medios públicos o privados de información audiovisual proporcionan abundantes perlas supercultivadas. De ésas que se oyen una sola vez, pero dejan tras de sí el pánico o el asombro. Por ejemplo: Cuando Matías Prats, junior, nos hablaba de -cito- 'las tres primeras cuartas partes' de un encuentro futbolero. ¿Y los flojitos en álgebra, qué?".

¡Y tanto! Sobre todo cuando se es tan rematadamente flojito como el que escribe; lo suyo sí que es una perla digna de pánico, no la de Matías Prats, junior.

Mucho más ilustrada, Victoria Abril nos cuenta en Ya dominical de 29-6-1986 su predilección por la música de Bach y Mozart y de que de los años cincuenta hacia aquí ya no entiende nada; hasta los Beatles le pillan tarde, cuando tenía lo menos ocho o nueve años y sólo le entretenían Tchaikowsky y Ravel. Y dice la anciana:

"Mi colección de discos son tres terceras partes música clásica y una tercera el jazz".

¡Pero cómo está subiendo la vida! Hasta la unidad vale ya cuatro terceras partes. Y no es un caso aislado. Nos dice Muface en su número 56 (1984) que, según encuesta sobre la LODE realizada por el CIS (Centro de Investigaciones Sociológicas):

"El 90 por 100 opina que la LODE garantiza 'mejor' que antes el derecho de todos a la educación, el 15 por 100 piensa que 'igual' y el 12 por 100 estima que ese derecho empeora".

Ya me salen 117 por 100; eso sin contar los "no saben, no contestan". Pero sigue, impertérrito:

"El 20 por 100 de los encuestados están 'muy de acuerdo' con la opinión de que los consejos escolares crearán puentes de comunicación entre la familia y la escuela, el 31 por 100 'bastante de acuerdo', el 90 por 100 'poco' y el 4 por 100 nada".

Tiene Vd. razón caballero: menudo "cis" tenemos organizado. Pero si hemos de meternos con las encuestas, más vale que entremos en el apartado siguiente:

5. ESTADISTICA VIENE DE ESTADIO

Quiero decir que la tratan a patadas. Empecemos por una cosa muy sencilla que decía Gaceta Ilustrada en su número 1268 de 25-1-1981:

"La renta media de los padres de los jóvenes que participaron en la encuesta se cifra en unas 60.000 pesetas, lo que significa que más de la mitad de las familias getafeñas ganan menos de esa cantidad".

Pues es probable, pero no se deduce muy claramente de los datos; también podría haber sido al revés. En cambio, lo que no tiene vuelta de hoja es lo que dice Ya en 27-11-1979:

"Prueba de ello son las recientes estadísticas que hemos realizado y que nos han dejado sorprendidos: de toda la población reclusa, sólo un 7 por 100 ha pasado anteriormente por un tribunal tutelar. Es decir, sólo hay un 7 por 100 que reincide cuando llegan a adultos".

¡Toma, Jeroma, pelota de goma! Claro que estamos sorprendidos: si de cada 100 reclusos, 7 han pasado por un tribunal tutelar, ¿podemos decir que, de cada 100 que han pasado por el tribunal, 7 han reincidido? Está visto que, si a los muchos problemas que tiene la Justicia española añadimos los que provienen de la interpretación de las estadísticas, vamos buenos.

Otra interpretación interesante es la que en el mismo periódico, de fecha 8-9-1981, hace María Isabel Serrano:

"A la vista de los datos el mayor número de suicidios se producen entre personas mayores de sesenta años, con alguna enfermedad crónica o tara física. Más hombres que mujeres y, de los varones, el 90 por 100 alfabetos; es decir, a mayor nivel cultural, mayor es el número de suicidios".

Estoy imaginando al paciente y querido lector sumido en la perplejidad y la duda: ¿Pero qué ven mis castos ojos? ¿Habré leído bien? Ya lo creo: ha leído Vd. admirablemente, amigo. (Y el comentario ya no lo decimos aquí para no turbar también castos oídos).

Como la noticia que da El Correo Catalán el 12-8-1979:

"PEKIN.- China ha reducido a casi la mitad su tasa de crecimiento demográfico en los últimos siete años y es

pera poder bajarla a cero hacia el año 2000, según ha manifestado la viceprimer ministro, Chen Muhua, quien añadió que las familias con gran descendencia serán penalizadas".

Nada tendríamos que oponer, salvo en lo referente a la penalización, por supuesto. Pero, ¿qué me dicen del que ha redactado la cabecera de esta noticia?:

"China: Ningún nacimiento en el año 2000".

¡Qué sí, majo, que la ha metido Vd.!

Claro que uno ya no sabe a qué atenerse. Nada menos que Juan Oró confía a Gaceta Ilustrada, del 20-5-1979:

"Partiendo de las observaciones recientes, que indican que un 20 por 100 de las estrellas semejantes al Sol poseen planetas alrededor de las mismas con masas menores del 1 por 100 de la masa de la estrella, puede decirse que la posibilidad de existencia de vida (inteligente o no) en otro plantea como la Tierra en otros sistema solares no es cero. Cálculos anteriores indican que dicha probabilidad varía entre un número muy bajo (igual o mayor que uno) y un número muy alto (igual o mayor que diez elevado a la novena potencia). Las más recientes observaciones, si se confirman, aumentan más aún dicha probabilidad".

¡Mi abuela! Nunca había conocido una probabilidad tan gorda. Cada vez se nota más la necesidad de reciclarse y ponerse al día. Y es que uno, en su ignorancia, ya no se atreve ni siquiera a opinar si estará bien o no lo que dice Epoca en el número 52 de marzo de 1986:

"Para el doctor Comerci, se define como 'estatura baja' aquella que está situada una o dos desviaciones típicas por debajo de la media".

Todas estas deficiencias personales nos ponen muy tristes, así que vamos a dejar ya estos sueltos periodísticos, más o menos jocosos, para centrarnos, como final, en un artículo, éste ya completamente en serio. Es de Angel Palomino, se titula "Malabarismo matemático" y lo publicó Heraldo de Aragón el 22-8-1979. Comienza diciendo:

> *"El mercado, cualquier tipo de mercado, necesita el auxilio de la estadística. Es indiferente qué cosa sea la mercancía -champán, insecticidas, ideas, creencias, televisores, automóviles, órganos eléctricos-; los expertos en la comercialización harán amplio y cacareado uso de la estadística".*

Y sigue más adelante:

> *"El caso es que por vender, por convencer, por alardear, por fanfarronear, por incordiar o por lo que sea, las estadísticas son manipuladas en beneficio de una verdad que es verdad: la verdad de quien las utiliza".*

A continuación nos explica detalladamente un modelo de manipulación:

> *"Se parte de algo muy sencillo: la cuenta de la vieja. Se cuentan las existencias de lo que sea, por ejemplo, guitarras; se suman todas las guitarras en manos de particulares, más las depositadas en museos, casas de empeño y establecimientos públicos, más las existencias en el comercio, y se hace la estadística: en Gerona hay 8.726 guitarras, en Toledo 14.761, en Cáceres -aunque parezca mentira- 19.999, etc. Lo mismo puede hacerse con, por ejemplo, los miopes. En Cuenca hay 93.625, en Lugo 138.766, en Zaragoza 216.128,...*
>
> *Estos son los supuestos datos, miope más guitarra menos; los totales cambian constantemente, pero los grandes números pueden considerarse válidos teniendo en*

> *cuenta la escasa influencia de las pequeñas variaciones. Después de este elemental acopio de datos, las cifras son manipuladas por los expertos que tienen las manos libres para declarar:*
>
> *I. Que en Gerona hay 20,628 miopes por cada guitarra.*
>
> *II. Que las guitarras son más numerosas en las provincias en que es mayor el número de miopes.*
>
> *III. Que la miopía facilita el estudio de la guitarra.*
>
> *Y así sucesivamente hasta agotar todas las posibilidades según que se pretenda:*
>
> - *Pasar el rato.*
> - *Escribir un artículo para una revista médica o musical.*
> - *Vender guitarras.*
> - *Vender lentes de contacto blandas.*
> - *Vender partituras.*
> - *Vender discos.*
> - *Vender monturas de gafas.*
> - *Redactar una tesis doctoral.*
> - *Dar una conferencia en la Casa de la Cultura.*
> - *Demostrar que un señor es imbécil.*
> - *Denunciar el establishment.*
> - *Realizarse.*
> - *Irritar a un cegato."*

No otra cosa es lo que hemos visto en algún recorte anterior. O lo que el autor dice también:

> *"Si observamos -y cuantificamos- el hecho de que la mayor parte de las chicas prefieren hoy el tabaco negro, podremos razonar que el rubio es cosa de hombres y que los fumadores de negrao son un poco afeminados. Y si se hace la estadística de los automovilistas que toman café -que son la mayor parte- podemos pensar, y afir-*

mar, que el café es un gran estimulante de la industria automovilística".

Y el final no puede ser más lúgubre:

> *"Sólo hay una estadística inalterable, fija desde siempre; ningún manipulador la utiliza, porque con ella es imposible jugar, confundir o hacer falsas profecías: la estadística de la muerte (...). La verdad de la muerte no tiene vuelta de hoja y es idéntica en la Europa verde, en el tercer mundo o en el Círculo Polar. En Madrid, como en Berlín, en Bangkok, en Nueva York, en Almería, en Copenhague o en Quebec, las estadísticas de la muerte son idénticas: un muerto por habitante; un muerto por persona. Y así siempre".*

Pues que Vds. descansen en paz.

LA PROBABILIDAD EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS: UNA FORMALIZACION

Andrés Ruiz Merino
I.N.B. "Blas de Otero", Madrid

En el cálculo de probabilidades se define el concepto de probabilidad condicionada; después se demuestran los teoremas de la probabilidad total, teorema de Bayes y otros. Aparecen fórmulas como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(H_i/B) = \frac{P(B/H_i)\,P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/H_j)\,P(H_j)}$$

En estas y otras fórmulas se supone siempre un espacio probabilístico (Ω, ψ, P) asociado a una prueba o experimento aleatorio E, siendo A, B, y los H_i sucesos de ψ y constituyendo los n sucesos H_i una partición del espacio muestral Ω. No obstante, el hecho de que los sucesos que aparecen en las fórmulas deben ser partes del mismo espacio muestral se suele pasar por alto con frecuencia cuando se trata de pruebas compuestas. Veamos un ejemplo típico.

Ejemplo: Disponemos de dos urnas. La primera con 5 bolas blancas, 4 negras y 6 marrones. La segunda contiene 2 bolas blancas y 8 negras. Se extrae una bola de la primera urna, se anota su color y se introduce en la segunda urna. A continuación se extrae una bola de la segunda urna y se anota el color.

Las preguntas que solemos hacernos se refieren a la probabilidad de que salga, por ejemplo, negra en la segunda extracción habiendo salido blanca en la primera; la probabilidad de que salga negra en la segunda, etc.

Si escribimos B_1 = "blanca en la primera extracción", N_1 = "negra en la primera extracción" y análogamente para M_1, B_2, N_2 y M_2

$$P(N_2/B_1)=8/11; \quad P(N_2)=P(N_1)\,P(N_2/N_1)+P(N_2/B_1)\,P(B_1)+P(N_2/M_1)\,P(M_1)=\frac{124}{165}$$

En la resolución de las dos cuestiones hemos considerado los sucesos sin tener en cuenta que no son parte del mismo espacio muestral tal y como exige el uso de probabilidades condicionadas; además aparecen, al menos, tres probabilidades que no se distinguen en la formulación.

Estos son los errores formales más frecuentes y es en las pruebas compuestas por dos o más experimentos cuando se producen. Naturalmente el resultado es correcto y el resultado se entiende desde un punto de vista intuitivo. En las líneas siguientes vamos a tratar de formular el marco teórico para poder llevar a cabo su correcta interpretación.

PRUEBAS COMPUESTAS

Consideremos dos pruebas E_1 y E_2 con espacios muestrales Ω_1 y Ω_2 y álgebras de sucesos ψ_1 y ψ_2. Si queremos ahora considerar la prueba resultado de realizar primero E_1 y luego E_2, lo natural es asignar a esta prueba, que llamaremos E, el espacio muestral $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ya que los resultados se pueden considerar como pares. Supondremos que las álgebras de sucesos de los tres experimentos son

$$\psi_1 = P(\Omega_1), \qquad \psi_2 = P(\Omega_2), \qquad \psi = P(\Omega)$$

Para el desarrollo de lo que sigue es indiferente que los espacios muestrales sean finitos o infinitos numerables. Lo haremos para el caso de conjuntos finitos. Escribiremos pues:

$$\Omega_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, \qquad \Omega_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

Definimos ahora las inyecciones $i_1\colon \psi_1 \to \psi$, $i_1(A) = A \times \Omega_2$, $i_2\colon \psi_2 \to \psi$, $i_2(B) = \Omega_1 \times B$. Los sucesos del tipo $i_1(A)$ representan "A en la primera prueba y cualquier resultado en la segunda" y, análogamente, $i_2(B)$ quiere decir "cualquier resultado en la primera y B en la segunda"; aunque bastaría decir simplemente "A en la primera prueba" o "B en la segunda prueba". Se tiene así, una identificación entre los sucesos de las pruebas E_1 y E_2 y parte de los sucesos asociados a la prueba compuesta E.

Es fácil comprobar que $i_1(\psi_1)$ e $i_2(\psi_2)$ son álgebras de Boole y que, designando ambas inyecciones por i, se verifica:

$$i(C \cup D) = i(C) \cup i(D), \qquad i(\phi) = \phi, \qquad i(A^c) = i(A)^c$$

tomando la última operación c respecto de la imagen de ψ_1 o ψ_2 por alguna de las inyecciones i_1 o i_2.

Para facilitar la escritura pondremos $i_1(A) = \underline{A}$, $i_2(B) = \underline{B}$, para cualesquiera A y B de ψ_1 y ψ_2 respectivamente. La propiedad más importante es:

$$A \times B = \underline{A} \cap \underline{B}$$

cuya interpretación es obvia: el suceso "A en la primera prueba y B en la segunda" se puede interpretar como una intersección de sucesos en ψ. Esto tiene interés ya que las propiedades de la probabilidad hacen referencia a uniones o intersecciones de sucesos pero no a los productos. La demostración del resultado es inmediata.

ESPACIOS DE PROBABILIDAD EN PRUEBAS COMPUESTAS

Suponemos ahora dos pruebas E_1 y E_2 con espacios muestrales y álgebras de sucesos (Ω_1, ψ_1) y (Ω_2, ψ_2) respectivamente. Pueden darse dos casos:

A) Que consideremos reflejadas las situaciones mediante los espacios de probabilidad:

$$\{\Omega_1, \psi_1, P_1\} \text{ para } E_1 \quad \text{y } \{\Omega_2, \psi_2, P_2\} \text{ para } E_2$$

Es el caso de las pruebas repetidas con reposición: Se extrae una carta de una baraja, se duelve al mazo, y extraemos otra; o se dispone de una urna de la que extraemos una bola, se repone, y luego extraemos otra. En estos casos se trata del mismo espacio probabilístico. O situaciones como la siguiente: El experimento E_1 consiste en tirar una moneda y observar el resultado y el E_2 en tirar un dado y anotar el número de la cara superior.

Al decidir que basta una sola probabilidad para reflejar lo que pasa en la segunda prueba estamos afirmando que, en nuestra opinión, los experimentos son lo que en frase habitual se conoce por "estocásticamente independientes".

B) En otros casos la situación es bien distinta: no nos basta para encontrar un modelo de la situación con una sola probabilidad en la segunda prueba. Observemos el ejemplo puesto más arriba:

Para E_1 (primera urna) se tiene Ω_1 y P' definidos por

$$\Omega_1 = \{B_1, N_1, M_1\}, \quad P'(B_1) = 5/15,\ P'(N_1) = 4/15,\ P'(M_1) = 6/15$$

Para E_2 tenemos $\Omega_2 = \{B_2, N_2, M_2\}$ y se necesitan tres probabilidades P_1, P_2, P_3 definidas así:

$$P_1(B_2) = 3/11, \quad P_1(N_2) = 8/11, \quad P_1(M_2) = 0$$

para la situación "salir blanca en la primera extracción".

$$P_2(B_2) = 2/11), \quad P_2(N_2) = 9/11, \quad P_2(M_2) = 0$$

para la situación "salir negra en la primera extracción".

$$P_3(B_2) = 2/11, \quad P_3(N_2) = 8/11, \quad P_3(M_2) = 1/11$$

para la situación "salir marrón en la primera extracción".

Obsérvese que en el segundo espacio muestral se incluye también el suceso "marrón", M_2, en las tres situaciones, con el objeto de que Ω_2 sirva para los tres casos.

Así pues, en este caso hemos necesitado tres funciones de probabilidad para la segunda prueba: tantas como resultados tenía el primer espacio muestral.

En general, si $E_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y estamos en situaciones de este tipo se requerirán para E_2 los espacios:

$$(\Omega_2, \psi_2, P_i) \qquad 1 \leq i \leq m$$

Esto refleja nuestra opinión acerca de lo que ocurre: los resultados de la segunda prueba dependen de lo que pase en la primera, o, como se suele decir: las pruebas son "estocásticamente dependientes".

ASIGNACION DE PROBABILIDAD EN PRUEBAS INDEPENDIENTES

Vamos a definir una probabilidad P sobre $\psi = P(\Omega)$ de forma que:

i) $P(\underline{A}) = P_1(A)$, $P(\underline{B}) = P_2(B)$ para $A \in \Omega_1$ y $B \in \Omega_2$.

ii) $P(\underline{A} \cap \underline{B}) = P(\underline{A})\ P(\underline{B})$.

Esto quiere decir que la nueva probabilidad debe coincidir con las probabilidades dadas P_1 y P_2 sobre los sucesos de $i_1(\psi_1)$ y de $i_2(\psi_2)$ y que los sucesos $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son independientes para cualesquiera $A \in \Omega_1$ y $B \in \Omega_2$, respetándose, de esta forma la definición formal de independencia de sucesos.

Si en ii) sustituimos $\underline{A}$ por $\underline{a}_i$ y $\underline{B}$ por $\underline{b}_j$ se debería cumplir $P(\underline{a}_i \cap \underline{b}_j) = P(\underline{a}_i)\ P(\underline{b}_j)$. Ahora bien, dado que se verifica que $\underline{a}_i \cap \underline{b}_j = (a_i, b_j)$ y la condición i), la probabilidad P que deseamos construir habrá de ser tal que

$$P(a_i, b_j) = P_1(a_i)\ P_2(b_j) \qquad (1)$$

Teorema.- La función P definida a partir de la condición (1) sobre ψ es una probabilidad.

Demostración.- Basta observar que:

$$\sum_{i=1,j=1}^{m,n} P(a_i, b_j) = \sum_{i=1}^{m} P_1(a_i) \sum_{j=1}^{n} P_2(b_j) = 1.1 = 1$$

Para un suceso cualquiera de la forma $A \times B$ o lo que es igual de la forma $\underline{A} \cap \underline{B}$ se tiene:

$$P(A\ B) = \sum_{a\in A, b\in B} P(a,b) = \sum_{a\in A, b\in B} P_1(a)\ P_2(b) = \sum_{a\in A} P_1(a) \sum_{b\in B} P_2(b) =$$

$$= P_1(A)\ P_2(B) \qquad (2)$$

Ahora bien, según esto:

$$P(\underline{A}) = P(A \times \Omega_2) = P_1(A)\ P_2(\psi_2) = P_1(A).1 = P_1(A)$$

$$P(\underline{B}) = P(\Omega_1 \times B) = P_1(\psi_1)\ P_2(B) = 1.P_2(B) = P_2(B)$$

con lo que se verifica la condición i). Y sustituyendo en (2)

$$P(A \times B) = P(\underline{A} \cap \underline{B}) = P(\underline{A})\ P(\underline{B})$$

que es la condición ii).

La ya propiedad ii) nos dice que los sucesos $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son independientes para la probabilidad P. Ahora tiene pleno sentido decir que la prueba E está formada por dos experimentos estocásticamente independientes ya que los sucesos de ambas pruebas son independientes en el sentido de la definición de independencia de sucesos.

ASIGNACION DE PROBABILIDAD EN PRUEBAS DEPENDIENTES

En este caso, para la primera prueba E_1 designamos su espacio de probabilidad por (Ω_1, ψ_1, P'). Para la segunda prueba tenemos la colección de espacios (Ω_2, ψ_2, P_i), $1 \leq i \leq m$ y, tal y como hemos visto en el ejemplo anterior, a cada resultado a_i asociamos la probabilidad P_i.

Vamos a definir una probabilidad P sobre ψ de forma que:

i) $P(\underline{A}) = P'(A) \qquad A \in \psi_1$

ii) $P(a_i \times B) = P_i(B)\ P'(a_i) \qquad B \in \psi_2$.

La condición i) indica que P deberá coincidir con P' sobre los sucesos de ψ_1. La condición ii), esencial, dice que P deberá estar de acuerdo con nuestra idea intuitiva: la probabilidad de que ocurra primero a_i y después B es el producto de la probabilidad de a_i por la de que suceda B después de haber ocurrido a_i (o condicionado por a_i).

Si en ii) sustituímos B por b_j, el suceso $a_i \times B$ se convierte en (a_i, b_j) y la propiedad exigida en

$$P(a_i, b_j) = P_i(b_j)\ P'(a_i) \qquad (3)$$

Teorema.- La función P definida sobre ψ a partir de la condición (3) es una función de probabilidad.

Demostración.- Bastará comprobar que la suma de las probabilidades extendida a los elementos de Ω vale 1.

$$\sum_{i=1,j=1}^{m,n} P(a_i, b_j) = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} P_i(b_j)\ P'(a_i) = \sum_{j=1}^{n} P_1(b_j)\ P'(a_1) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} P_2(b_j)\ P'(a_2) + \ldots\ldots + \sum_{j=1}^{n} P_m(b_j)\ P'(a_m) = P'(a_1) \sum_{j=1}^{n} P_1(b_j) +$$

$$+ P'(a_2) \sum_{j=1}^{n} P_2(b_j) + \ldots\ldots + P'(a_m) \sum_{j=1}^{n} P_m(b_j) = P'(a_1) + P'(a_2) +$$

$$+ \ldots\ldots + P'(a_m) = 1$$

Igualdades que se justifican por el hecho de ser P' y las P_i funciones de probabilidad.

Comprobemos ahora que i) y ii) son propiedades de P:

$$P(\underline{a}_i) = P(a_i \times \Omega_2) = \sum_{j=1}^{n} P_j(b_j)\ P'(a_i) = P'(a_i) \sum_{j=1}^{n} P_i(b_j) = P'(a_i)$$

y puesto que los sucesos $\underline{a}_i$ son disjuntos y para cada suceso A se verifica

$$\underline{A} = \bigcup_{a_i \in A} \underline{a}_i$$

se comprueba que:

$$P(\underline{A}) = \sum_{a_i \in A} P(\underline{a}_i) = \sum_{a_i \in A} P'(a_i) = P'(A)$$

que es la i).

Por otro lado,

$$P(a_i \times B) = \sum_{b \in B} P(a_i, b) = \sum_{b \in B} P_i(b)\ P'(a_i) = P'(a_i) \sum_{b \in B} P_i(b) =$$

$$= P'(a_i)\ P_i(B)$$

que es la condición ii).

Puesto que ya tenemos definida una probabilidad sobre ψ, es lícito hablar de probabilidades condicinadas. Veamos lo que quiere decir, ahora, la probabilidad de que suceda b_j en la segunda prueba sabiendo que ha ocurrido a_i en la primera: se trata de $P(\underline{b}_j/\underline{a}_i)$, supuesto que sea $P(\underline{a}_i) = P'(a_i) \neq 0$:

$$P(\underline{b}_j/\underline{a}_i) = \frac{P(\underline{a}_i \cap \underline{b}_j)}{P(\underline{a}_i)} = \frac{P(a_i, b_j)}{P'(a_i)} = \frac{P'(a_i)\ P_i(b_j)}{P'(a_i)} = P_i(b_j)$$

De manera que,

$$P(\underline{b}_j/\underline{a}_i) = P_i(b_j)$$

resultado que traduce nuestra idea intuitiva al asignar las probabilidades P_i. Análogamente:

$$P(\underline{B}/\underline{a}_i) = \frac{P(a_i \times B)}{P(\underline{a}_i)} = \frac{\sum_{b \in B} P(a_i, b)}{P'(a_i)} = \frac{P'(a_i)\ P_i(B)}{P'(a_i)} = P_i(B)$$

lo cual completa el significado de las probabilidades P_i.

Veamos cómo se calcula ahora $P(\underline{B})$ para cualquier $B \in \Omega_2$:

Teniendo en cuenta que los sucesos $\underline{a}_i$, $1 \leq i \leq m$ forman una partición de Ω se puede aplicar el teorema de la probabilidad total

$$P(\underline{B}) = \sum_{i=1}^{m} P(\underline{B}/\underline{a}_i)\ P(\underline{a}_i) = \sum_{i=1}^{m} P_i(B)\ P'(a_i)$$

En fin, todas las aplicaciones del cálculo de las probabilidades a las pruebas compuestas tienen un sentido claro y todas las operaciones que se hacen de forma intuitiva tienen como era de suponer, una interpretación formal y correcta. Si nos fijamos en el ejemplo propuesto al principio es claro que se ha empleado en él el teorema de la probabilidad total para calcular $P(N_2)$.

Por otro lado, si en las fórmulas que se han escrito a lo largo del trabajo no distinguimos los nombres de las probabilidades ni los símbolos de los sucesos eliminando el subrayado nos encontramos con las fórmulas usuales. La última, por ejemplo quedaría:

$$P(B) = P(B/a_1)\ P(a_1) + P(B/a_2)\ P(a_2) + \ldots$$

El asunto se ha tratado para espacios muestrales finitos. En el caso de los espacios muestrales infinitos numerables las demostraciones involucran series absolutamente convergentes y series dobles. No obstante las demostraciones no varían precisamente por la convergencia absoluta de las series. Para convencerse basta consultar algún libro de análisis. Por ejemplo, T.M. Apostol, Análisis matemático, 2ª edición de la Editorial Reverté.

<u>OBSERVACION</u>

En el caso de las pruebas dependientes es posible que los resultados de la primera prueba influyan no solo en las probabilidades de la segunda sino en el espacio muestral haciendo que éste varíe. En el ejemplo que encabeza el trabajo, el resultado M_2 solamente tiene sentido en el caso de que se produzca M_1. La solución adoptada en el ejemplo consiste en meterlo en el espacio muestral y darle probabilidad nula cuando es imposible.

Esta forma de actuar puede servir de pauta en el caso general: Un espacio probabilístico (Ω, ψ, P) se puede sustituir siempre por otro (Ω', ψ', P') en el que $\Omega \subset \Omega'$, $P'/\Omega = P$ y $P'(x) = 0$ si x no está en Ω. En las pruebas dependientes la situación queda reflejada en su caso más general por m espacios

$$(\Omega_2^i, \psi_i, P_i) \qquad 1 \le i \le m$$

uno para cada resultado a_i de Ω_1. Podemos hacer que el espacio muestral de la segunda prueba sea el mismo independientemente de a_i, sustituyendo los Ω_i por $\Omega = \bigcup \Omega_i$, y haciendo que sea $P_i(x) = 0$ cuando x no está en Ω_i manteniéndo el valor de P_i para los resultados de Ω_i. De esta forma queda para la segunda prueba un único espacio muestral y una única álgebra de sucesos variando solamente la probabilidad con los resultados de la primera prueba.

- ANECDOTARIO -

LA APUESTA POLYA-WEYL

Por J. Lobo

En Zürich, el 9 de Febrero de 1918, se hace la siguiente apuesta entre H. Weyl y G. Polya. La apuesta se refiere a los dos teoremas de la matemática contemporánea:

1) Todo conjunto numérico acotado tiene una cota superior estricta.

2) Todo conjunto numérico infinito tiene un subconjunto numerable.

Weyl predice:

A. En el plazo de 20 años (hasta el final de 1937), el propio Polya o la mayoría de los matemáticos destacados, admitirán que los conceptos de número, conjunto, numerabilidad, que aparecen en los anteriores teoremas y de los que, en la actualidad, se acepta, comúnmente, que dependen de ellos son completamente vagos y que dejarán de considerarse la certeza o falsedad de dichos teoremas.

B. Se reconocerá por el propio Polya o por la mayoría de los matemáticos prominentes, que los teoremas 1) y 2) son falsos, de acuerdo con una interpretación clara de ellos, razonablemente posible (o bien se discutirán varias de tales interpretaciones, o se habrá alcanzado una cierta avenencia entre ellas) o que si en el inter valo de tiempo señalado, se encuentra una interpreta ción clara de los dos teoremas tal que, por lo menos, uno de ellos resulte cierto, será debido a la aparición de una nueva fundamentación de la Matemática en la que los conceptos de número y conjunto hayan adquirido un significado que, hoy en día, no se puede anticipar.

Si la predicción se cumple, gana Weyl, en caso contrario, gana Polya.

Si al final del tiempo señalado no se pudiera decidir el ganador, los Profesores de Matemáticas (excluídos los apostantes) de la E.T.H. y de las Universidades de Zürich, Göttingen y Berlín deberán decidir la cuestión; la decisión será por mayoría y, en caso de empate, lo mejor será considerar la apuesta indecisa.

La publicación en los "Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" de las condiciones de la apuesta y del resultado de ella, serán a cuenta del perdedor.

La decisión de la apuesta, al quedar al arbitrio de la mayoría y ser los matemáticos intuicionistas (H Weyl) claramente minoritarios, supongo que sería a favor de Polya, pero tampoco me extrañaría que hubiera una sentencia grata para las dos partes. He intentado consultar los "Jahresberichten" del año 1937, pero no me ha sido posible lograrlo. Sería interesante, por lo menos para mí, si alguien que conozca el final de esta curiosa apuesta nos informara sobre él.

DIÁLOGO ENTRE PETRA Y BLANCA, DOS ECUACIONES COTILLAS DE PRIMER GRADO, SOBRE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON COEFICIENTES REALES

Por Arturo Mandly Manso
del I.F.P. de Don Benito

Blanca -- Que te digo yo, Petra, que son ambiguas... Siempre dan dos soluciones, como si con una no tuvieran bastante...

Petra -- Tanto como siempre, no; hay algunas que son decentes y solo dan una solución.

Blanca -- ¡ Qué va ! eso son tonterías tuyas; que te dejas engañar por algunas de las nuestras que se dedican a elevarse al cuadrado, para decir que son nada menos que de segundo grado; y si no, extráeles la raiz cuadrada, vas a ver en qué se quedan.

Petra -- La verdad, Blanca, es que a veces tengo unas pesadillas... Sueño que de mi salen infinitas ecuaciones de segundo grado. Me elevan al cuadrado, luego me multiplican por números... ¡ Qué pesadillas ! .

Blanca -- Además, ¡ Fíjate si son complicadas... que necesitan hasta una fórmula general para obtener sus soluciones !

Petra -- Pero hay algunas que no necesitan de esa fórmula para obtenerlas; me parece que se llaman incompletas, pues por lo visto les falta alguno de sus términos.

Blanca -- ¡ Incompletas ! ... ¡ Lisiadas !, eso es lo que son ¡ Lisiadas ! La verdad es que esas a las que le falta el término independiente no son ni más ni menos que una de las nuestras que, para convertirse en ecuación de segundo grado, se les ha ocurrido la genial idea de multiplicarse por X . Pero para sorpresa de ellas, han quedado lisiadas; y para colmo, una de sus soluciones es nada ¡ vamos, cero ! . Y no me hables de las que les falta el término de primer grado. ¡ Vamos ! no me dirás que no te has dado cuenta de que son otras de las nuestras, que han cogido a la incógnita y le han puesto un cuadrado, y ¡ claro ! , como es lógico, lo que han hecho,suplantar los términos de primer grado con los de segundo; y por tanto, la solución es lógicamente la misma, pero extrayéndole la raiz cuadrada, con su doble signo. En fín, que siempre llevarán la disputa entre sus soluciones, pues siempre son ¡ opuestas ! .

Petra -- La verdad es que tienes razón; ya me he percatado de que a las que les falta el término independiente, con dividirlas por X, obtenemos una solución y lógicamante la otra solución es nada ¡ vamos, cero ! . Sin embargo yo, a las otras incompletas siempre las había asociado con suma por diferencia; pero en fín, ahora que me lo has dicho tu, me dejas en la duda. De todas formas, no dudarás de hay algunas que tienen una gran imaginación ¿ no ?

Blanca -- ¿ Imaginación ? Yo te digo que esas que se hacen llamar imaginarias, son ecuaciones contradictorias; y que para justificarse ante la realidad, se les ocurre decir que son imaginarias, que pertenecen a otro mundo más complejo. Vamos, como si con el mundo real no tuviesen suficiente... Además, fíjate si no tienen claro lo que son, que necesitan disfrazar sus soluciones, utilizando la letra i ; vamos, que sus soluciones son de alucine, chica.

Petra -- Dicen que sus soluciones son conjugadas; y que necesitan del plano para representarse ¡ Vamos, que no tienen suficiente con la derecha y la izquierda !

Blanca -- ¡ Anda, Petra, vámonos ! Que muchas veces, el signo de multiplicar que nos está uniendo, me hace dudar a veces, si no seremos una ecuación de segundo grado.

Petra -- ¡ Anda, vamos ! , ¡ No digas tonterías ! ¡ Faltaría más !

**** Las ecuaciones que dialogan son:

Blanca $(3x + 6) = 0$

Petra $(2x - 4) = 0$

RESEÑA DE LIBROS

"ROSQUILLAS ANUDADAS Y OTRAS AMENIDADES MATEMATICAS", por Martin Gardner. Editorial Labor, S.A.Barcelona, 1987. X + 302 págs.

Resulta supérflua la presentación del autor de este libro, Martin Gardner, a nuestros lectores; todos habrán disfrutado con la lectura de alguno delos artículos que con el nombre de "Juegos Matemáticos" ha venido publicando en la revista "Scientific American", cuya versión española es "Investigación y Ciencia", o de alguno de los cuarenta libros que lleva publicados, once de los cuales son recopilaciones de los artículos citados, completadas con otros inéditos y enriquecidas con el fruto de la copiosa correspondencia que los lectores entusiastas mantenían con el autor, fascinados por la belleza de los temas presentados.

Muchos de esos libros han sido traducidos al castellano; entre ellos, "Izquierda y Derecha en el Cosmos", "Nuevos pasatiempos matemáticos", "Circo Matemático", "Carnaval Matemático", "Festival Mágico-Matemático", "Máquinas y Diagramas Lógicos" y "Orden y Sorpresa", editados por Alianza E.; La Editorial Labor ha hecho llegar a los lectores españoles los famosos " ¡ Ajá ! ", "Paradojas ¡ Ajá ! " , "Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas" (Ver el nº 8 de nuestro Boletín) y ahora nos ofrece en castellano "Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas", al que vamos a dedicar algunos párrafos.

La presentación del libro es magnífica, lo que contribuye a hacer atractivas sus páginas; pero una vez iniciada su lectura, los temas tratados son de tal interés, para una persona con alguna afición a la creación matemática, que ya no importaría una presentación deficiente. La conocida habilidad de Martín Gardner para conducir al lector desde inocentes planteamientos de problemas de apariencia elemental hasta el umbral de profundas cuestiones matemáticas, que a veces permanecen todavía abiertas, se muestra plenamente en este libro. No hay peligro de que los asiduos lectores de sus obras se vean hastiados por reiteraciones en los temas o en la manera de tratarlos: Gardner nos sorprende siempre con novedades y no deja de deleitarnos con su manera de exponerlas.

Podemos pasar una breve revista a los 21 capítulos del libro:

1. Coincidencias. Análisis esclarecedor sobre las desconcertantes coincidencias que observamos con frecuencia en la vida corriente y que parecen desafiar al cálculo de probabilidades.

2. El código Gray binario. Explicación de este código de expresión digital de la información, sus aplicaciones y sus sorprendentes relaciones con el rompecabezas de los aros chinos, el problema de las torres de Hanoi y otros.

3. Policubos. Un rompecabezas que da lugar a interesantes problemas, algunos todavía no resueltos.

4. La cifra de Bacon. Sobre el método ideado por Bacon para cifrar mensajes.

5. Rosquillas: En cadeneta y anudadas. Este artículo que da título al libro es notabilísimo, tanto por lo curioso de algunos de los resultados mostrados como por la importancia de la teoría topológica que subyace bajo ellos y también por la claridad y belleza de las figuras que lo ilustran.

6. El circuito de las flechas y otros problemas. Nueve problemas curiosísimos con sus ingeniosas soluciones.

7 y 8. Los huesos de Napier / El ábaco de Napier. Los curiosos métodos de cálculo ideados por Napier, hoy dia casi olvidados.

9. Sim, Tragón y Pista de carreras. Divertidos juegos que plantean interesantes problemas matemáticos.

10. Ascensores. Algoritmos para la programación de ascensores.

11 y 12. Números de cruces / Conjuntos de puntos sobre la esfera. Problemas de aspecto elemental que plantean profundas cuetiones sobre teoría de grafos y topología.

13 y 14. La paradoja de Newcomb / Reflexiones sobre ella. Interesante análisis de la paradoja de Newcomb en relación con el libre albedrío.

15. Invertir el pez y otros problemas. Ocho problemas con ingeniosas soluciones y sabrosos cometarios.

16. ¡ Salta a la vista !. Problemas cuya solución se facilita con la adopción de un buen diagrama.

17. Caminitos de oruga. Sobre las trayectorias planas de puntos móviles, orugas o tortugas de S.A. Papert, con maravillosas figuras y sorprendentes resultados.

18. Los problemas de Waring. Asombrosa excursión en torno a la conjetura de Waring, demostrada por D. Hilbert.

19. Abarrote, Bynum y Cuadrófago. Interesantes juegos, cuyo estudio matemático conduce a difíciles problemas.

20. I Ching. Documentadísimo estudio sobre los aspectos matemáticos de ese libro, uno de los más antiguos y enigmáticos del mundo.

21. La curva de Leffer. Sobre las prácticas habituales de muchos economistas a quienes les encanta trazar gráficas.

En resumen, un nuevo libro de Martin Gardner, de la calidad a que nos tiene acostumbrados, quizás algo más profundo que otros anteriores, con temas totalmente nuevos, fascinantes y ricos en sugerencias para los aficionados al razonamiento matemático.

J. F. B.

"ALGEBRA", 2 tomos, 927 págs.; "CALCULO", 2 tomos, 730 págs.; por J.A. Díaz Hernando, profesor titular de la E.T.S.I.I. de Madrid. Edit. Tebar Flores, Madrid, 1985-86.

El profesor Díaz Hernando ha volcado en cuatro libros de 400 páginas cada uno, aproximadamente, una obra pormenorizada, rigurosa y de un valor didáctico sobresaliente que contiene las materias de álgebra y cálculo infinitesimal propias del primer curso de las Escuelas Superiores de Ingeniería y de las Facultades universitarias de Ciencias.

Lo valioso de esta obra de Díaz Hernando es, en primer término, el lenguaje coloquial con el que está expuesta toda ella, hasta el punto de que constituye una conversación permanente con el lector, cuyas probables dudas o dificultades en captar la fina abstracción de algunos conceptos de comprensión laboriosa son sagazmente recogidas por el autor, que las hace desvanecerse con llamadas de atención y con ejemplos muy bien escogidos que penetran en la estructura íntima de esas ideas resistentes. En segundo lugar, después de cada definición, de cada demostración, de cada consecuencia hay, a lo largo de toda su obra, un conjunto numerosísimo de ejemplos y ejercicios que contribuyen a fijar definitivamente el contenido conceptual de los libros. Finalmente, se advierte en ellos la vertebración rigorista presente siempre en las obras de los buenos matemáticos, pero suavizada por el afán de hacerse entender y por la agilidad de la exposición. Al final de cada capítulo, en los cuatro libros, se incluye como novedad un conjunto de tests en forma de preguntas a las cuales se da varias respuestas, siendo al menos una de ellas la correcta; y también aquí las explicaciones son abundantes.

En el primero de los dos libros de álgebra se recoge el álgebra conjuntista, terminando con las aplicaciones lineales y el espacio dual. Las estructuras algebraicas son introducidas a través de la noción de magma (protoestructura o grupoide). Merecen mención la divisibilidad de polinomios y la estructura de espacio vectorial, donde se agudiza el valor didáctico, que se mantiene en el último capítulo, dedicado a la dualidad.

El segundo libro de álgebra consta de dos partes: la primera está dedicada a las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, con la guía de los homomorfismos de espacios vectoriales y las aplicaciones multilineales. En la segunda parte se incluye autovectores y autovalores de endomorfismos y de matrices, los problemas de diagonalización y triangulación. Son destacables las funciones matriciales y el espléndido capítulo sobre formas canónicas de las matrices. Todo ello poblado de ejemplos, ejercicios y sugerencias.

En el primer tomo de cálculo se empieza recordando algunas cosas elementales para evitar remitir al lector a otros libros. El contenido de éste que nos ocupa es la teoría de las funciones reales, que comienza con sucesiones numéricas. Este capítulo es extenso y prácticamente exhaustivo, y termina con una amplia y completa exposición de los criterios de convergencia. Continúa con las funciones reales de variable real, límites, continuidad, etc. El capítulo final contiene los conceptos, propiedades y cálculo de derivadas y diferenciales, teoremas de valor medio, aproximación de funciones y fórmulas de Taylor y MacLaurin, con sus aplicaciones al estudio local de las funciones.

En el tomo segundo de CALCULO destacan poderosamente los métodos de integración y tipos de integrales, así como el capítulo dedicado a las series numéricas y potenciales. Todo esto es digno de ser resaltado por su altura didáctica y el enjambre -no aleatorio, sino profundamente formativo- de ejercicios y problemas. El soporte teórico de todo ello es intachable, como ocurre también en las integrales paramétricas, impropias y elípticas.

Se trata, en definitiva, de una gran obra que deja satisfecho al lector más exigente.

V.F.

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTROS BOLETINES Y DE AQUELLOS PARA LOS QUE TODAVIA NO SE HAN RECIBIDO SOLUCIONES (INDICADOS CON XX)

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números										obs.
		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2 1984	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finlª)	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-86(Bogotá)	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2 1986	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
	Varios	-	-	-	-	-	-	17	17	11	17	C
10	China y Austª	XX	15	XX	XX	15	XX	XX	XX	XX	-	*
11	OME-f1 1986	13	14	14	14	14	XX	XX	15/	XX	12	
	OMI-86(Varsoª)	XX	XX	12	XX	-	-	-	-	-	-	*
12	OIM-87(Urug.)	16	14	14	17	15	17	-	-	-	-	C
	OME-f1-Extremª	-	-	-	-	-	-	15	15	15	XX	
13	OME-f2 1987	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
16	OME-f1 1987	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
17	OME-f2 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OME = Olimpiada Matemática Española - fase 1ª o 2ª.

Obs. C = Completada la publicación de soluciones
* = Esperamos especialmente de nuestros socios el envío de soluciones a estos problemas señalados con XX .

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA SEGUNDA FASE DE LA XXIV OLIMPIADA MATEMATICA ORGANIZADA POR LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA

PROBLEMA 1ª

Sea $(X_n)_{n \in N}$ una sucesión de números enteros, en que $X_1 = 1$ y se verifican las condiciones:

a) Para todo $n \geq 1$ $\quad X_n < X_{n+1}$

b) Para todo $n \geq 1$ $\quad X_{n+1} \leq 2n$

Probar que para todo entero natural K existen dos términos de la sucesión X_r y X_s tales que $X_r - X_s = K$.

PROBLEMA 2ª

Sobre una circunferencia se eligen n puntos ($n > 3$) y se numeran desde 1 hasta n en cualquier orden. Diremos que dos puntos no consecutivos a y b están relacionados si en uno de los dos arcos de extremos a y b todos los puntos están marcados con números menores que las marcas de a y de b. Demostrar que el número de pares de puntos relacionados es exactamente $n - 3$.

PROBLEMA 3ª

Probar que los binomios $25x + 31y$, $3x + 7y$ son múltiplos de 41 para los mismos valores de x e y.

PROBLEMA 4ª

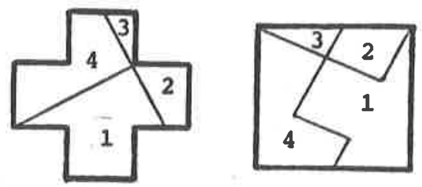
Se atribuye al matemático renacentista italiano Leonardo de Pisa (más conocido por Fibonacci) la sucesión definida así:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_i = a_{i-2} + a_{i-1} \quad (i > 2)$$

Tratar de expresar a_{2n} en función de los tres términos a_{n-1}, a_n, a_{n+1} (y sólo de ellos tres).

PROBLEMA 5ª

Es muy conocido el rompecabezas consistente en descomponer la cruz de la izquierda en cuatro partes con las que se pueda componer un cuadro, y suele darse la solución mostrada en la figura. Probar que existe una infinidad de soluciones distintas. ¿Alguna de ellas da lugar a cuatro partes iguales?



PROBLEMA 6ª

Calcular, para cualquier valor entero del parámetro t, soluciones enteras (x, y) de la ecuación

$$y^2 = x^4 - 22x^3 + 43x^2 - 858x + t^2 + 10\,452\,(t+39)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

El profesor F.O. Alonso nos envía soluciones pendientes de ejercicios propuestos en números anteriores de nuestro Boletín, con las cuales quedan completas las correspondientes a las de los números 8, 9 y 12. Agradecemos al mencionado profesor su colaboración.

PROBLEMA 3ª (Boletín nº 8)

Resolver la ecuación $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$. Sabiendo que sus raíces, reales y positivas, verifican la igualdad

$$\frac{r_1}{2} \div \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$$

Solución

Como la mayor parte de los coeficientes son literales, lo único que nos da la ecuación es que

$$r_1\, r_2\, r_3\, r_4 = \frac{5}{4}$$

Poniendo:

$$r_1 = 2s_1, \quad r_2 = 4s_2, \quad r_3 = 5s_3, \quad r_4 = 8s_4$$

tendremos,

$$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_4 = \frac{5}{4}$$

es decir,

$$s_1\, s_2\, s_3\, s_4 = \frac{1}{256} = 4^{-4}$$

Además, sabemos que s_1, s_2, s_3 y s_4 son reales y positivos, y que su suma es 1.

Pero es fácil ver, incluso sin recurrir al cálculo diferencial, que si $x+y+u+v$ es una descomposición arbitraria de la unidad en sumandos reales y positivos, el máximo valor de la función $f(x, y, u, v) = xyuv$ es 1/256 y sólo se alcanza cuando cada uno de los sumandos vale 1/4.

Entonces,

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = \frac{5}{4}, \quad r_4 = 2$$

y ésta es la única solución, salvo el orden al tomar las raíces.

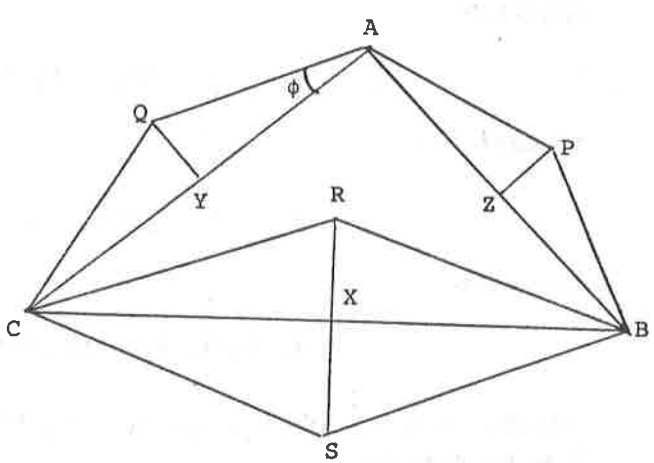
- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 7ª (Boletín nª 9)

Sobre los lados de un triángulo ABC se construyen triángulos isósceles semejantes, APB (AP = PB), AQC (AQ = QC) y BRC (BR = RC; los dos primeros están fuera del triángulo ABC y el tercero se superpone con él. Probar que APQR es un paralelogramo.

Solución

Bastará demostrar que son iguales los vectores $\overline{PA}$ y $\overline{RQ}$. Como muestra la figura, X, Y, Z son los puntos medios de los lados y pies de las alturas de los triángulos construídos. S es el punto simétrico de R respecto al lado BC.



Llamamos:

$$\overline{AZ} = \overline{c}\,, \quad \overline{BX} = \overline{a}\,, \quad \overline{CY} = \overline{b}$$

$$\overline{ZP} = \overline{c'}, \quad \overline{XS} = \overline{a'}, \quad \overline{YQ} = \overline{b'}$$

Puesto que $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{0}$, dividiendo por 2, $\overline{c} + \overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$.

Los vectores $\overline{a'}$, $\overline{b'}$, $\overline{c'}$ se obtienen de los $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, respectivamente por un giro de 90° y una homotecia de razón $k = \tan$. En términos de números complejos, si $\overline{a}$ y $\overline{a'}$ son la representación gráfica de los números complejos a y a', entonces $a' = kai$ (tal como está orientada la figura, en otro caso $a' = -kai$). Luego $\overline{a'} + \overline{b'} + \overline{c'} = \overline{0}$.

Ahora,

$$\overline{AP} = \overline{AZ} + \overline{ZP} = \overline{c} + \overline{c'}$$

$$\overline{RQ} = \overline{RX} + \overline{XC} + \overline{CY} + \overline{YQ} = \overline{a'} + \overline{a} + \overline{b} + \overline{b'}$$

Sumando queda,

$$\overline{AP} + \overline{RQ} = \overline{0}$$

como se quería demostrar.

- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 8ª (Boletín nª 9)

P es un punto dado en el interior de una esfera y A, B, C son tres puntos de la superficie esférica tales que PA, PB y PC son perpendiculares dos a dos. Sea Q el vértice diagonalmente opuesto a P en el paralelepípedo determinado por las aristas PA, PB y PC. Encontrar el lugar geométrico de Q.

Solución

Consideraremos primero el caso plano: "P es un punto del interior de una circunferencia de radio r y centro O, y A y B dos puntos de ella tales que PA y PB son perpendiculares. Hallar el l.g. de los puntos Q" (Figura 1).

PAQB es un rectángulo de centro M. como M es el punto medio de la cuerda AB, resulta OM perpendicular a MA

$$OM^2 + PM^2 = OM^2 + MA^2 = OA^2 = r^2$$

Pero el l.g. de los puntos M cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos, O y P, es constante (igual a r^2), es una circunferencia con centro en el punto medio de OP.

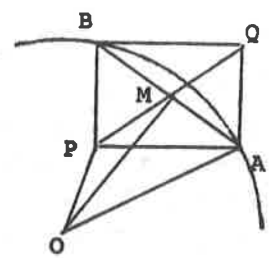


FIGURA 1

Se pasa de M a Q mediante una homotecia de centro P y razón 2. Entonces el l.g. de Q es una circunferencia de centro O.

Sabido ésto, se calcula el radio de esa circunferencia en función de r d = OP. Bastará tomar B en una posición cómoda: el extremo del radio que pasa por P (Figura 2)

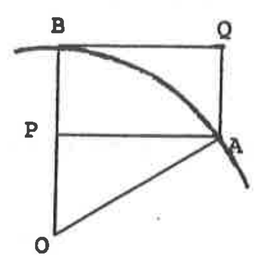


FIGURA 2

$$s^2 = OQ^2 = OB^2 + BQ^2 = OB^2 + PA^2 =$$

$$= OB^2 + OA^2 - OP^2 = 2r^2 - d^2$$

Se pasa ahora al problema propuesto en la esfera.

Para reducirlo al caso plano se toma el punto C fijo. La figura 3 representa la sección de la esfera por el plano OPC. Los puntos A y B están en una circunferencia: la sección de la esfera por el plano perpendicular a PC que pasa por P. El l.g. de los puntos Q' tales que APBQ' es un rectángulo, es otra circunferencia de ese plano con centro H y radio s ($s^2 = 2HK^2 - HP^2$), según se ha visto en el caso plano. El l.g. de Q es la circunferencia obtenida de la anterior por la traslación del vector $\overline{PC}$.

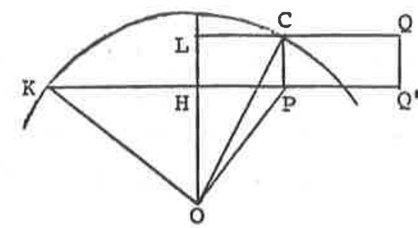


FIGURA 3

Tratemos de expresar OQ mediante R (radio de la esfera), D = OP y H = OH

$$OQ^2 = OL^2 + LQ^2$$

$$OL^2 = OC^2 - LC^2 = OC^2 - HP^2 = R^2 - (D^2 - h^2) = R^2 - D^2 + h^2$$

$$LQ^2 = HQ'^2 = s^2 = 2HK^2 - HP^2 = 2(R^2 - h^2) - (D^2 - h^2) = 2R^2 - D^2 - h^2$$

Entonces $OQ^2 = 3R^2 - 2D^2$ resulta independiente de h, y Q está situado sobre la esfera de centro O y radio S ($S^2 = 3R^2 - 2D^2$)

- ■ - ■ - ■ -

PROBLEMA 10ª (Boletín nª 9)

En el triángulo ABC, AB = AC. Una circunferencia es tangente interiormente a la circunscrita al triángulo ABC y también a los lados AB y AC, en los puntos P y Q, respectivamente. Probar que el punto medio del segmento PQ es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

Solución

En la figura 1 de la semejanza de los triángulos AIT y AHB resulta

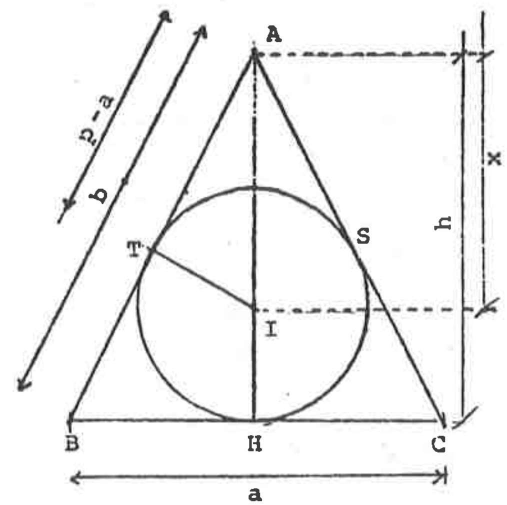
$$\frac{AI}{AB} = \frac{AT}{AH}$$

es decir,

$$\frac{x}{b} = \frac{p-a}{h}$$

luego

$$x = \frac{b}{h}\,(p-a)$$



En la figura 2, de la semejanza de los triángulos AKP y AHB resulta,

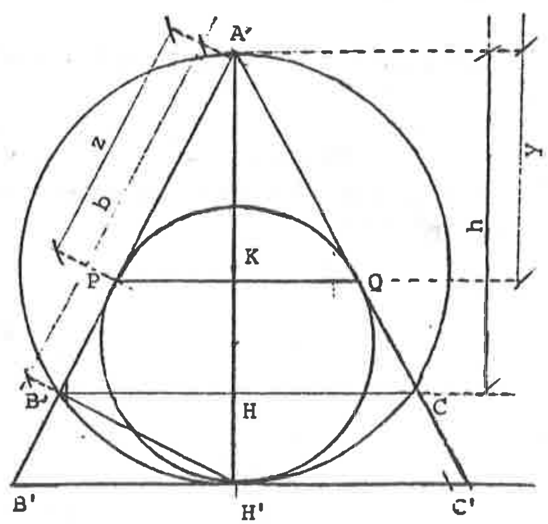
$$\frac{AK}{AH} = \frac{AP}{AB}$$

es decir,

$$\frac{y}{h} = \frac{z}{b}$$

luego

$$y = \frac{h}{b}\,z$$



Además los triángulos T(ABC) y T'(A'B'C') son semejantes.

Indicando con "prima" los elementos de T' homólogos de los de T, tenemos:

$$z = p' - a'$$

Como la razón de semejanza es $\frac{h'}{h} = \frac{2R}{h}$ resulta,

$$z = \left(\frac{2R}{h}\right)\,(p-a)$$

Siendo R el radio del círculo circunscrito a ABC.

Para calcular R, por el teorema del cateto en ABH', $b^2 = h \cdot 2r$, luego

$$2R = \frac{b^2}{h}$$

entonces,

$$z = \frac{b^2}{h^2}\,(p-a), \qquad y = \frac{h}{b}\,z = \frac{b}{h}\,(p-a)$$

Entonces I y K coinciden.

- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 4ª (Boletín nª 12)

Se define la sucesión p_n de la siguiente manera: $p_1 = 2$, y para todo n, mayor o igual que 2, p_n es el mayor divisor primo de la expresión:

$$p_1\,p_2\,\cdots\,p_{n-1} + 1$$

Pruebe que p_n es distinto de 5.

Solución

Los primeros p_i son: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7$.

Llamando $H_n = p_1\, p_2 \cdots p_{n-1} + 1$, como $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$, resulta que H_n no es divisible por 2 ni por 3 para $n \geq 1$.

Si para algún H_n fuese 5 su mayor divisor primo, como no puede ser divisible por 2 ni por 3, sería $H_n = 5^k$, es decir, $p_1\, p_2 \cdots p_{n-1} = 5^k - 1$.

La última igualdad entraña una contradicción, puesto que $5^k - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ y en cambio el único factor primo par de $p_1\, p_2 \cdots p_{n-1}$ es p_1.

PROBLEMA 6ª (Boletín nº 12)

Sea ABCD un cuadrilátero plano convexo; P y Q son puntos de AD y BC respectivamente, tales que:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{DC} = \frac{BQ}{QC}$$

Demuestre que los ángulos que forma la recta PQ con las rectas AB y DC son iguales.

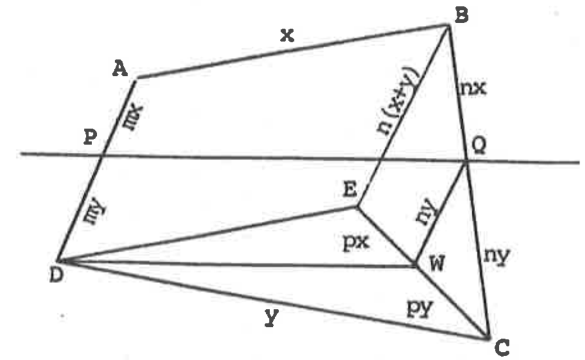
Solución

Se forma el paralelogramo ABED sobre los lados AB y AD del cuadrilátero dado, y además se traza por Q la paralela a BE y la recta EC; sea W la intersección de estas rectas. Llamando $x = AB$, $y = DC$, las proporciones del enunciado y las que se derivan de la semejanza de los triángulos BCE y QCW permiten poner:

$AP = mx$, $PD = my$; $BQ = nx$, $QC = ny$; $EW = px$, $WC = py$;

$WQ = ry$; $EB = r(x+y)$

para ciertos números m, n, p, r que no interesan.



Como es $AD = BE$ resulta $mx + my = r(x+y)$, es decir, $m = r$, entonces $my = PD = ry = WQ$, y PQWD es un paralelogramo y DW es paralela a PQ.

El problema se reduce entonces a probar que DW es la bisectriz del ángulo EDC. Pero esto es así ya que $EW = px$ y $WC = py$ son proporcionales a los lados $DE = x$ y $DC = y$ del triángulo EDC.

Como socio de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín (señalar con unas aspas los que interesen):

3	4	5	9	10	11	12	13	14	15	16
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo (20 pts. por número para Madrid y 30 pts. por número para provincias).

Hagan el envío utilizando como dirección la que consigno en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7 y 8 están agotados. De los números 9 y 12 quedan tan solo unos pocos ejemplares.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la Sociedad, Apartado 9479 - 28080-MADRID.