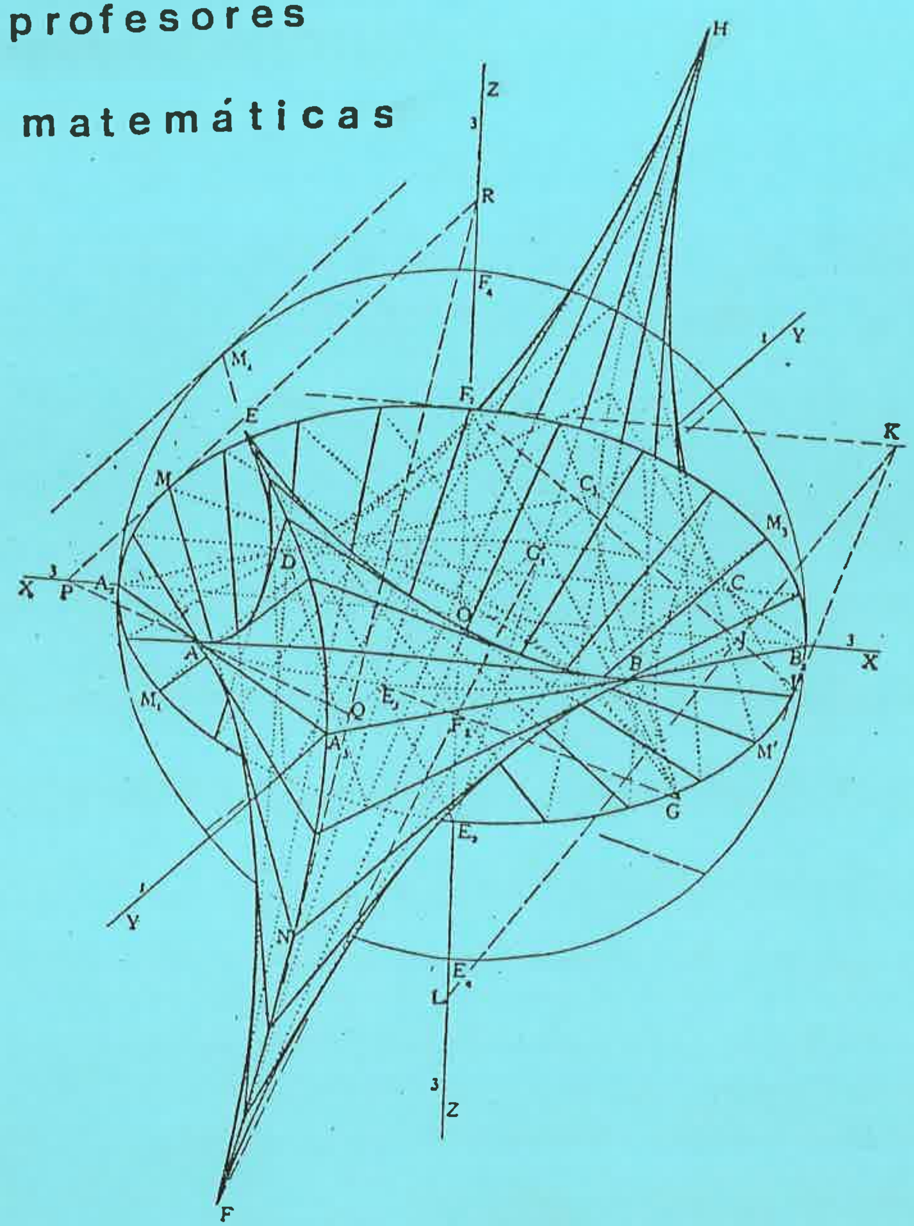
sociedad castellana

PUIG ADAM

de profesores de matemáticas



enero 1988

boletín número 16

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Enero de 1988 nº 16 (1987-88)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

Ronda de Atocha, 2 (INBAD)

- La correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

FERNÁNDEZ BIARGE, Julio

- La portada de este número reproduce la figura "superficie reglada desarrollable circunscrita a dos cónicas" del libro de D. Eduardo Torroja Caballé "Teoría geométrica de las líneas alabeadas y de las superficies desarrollables" (Madrid, 1904).

INDICE Pág.

JUNTA DIRECTIVA

- NOTICIAS -

SIMPOSIO SOBRE LA NECESIDAD DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Del 19 al 21 de Octubre de 1987 tuvo lugar en Madrid, en el domicilio de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, una reunión internacional cuyo marco y objetivos quedan descritos del siguiente modo:

> La educación matemática a todos los niveles se enfrenta en la actualidad con multitud de problemas de muy diversa naturaleza: papel de las matemáticas en el sistema educativo, su relación con las ciencias de la computación, preparación adecuada de profesores, programación apropiada de su enseñanza, interacción con las necesidades culturales, científicas y tecnológicas de la sociedad,...
>
> El impacto que una adecuada solución de tales problemas causará para el bienestar de la sociedad es patente para cualquiera que examine la situación detenidamente.
>
> La investigación seria de estos problemas es una delicada y difícil tarea interdisciplinar que no debería ser soslayada por la comunidad matemática y científica de nuestro país.
>
> El objetivo principal del Simposio es estimular la reflexión de un pequeño grupo de personas de las diferentes regiones españolas, con la colaboración de algunos importantes investigadores extranjeros en el área de la Educación Matemática, sobre la necesidad de fomentar en nuestro país la investigación sobre este tema y sobre los medios más eficaces para conseguir tal fín.

Los participantes extranjeros fueron los siguientes:

Claude GAULIN, Univ. de Laval (Canadá).

A. Geoffrey HOWSON, Univ. de Southampon (Reino Unido), secretario del ICMI (Comisión Internacional sobre Instrucción Matemática)

Jean-Pierre KAHANE, Univ. de Orsay (París), presidente de ICMI.

Hans-Georg STEINER, Director del Instituto de Didáctica Matemática Univ. de Bielefeld (Rep. Fed. de Alemania).

Unos treinta y cinco profesores de diversas universidades y centros de Enseñanza Media de las diferentes regiones de España fueron también invitados a participar en esta reunión.

Las conferencias y discusiones en grupos de trabajo resultaron de gran animación, abordándose en ellas una buena cantidad de temas profundamente interesantes para dar un mejor cauce a las preocupaciones , cada vez más acuciantes, en torno al establecimiento en nuestro pais de una investigación, hasta ahora casi inexistente, en Educación Matemática.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

El primer miércoles de cada mes, a las siete y media de la tarde, celebra generalmente la sección de Exactas de la Real Academia de Ciencias una sesión científica, con la exposición de algunos trabajos de investigación a cargo de sus autores.

En la sesión programada para el mes de febrero se cuenta con la participación de los profesores González Llavona, Rubio de Francia y Leandro de María, de las Universidades Complutense, Autónoma y a Distancia.

En la del mes de marzo actuarán los profesores Aroca, Sánchez Giralda y Campillo, de la Universidad de Valladolid.

El pasado dia 2 de diciembre el Profesor Jiménez Guerra, de la UNED, disertó sobre "Derivación de medidas e integración vectorial bilineal" y el mes de mayo pronunciará una conferencia el académico correspondiente don Antonio Fernández de Trocóniz, de la Universidad del País Vasco.

" GACETA MATEMATICA "

La Real Sociedad Matemática Española y el Consejo Superior de Investigaciones Científicas van a reanudar la publicación de la revista GACETA MATEMATICA, que se interrumpió en 1982.

Está prevista la aparición de un volumen anual dividido en tres números, de los que el primero se espera para el próximo mes de Febrero de 1988.

Las secciones previstas en la revista son: Artículos, Notas, Olimpiadas Matemáticas, Problemas Olímpicos, Problemas propuestos y resueltos, Crónica, Crítica Bibliográfica y "Los lectores preguntan".

Para información sobre la revista, se podrán dirigir los interesados a la Real Sociedad Matemática Española, calle de Serrano, 123, Madrid (28006).

- ■ - ■ - ■ -

REVISTA MATEMATICA
DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Bajo el patrocinio de la Universidad Complutense de Madrid se va a comenzar a publicar esta Revista Matemática, que aceptará artículos de investigación y recapitulativos, ordenados en las siguientes secciones: Algebra, Análisis Matemático, Astronomía y Geodesia, Ciencias de la Computación, Estadística e Investigación Operativa, Geometría y Topología y Matemática Aplicada.

Publicará un volumen por año, dividido en tres números. Para obtener información y para adquisiciones y suscripciones, dirigirse a Editorial de la Universidad Complutense. Edificio de Estomatología. Bajos. Ciudad Universitaria 28040-Madrid, y para intercambios o publicaciones, a su director, E. Outerelo (Fac. de Matemáticas).

HOMENAJE

Nuestro consocio Gonzalo Calero Rosillo, recientemente jubilado, catedrático de Instituto durante muchos años y en la actualidad Profesor Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, fué objeto de un cordial homenaje ofrecido por muchos de sus compañeros el pasado dia 14 de Noviembre.

CONFERENCIA

Nuestro vicepresidente por Ciudad Real Salvador Herrero Pallardo, en el acto de apertura del curso 1987-88 del Instituto de Bachillerato "Maestro Juan de Avila" de Ciudad Real, pronunció una Lección Inaugural sobre el tema "LA MEDIDA DEL TIEMPO", que fué calurosamente acogida por los asistentes al acto.

III INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DIFFERENTIAL GEOMETRY

Organizado por el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Valencia, se celebrará esta reunión internacional en Peñíscola, entre los dias 5 al 12 de Junio de 1988. Puede obtenerse información en el citado Departamento, Burjasot (Valencia).

XXIV OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PRIMERA FASE

Los dias 27 y 28 de Noviembre se han celebrado las pruebas de la Primera Fase de la XXIV Olimpiada Matemática Española en la mayor parte de los distritos, entre ellos el de Madrid.

Como es sabido, esta Olimpiada está organizada por la Real Sociedad Matemática Es añola en colaboración con la Subdirección de Becas y Ayudas de Estudios y comprende dos fases: La primera se realiza en las cabezas de los antiguos distritos universitarios y los ganadores, hasta un máximo de tres en cada uno, son premiados con una beca utilizable para seguir los estudios de la licenciatura de Matemáticas, y además son convocados para competir en la fase final, que suele celebrarse simultáneamente en Madrid y Canarias. De esta última fase salen los tres ganadores de la Olimpiada, que además de recibir los correspondientes galardones, suelen formar parte de los equipos que presenta España a la Olimpiada Matemática Internacional y a la Iberoamericana.

Las pruebas de la primera fase correspondientes a Madrid han tenido lugar en la E. T. S. de Ingenieros Industriales. El número de alumnos preinscritos pasó del centenar, pero en las pruebas participaron realmente 88, todos ellos alumnos del Curso de Orientación Universitaria. Se propusieron en allas ocho problemas (cuatro en cada sesión), cuyos enunciados damos en la sección de Propblemas Propuestos de este Boletín.

El Jurado se reunió el dia 10 de Diciembre para seleccionar a los ganadores; con satisfacción observó un nivel de los participantes algo superior al de los dos años anteriores, aunque también en éste se pudo comprobar la presencia de bastantes aspirantes que demostraron haber acudido a la prueba sin la menor preparación. Debería de ser obvio que una prueba de tipo olímpico exige una dilatada preparación de fondo e incluso un estudiado entrenamiento previo, para tener alguna posibilidad de éxito. Los Centros que han llevado a cabo esa labor de preparación con un grupo seleccionado de sus alumnos, han conseguido una participación digna, aun cuando no hayan conseguido uno de los premios, como prueba el que los mejores clasificados se reparten entre los alumnos de unos pocos Centros.

En este curso ha habido dos participantes claramente destacados. Los premiados han sido los siguientes:

1º. - Mª Carmen CASARES ANTON, del I. B. "Gran Capitán" de Madrid, con 47,5 puntos.

2º. - José Ignacio NOGUEIRA GORIBA, del I. B. "Gran Capitán" de Madrid, con 44,5 puntos.

3º. - Luis Miguel POZO CORONADO, del Colegio Joyfe de Madrid, con 34,5 puntos.

Obtuvieron puntuaciones cercanas a las de los premiados:

Juan Atanasio CARRASCO MATEOS, del Colegio "Nª Sª del Recuerdo de Madrid (33,5 puntos)

Francisco BARCELÓ LLAUGER, del Colegio "Nª Sª del Recuerdo de Madrid (32 puntos)

Pedro José SEVILLA RAMOS, del I. B. Complutense, de Alcalá de Henares (32 puntos)

Eusebio FERNANDEZ DOMINGUEZ, del Colegio "El Parque" de Torrelodones (31 puntos)

La puntuación máxima teóricamente alcanzable era de 80 puntos, pero el tiempo disponible (cuatro horas en cada una de las dos sesiones) era escaso para los ocho problemas propuestos, por lo que la puntuación alcanzada por los ganadores no es anormalmente baja.

Debemos señalar que la clasificada en primer lugar, dña. Mª Carmen Casares Antón, fué la única premiada como alumna de 3º de BUP en el V Concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad, en Junio de 1987, y también había ganado el 1er premio como alumna de 2º en 1986 y el 2º como alumna de 1º en 1985 (Ver nuestros Boletines nos 15, 10 y 7). También D. Eusebio Fernández Dominguez, que ha logrado 31 puntos, obtuvo el primer premio como alumno de 1º de BUP en nuestro Concurso de 1985. Es una satifacción para nosotros el seguir comprobando que nuestros Concursos de Resolución de Problemas sirven de aliento y de guía para formar los aspirantes olímpicos que triunfan en competiciones nacionales e internacionales.

Damos la enhorabuena a los ganadores y a los Centros que han contribuido a su preparación.

- - -

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlos.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Número y año	Convocado en Boletín	Crónica - Enunciados
I (1983)	1	2, pag 11
II (1984)	3	4, pág 7
III (1985)	5	7, pág 3
IV (1986)	9	10, pág 5
V (1987)	13	15, pág 3

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA :

Número y año	Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX (1984)		3, pág 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	

OLIMPIADA MATEMATICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
I (1986) Colombia	8, págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12, págs. 3 y 75

OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
XXIV (1983) París	2, pág. 15
XXV (1984) Praga	4, pág. 67
XXVI (1985) Helsinki	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986) Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987) Cuba	15, págs. 9 y 73

- - - - -

VALORES ESTETICOS EN LA MATEMATICA

por
ENRIQUE LINES ESCARDO
De la Real Academica de Ciencias

La Real Academia de Ciencias me ha hecho el honor de encomendarme el discurso inaugural del año académico. Agradezco este honor y la confianza que me dispensa. Dedicaré mi disertación a exponer algunas reflexiones sobre el sentido estético de la creación matemática y, en forma más general, sobre la valoración estética de lo matemático.

Cuando se discute el lugar de la formación humanística en la educación, y ante una Matemática, mente y lógica de un maravilloso desarrollo tecnológico, creo que tiene interés mostrar la otra cara de esta Ciencia, en la que criterios estéticos dan sentido a muchas de sus creaciones.

Una bella proposición

Conversaba con el Profesor Valdivia, por los pasillos de esta Casa, acerca de algunos de los resultados que había obtenido últimamente en el campo de su especialidad matemática y me habló de una proposición relativa a la Teoría de las distribuciones cuyo enunciado preciso es: "Si Ω es un abierto no vacío del espacio euclídeo n-dimensional R^n, entonces el espacio $D(\Omega)$ es isomorfo al $D(R)$".

Es sorprendente la isomorfía entre el espacio $D(\Omega)$ de funciones de n variables, infinitamente derivables con soporte compacto contenido en el abierto Ω, y el espacio más sencillo $D(R)$ de las funciones infinitamente derivables de una variable en R. Pero todavía más sorprendente, es que el espacio asociado de las distribuciones de Schwartz, desde el punto de vista estructural no depende de la forma del abierto Ω de R^n, ni tampoco de la dimensión n del espacio euclídeo.

No esperaba un resultado que me permitiera ver la complejidad del espacio de distribuciones $D'(\Omega)$ a través de la simplicidad del $D'(R)$. Sin duda una bella proposición, que descubre aspectos de simplicidad en un difícil concepto matemático.

Comentábamos ésta y otras proposiciones, y la conversación derivó

Reproducimos aquí, con la autorización del autor y de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, el texto del DISCURSO INAUGURAL del año académico 1987-88 pronunciado el pasado dia 14 de Octubre por el Académico Numerario Excmo. Sr. D. Enrique Linés.
Agradecemos vivamente la oportunidad que nos brindan de dar a conocer a nuestros socios el interesante discurso.

hacia la motivación de la creación matemática, que cuando alcanza altos niveles de abstracción, es difícil encontrar su origen en las intuiciones sensibles. La opinión del investigador matemático no dejaba lugar a dudas cuando decía: Hay un aliciente estético que se convierte en una de las finalidades de la creación matemática.

En efecto, no se puede prescindir de la consideración de una componente estética en la investigación matemática, pero son ineludibles dos precisiones. En primer lugar, se trata de una creación artística en un ámbito o universo de ideas, que es el lugar donde el matemático tiene su taller, y por otra parte, para participar en ella, se requiere una especial sensibilidad ante la belleza formal. Tal vez, uno de los importantes objetivos de los estudios superiores de Matemáticas sea la educación de dicha sensibilidad.

Un bello tema para un discurso

Reflexionando posteriormente, pensé que tratar del aspecto estético de la creación matemática, y en forma más amplia de los valores estéticos de la Matemática, no sería un tema extraño al interés del auditorio en el discurso de inauguración del curso académico.

Muchos autores, tanto clásicos como modernos, han escrito sobre el tema, bien como expectadores en la contemplación pasiva, o también como actores, creadores de ciencia en la investigación activa, e incluso algunas opiniones pueden parecer excesivas. El célebre H. Poincaré aseguraba: "La Estética, más que la Lógica, es el elemento dominante en la creatividad matemática"; y el gran físico teórico P.A.M. Dirac escribía: "Es más importante la belleza en las ecuaciones que el que se acoplen perfectamente al experimento".

Interés especial tienen las opiniones de los dos grandes matemáticos modernos G.H. Hardy y H. Weyl. La actitud idealista de Hardy, es un puro esteticismo que le aproxima a la mentalidad clásica griega. Reflejo de su pensamiento son las siguientes palabras: "Un matemático, lo mismo que un pintor, o un poeta, es un constructor de configuraciones. Si sus configuraciones gozan de mayor perdurabilidad que las construidas por los demás hombres es a causa de que su material básico son las ideas". Más adelante agrega: "Las configuraciones construidas deben tener belleza. La belleza es la primera piedra de toque, en el mundo no hay un lugar permanente para las Matemáticas feas".

La opinión de Weyl es más concreta y se refiere al infinito, que en la Matemática es origen de un idealismo estético, presente en los momentos estelares de esta Ciencia. Escribe: "Matemática es la Ciencia del infinito, su meta es la comprensión del infinito con medios humanos, es decir, finitos. El gran logro de los griegos fue el haber hecho fructífero el contraste entre lo finito y lo infinito, para el conocimiento de la realidad". Más adelante agrega: "La tensión entre lo finito y lo infinito y su conciliación llega a ser el motivo conductor de la investigación griega.

Estas certeras palabras señalan uno de los conceptos matemáticos de más trascendencia estética. Recuérdese, si nó, cómo define Hegel la belleza artística: "La belleza artística es un infinito representado en algún objeto finito. La idea se encarna en el símbolo.

* * *

Naturaleza de los objetos matemáticos

Si queremos abordar el tema de una valoración estética dentro del campo de la Matemática, que no se limite a la exposición de algunas configuraciones, proposiciones o teorías que se consideren bellas según la opinión generalizada de los estudiosos, es conveniente introducir algunas normas metodológicas. Su carácter no puede ser vinculante, ya que en ella participa la sensibilidad de quién emite el juicio estético.

Principiaremos por examinar brevemente la estructura de una teoría matemática. Se parte de unos elementos primeros y de unas proposiciones, llamadas axiomas, que precisan y relacionan estos elementos. El único requisito que deben cumplir los axiomas, es el de ser independientes y no contradictorios entre sí. Lo primero se refiere a la estética, para evitar redundancias, y lo segundo pertenece al orden lógico para que la teoría sea consistente. Como se indica, un axioma es una proposición, que unas veces tiene carácter existencial, otras de relación entre elementos y las más de ellas tiene ambos caracteres. A partir de estas proposiciones, por deducción lógica se obtienen otras nuevas, se definen configuraciones más complejas, con el auxilio de las proposiciones demostradas y, por el mismo método de razonamiento, se prueban otras. De esta forma se edifica progresivamente la teoría.

Objetos matemáticos son: los que hemos llamado primeros elementos, los axiomas, las proposiciones, sus demostraciones, las nuevas configuraciones y las proposiciones que a ellas se refieren. Todos son componentes de una teoría matemática, y los juicios estéticos pueden referirse a cada uno de ellos, a la teoría o a partes determinadas de la misma.

En el esquema expuesto se han mencionado los llamados elementos primeros, que no se definen y cuyas propiedades están especificadas por los axiomas. Desde los orígenes de la Matemática, se ha reconocido que los objetos de que se ocupa son abstractos, y en particular tales elementos lo son. Sin embargo, el carácter abstracto de los elementos básicos, a partir de los que se construyó la Matemática clásica, tienen una representación concreta cuando de manera natural se interpretan los resultados en el ámbito de las cosas sensibles.

En muchos casos, la abstracción que originó el concepto es análoga a la que encierra un nombre común en una lengua.

El paso más importante dado por los griegos para crear una ciencia, a partir de los conocimientos empíricos suficientes para calcular y medir, fue su insistencia en que la Ciencia matemática debía ocuparse de conceptos abstractos.

Los números son ideas que evidentemente proceden de una abstracción. Los naturales son abstracciones de la propiedad de coordinabilidad de conjuntos finitos.

Frente al sentido aplicado de la Geometría egipcia, los griegos comenzaron a razonar con los puntos, rectas, planos, circunferencias y distintas figuras geométricas de forma abstracta. Naturalmente que reconocían que estos conceptos estaban sugeridos por objetos físicos.

Mejor que cualquier comentario es transcribir las palabras de Platón referentes a los matemáticos: "Aunque hacen uso de las formas visibles, sobre las que razonan, ellos no discuten sobre tales formas, sino sobre las ideas a las que se asemejan; no discuten sobre las figuras que han trazado, sino de los cuadrados abstractos, de los diámetros abstractos, etc. Realmente ellos intentan contemplar la realidad de las cosas, que sólo pueden ser vistas con los ojos de la mente".

Esta cita, en el marco del puro idealismo helénico, basta para señalar cuál era la naturaleza de los objetos matemáticos en los albores de la Ciencia que se estaba creando.

La abstracción no es específica de la Matemática. Muchos conceptos de la Física clásica son resultado de una abstracción directa en el mundo fenomenológico. No obstante la Matemática difiere esencialmente de las otras Ciencias físicas y naturales, por la presencia en ella de un objeto matemático que trasciende a las abstracciones antes consideradas. El concepto matemático de infinito es ajeno a interpretaciones físicas.

Sin duda el infinito está en la raíz de la Matemática actual, y ya estuvo presente en el pensamiento griego. Unas veces de forma implícita a través de conjeturas, otras ante la evidente existencia de segmentos inconmensurables y de números irracionales, y también cuando se elude la palabra "infinito", como al razonar sobre la existencia de infinitos números primos.

Hay algo perturbador en el descubrimiento de los números irracionales. Mientras la infinitud de los números naturales tiene un carácter potencial, pues de cada número se pasa al siguiente, la de los irracionales no obedece a este proceso generativo. El infinito se hace tangible, en potencia: el famoso

"devenir" en gestación finalista; o bien en acto: la presencia de un "ser" expresión de plenitud y acabamiento. La eterna disyuntiva: Heráclito-Parménides.

Estos conceptos son, pues, otros objetos de la Matemática. Una Ciencia en la que las nociones de límite y continuidad son básicas, y que no se podría construir evitando los distintos infinitos matemáticos.

No termina aquí la relación de los objetos matemáticos básicos. El término "conjunto" era de uso frecuente en las definiciones y proposiciones, pero fue G. Cantor quien tuvo el coraje de introducirlo, desde 1872, como un concepto de valor substantivo en la Matemática. El universo de los objetos matemáticos se enriqueció considerablemente.

No considera Cantor conjuntos de elementos determinados, como puntos, números o propiedades lógicas, por ejemplo, sino que elabora una teoría basada en los conceptos de elemento, conjunto y la noción de pertenencia. Su generalidad es extraordinaria.

Después de fuerte controversia la teoría de conjuntos se situó en los fundamentos de la Matemática, y hoy día la mayoría de las teorías matemáticas tienen una base conjuntista. Son elocuentes las palabras con que el gran matemático D. Hilbert enjuicia la Teoría de conjuntos: "La más fina creación del genio matemático y una de las supremas realizaciones de la actividad puramente intelectual del hombre".

Una belleza racional

Cuando nos planteábamos la cuestión de la forma cómo los objetos matemáticos son bellos, se nos presentaron un cúmulo de dificultades y dudas. Por una parte reconocemos, sin dudar, la presencia de tal cualidad en algunos objetos, pero por otra, no nos es fácil justificar nuestro juicio, seguramente por la misma naturaleza de lo bello que escapa a toda definición alternativa.

Probablemente fueron muchos los que conocieron estas dificultades, y es aleccionador el episodio que narra Aristóteles en su Metafísica. Se trata de una disputa filosófica entre él mismo y el cortés hedonista Aristipo, quien pretendía que en las Matemáticas no se podía encontrar rastro alguno de bondad o de belleza. Aristóteles se enfrentó a esta opinión mencionando a la belleza formal, idea que sin duda tenía una lejana procedencia pitagórica.

Cuando anteriormente estudiaba la naturaleza de los objetos matemáticos, buscaba aproximarme a un conocimiento de ellos que me permitiera encontrar el origen y raíz de los juicios estéticos. Los objetos matemáticos son ciertamente abstractos, es decir ideas, pero conviene hacer una matización que confirma la Historia de la Ciencia. Se pasa progresivamente de un periodo en el que los objetos matemáticos proceden de una abstracción próxima de objetos del mundo físico, hasta llegar a las últimas creaciones matemáticas en las que los únicos modelos posibles de muchas teorías, son otras teorías con un grado menor de abstracción. Pero lo cierto es que el matemático trabaja, investiga y crea en un universo de puras ideas.

No vamos a discutir el tema de la jerarquización de las Matemáticas entre las Ciencias del espíritu, ni de su correlación con el mundo físico, pues lo que buscamos es la forma de la belleza en la Matemática. Precisamente por este motivo hemos de recurrir a las fuentes del idealismo griego, para poder descubrir las notas objetivas que en opinión generalizada adornan a los objetos bellos, y cuya consideración es indispensable para emitir un juicio estético.

La Escuela pitagórica fue la primera en hacerle un lugar a la Estética. La filosofía de Pitágoras es la apoteosis de un formalismo estético en el que el número y la medida están en la raíz de todo lo que existe. En una especie de mística científica reúne a la Matemática y a la Música para construir un modelo de Universo, un Cosmos, en el que armonizan la matemática de las distancias y la música de las esferas. La ley del Universo es la armonía, que aparece como uno de los primeros conceptos estéticos: "La armonía es la unidad en la pluralidad y el acorde en lo discordante".

En el dodecaedro reconocían una figura perfecta, por lo que la incorporaron al modelo cosmogónico. También tuvieron conocimiento del tetraedro y del exaedro, pero es en la Academia de Platón donde se perfecciona la especulación sobre los cuerpos regulares, iniciada por Pitágoras y continuada en la cosmogonía de el Timeo platónico. En el diálogo posterior, el Teeteto, se mencionan el octaedro y el icosaedro, que con las tres anteriores forman las cinco "figuras platónicas", asimiladas por Platón a los cuatro elementos y a la figura del Universo. En el Teeteto, en el que se desarrolla la cosmogonía del Timeo, se dice textualmente: "Mirad cómo estos cuatro elementos se han hecho perfectamente bellos".

Me he detenido algo en la consideración de los cinco poliedros regulares, por el especial significado que tuvieron en el periodo clásico griego. La regularidad de sus formas los convirtió en arquetipos de la belleza geométrica, uno de cuyos caracteres es la especial simetría interna, que permite a cada uno de ellos coincidir consigo mismo después de ciertos movimientos.

Este sentido trascendente de la belleza de los poliedros, perdura hasta los tiempos de Kepler, que creía que el Universo había sido hecho según un esquema poliedral, y así lo asegura en su obra "Misterio del Cosmos".

Platón tiene dos diálogos dedicados a lo bello: el Hipias Mayor, de carácter refutativo, y el Fedro sobre la belleza en las almas, antítesis del primero. Sin embargo las ideas expuestas no admiten una traducción a una Estética

matemática. Sólo en sus últimas obras, de influencia pitagórica, se refiere a la medida, en los siguientes términos: "En todas las cosas la medida y la proporción constituyen la belleza como virtud".

También admite Platón cierto tipo de placer: lo agradable. En el Fitebo estudia el placer, al que no le ha de faltar la medida. Es precisamente la medida la que salva al oído y a la vista, los únicos sentidos que ofrecen sensaciones sometibles a reglas y proporción.

Es en Aristóteles donde encontramos una alusión más precisa al pensamiento matemático. Aristóteles más próximo a la Naturaleza que al universo de las ideas, refiriéndose a la belleza formal escribe:

"Las formas supremas de lo bello son, la conformidad con leyes, la simetría y la concreción, y son precisamente estas formas las que se encuentran en las Matemáticas; y puesto que estas formas parecen ser la causa de muchos objetos, las Matemáticas se refieren en cierta medida a una causa que es la Belleza".

Esta cita vale más que un discurso, y nos dispensa de mencionar otros muchos nombres.

Una breve glosa del texto de Aristóteles es necesaria.

Cuando se dice conformidad con leyes, se asegura implícitamente que lo bello no es arbitrario ni irracional. Las leyes están dictadas por la razón e imponen un orden y unos preceptos. La conformidad con ellas representa la condición más general de lo bello, de acuerdo con el espíritu de un científico naturalista.

El concepto de simetría de Aristóteles es el reflejo de una macrosimetría observada en la Naturaleza. La Matemática ha conseguido perfeccionar, hasta el virtuosismo, esta idea por medio de la noción de grupo.

Finalmente, el sentido de la concreción, otros dicen determinación, no es el de fijar una limitación, sino el de definir, el de precisar, el de indicar los caracteres esenciales de un objeto. Todos estos elementos se distinguen por su racionalismo.

Obsérvese que las cualidades que aprecia y estima el matemático, como la simplicidad y claridad de las ideas, la economía conceptual, la transparencia del razonamiento, la precisión de las conclusiones y el orden y la medida en la construcción de las teorías, están de una u otra forma implícitas en el concepto griego de belleza.

Los módulos helénicos de la belleza son los adecuados para percibir los valores estéticos de la Matemática griega, que tiene algo de proporcionada, acabada, estática y siempre fría. De carácter conscientemente especulativo, cultivada por una aristocracia intelectual fue adquiriendo un pulimento y un tallado exacto. Los "Elementos de Euclides" en su forma original han llegado hasta nuestros días, como obra maestra del pensamiento abstracto.

La expresión artística de la medida y la proporción en la arquitectura griega es el templo, igual en sus realizaciones y tan sereno en su equilibrio. Sus plantas rectangulares, sus iguales columnatas de un paralelismo euclídeo, sus frontones triangulares, más bien son representaciones de una idea geométrica, que ornamento de un templo. Tal vez fuera lo más puro e ideal que pudieran ofrecer a la divinidad.

Como indicábamos, en esta época, las ideas matemáticas se originaban por una abstracción próxima de los objetos del mundo físico, por lo que algunas de las formas de la belleza matemática tienen su origen en la de sus modelos de la Naturaleza. Tal es el caso de la simetría. Otras veces, son los principios estéticos presentes en las obras de arte, los que se trasladan al campo matemático, etc. Pero en definitiva, estas cualidades o normas que se enuncian como principios objetivos, son simples postulados que reflejan la esencia de una cultura, en nuestro caso, la cultura griega.

La sensibilidad en la belleza

Al final del apartado anterior hablábamos de una estética cerrada y fría: la estética formalista que el genio griego descubrió en la Matemática. Sin embargo en sus preceptos inmutables, algo echábamos en falta: esa gracia alada, esa emoción, esa sorpresa, que hoy reconocemos como necesarias en toda obra bella.

Cierto que estas notas pertenecen al campo de la sensibilidad, y al hacer mención de ellas introducimos en la definición estética un elemento nuevo e inquieto, pero esencial, que es el hombre.

No se trata de la presencia del hombre pensador, con cuyas ideas se ha construído la Matemática, sino del hombre poseedor de una sensibilidad, que incluso a veces le confunde.

De la función pasiva, como admirador de lo bello, pasa a ser actor en el juicio estético y por ello integra su sensibilidad en la definición de lo bello.

Al recorrer la Historia de la Estética, inmediatamente se observa el gran contraste y tensión con que aparecen el mundo de la razón y el de las sensaciones, al tratar el tema de la Belleza. Frente al pensamiento racionalista francés: lo bello es lo verdadero, según Descartes, se presenta el sensualismo in-

glés: todas las manifestaciones del espíritu se reducen a sensaciones, asegura Locke.

Pero no tratamos ahora de analizar si el juicio estético es un sentimiento o un conocimiento, o ambas cosas. Vamos sencillamente a reflexionar sobre el placer que produce el objeto bello, y la relación con las cualidades atribuidas a la belleza racional.

Cuando entre los objetos matemáticos, decimos que uno es bello, nuestra afirmación no tiene un valor determinante en sentido estricto. Es cierto que hemos considerado las notas objetivas de la belleza, pero como éstas tampoco son vinculantes, aún estando presentes en el juicio, no obligan a una calificación definitiva. Falta la comprobación de si existe placer o agrado estético en el que emite el juicio. Precisamente esta sensación placentera es la que decide. Ya dice Kant que "en el dominio estético basta saber si sentimos placer o desagrado".

El placer estético no se asemeja a los otros, en particular en el campo de la Matemática. Seguramente que el análisis de este placer es uno de los puntos más sugestivos de nuestra reflexión.

En primer lugar, la sensibilidad del hombre depende en gran medida de su circunstancia histórica y cultural, por lo que los juicios estéticos cambian con el tiempo.

Para que, en lo posible, el juicio estético sea intemporal e impersonal el tipo de placer, que se postula, ha de estar ligado a aquellas cualidades que pertenecen a la naturaleza del hombre como tal, con independencia de condicionamientos personales.

Aunque no haya avanzado mucho en el análisis del placer estético, ya queda claro que se trata de un placer intelectual, que afecta a la sensibilidad humana en sus aspectos más nobles.

Leibnitz define el placer intelectual como "el sentimiento de la perfección que se percibe ya sea fuera de nosotros ya sea en nosotros mismos". Se podría decir, que es la satisfacción ante la obra bien hecha, que tanto elogiara Eugenio d'Ors. En el contexto matemático, es el placer que se tiene ante un objeto que cumple los cánones clásicos de la belleza.

Kant se refiere a otro placer más sutil, que lo describe de la manera siguiente: "Dos de nuestras facultades intelectuales, de costumbres divergentes, se muestran aquí de acuerdo: la imaginación y el entendimiento. Esta coincidencia inhabitual nos produce placer, y este placer desinteresado y que no requiere posesión natural, es un puro placer intelectual".

Algunos comentarios desearía hacer sobre la armonía de las dos facultades divergentes. Precisamente la imaginación y el entendimiento son los dos pilares en los que se asienta la creatividad del matemático. La presencia de una capacidad creadora potente es, pues, motivo de placer estético. Ahora bien, el goce que produce una creación matemática no es el de la contemplación estática de una obra de arte, sino el dinámico de una re-creación del objeto matemático en la mente propia, que frecuentemente requiere la repetición de un proceso lógico deductivo.

El proceso de la creación y de la admiración de lo bello en el hacer matemático, es uno de los placeres estéticos más intensos y puros que se pueden dar en la actividad intelectual del hombre. No se olvide que en toda creación interviene la imaginación, que es actividad del hombre libre, por lo que el placer estético es también gozo en la propia libertad.

Como una componente de la creatividad es la imaginación, que no está sometida a una disciplina canónica, es frecuente que la presencia de la creatividad, en un objeto matemático, se manifieste por una sorpresa. Es el algo inesperado que da vida a la obra bella. Algunas veces lo he llamado "efecto sorpresa", que da a las proposiciones matemáticas una gracia y belleza dinámicas indiscutibles.

Me gusta poner un ejemplo, aunque simple, expresivo. Hemos hablado de los cinco poliedros regulares convexos, las figuras platónicas, como prototipos de la belleza racional, y efectivamente para ellos tenemos nuestra tranquila admiración. Ahora bien, hay una proposición que asegura: "Sólo existen cinco poliedros regulares convexos en el espacio euclideo tridimensional". La primera reacción es de sorpresa, e inmediatamente nos preguntamos el por qué. Una bella proposición que además abre muchísimos interrogantes.

No termina aquí el análisis de la creatividad, como carácter dinámico del placer estético. Su mismo nombre indica una disposición para crear nuevos elementos. La fecundidad de las ideas es señal inequívoca de una verdadera creatividad, por lo cual, en el campo de la Matemática, la fecundidad de las ideas es también una forma de la belleza.

En resumen, la sorpresa y la fecundidad son dos formas de la belleza activa en los objetos matemáticos.

Terminamos este apartado volviendo a tratar del infinito, mejor dicho, de los conjuntos infinitos. Estos objetos matemáticos trascienden a todos los modelos sensibles, y su conocimiento no se produce a través de sus elementos, de los que sólo se conocen algunos. En cierto aspecto, la idea de conjunto infinito es incompleta. Su definición general está dada por la simple idea de ser coordinables con alguno de sus subconjuntos estrictos.

Sin embargo, este concepto está en la cumbre de la creatividad, pues la misma Matemática es muestra de su fecundidad interna. Es admirable este concepto, en el que están reflejadas las posibilidades creativas del matemático.

Evidentemente que a este objeto matemático, no son aplicables los módulos de la belleza formal, pero sin duda posee todas las cualidades inherentes a la belleza dinámica. Los grandes teoremas relacionados con el infinito, que son los grandes teoremas de la Matemática, frecuentemente tienen sorpresa, lo que es propio de un concepto potencialmente fecundo.

Otros aspectos estéticos en la Matemática

En los tres apartados anteriores se han expuesto ideas básicas, para una Estética de la Matemática, que creo son centrales; pero soy consciente de no haber prestado atención a otros aspectos notables y sugestivos de indudable valor estético. Forzosamente tengo que limitar la extensión de este discurso, en el que también ha de estar presente la medida.

No obstante creo que debo mencionar aspectos, uno lógico y otro de expresión, sin los cuales la Matemática aparecería como invertebrada y borrosa.

El razonamiento matemático es el cauce por el que discurren las proposiciones, y la deducción lógica es el hilo sutil y resistente que las enlaza. Después de la crisis sobre los fundamentos de la Matemática a principios de siglo, la Lógica, con el calificativo de matemática, es una rama con vitalidad extraordinaria, llena de contrastes y sorpresas y con proposiciones de gran belleza. Sirva de ejemplo el teorema que K. Gödel formuló en 1931, y que es uno de los más sugeridores de la Matemática actual. Dice así:

"Si es consistente una teoría formal que abarque a la Teoría de números, siendo los axiomas del sistema formal de la Aritmética axiomas o teoremas de la teoría formal considerada, entonces esta teoría es incompleta".

O sea, que existen proposiciones verdaderas de la Teoría de números, que no son formalmente demostrables. De alguna forma la creatividad humana supera al instrumento lógico.

El otro aspecto, que se ha mencionado, se refiere al uso del simbolismo. El progreso real de algunas ciencias, como la Física, estaba condicionado por la ayuda de la Matemática para la formulación de sus leyes. La cualidad de precisar los conceptos y procesos, y expresarlos en forma breve y decisiva, es típica del método matemático. Por citar algún ejemplo, recordemos las fórmulas de la gravitación newtoniana y la einsteiniana que expresa la masa de un móvil por su velocidad. Sin hablar de otras modernas teorías de la Física, en las que esta Ciencia ha sido motor de la Matemática, bastan los ejemplos mencionados para mostrar la belleza de una forma de expresión cuyas características son universalidad y sencillez.

No quiero dejar de citar un episodio de extraordinaria importancia en la Historia de la Matemática (cuyo análisis sería materia para una lección), que es la creación de la Geometría analítica.

Aunque ya existían precedentes desde los griegos de una investigación geométrica auxiliada por las medidas de longitudes y distancias, fue el genio de Descartes quien la convirtió en método. La idea central de asociar las ecuaciones algébricas a las curvas y superficies, es lo que permite pasar de un pensamiento espacial a una técnica de cálculo algébrico con símbolos y números. Desde el punto de vista conceptual, esta creación es una de las más ricas y fructíferas en el campo de la Matemática, y por ésto de gran belleza.

Establecidos unos principios generales, para la formación de juicios estéticos sobre objetos matemáticos, lo oportuno sería aplicarlos. La verdadera tarea a realizar, de un interés histórico-cultural extraordinario, sería el estudio comparado de la Estética matemática, frente a otras manifestaciones culturales a lo largo de la Historia. Obviamente nosotros nos limitaremos al exámen de algunos casos seleccionados.

* * *

La sección aurea

La más popular de las configuraciones geométricas, que se consideró portadora de una escondida belleza, es la llamada **Sección aurea**. Desde los tiempos clásicos se tiene noticia de ella, y su fama se conserva a través del brillo de su nombre. Es justo, pues, que dediquemos un comentario a la belleza encubierta de esta figura, que fue objeto de admiración por los geómetras durante siglos. Por otra parte, esta anécdota estética contiene ya el germen de un proceso infinito, lo cual confirma que, a veces, la anécdota es más elocuente que la historia.

Según Proclo, la sección aurea ya era conocida por Platón. Se trata de la partición de un segmento en otros dos, de manera que la razón de la parte menor a la mayor sea igual a la razón de la parte mayor al segmento total. En la literatura matemática clásica, la sección aurea ocupa siempre un lugar preferente. Kepler aseguraba que las dos joyas de la Geometría eran la sección aurea y el teorema de Pitágoras.

La razón entre el segmento menor y el mayor, en la sección aurea, es $(\sqrt{5}-1)/2$, y este valor debía tener la razón entre los lados de un rectángulo para que su forma fuera lo más bella posible. Este dogma estético está reflejado en las dimensiones de las fachadas del Partenón y en las de otros templos griegos.

Hoy no tendría sentido para muchos el considerar el número mágico, de la sección aurea, como una constante de valor estético. Generaciones inconformistas de pintores y arquitectos (recordemos a Le Corbusier) buscaron otras referencias, o simplemente aceptaron un relativismo funcional. Ya indicábamos anteriormente que la valoración estética depende de la época y del hombre, hijo de su tiempo.

Sin embargo, el número de la sección aurea aparece con insistencia en distintas situaciones, incluso al describir algunos procesos naturales; y por otra parte al contemplar cuadros con la forma del rectángulo aureo, tenemos la sensación de algo bien proporcionado.

No es difícil encontrar explicación matemática a esta reiterada presencia del número mágico, buscando un planteo general que englobe todos los casos, pero es claro que así no se consigue dar respuesta a una cuestión de tipo estético, cual es, el motivo de la sensación agradable al contemplar el rectángulo aureo.

El problema estético subyacente en la geometría de la sección aurea, está estrechamente relacionado con una propiedad de dicho rectángulo, que se puede enunciar de la siguiente forma: Un rectángulo aureo se puede considerar construído a partir de un cuadrado, completándolo con un rectángulo menor, que precisamente es semejante al primero, por lo que también es un rectángulo aureo.

Esta propiedad da lugar a un proceso ilimitado, en el que de un rectángulo aureo se pasa a otro contenido en él, por lo que continúa secreta la raíz de lo que fue un canon en la valoración estética.

Frente a este resultado, de aspecto negativo, aparece un elemento inesperado que escapa al exámen individual, y trasciende al de una sucesión indefinida de rectángulos. Tal vez el valor estético del rectángulo aureo resida en esta infinidad, contenida potencialmente en la finitud de un rectángulo.

El concepto de grupo en la ornamentación árabe

En la Historia de la Matemática, el periodo que se extiende desde el ocaso cultural de Grecia hasta la llegada del Renacimiento, presenta un fuerte contraste con la brillantez de la antigüedad clásica. La herencia griega es en parte asimilada por los árabes que también conocían la ciencia hindú. No vamos a mencionar los descubrimientos matemáticos fechados en esta época, que ya han sido estudiados en las conferencias sobre la Ciencia árabe dictadas en esta Academia. De lo que vamos a hablar es de uno de los notables logros de la Matemática árabe durante este periodo. Ordinariamente olvidado en la historia oficial, y del cual se hizo eco el Profesor Montesinos en interesante conferencia impartida el curso pasado en esta Casa. Se trata del concepto de grupo, piedra angular del Algebra moderna, del que los árabes presentaron modelos en los bellísimos mosaicos y ataurique que decoran las estancias de la Alhambra granadina.

No se sabe quiénes fueron los artífices de estas decoraciones. El noble musulmán andaluz Muhammed al-Ahmar, primer soberano de la dinastía nazarí, construyó su residencia en la Alhambra y Yusuf I fue uno de los primeros arquitectos.

El arte nazarí es frágil y delicado. Las tallas de estuco que como peregrinos tapices ornamentan las paredes, el alicatado de sus zócalos y el color de la azulejería, componen modelos de estructuras matemáticas extrañas a los "Elementos de Euclides". En ellas se encuentran propiedades de invariancia respecto a las traslaciones, simetrías, giros, etc., es decir, transformaciones que aplicadas al decorado le hacen casar consigo mismo. La colección de las transformaciones, admitidas por el mosaico o ataurique, tiene estructura de grupo.

Hay diecisiete grupos de mosaicos matemáticamente definibles, en este tipo de decoración, y para cada uno de ellos hay un modelo en la Alhambra granadina.

Son brillantes las aportaciones de los árabes en el campo de la Matemática, pero podemos asegurar que una de las más notables y sin duda la más bella, se debe a los artistas que de forma inspirada introdujeron la teoría de grupos en la ornamentación de la Alhambra.

Hasta principios del siglo XIX, no se pone de manifiesto el papel fundamental de la estructura de grupo. El matemático francés E.Galois (1811-1832) introduce los grupos de sustituciones en el estudio de la resolución de ecuaciones. Como estructura fundamental de la Matemática está presente en las teorías básicas del Análisis, de la Geometría y la Topología, así como en la Física y Química teóricas.

La simetría, que Aristóteles enumera entre las "formas supremas de lo bello formal", y que de manera confusa se describe en términos de una simetría especular, aparece en toda su nitidez, referida a objetos matemáticos, por medio del concepto de grupo.

Un conjunto es "simétrico" respecto de un grupo, si existe un grupo de transformaciones del conjunto sobre sí mismo, es decir, si admite las transformaciones de un grupo.

Los árabes intuyeron esta simetría grupal en la ornamentación.

El infinito en la pintura del Renacimiento

El Renacimiento, como reencuentro con el hombre y la Naturaleza a través de la cultura griega, origina nuevas corrientes de pensamiento en Europa. Se investiga lo verdadero y en el mundo físico se buscan las seguras realidades. La convicción griega, de que el comportamiento de la Naturaleza se describe por leyes matemáticas, dio sus frutos en el campo del Arte antes que en el de la Ciencia.

Cierto es que dos siglos antes Leonardo de Pisa, el Fibonacci, había escrito en 1202 su famoso "Liber abaci", que junto con el "Practica geométrica", recogía saberes árabes y propios; y que luego en pleno Renacimiento, los Pacioli, Cardano, Tartaglia y otros famosos algebristas, aparte de importantes resultados, consiguieron introducir definitivamente el simbolismo algébrico, que abrió cauce al desarrollo de esta rama de la Matemática. Sobre estos temas nos remitimos a la notable conferencia que dictó el Profesor Etayo en esta Academia sobre "El Algebra del Cinquecento".

Sin embargo en la valoración estética de la Matemática del Renacimiento, tiene más relieve la forma como el arte pictórico incide en el dominio de las puras ideas matemáticas. Los pintores renacentistas, a la manera griega, buscan las leyes matemáticas subyacentes para que la representación de la Naturaleza sea fiel.

El ojo ve la pintura, que, a través del mismo, ha de crear en el que la contempla la misma impresión que una escena real. La luz juega un papel esencial en la expresión artística renacentista, y el rayo luminoso es pura geometría. El rayo ha de pasar por el ojo del artista y es cortado por el plano del cuadro. Este es el principio de una nueva Geometría. En el plano se obtiene la imagen perspectiva, como la denominó A. Durero.

La Perspectiva focal fue descubierta por el arquitecto y escultor Brunelleschi (1397-1475), del que fue discípulo el gran Leone Battista Alberti (1404-1473), autor "Della Pittura", la obra en la que se formaron los pintores del glorioso Renacimiento italiano. En ella se lee: "Las Artes se aprenden por razón y método. Lo primero que necesita un pintor es aprender Geometría". El esquema matemático fue desarrollado por los Paolo Uccelo (1397-1475), Piero della Francesca (1416-1492), el inmortal Leonardo da Vinci (1452-1519) y otros. Hay cuadros de Piero della Francesca que son verdaderos teoremas de Perspectiva, y no olvidemos las ilustraciones didácticas de Durero, que en Italia aprendió la nueva Matemática de la representación espacial.

Entre los nuevos elementos geométricos que se presentan en las perspectivas, están los puntos y rectas límites, o de fuga como dicen los pintores. Cuando varias rectas son paralelas en el espacio euclídeo de la escena real, aparecen en el cuadro como rectas concurrentes en un punto límite. El punto del infinito de las rectas paralelas queda representado por un punto finito en el plano. Otra vez se da la situación sorprendente y bella de un infinito, con todo el secreto de su inaccesibilidad, representado por una realidad finita y próxima. Precisamente el punto de fuga unifica el fondo infinito con las figuras de los primeros planos, consiguiendo un todo orgánico y vivo.

El matemático encuentra una luminosa expresión de la belleza, de una visión finita de lo infinito, en la obra maestra de Rafael de Urbino (1483-1520), de la Cámara de la signatura vaticana titulada "La escuela de Atenas".

No puedo pasar sin hacer un comentario sobre esta obra maestra de la pintura universal, que parece resumir y cerrar hacia el infinito, una época gloriosa de la cultura griega: Un gran arco circular acoge, en unidad, a una numerosa asamblea de filósofos. Platón, en cuyo rostro se descubre a Leonardo, en el centro, dialoga con Aristóteles, y su índice hacia lo alto señala un mundo de ideas, mientras Aristóteles adelanta su mano en ademán de equilibrio entre un puro idealismo y una realidad. Hacia un lado Sócrates acompañado por Alcibiades, después Diógenes, Heráclito y otros. A la derecha y en primer término, se sitúa el mismo pintor en un grupo de astrónomos y geómetras como Ptolomeo que sostiene un globo terráqueo en la mano, Zoroastro con una esfera celeste, Euclides, cuyo rostro es el del arquitecto Bramante, dibujando una circunferencia.

Pero hay algo más en la grandiosa representación rafaelina. Hasta cinco arcadas de bóvedas inmensas se van alejando hacia un punto de fuga, en el que convergen todas las rectas no trazadas de una perspectiva matemática, que cierra un espacio sin límite para el legado perenne que nos dejó la cultura griega.

La Matemática de lo variable

Gran parte del siglo XVII y principios del XVIII es un periodo lleno de contrastes en la historia de Europa. Es la época del Barroco, con sus luchas y crisis, con los descubrimientos de nuevas tierras y nuevos horizontes, y en el que domina el ansia de la mudanza y la novedad. El hombre sabe que es actor de su destino y no sólo espectador. Este espíritu se manifiesta en las Artes y en la Literatura. Los escultores y pintores buscan la representación de la vida en el movimiento, y en los escritores el tema de lo mudable y pasajero está presente.

Admira que también el tema de la Matemática sea lo variable.

No se trataba de un tema nuevo. Los Fermat, Pascal, Barrow, Cavalieri, Roberval, Wallis, Huygens y Gregory, ya estuvieron en el problema y dejaron un depósito considerable de ideas y resultados, pero se podría decir, que el tiempo aún no había llegado. En palabras de Newton, se trataba de "sujetar las leyes de la Naturaleza a las leyes de la Matemática", sujetar lo variable, sin

que lo variable pierda su condición. Este propósito sólo podría considerarse como sensato en una época en la que se admitía la entidad de lo variable, e incluso "la celeste armonía, en mudanza se funda" como escribiera el poeta.

Casi simultáneamente, un físico-matemático, Newton, y un filósofo-matemático Leibniz, institucionalizan algunas de las ideas de sus predecesores, para que sean fundamento de un nuevo Cálculo, que para Newton es el Cálculo de fluxiones y para Leibniz el Cálculo infinitesimal. Los dos atacan el problema de la misma forma. Tratan de estudiar el proceso variable en un instante o en un lugar determinado, sin interrumpirlo, es decir, sin pasar a una situación estática.

Para Newton la variación en el movimiento se conoce por la velocidad, y para Leibniz la variación es consecuencia del comportamiento de los indivisibles de los que está constituido el continuo, según su concepción filosófica.

Obsérvese que el tema del infinito, a través del continuo subyace en ambas presentaciones del estudio local de lo variable.

Para Newton, la velocidad aparece como un límite de un cociente incremental, que es la velocidad media, al que nos aproximamos tanto como deseemos.

Leibniz trata directamente con incrementos infinitesimales, no nulos, pero menores que cualquier número, llamados diferenciales, con las que forma el cociente diferencial. (Una interpretación de estas entidades se da en el moderno Análisis non-standard).

La diferencia entre una y otra manera de ver las cosas refleja la orientación física del pensamiento de Newton , y la filosófica del de Leibniz enmarcada en la teoría de las mónadas.

Consecuencia de lo expuesto es que Newton resuelve el problema del área calculando su derivada, y así la obtiene como una antiderivada, es decir, pasando de las fluxiones a las fluyentes. Leibniz, siguiendo las ideas de Cavallieri, obtiene el área como una suma de una infinidad de indivisibles.

Los dos conceptos: la derivada y la integral, independientemente de cómo han sido generados, son dos máximos en la capacidad creativa del ingenio matemático. Su simplicidad conceptual y su fecundidad demostrada en la construcción de un Cálculo para lo variable, los muestra como objetos matemáticos plenos de belleza.

La resolución de ecuaciones algébricas por radicales

Hay problemas que resisten a la acción del tiempo. Puede cambiar su enunciado, de acuerdo con los conocimientos matemáticos de cada época y con los progresos realizados en su resolución, pero lo esencial de la pregunta permanece sin respuesta. Esta sólo llega cuando se dispone del instrumento matemático adecuado, que con frecuencia se basa en nuevas ideas.

Uno de estos problemas es el de la resolución de ecuaciones algébricas por radicales; es decir, se trata de hallar fórmulas que den las raíces de la ecuación a partir de sus coeficientes, en las que sólo intervengan las cuatro operaciones racionales y la radicación.

En la antigüedad ya se conocían métodos para resolver ecuaciones de segundo grado, y los matemáticos italianos del Renacimiento dieron fórmulas para las de tercer y cuarto grados.

Desde mediados del siglo XVI hasta principios del XIX, se hicieron infructuosas tentativas, algunas protagonizadas por los más grandes matemáticos, como Euler y Lagrange, para hallar fórmulas para la ecuación de quinto grado. Ruffini en 1811, e independientemente Abel en 1824, probaron que no existían fórmulas para las ecuaciones generales de grado superior al cuarto.

Este resultado negativo dio lugar a una nueva formulación del problema, pues si bien las ecuaciones generales no son resolubles por radicales, pudieran serlo algunas ecuaciones particulares de grado superior al cuarto, como en efecto ocurre. Se trata pues, de hallar condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación algébrica sea resoluble por radicales.

En 1832 moría trágicamente el joven matemático francés Evaristo Galois, la estrella de esta teoría, dejando unos escritos con la solución del problema. En sus trabajos inspirados en los métodos de Lagrange, introducía nuevos conceptos, como el de grupo, con los cuales no sólo resolvió la cuestión planteada sino que inició un camino moderno para el Algebra. De la importancia de este hecho se hace eco el gran matemático J. Liouville, que en 1843 dirigía una comunicación a la Academia de Ciencias de París, en los siguientes términos:

"Espero interesar a la Academia al anunciarle que entre los papeles de Evaristo Galois he encontrado una solución, tan precisa como profunda, del bello problema de la resolución de una ecuación algébrica por radicales".

El esquema de las ideas y métodos de Galois es el que se expone en las siguientes definiciones y propiedades:

Dada una ecuación algébrica, cuyo término de grado máximo tiene coeficiente unidad, el cuerpo base es el generado por los coeficientes, y el cuerpo de descomposición es la mínima extensión del cuerpo base que contiene las raíces de la ecuación.

Los automorfismos del cuerpo de descomposición, que dejan invariantes los elementos del cuerpo base, forman un grupo respecto de la operación habitual de composición de aplicaciones, que se denomina grupo de Galois de la ecuación dada. Cada automorfismo efectúa una permutación en el conjunto de las raíces de la ecuación, por lo que el grupo de Galois se puede identificar con un grupo de permutaciones de las raíces de la ecuación, que evidentemente es finito.

Definido este grupo mágico, la propiedad central de la teoría es que existe una correspondencia biunívoca que relaciona el conjunto de subgrupos del grupo de Galois, y el conjunto de los cuerpos intermedios entre el cuerpo base y el de descomposición. Esta correspondencia los vincula estrechamente, de manera que las propiedades de los cuerpos intermedios se deducen de las de dichos subgrupos.

El grupo de Galois de una ecuación caracteriza la simetría interna de sus raíces. Todos los problemas fundamentales relativos a la posibilidad de reducir la resolución de una ecuación a las de otras de grados inferiores, se pueden formular como problemas sobre la estructura de grupos de Galois.

En particular, una ecuación es resoluble por radicales si, y sólo si, su grupo de Galois es soluble, es decir, si posee una serie normal en la que los sucesivos factores sean abelianos.

La Teoría de Galois es prototipo de una bella realización matemática. En ella se introducen algunas nociones nuevas referentes a las teorías de cuerpos y grupos, pero son las indispensables para alcanzar los fines de la teoría. Los razonamientos se orientan en cada fase por lo que demanda el problema, con la coherencia de algo necesario. Por medio de la teoría de grupos se consigue analizar la simetría interna del conjunto de las raíces de la ecuación. Todos los objetos matemáticos de la Teoría son los adecuados para conseguir la transparencia de las conclusiones.

Realmente que en esta Teoría se reconocen las formas de que hablara Aristóteles al tratar de la belleza formal.

Clasificación de los infinitos

En todos los esforzados trabajos realizados por Cauchy, Bolzano y especialmente por Weierstrass para rigorizar el Análisis matemático, estaba latente siempre el mismo problema. Se trataba en realidad de descubrir los esquemas que permitieran operar con los elementos de conjuntos infinitos. La rigorización no estaba urgida por deficiencias lógicas, sino por un conocimiento incompleto de ciertas clases de conjuntos infinitos.

Fue hacia 1870 cuando, por vez primera, un matemático eligió como objeto de sus investigaciones el concepto abstracto de conjunto, es decir, conjunto sin calificativo alguno. G. Cantor elaboró una teoría, a partir de ideas muy simples, que abarca tanto a los conjuntos finitos como a los infinitos.

La necesidad de comparar las magnitudes de los conjuntos infinitos condujo a Cantor a establecer un criterio de comparación, que además permitiera definir la potencia de cada conjunto y su número cardinal correspondiente, expresión de su magnitud.

La simple idea de coordinabilidad, que por abstracción originaba el concepto de número natural, era aplicable a conjuntos cualesquiera, dando lugar al concepto de número cardinal: Dos conjuntos tienen el mismo número cardinal, o la misma potencia, cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ellos. La noción de número cardinal fue formalizada posteriormente por J. Von Neumann.

Los conjuntos infinitos más conocidos son, el de los números naturales, y el de los números reales, que tienen distinta potencia. El descubrimiento de infinitos de distinta potencia fue una sorpresa y el origen de la fecunda teoría de la numeración cardinal de los infinitos.

Además, se puede asegurar que existen conjuntos de potencias cada vez mayores en virtud de la proposición cantoriana: "El conjunto formado por las partes de un conjunto tiene potencia superior al original". La reiteración de esta propiedad, a partir de un conjunto infinito, como el de los números naturales, permite obtener una sucesión creciente de números cardinales.

Problemas fundamentales de la Matemática son los referentes a la existencia de potencias intermedias entre las de la escala anterior.

La teoría de Cantor de los números cardinales, es una de las bellas creaciones del ingenio matemático. El infinito, con toda su problemática y su inaccesibilidad es el elemento básico, la coordinabilidad como instrumento comparativo es una idea simple, y el desarrollo de la teoría es fecundo y sorprendente.

Una definición de Geometría

Los años de la década 1870-1880 fueron de especial relieve para la Universidad alemana, que vivía un clima de optimismo nacional. El año 1872 tuvo un peculiar significado en el campo de la Matemática: Cantor estableció las directrices de una Teoría de conjuntos abstractos, abriendo un nuevo campo de investigación; Weierstrass daba a conocer en la Academia de Berlin una función continua sin derivada en ningún punto; Dedekind publicaba el trabajo "Continuidad y números irracionales" en el que construía los números irracionales por medio de las cortaduras, método de estilo clásico indudable; y finalmente Klein dio a conocer su famoso "Programa de Erlangen", del que nos ocuparemos con detalle.

Se han mencionado estos trabajos porque desde un punto de vista estético tienen una valoración muy notable, dentro del periodo calificado como "Edad del rigor".

Félix Klein, con 23 años, fue llamado a la Universidad de Erlangen con la categoría máxima de Profesor. En el discurso inaugural ante la Facultad y el Senado universitarios, expuso un extenso programa de investigación para los años próximos. La disertación estuvo dedicada especialmente a la Geometría, en una época de florecimiento de las Geometrías proyectivas y no euclídeas. Con admirable decisión y para ordenar las ideas, se planteó la cuestión básica previa: ¿Qué es una Geometría?.

Naturalmente que esta pregunta trasciende a toda consideración metodológica, para incidir en los conceptos fundamentales, no sólo de la Matemática sino también de la Física.

En el razonamiento que hace Klein para llegar a una definición, observa que, en cada una de las geometrías, las correspondientes transformaciones espaciales forman un grupo, y dice textualmente "Las propiedades geométricas están caracterizadas por su invariancia frente a las transformaciones del grupo".

Más adelante escribe lo que se puede considerar como definición de Geometría: "Dado un conjunto en el que está definido un grupo de transformaciones, la Geometría es la teoría de los invariantes relativos al grupo".

Definición simple y profunda que no solo engloba a todas las geometrías entonces conocidas, sino que muestra el camino para descubrir otras.

Para captar el pensamiento de Klein con toda claridad lo mejor es volver al contexto histórico.

La fama de la Geometría proyectiva se consolidaba después que Poncelet publicara un tratado sobre la materia. En él distingue las propiedades proyectivas, invariantes para las transformaciones proyectivas, de las propiedades métricas, que no lo son. Aunque esta distinción era bastante expresiva, fue Cayley quien aclaró completamente la cuestión, al descubrir que las propiedades métricas son invariantes respecto de las transformaciones proyectivas que dejan fijos ciertos elementos, como son los puntos cíclicos del plano proyectivo complejo, y claro está que estas transformaciones forman un grupo. Esta observación señalaba el camino hacia el "Programa de Erlangen", que después seguiría Klein.

Las Geometrías no euclídeas, que habían causado tanta sensación, también quedaban incluidas en el esquema proyectivo, siendo sus transformaciones las proyectivas que dejan invariante una cónica en el plano, tomando una adecuada distancia. Cayley entusiasmado con esta síntesis escribió: "La Geometría proyectiva es toda la Geometría".

Desde el punto de vista kleiniano, se consigue una clasificación racional de las propiedades geométricas, a partir de los grupos de transformaciones. El grupo lineal determina las propiedades proyectivas, el ortogonal las métricas, el simpléctico las propiedades de los complejos lineales, etc. Incluso la Topología aparece como el conjunto de las propiedades invariantes respecto del grupo de las transformaciones biunívocas y bicontinuas.

El espacio, en una Geometría de Klein, es el conjunto en el que están definidas las transformaciones del grupo. La Geometría no es ya la simple descripción de los objetos de un espacio, en el que creemos estar inmersos, sino que precisamente la Geometría es la que da forma a dicho espacio.

Por otra parte, si en el espacio se sitúa un sistema de referencia para la Geometría, cualquier otra referencia admisible se obtiene de la primera por una transformación del grupo, y se puede establecer una correspondencia natural entre las transformaciones del grupo y los sistemas de referencia. Entonces se podría dar como definición de Geometría: "El conjunto de las nociones que no dependen del sistema de referencia". Tengamos presente que en Física el sistema de referencia equivale al observador.

La Geometría definida en el espacio tetradimensional por las transformaciones del grupo de Lorentz determina el espacio de la Relatividad restringida.

La noción kleiniana de Geometría tiene la belleza de la sencillez unificadora, y da luz y coherencia a extensas áreas de la Matemática.

La belleza en la investigación básica

Los juicios estéticos referentes a la Matemática actual, se basan esencialmente en los mismos criterios que han estado presentes al enjuiciar los objetos matemáticos de otras épocas. La dificultad radica en que, dado el alto grado de abstracción de muchas teorías, sólo los especialistas son capaces de decidir si se presentan los caracteres clásicos de la belleza estática o los más difíciles de percibir en el campo de la creatividad.

La belleza de la Matemática actual es más difícil de percibir, y normalmente sólo es posible a los iniciados. Sin embargo el carácter estético de la investigación básica no se debe menospreciar, pues en algunos casos es el principal argumento para realizarla.

Como decía al principio, cuando el Profesor Valdivia comentaba su proposición, pronto me dí cuenta de que se trataba de una bella proposición. Su formulación era simple y tenía sorpresa, pero para poder percibir su belleza se ha de conocer la estructura del espacio $D(\Omega)$, lo que requiere un largo proceso de especialización, y una educación pareja de la sensibilidad estético-matemática.

Belleza matemática y Didáctica

Los valores estéticos de la Matemática, que en algunos casos llegan a convertirse en verdaderas finalidades de la investigación, tienen interés indiscutible en el campo didáctico en cualquier nivel de enseñanza. Este aspecto ha sido olvidado con frecuencia, lo que ha originado fallos lamentables, tanto más cuanto que, en este tipo de enseñanza, juega un papel importante la educación de una cierta sensibilidad intelectual.

No se trata de una reordenación de materias a niveles elementales, ni del establecimiento de cursos especiales relacionados con estas materias, se trata esencialmente de una disposición en el profesor por la que prime el sentido creativo de la belleza sobre el utilitario.

Quien sea capaz de sentir el placer estético en la re-creación de una teoría, estará próximo a la creación personal; y cuando un joven llega a sentir el placer de lo bello al reflexionar sobre lo oído o estudiado, quedará convencido de que es algo que vale la pena.

Hace muchos años, después de varias lecciones en las que expliqué rigurosamente la teoría del número real, se me acercó un joven que me dijo:

"Profesor, he gozado fenomenalmente".

Quedé perplejo y le dije que me alegraba. Este ha sido uno de los mayores elogios que he recibido en mi vida profesional.

Palabras finales

Para la investigación en el campo abstracto de la Matemática actual, aparte de una necesaria vocación, requiere el científico cualidades poco frecuentes, y ante el legítimo deseo de ocupar un lugar digno en la oferta tecnológica que se hace a la sociedad, algunos se formulan la siguiente pregunta: ¿No sería más recomendable desviar el interés de tales estudiosos hacia otros objetivos científicos más próximos y concretos?.

Precisamente cuando no me ocupaba de la Matemática ni de la Estética, vino a caer a mis manos un texto del literato y premio Nobel alemán Hermann

Hesse, que me impresionó por su sencilla y rotunda afirmación, y que contestaba la pregunta que antes formulara. Dice así:

"Si en un mundo que busca finalidades y está ávido de realizaciones, ya no fuéramos sensibles a la fantasía, ni a la alegría de la belleza, y tampoco a la libertad de los colores y al adorno de los espacios, entonces, en medio de él, seríamos los más pobres de los hombres".

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Aristóteles: **Metafísica**. Trad. V. García Yebra, Ed. Gredos, 1982.

Bayer, R.: **Historia de la Estética**. F.C.E., México, 1961.

Burton, D.M.: **The History of Mathematics**. Ed. Allyn and Bacon, Boston, 1985.

Cantor, G.: **Gesammelte Abhandlungen mathematischen und plilosophischen Inhalt**, Ed. Springer 1932.

Dedekind, R.: **Stetigkeit und irrationale Zahlen, Ges. math. Verke** Braunschweig, 1932.

Davis, J.D. & Reuben, H.: **The Mathematical Experience**. Ed. Birkhäuser Boston, 1981.

Ferreter Mora, J.: **Diccionario filosófico**. Alianza Editorial.

Fleckenstein, J.O.: **Scholastik, Barock, Exakte Wissenschaften**. Johannes Verlag, Einsiedeln 1949.

García Pérez, P.L.: **Sobre los fundamentos geométricos de las teorías físicas**. Lección inaugural de curso en C.E.S. Armada 1985.

Gödel, K.: **Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme**, Monatsheft für Math, u, Phys., 1931.

Hardy, G.H.: **Autojustificación de un matemático**. Ariel Barcelona, 1981.

Heath, T.L.: **A History of Greek Mathematics**, Oxford Univ. Press, 1921.

Hofstadter, D.R.: **Gödel, Escher, Bach**. **E.Klett Verlag** N,Y, 1979.

Kant, I.: **Crítica de la razón pura. Crítica de la razón práctica**. Ed. Porrúa S.A. México 1982, 1983.

Kline, M.: **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. Oxford Univ. Press 1972.

Klein,,F.: **Ges, math, Werke. I.B.** Springer Verlag 1921.

Leibniz, G.W.: **Escritos filosóficos. Ed. Charcas**, Buenos Aires, 1982.

Maravall, J.A. **La cultura del Barroco. Ariel** Barcelona, 1980.

Millan Puelles, A.: **Léxico Filosófico. Ed.** Rialp.

Nestle, W.: **Historia del Espíritu Griego**. Ariel. Barcelona, 1961.

Platón. Diálogos. Ed. Porrúa, México, 1984. También Aguilar en las Obras Completas.

Poincaré, H.: **La valeur de la Science y otras**. Ed. Flammarion, París, 1902-13.

Weyl, H.: **Philosophy of Mathematics and Natural Science**. Princeton Univ. Press. 1949.

CALCULO DE LOGARITMOS

por Fidel Oliveros Alonso

Los logaritmos se presentan por primera vez a los alumnos en segundo curso, con el siguiente programa:

Se define $\log_B N$ para B , $N > 0$, como el número x tal que $B^x = N$. Se ilustra esta definición con el cálculo de algunos logaritmos debidamente preparados, por ejemplo, $\log_9 \sqrt{27}$ ó $\log_8 0{,}125$. A partir de ahí, los logaritmos como $\log 241{,}231$ ó $\log_{63} 7{,}241$ salen misteriosamente de las calculadoras ahora, como antes salían de las tablas.

Parece conveniente mostrar algún algoritmo con el que, mediante las cuatro operaciones eleemntales, se obtengan las sucesivas cifras decimales de un logaritmo, lo mismo que en la escuela se enseñan las reglas para sacar las cifras de un cociente o de una raiz cuadrada, aunque luego, por lo penoso de las operaciones involucradas, terminemos recurriendo a la calculadora.

El algoritmo que a continuación se describe se ha escogido entre otros muchos posibles por su sencillez, aunque no por su rapidez, y sus fundamentos pueden ser explicados en clase perfectamente. En último caso vale para satisfacer la curiosidad de los interesados por el tema, como a mí mismo me pasó en su día.

Está tomado del artículo "L'algo du log" de Boris Yarenitch, publicado en el número 2 (Sept. 84) de la revista LIST. Así es tal como allí aparece:

Supongamos para empezar que tenemos dos números B y N tales que $1 < B < N$; que A es la parte entera de $\log_B N$, y que b , c , d , ... son las sucesivas cifras del mismo logaritmo. Escribimos esto así:

$$\log_B N = A{,}bcd\ \ldots$$

por definición esto es equivalente a

$$B^{A,bcd\ldots} = N \qquad ;$$

como hemos supuesto que $B < N$, se dividen ambos miembros por B y se obtiene

$$B^{A-1,bcd\ldots} = N/B \qquad ;$$

si es también $B < N/B$, se vuelve a dividir por B para tener

$$B^{A-2,bcd\ldots} = N/B^2$$

y se prosigue así hasta tener un cociente inferior a B en cuyo caso

$$B^{0,bcd\ldots} = N/B^A$$

es decir, la parte entera del logaritmo, A , es el número de divisiones necesarias para llegar a un número $M_1 = N/B^A$ menor que la base B .

La igualdad

$$B^{0,bcd\ldots} = M_1$$

la podemos elevar a 10 para tener

$$(B^{0,bcd\ldots})^{10} = M_1^{\,10} \qquad ;$$

operando en el primer miembro y poniendo en el segundo $N_1 = M_1^{\,10}$ queda

$$B^{b,cd\ldots} = N_1$$

y ahora se divide N_1 por B tantas veces como sean necesarias para llegar a un número menor que B . Como antes, el número de divisiones hecahs nos da la cifra b y podemos escribir

$$B^{0,cd\ldots} = N_1/B^b = M_2 \qquad .$$

Este proceso (elevar a la décima potencia y dividir el número resultante por B tantas veces como sea preciso para hacerlo menor que B) se repite indefinidamente para calcular las sucesivas cifras decimales del logaritmo.

Por este procedimiento, el cálculo de las cifras 2,162 de

$$\log_{7,234} 72,126 \Rightarrow \frac{\ln 72,126}{\ln 7,234} = \frac{4,278415}{1,978792} = 2,162134$$

cuesta justamente 11 divisiones y 12 multiplicaciones, si se hacen las elevaciones a la 10ª potencia con cuatro multiplicaciones, como muestra el siguiente ejemplo

$$M.M = M^2 \ , \ M^2.M^2 = M^4 \ , \ M^4.M^4 = M^8 \ , \ M^8.M^2 = M^{10} \ .$$

Se puede hacer notar el paralelismo entre este algoritmo y el de la división: a la división por B le corresponde la sustracción del divisor al dividendo, y a la elevación a la décima potencia le corresponde la bajada de cifra al resto para formar un nuevo dividendo parcial.

Si $B > N$, se comienza elevando N a la 10ª potencia. En cuanto a las modificaciones necesarias cuando $B < 1$ ó $N < 1$, son inmediatas teniendo en cuenta que $\log_B N = -\log_B (1/N)$ y que $\log_B N = -\log_{(1/B)} N$

Teóricamente se pueden obtener tantas cifras como se quiera. En la práctica, el grado de aproximación con que se calculan los resultados intermedios limita el número de cifras correctas que se pueden obtener.

El artículo "L'algo du log" donde viene el algoritmo incluye además el correspondiente programa en BASIC. Esperamos que con lo dicho, cada cual pueda escribirlo a su propio gusto.

Personalmente hemos preferido desarrollarlo en clase con una calculadora que apenas admite programación: Concretamente el modelo fx - 180 P de Casio, que permite memorizar dos probramas sin bifurcación: uno para dividir el número presentado en pantalla por un divisor fijo, dejando el resultado en la pantalla, y el otro para elevar el número en la pantalla a la 10ª potencia, dejando el resultado también en pantalla.

Estos programas son:

P(1) + MR =

P(2) x = x x^2 x^2 =

Se hizo así por varias razones: la primera y principal desde el punto de vista didáctico es que así se veía la marcha del proceso paso a paso; la segunda, más matemática, es que da mejor aproximación una buena calculadora que un mal ordenador; la tercera, obviamente definitiva en nuestro caso es que no disponíamos de ordenador.

Incluso se puede practicar el proceso con una sencilla calculadora de "cuatro operaciones" con tal de que tenga tecla de elevación al cuadrado. Aunque se opere con números escritos en base decimal, basta pensar que las cifras posteriores a la coma en el logaritmo son cifras escritas en base binaria, es decir, ceros y unos. Entonces, en vez de elevar a la 10^a potencia, habrá que elevar al cuadrado sustituyendo la sucesión de operaciones de P(2) por la pulsación de la tecla de elevar al cuadrado. Naturalmente, al final habrá que pasar estas cifras binarias al sistema decimal.

La obtención del logaritmo en sistema binario enlaza con otro método: se consideran en principio dos intervalos, uno que comprende al número dado y cuyos extremos son dos potencias enteras sucesivas de la base B y otro cuyos extremos son los logaritmos de aquellos. Por interpolación entre los extremos de la media geométrica y aritmética, respectivamente, se seleccionan otros dos nuevos intervalos que cumplen las condiciones iniciales (salvo el hecho de ser potencias enteras de B) Se forman así dos sucesiones de intervalos. Los extremos de los intervalos de la segunda sucesión son aproximaciones por defecto y por exceso del logaritmo buscado.

Hay, como se ve, campo abierto para las exploraciones de una clase interesada en el asunto.

En los libros y revistas dedicados al tema de las calculadoras aparecen algoritmos para el cálculo de algunas funciones trascendentes. He aquí algunos:

(1) - En el artículo "L'algo du log" ya citado, además del algoritmo descrito y del esbozado sobre interpolación de medias geométricas y aritméticas se indican otros dos procedimientos.

(2) - El método Cordic (COrdinate Rotation Digital Computer) que de hecho emplean algunas calculadoras de la marca Texas y que se puede explicar fácilmente basándose en el teorema de adición de la función $y = \tan x$, se describe en el artículo "Derrière les calcul rapides / le secret des algorithmes", publicado en la revista "L'Ordinateur Individuel", nº 24 (Febrero 81) y también, traducido, en la revista "El Ordenador Personal", nº 12 (Enero-Febrero 83) . Se advierte al que lo lea que no se deje confundir por las erratas que se escapan en el organigrama, tanto en una revista como en la otra.

(3) - El capítulo 10 del libro "Calculatrices de poche et informatique" de P. Vitrant (Ed. Masson) indica tres métodos para el cálculo de $\operatorname{sen} x$. En el mismo libro se explica detalladamente como funciona una calculadora tomando como modelo la TI - 59 .

(4) - "Un algorithme amélioré pour calculer la fonction Gamma", de Robert Pullard, en la revista "L'Ordinateur de poche", nº 12 (Abril 83) utiliza la fórmula de Stirling (desarrollo asintótico hasta $1/n^4$) tras haber desplazado el valor de la variable hasta otro suficientemente grande, aplicando la ecuación funcional $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

- ■ - ■ - ■ -

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

EL PRODUCTO ESCALAR EN EL BACHILLERATO

por Fernando Alvarez Herrero
y Andrés Ruiz Merino

1. Lo que no debería haberse hecho

En muchos de los textos de Bachillerato y C.O.U. que han servido de guía a alumnos y profesores en los últimos años se introducía - siguiendo orientaciones oficiales - el producto escalar como una forma bilineal llovida del cielo y granizada con un conjunto de axiomas. De ella se derivaba, con no poco trabajo, la desigualdad de Schwartz

$$|\bar{a}.\bar{b}| \leq |\bar{a}|\,|\bar{b}| \qquad -1 < \frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} < 1$$

para dos vectores a y b ; y, a partir de aquí se definía un abstruso concepto de ángulo de dos vectores mediante la igualdad

$$\cos \alpha = \frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} .$$

Al final había que quedarse en R^2 o R^3 ¡ qué remedio ! , a pesar de lo cual, la noción de distancia, tan pitagórica, se deducía también traida por la ventisca de la forma bilineal. Demasiadas alforjas para tan corto viaje. Independientemente de las complicaciones formales de este desarrollo, cabe imaginar la sorpresa de un alumno que se entera de pronto que no sabe medir ni hallar distancias, y que si lo hace es gracias a un oprador que, además, no entiende: ¿ Como no iba a ser euclídeo su plano si hasta se representaba normalmente en papel cuadriculado ?

Parece claro que esta loable avaricia de generalidad rebasa con creces la capacidad de un bachiller normal: " Cuando un libro choca con una cabeza y suena a hueco, no siempre la culpa es de la cabeza ".

2. Lo que también se hace y se pretende mejorar.

Otror textos se han decidido por una opción más asequible que no cuestiona ni la idea de ángulo ni la de distancia y plantea el estudio - que no el problema de fondo - directamente en el plano o en el espacio. Se comienza definiendo el producto escalar en cualquiera de sus dos formas: a través de los módulos y el ángulo, o por medio de su expresión algebraica. En el primer caso, de la igualdad

$$\overline{a}.\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\alpha$$

se derivan fácilmente tanto la interpretación geométrica, a través de la proyección, como el criterio de perpendicularidad. Igualmente sencillas resultan las propiedades de tipo algebraico, excepto dos, de trabajo más costoso: la "asociatica" para el producto por un número y, sobre todo la distributiva, que hay que desmenuzar en varios casos.

No obstante, el inconveniente principal es la ausencia de pistas que apunten hacia la utilidad de esta nueva operación. Asuntos como el cálculo de proyecciones o la determinación de la perpendicularidad, lo más interesante, son inabordables porque el ángulo, que es el objetivo primordial, se desconoce; y si se conoce, resultan absurdos, por triviales. Al resto de las propiedades no se les ve, de momento, interés alguno.

Finalmente, y via la base canónica ortonormal se llega ¡ por fín ! a la expresión en función de las componentes:

$$\overline{a}.\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \quad ;$$

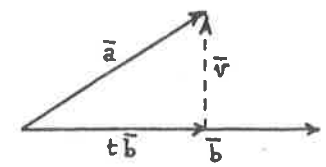
y para ello ha sido preciso hacer intervenir casi todas las propiedades deducidas, que, en este desarrollo, resultan ineludibles. El alumno ha seguido ciegamente el discurso deductivo. Y sólo en este momento, al fianl, cobra sentido el nuevo operador. A partir de ahora hay que retomarlo todo para calcular precisamente el elemento primordial de la definición, el ángulo, y, subsidiariamente, la perpendicularidad.

Si, por el contrario, se parte de la definición $\overline{a}.\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2$, las propiedades que fluyen sin dificultad son, como es lógico, las del tipo algebraico.

Conseguir un criterio de perpendicularidad, que será necesario para continuar, exige decubrir y probar que

$$|\overline{a} + \overline{b}|^2 = |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 + 2\,\overline{a}.\overline{b}$$

para, tras algunas consideraciones geométricas, llegar a la conclusión de que la igualdad $\overline{a}.\overline{b} = 0$ es el deseado criterio. Para llegar a la forma equivalente $|\overline{a}||\overline{b}|\cos\alpha$, hay que hacer ahora un razonamiento del tipo siguiente:



Dados los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$, el vector proyección de $\overline{a}$ sobre $\overline{b}$ es de la forma $t\overline{b}$. Dado que $\overline{a} = t\overline{b} + \overline{v}$, se tiene, multiplicando escalarmente por $\overline{b}$:

$$\overline{a}.\overline{b} = (t\overline{b} + \overline{v})\overline{b} = t\overline{b}.\overline{b} + \overline{v}.\overline{b} = t\overline{b}.\overline{b} = |\overline{a}|\cos\alpha|\overline{b}|$$

El paso de la forma algebraica a la geométrica, aparte de algo duro exige una cuidadosa concatenación de la presentación de las propiedades.

En ambos casos se observa que:

- Se parte de una definición gratuita.
- Resulta difícil conectar desde un principio con el problema que se aborda: la determinación del ángulo de dos vectores.
- El único estímulo que puede darse al alumno durante el desarrollo es la promesa de un final feliz.
- Es imposible precindir de algunas propiedades para lograr el tránsito de una formulación del producto escalar a otra.
- Existen pasos no triviales en el proceso que además es largo.

3. La pretendida mejora.

La propuesta que presentamos evita, en nuestra opinión, todos los inconvenientes descritos más arriba.

Se plantea desde un principio el problema de calcular el ángulo formado por dos vectores dados por sus componentes y, en particular, de decidir si este es recto. Y también, desde el principio, se resuelve en un solo paso el problema de la equivalencia entre las dos definiciones.

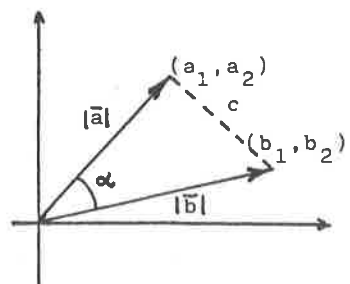
3.1 El esquema del desarrollo

El tratamiento será además breve por imposibilidad de hacerlo largo, ya que todo el trabajo lo hace el teorema del coseno, deducible del de Pitágoras, y que se ha visto ya al resolver triángulos. Por otro lado el esquema sirve tanto para el plano como para el espacio.

3.1.1 El ángulo

Se parte de $\bar{a} = (a_1, a_2)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2)$ con representantes en el origen. Buscamos el ángulo α. El teorema del coseno afirma

$$c^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha$$



y como $c^2 = (b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2$,

$$|\bar{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 \ , \quad |\bar{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$$

se obtiene

$$(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha$$

de donde

$$\boxed{a_1b_1 + a_2b_2 = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha} \qquad (1)$$

o bien

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

La expresión (1) relaciona ángulos, distancias y componentes. Puede usarse ya para "atrapar" al estudiante decidiendo perpendiculares, calculando ángulos, obteniendo ecuaciones de lugares geométricos, etc..

3.1.2 El producto

En la igualdad (1) el segundo miembro tiene un claro caracter geométrico, mientras que el primero presenta la ventaja de su fácil cálculo.

Definimos, pues, de dos formas equivalentes, una nueva operación entre vectores: el <u>producto escalar</u>.

$$\boxed{\text{Definición:} \quad \bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha = a_1b_1 + a_2b_2}$$

Y si algún vector es nulo, la primera forma de la definición no es aplicable, pero la segunda obliga a definir $\bar{a}.\bar{b} = 0$.

3.1.3 Las propiedades.

Las propiedades del producto escalar dejan de ser ahora la vía obligada para conseguir reformular éste, y casi se convierten en un lujo. Su justificación es además automática en todos los casos (nunca excederá de una línea), ya que podemos elegir la forma de (1) que más convenga. Las demostraciones son independientes y pueden ser presentadas en el orden que se desee.

Una clasificación podría ser:

<u>Propiedades geométricas</u>, derivadas de $\bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha$:

** Criterio de perpendicularidad

$$\bar{a} \perp \bar{b} \iff \cos\alpha = 0 \iff \bar{a}.\bar{b} = 0 \ (\ \bar{a} \neq \bar{0}\ ,\ \bar{b} \neq \bar{0}\ )$$

** Interpretación geométrica

$$\bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha = \pm|\bar{a}|.\text{Proy}(\ \bar{b} \text{ sobre } \bar{a}\ )$$

<u>Propiedades algebraicas</u>, derivadas de $\bar{a}.\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

** Conmutativa $\quad \bar{a}.\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = \bar{b}.\bar{a}$

** Distributiva $\quad \bar{a}.(\bar{b}+\bar{c}) = (a_1,a_2)(b_1+c_1, b_2+c_2) =$
$\qquad = (a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2) = \bar{a}.\bar{b} + \bar{a}.\bar{c}$

** Pseudoasociativa $\quad (\lambda\bar{a}).\bar{b} = \lambda a_1b_1 + \lambda a_2b_2 = \lambda(\bar{a}.\bar{b})$

** Relación módulo - producto escalar $\bar{a}.\bar{a} = a_1^2 + a_2^2 = |\bar{a}|^2 \geqslant 0$

4. Nostalgia final

No obstante, parece que, con esta presentación, pierde el producto escalar ese pequeño halo de misterio que le proporcionaba su pequeña filigrana deductiva:

definición $\longrightarrow$ propiedades $\longrightarrow$ redefinición $\longrightarrow$ propiedades

Casi se diría que pierde prestigio por ganar claridad y por evitar el carisma de lo supérfluo.

EL JUEGO DE LA LOGICA

Por Benjamín García.

"Si así fue, así pudo ser.
Si así fuera, así podía ser,
pero como no es, no es.
Eso es la lógica. (1)

1. LA LOGICA.

"Permíteme", dijo el caballero con tono de ansiedad, "que te cante una canción".
"¿Es muy larga?", preguntó Alicia que había tenido un día poéticamente cargado.
"Es larga", dijo el caballero, "pero es muy hermosa. Todo el que la oye cantar, o bien prorrumpe en llantos o bien..."
"¿O bien qué?", dijo Alicia al ver que el caballero se había callado de repente.
"O bien no prorrumpe". (2)

"¿Cómo sabes que estás loco?", preguntó Alicia.
"Para empezar", repuso el gato, "los perros no están locos, ¿de acuerdo?"
"Supongo que no", dijo Alicia.
"Bueno, pues entonces, observarás que los perros gruñen cuando algo no les gusta, y mueven la cola cuando están contentos. En cambio yo gruño cuando estoy contento y muevo la cola cuando me enojo, luego estoy loco". (3)

"Dado que se puede tocar un reloj sin pararlo, será posible ponerlo en marcha sin tocarlo. Así es como veo yo la lógica". (4)

"Una vez vi este chiste en un periodico: Un niño y una niña van andando por una acera. El niño va por la parte de dentro. Pasa un camión por la calle, que estaba toda embarrada y pone perdida a la niña. El niño la mira y le dice: ¿Te das cuenta ahora por qué yo no voy por el lado de fuera como un caballero?". (5)

Aunque muchas veces incorporada a las disciplinas de la filosofía, el estudio de la lógica debe realizarse desde un punto de vista matemático, dado su mayor poder formativo en cuanto a la utilización de su propio método de trabajo, este es, el proceso de matematización.

El presente trabajo es, esencialmente, una muestra de la utilización de un modelo matemático, (el Algebra de Boole de las proposiciones) para la resolución de diversos problemas de carácter, en general, no matemático.

Para ello, propondremos la utilización de las tablas de verdad lógicas, y las fichas perforadas.

2. LA UTILIZACION DE LAS TABLAS LOGICAS.

Consideremos el siguiente problema: En un pueblecito de Whithland, hace quince días se produjo la desaparición de los dos cuadros de la comisaría. Tras múltiples pesquisas, se procedió a la detención de tres individuos; Tacker, Wells y Beiler, como posibles autores de la sustracción mencionada.
Después de un largo interrogatorio, se asegura que las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) Si Tacker no robó el cuadro grande, entonces Wells si lo hizo.

2) Si Wells robó el cuadro grande, entonces : Tacker le ayudó y Beiler robó el pequeño.
3) Es imposible que Tacker robara el cuadro grande y Beiler no sustrajera el pequeño.

¿Qué conclusiones podemos sacar?

Para ello consideremos inicialmente las siguientes proposiciones:

p: Tacker robó el cuadro grande.
q: Wells robó el cuadro grande.
r: Beiler robó el cuadro pequeño.

Utilizando el lenguaje formal para expresar las condiciones 1), 2) y 3) obtenemos que:

1) $\bar{p} \longrightarrow q$
2) $q \longrightarrow (p \wedge r)$
3) $\overline{p \wedge \bar{r}}$

y puesto que las tres afirmaciones son ciertas (*), consideramos la tabla de verdad correspondiente a la proposición lógica $(\bar{p} \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow (p \wedge r)) \wedge \overline{(p \wedge \bar{r})} = s$

(*) El problema inicial puede admitir otros planteamientos, como podría ser, considerar (por ejemplo) que después del interrogatorio, se asegura que AL MENOS UNA DE LAS TRES AFIRMACIONES ES CIERTA, con lo que la proposición a estudiar sería :

$$(\bar{p} \longrightarrow q) \vee (q \longrightarrow (p \wedge r)) \vee \overline{(p \wedge \bar{r})}$$

p	q	r	$\bar{p} \to q$	$q \to (p \wedge r)$	$\overline{p \wedge \bar{r}}$	s
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0

Y como obtenemos "1" unicamente en las combinaciones correspondientes a las filas primera y tercera, estudiamos estas combinaciones:

p	q	r	s
1	1	1	1
1	0	1	1

Así en cualquiera de las dos, p y r resultan ciertas, sin que podamos afirmar nada acerca de q.
Esto es, Tacker robó el cuadro grande, Beiler el pequeño, y de Wells no podemos decir nada.

3. LA UTILIZACION DE LAS FICHAS PERFORADAS: LOGICA Y SISTEMA BINARIO.

3.1. Fichas perforadas y sistema binario.

Consideremos ocho tarjetas rectangulares, en las que practicamos tres orificios numerados como se indica en la figura 1:

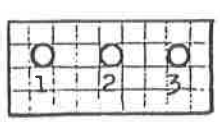


Fig. 1

Pretendemos inicialmente, diferenciar estas tarjetas de forma que cada una de ellas, nos indique un número del 0 al 7.
Para ello, vamos a efectuar algunos cortes (Fig.2) en distintos puntos de las tarjetas, de acuerdo con el número que queremos asociarle y siguiendo el siguiente criterio:

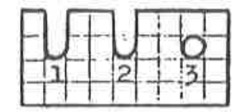
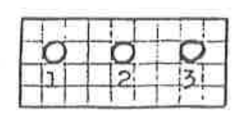
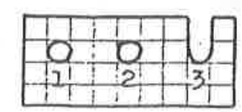


Fig. 2

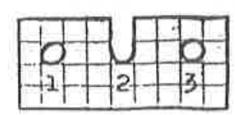
Dada una tarjeta, y si dicha tarjeta queremos que represente el número n ($0 \leq n \leq 7$), procedemos a cortar el agujero i-ésimo (i = 1, 2, 3) si y solo si en el lugar i-ésimo de la escritura binaria de n aparece un uno.
De este modo, la figura 2, representaría el número $110_{2)}$ e.d. $6_{10)}$.
El juego completo de tarjetas, sería por tanto:



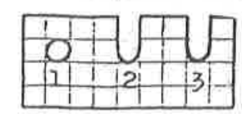
T.0



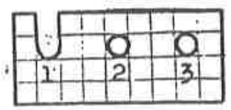
T.1



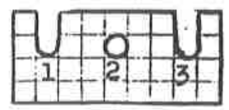
T.2



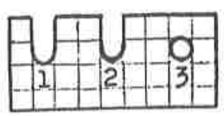
T.3



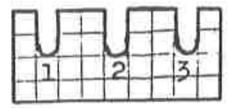
T.4



T.5



T.6

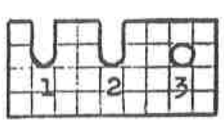


T.7

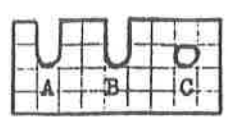
y que representan los números 0 (la T.0.), 1(la T.1.), 2 (la T.2.), 3(la T.3.), 4(la T.4.), 5(la T.5), 6 (la T.6) y 7 (la T.7.).

3.2 Fichas perforadas y lógica proposicional .

Si ahora sustituimos los números 1, 2 y 3 que identificaban cada uno de los orificios , por las letras A, B y C, y las notaciones de "1" y "0" de escritura binaria por "verdadero" y "falso" respectivamente, obtenemos que las ocho tarjetas son todas las combinaciones posibles entre los valores de verdad de tres proposiciones A, B y C.



T.6



A B $\bar{C}$

Fig. 3

3.3 Utilización de fichas perforadas.

Para la utilización de estas fichas perforadas, hemos de realizar los taladros y los cortes, de forma que un lapicero o bolígrafo, pueda ser introducido por los primeros y deslizado por los segundos. (Fig. 4)

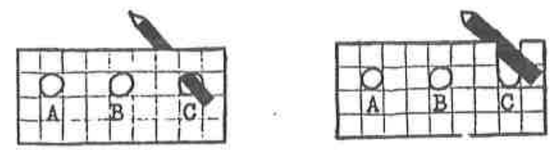


Fig. 4

Consideremos ahora el mazo de las ocho tarjetas, colocadas de forma que hagamos coincidir todos los taladros. (Fig. 5)
De esta forma, si introducimos el lapicero o bolígrafo por el orificio C, por ejemplo, al levantarlo con cuidado, obtendremos que quedan enganchadas en el, las fichas que tienen a C como letra falsa, y en la mesa, las que tienen a C como proposición verdadera. (Fig. 6)

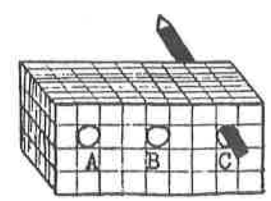


Fig. 5

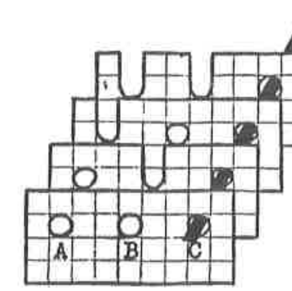


Fig. 6

Con este mecanismo, podemos resolver algunas cuestiones que nos servirán para nuestro objetivo final.

i) Encontrar las tarjetas que tienen a A como verdadera y a B como falsa.

Colocamos las tarjetas como se indica en la figura 5. A continuación introducimos el lapicero o bolígrafo por el orificio A, lo levantamos y las fichas que no hayan quedado enganchadas, tendrán a A como proposición verdadera.
Considermos ahora estas tarjetas (T.4., T.5., T.6., T.7.) Introducimos el bolígrafo o lápiz por el orificio, lo levantamos, y únicamente quedarán enganchadas dos tarjetas (T.4., T.5.) que serán las dos únicas tarjetas que tienen la combinación $A\bar{B}$, e.d. A verdadera y B falsa.

ii) Encontrar las tarjetas que tienen a C como verdadera o a B como falsa.

Para ello, bastará retirar del mazo de tarjetas aquellas que tengan la combinación $\bar{C}B$, e.d. C falsa y B verdadera.
Pero la obtención de las tarjetas con la combinación $\bar{C}B$, se realiza como vimos en i), resultando que dichas tarjetas son las T.2. y T.6. Así pues las tarjetas que poseen la combinación C verdadera o B falsa serán, T.0., T.1., T.3., T.4., T.5., T.7.

3.4 Resolución de los problemas , mediante la utilización de las fichas perforadas.

Vamos a resolver el problema planteado en el apartado 2, con la utilización de las fichas perforadas.

Para ello consideramos las proposiciones:

A: Tacker robó el cuadro grande
B: Wells robó el cuadro grande
C: Beiler robó el cuadro pequeño

Con lo que las afirmaciones que nos daban las podemos escribir de la forma:

1) $\bar{A} \longrightarrow B$
2) $B \longrightarrow (A \wedge C)$
3) $\overline{A \wedge \bar{C}}$

De la primera afirmación, deducimos que hemos de eliminar las fichas con la combinación $\bar{A}\bar{B}$, que son (como en 3.3i) las T.0. y T.1. De la misma forma, de la segunda afirmación, obtenemos la eliminación de las tarjetas con la combinación $B\bar{A}$ y con la combinación $B\bar{C}$, esto es, las tarjetas (como hicimos anteriormente) T.2., T.3. y T.6. De la tercera afirmación, concluimos que hemos de considerar las tarjetas que tienen $\bar{A}$ o C entre las tarjetas que nos quedan (T.4., T.5., T.7.) Resulta así, que las tarjetas T.5 y T.7 son las únicas que verifican las tres condiciones 1), 2) y 3).
Observando las tarjetas T.5. y T.7. (Fig. 7), deducimos que las proposiciones A y C son ciertas, no pudiendo afirmar nada de la proposición B (en T.5. es falsa y en T.7. verdadera).

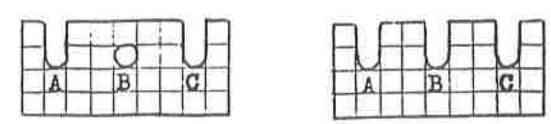


Fig. 7

Así. Tacker robó el cuadro grande. Beiler robó el pequeño. y con la información disponible no sabemos si Wells ayudó a Tacker.

3.5. Generalización.

Evidentemente, podemos resolver problemas más complicados en los que aparezcan más proposiciones, sin más que aumentar el número de tarjetas, y el de orificios en las mismas. Para n proposiciones, necesitamos 2^n tarjetas, con n orificios cada una.

4. BIBLIOGRAFIA.

(1) L. CARROLL : "Trough the looking glass", ed. Dent Dutton.

(2) L. CARROLL :"Al otro lado del espejo", ed. Plaza y Janés.

(3) L. CARROLL : "Alice's adventures in Wonderland", ed. Dent Dutton.

(4) THURBER : "Las tres chimeneas", ed. Cátedra.

(5) SMULLYAN : What is the name of this book?, ed. Prentice-Hall.

AJUSTE DE PROPORCIONALIDADES EXPERIMENTALES

por Eugenio Roanes Macías
Sección Departamental de Algebra
Esc. Univ. Pablo Montesino (U.C.M.)

Sin duda, las funciones que aparecen con más frecuencia en las Ciencias Experimentales son las proporcionalidades, es decir, las funciones caracterizadas por la condición de que al multiplicar la variable por un número, el correspondiente valor de la función quede multiplicado por ese mismo número. Son las funciones de la forma

$$f(x) = cx$$

donde c es un número fijo, denominado "constante de proporcionalidad". Incluso hay muchas funciones que, aún no siendo de proporcionalidad, restringidas a pequeños intervalos de valores de la variable, se comportan "casi" como proporcionalidades, por lo que se suelen considerar como tales en la práctica del cálculo aplicado.

La detección de las proporcionalidades entre magnitudes escalares (absolutas) es más cómoda de efectuar comprobando que conservan la suma, que comprobando que conservan el producto por números (condiciones estas que son equivalentes, según se demuestra en [3]). Pero las proporcionalidades que aparecen en las Ciencias Experimentales han de ser detectadas y calculadas a partir de tablas de valores obtenidas tras la realización de diversas pruebas del experimento, por lo que tiene interés ajustar la proporcionalidad que mejor describa los resultados de dicho experimento.

Comparando, por ejemplo, las longitudes de circunferencias de diversas ruedas con sus respectivos diámetros, se observa que su razón se mantiene "casi" constante: 3.141..., es decir, se observa que, debido fundamentalmente a errores de medida, dicha aplicación no es exáctamente una proporcionalidad, pero sí lo es aproximadamente.

Esta "proporcionalidad aproximada" puede observarse en otros muchos fenómenos: intensidad de la corriente eléctrica que atraviesa una resistencia al variar la tensión (ley de Ohm), alargamiento de un muelle al variar el peso que soporta (ley de Hooke), etc.

Ajuste mínimo-cuadrático

El problema a resolver es el de determinar la función de proporcionalidad, $y = cx$, que mejor se adapta a describir la proporcionalidad aproximada observada en las medidas efectuadas. Pero, ¿qué se entiende por adaptarse mejor?. El criterio más usual es el "mínimo-cuadrático". Si se realizan n medidas:

$$(x_1, y_1) \ , \ (x_2, y_2) \ , \ldots , \ (x_n, y_n)$$

cada una de ellas permite considerar un punto P_i, de coordenadas (x_i, y_i). Si R_i es el punto de la recta de ecuación $y = cx$, cuya abscisa sea x_i, es decir, el punto (x_i, cx_i), entonces la longitud del segmento $\overline{P_iR_i}$ será $|y_i - cx_i|$. Por tanto, la suma de los cuadrados de estos segmentos será, por término medio (es decir, teniendo en cuenta que se han efectuado n medidas):

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_iR_i}^2 = \frac{1}{n} \sum (y_i - cx_i)^2 \qquad (*)$$

Como se indicó anteriormente, se trata de elegir c, de modo que E sea mínimo. Para ello se anula la derivada de E respecto de c, de donde, calculando, resulta para c el valor

$$c = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \qquad (**)$$

que minimiza a E, por ser positiva la segunda derivada de E respecto de c. Sustituyendo en (*) este valor de c, se obtiene

$$E = \frac{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right) - \left(\sum x_i y_i\right)^2}{n \sum x_i^2}$$

cuyo numerador ha de ser no negativo (de acuerdo con la desigualdad de Cauchy-Schwarz), de donde resulta

$$0 \leqslant \frac{\left(\sum x_i y_i\right)^2}{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)} = 1 - \frac{nE}{\sum y_i^2} \leqslant 1$$

siendo E = 0 en caso de que todos los puntos P_i y el (0,0) estén alineados (es decir, en caso de tratarse exáctamente de una proporcionalidad). Por ello puede considerarse al número

$$100 \frac{\left(\sum x_i y_i\right)^2}{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)}$$

como medida porcentual del grado de aproximación a la proporcionalidad (**).

Programa que informatiza el ajuste

Si el número de datos experimentales no es pequeño, el cálculo de la constante de proporcionalidad más aproximada y de su grado de aproximaxión es bastante penoso, por lo que vale la pena informatizar el problema.

El siguiente programa interactivo, escrito en lenguaje Logo (LCSI-Logo, existente para ordenadores Apple y para ordenadores personales compatibles), efectua inmediatamente dichos cálculos, ofreciendo una simulación gráfica simultánea.

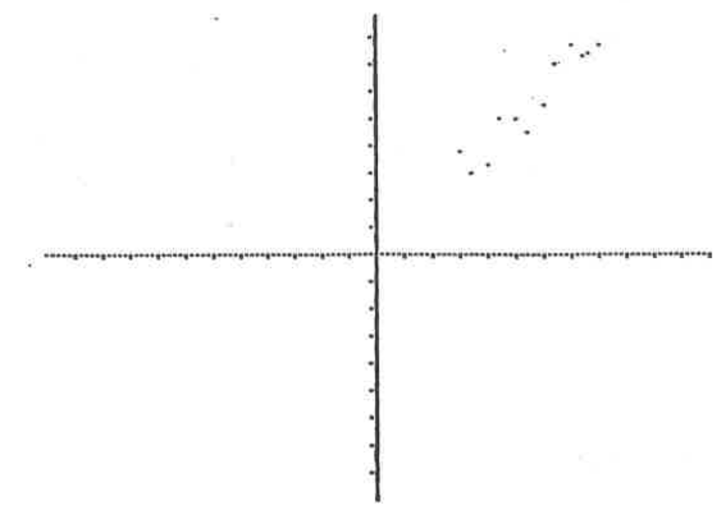
El programa, que se ejecuta ordenando PAP, comienza representando los ejes de coordenadas y pidiendo la distancia entre marcas de ambos ejes. A medida que van siendo introducidos los puntos (x_i, y_i), se van marcando en la pantalla, y al concluir, calcula inmediatamente la proporcionalidad más aproximada (y su grado de aproximación), visualizando su gráfica, permitiendo así observar su ajuste a los puntos marcados, lo cual es de indudable interés didáctico. Si se desea, calcula también las imágenes de valores de x en dicha proporcionalidad, representando gráficamente el cálculo de esas imágenes.

Procedimientos.-

```
TO PAP
TS CT PR [EN ESTA PROPORCIONALIDAD APROXIMADA, SE]
PR [CONSIDERAN SOLO VALORES DE X\>0?\(SI/NO\)]
MAKE "J RL MAKE "N 0 MAKE "SXX 0
MAKE "SXY 0 MAKE "SYY 0
CS HT WINDOW .SETSCRUNCH 1 EJES ESCALAS
PR [ESCRIBE: VALOR DE X E IMAGEN]
MAKE "D RL
DATOS MAKE "C :SXY / :SXX
MAKE "CE ROUND 100 * :SXY * :SXY / ( :SXX * :SYY )
HOME SETH TOWARDS SE :SXX / :K :SXY / :H
SETPC 3 PD FD 150
IF NOT :J = [SI] [BK 300]
( PR [CONSTANTE DE PROPORC:] :C )
( PR [GRADO DE APROXIMACION:] :CE [POR CIENTO] )
PR [PARA CONTINUAR, PULSA RETURN]
MAKE "XK RL VALOR.P
END

TO EJES
SETPC 2 PU HOME SETH 90 BK 120 PD
REPEAT 24 [FD 10 RT 90 FD 1 BK 1 LT 90]
PU HOME BK 90 PD
REPEAT 18 [FD 10 LT 90 FD 2 BK 2 RT 90]
PU HOME
END

TO ESCALAS
PR [ESCRIBE LA DISTANCIA ENTRE MARCAS CONSECUTIVAS DEL EJE DE ABSCISAS]
MAKE "K FIRST RL
PR [ESCRIBE LA DISTANCIA ENTRE MARCAS CONSECUTIVAS DEL EJE DE ORDENADAS]
MAKE "H FIRST RL
END

TO DATOS
MAKE "X FIRST :D MAKE "Y LAST :D MAKE "N :N + 1
MAKE "SXX :SXX + :X * :X MAKE "SYY :SYY + :Y * :Y
MAKE "SXY :SXY + :X * :Y
MAKE "A :X * 10 / :K MAKE "B :Y * 10 / :H
IF ( AND :A > -121 :A < 121 :B > -91 :B < 91 ) [DOT SE :A :B]
PR [SI NO HAY MAS DATOS, ESCRIBE: NO]
PR [SI HAY, ESCRIBE: VALOR DE X E IMAGEN] MAKE "D RL
IF NOT :D = [NO] [DATOS]
END

TO VALOR.P
PR [SI DESEAS HALLAR LA IMAGEN DE UN VALOR DE X, ESCRIBELO. SI NO, PULSA RETURN]
MAKE "X RL
IF :X = [] [STOP]
MAKE "X FIRST :X MAKE "Y :C * :X
MAKE "A 10 * :X / :K MAKE "B 10 * :Y / :H
PU SETPOS SE :A 0 PD SETPC 5 SETY :B SETX 0
( PR [LA IMAGEN DE] :X [ES] :Y )
VALOR.P
END
```

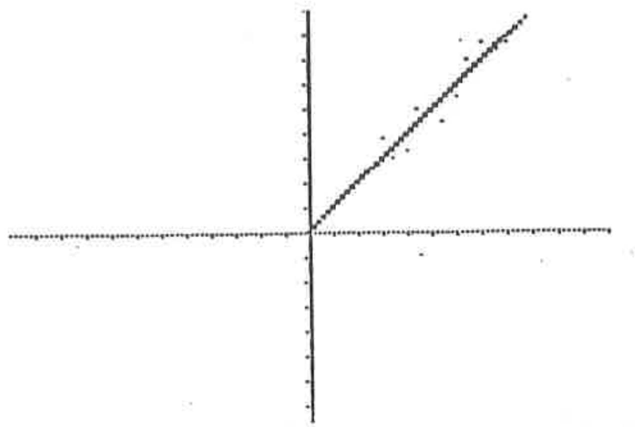

Ejemplo.-

```
?PAP
EN ESTA PROPORCIONALIDAD APROXIMADA, SE
CONSIDERAN SOLO VALORES DE X>0?(SI/NO)
SI
ESCRIBE LA DISTANCIA ENTRE MARCAS CONSECUTIVAS DEL EJE DE ABSCISAS
10
ESCRIBE LA DISTANCIA ENTRE MARCAS CONSECUTIVAS DEL EJE DE ORDENADAS
0.1
ESCRIBE: VALOR DE X E IMAGEN
30  0.38
35  0.30
40  0.33
45  0.50
50  0.50
55  0.45
60  0.55
65  0.70
70  0.77
74  0.73
77  0.74
81  0.77
```

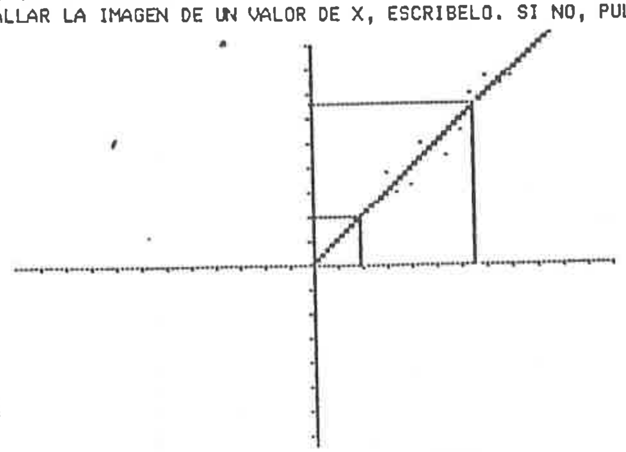


```
SI NO HAY MAS DATOS, ESCRIBE: NO
SI HAY, ESCRIBE: VALOR DE X E IMAGEN

NO
```

CONSTANTE DE PROPORC: 0.009844
GRADO DE APROXIMACION: 99 POR CIENTO
PARA CONTINUAR, PULSA RETURN



SI DESEAS HALLAR LA IMAGEN DE UN VALOR DE X, ESCRIBELO. SI NO, PULSA RETURN
20
LA IMAGEN DE 20 ES 0.196883
SI DESEAS HALLAR LA IMAGEN DE UN VALOR DE X, ESCRIBELO. SI NO, PULSA RETURN
67
LA IMAGEN DE 67 ES 0.659559
SI DESEAS HALLAR LA IMAGEN DE UN VALOR DE X, ESCRIBELO. SI NO, PULSA RETURN



Bibliografía

[1] ABELSON : Apple Logo II. Mc Graw Hill, 1984.

[2] ABELSON & DISESSA : Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics. M.I.T., 1984.

[3] ROANES MACIAS : Estructura de magnitud escalar ; publicado en el núm. 11 de este mismo boletín.

ANECDOTARIO

POR J. Lobo

En los tratados de Historia de las Matemáticas es habitual limitarse a exponer las aportaciones hechas por los grandes matemáticos sin considerar los aspectos humanos, las anécdotas, de las vidas de estas figuras del pensamiento matemático. Recientemente (1) parece que se ha despertado interés por conocer detalles sobre la manera de ser, la intimidad, de los creadores de la Matemática. En este sentido creo que podría tener cabida en nuestro Boletín una sección en la que las personas documentadas nos informaran de anécdotas relacionadas con los grandes matemáticos. Para ejemplificar mi propuesta voy a transcribir algunas noticias relacionadas con Fermat, extraidas de sus "Obras" (2), que creo son poco conocidas y pueden interesar a los lectores del Boletín.

Como es bien sabido, independientemente de las valiosas aportaciones hechas por Fermat a la Matemática, su popularidad se debe a la célebre conjetura:

" Para todo $n \in N$ y mayor que 2, la ecuación diofántica

$$x^n + y^n = z^n \qquad (a)$$

no tiene soluciones ".

El que la conjetura continúe abierta es lo que lo que ha dado popularidad a Fermat.

Para la demostración de lo conjeturado, basta evidentemente considerar los casos en que se verifiquen las condiciones: $n = p =$ primo , x e y primos entre sí. En estas condiciones, la conjetura de Fermat está demostrada para los primos p tales que el número h de clases de ideales del anillo de enteros algebraicos del cuerpo ciclotómico $K[\theta]$ $(\theta^n = 1)$, sea primo con p. Los primos que cumplen la condición anterior se llaman regulares y los demás irre gulares. Está demostrada la existencia de infinitos primos irregulares (3). Aunque en nuestro boletín ya se ha hecho referencia (4) al estado actual de la cuestión, tal vez merezca la pena volver a insistir. Falting (5), al demostrar la conjetura de Mordell (6):" las curvas racionales de género mayor que uno tienen, a lo sumo, un número finito de puntos racionales ", demostró que si para algún primo p irregular, la ecuación diofántica (a) admite soluciones, el número de dichas soluciones es finito.

Respecto a la personalidad de Fermat, P. Tannery, encargado, a finales del siglo pasado, de la edición crítica de las Obras de Fermat, dice (7) : " De su correspondencia se deduce que Fermat era de caracter afable, poco susceptible, sin orgullo, pero con un punto de vanidad que Descartes, su rival, caracterizaba diciendo: M de Fermat es gascón; yo no " . El juicio citado de Descartes sobre Fermat parece (8) que fué expuesto verbalmente por Descartes a van Schooten y este último se lo comunicó por carta (9) a Huigens. En dicha carta,van Schooten considera a Fermat vasco. Fermat, ni por el lugar de origen ni por sus apellidos, Fermat - Long, era vasco ni gascón. Creo que ambas citas deben interpretarse como provinentes de personas del norte, refiriendose a un meridional.

Ya hemos hecho referencia a la enemistad existente entre Fermat y Descartes, enemistad que llevó al segundo a escribir en carta dirigida a Mersenne (10): " Le ruego que no envíe copia de mi Metafísica a M. Fermat ya que, entre nosotros, considero a M de Fermat como una de las personas menos capaces de poner una buena objeción. Creo que sabe Matemáticas, pero en Filosofía siempre he observado que razona mal ".

No todos tenían la misma opinión que Descartes sobre Fermat. En el elogio que apareció en el "Journal des Sçavants" (11), después de la muerte de Fermat, se dice: " además de su gran profesionalidad como jurista y de su saber matemático era un gran conocedor de la cultura clásica; conocía perfectamente el griego, latín italiano y español y tenía tal delicadeza de espíritu que hacía versos en latín, francés y español; estos últimos, con la misma elegancia que lo hiciera uno que hubiese pasado la mayor parte de su vida en la corte de Madrid ". Aunque lo he intentado, no he sido capaz de encontrar ninguna poesía de Fermat escrita en Español, si bien es cierto que alguna vez intercalaba en un texto francés una frase en español. En la dedicatoria de un libro que regala a su amigo Carcavi (12), puede leerse: " Peut-être, croirés-vous que pour me mettre en reputation et, comme on dit, per purgar la mala fama, je pretens m'eriger en donneur de livres ". Los corresponsales de Fermat, sabiendo el conocimiento que tenía de nuestro idioma, en las cartas que le dirigían también hacen citas en español. En carta de Digby a Fermat (13), puede leerse: " de modo che posso con ragione dire come quel pui dotto et gentil cavagliero di tutta la nazion castigliana e principi de loro Poeti, Garcilaso de la Vega:

Entre las armas del sangriento Marte,
hurté del tiempo esta breve suma,
tomando, hora la espada, hora la pluma.

Al contrario que en el caso de Descartes, las relaciones entre Fermat y Pascal fueron de mutua admiración y afecto. En carta de Fermat a Pascal (14), le dice: " Quiero abrazaros y hablar varios dias con Vd., pero como mi salud no es mejor que la suya, le suplico que me señale un lugar, a mitad de camino entre Clermont y Toulouse, donde yo iría a finales de septiembre o primeros de Octubre. Si no acepta mi propuesta, es posible que me veais en vuestra casa, donde habría dos enfermos que atender ". Pese a los buenos deseos de Fermat, la delicada salud de Pascal impidió que se conocieran los dos grandes matemáticos (15).

Por último, el matemático británico Wallis, en carta a Lord Brounecker (16) (Lord Brounecker parece que fuera el coordinador de los matemáticos británicos, al igual que entre los franceses lo fué el padre Mersenne), le expresa su opinión confidencial sobre los matemáticos franceses Frenicle y Fermat, sus rivales en los desafíos matemáticos, usuales en la época. Wallis considera a Frenicle incisivo y mordaz y a Fermat, comedido y ponderado, terminando en los siguientes términos: "Frenicle tiene la vivacidad de los franceses y Fermat la gravedad de sus vecinos españoles". Curiosa opinión de un caballero inglés del siglo XVII.

Referencias:

(1) "Mathematical People" Birkhäuser
(2) Fermat "Obras"
(3) Z.I.Borevitch et I. Chafarevitch. Théorie des Nombres Gauthier-Villars
(4) Boletín n^{o} 7, pág. 39
(5) Faltings, G.: Endlichkeitssatze für abelsche Varietaten über Zahlkörpern. Invet. Math. 73 (1983) 349-66
(6) Mordell L. J.: Diophantine Equations. Academic Press.
(7) Fermat. Obras.T.4,p.240
(8) Fermat. Obras.T.4,p.122
(9) Fermat. Obras.T.4,p.122
(10) Fermat. Obras.T.4,p.113
(11) Fermat. Obras.T.1,p.361
(12) Fermat. Obras.T.1,p.XIX
(13) Fermat. Obras.T.2,p.381
(14) Fermat. Obras.T.2,p.450
(15) Fermat. Obras.T.2,p.450
(16) Fermat. Obras.T.3,p.545

RESEÑA DE LIBROS

"DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS" por Brian Bolt. Editorial Labor S.A. Barcelona, 1987. VIII + 128 págs.

Se pueden encontrar hoy dia bastantes libros escritos en lengua española, dedicados a recoger curiosidades, pasatiempos o juegos relacionados con las Matemáticas. Este libro de Brian Bolt es uno más, pero sus características lo hacen un tanto singular. Destaca, en primer lugar su cuidada y agradable presentación y lo atractivo de las numerosas figuras que lo ilustran, y pronto se comprueba que el número y la variedad de los "divertimentos" presentados en el libro es mayor que los de los de los libros más conocidos; ello es consecuencia de una paciente búsqueda de los problemas tradicionales, a los que se añaden otros originales del autor.

Pero la cualidad más destacada del libro es que admite una doble lectura: Una persona cualquiera, sin apenas conocimientos matemáticos, y en particular un niño, puede leerlo y disfrutar con los pasatiempos y rompecabezas del libro, que están presentados con lenguaje claro y sencillo, y si su resolución se resiste, consultar la solución, que también está dada en términos comprensibles por cualquiera. En cambio, una persona con conocimientos matemáticos puede hacer del libro una fuente casi inagotable de sugerencias y desafíos, sin encontrarse molesta por el caracter aparentemente elemental y vulgar del lenguaje utilizado. Cada pasatiempo incita al matemático a descubrir las estructuras que subyacen bajo la inocente apariencia de su enunciado y a relacionar éstas con el proceso que conduce a encontrar racionalmente la solución; y también a preguntarse ¿ Como se puede generalizar el problema ? ¿ Se puede demostrar que la solución es única ? ¿ Hay otros problemas aparentemente distintos pero que conducen a estructuras isomorfas ? Al profesor de Matemáticas no sólo se le plantean estas cuestiones de índole matemática sino otras relacionadas con la psicología y la pedagogía: ¿ Que tipo de actividad mental conduce a encontrar la solución de determinado rompecabezas ? ¿ Por qué se hace difícil resolverlo si una vez conocida la solución aparece como trivial ? ¿ Cómo pueden agruparse los rompecabezas presentados atendiendo a los tipos de destrezas que se requieren para resolverlos ? El libro no entra en estas cuestiones de índole matemática o psicológica; casi nunca suministra la "pista" que conduce a la solución; no trata de generalizar ni de descubrir las situaciones matemáticas generales de las que los pasatiempos son acaso simples casos particulares, ni de dar métodos generales para abordar ciertas familias o tipos de rompecabezas. Presenta los "divertimentos" y sus soluciones, de forma que resulte accesible a toda clase de público y al lector matemático le deja el resto de la labor, proporcionándole un riquísimo material, con el que podrá disfrutar largamente y que le permitirá enriquecer sus clases con numerosas situaciones matemáticas de gran valor didáctico.

J.F.B.

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTROS BOLETINES Y DE AQUELLOS PARA LOS QUE TODAVIA NO SE HAN RECIBIDO SOLUCIONES (INDICADOS CON XX)

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números										obs.
		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	OME-f2 1984	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finlª)	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-86(Bogotá)	10	10	XX	10	10	11	-	-	-	-	*
9	OME-f2 1986	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
	Varios	-	-	-	-	-	-	XX	XX	11	XX	*
10	China y Austª	XX	15	XX	XX	15	XX	XX	XX	XX	-	*
11	OME-f1 1986	13	14	14	14	14	XX	XX	15/	XX	12	
	OMI-86(Varsoª)	XX	XX	12	XX	-	-	-	-	-	-	*
12	OIM-87(Urug.)	16	14	14	XX	15	XX	-	-	-	-	*
	OME-f1-Extremª	-	-	-	-	-	-	15	15	15	XX	
13	OME-f2 1987	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	*
16	OME-f1 1987	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OME = Olimpiada Matemática Española - fase 1ª o 2ª.

Obs. C = Completada la publicación de soluciones
* = Esperamos especialmente de nuestros socios el envío de soluciones a estos problemas señalados con XX .

PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA PRIMERA FASE DE LA XXIV OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA (NOVIEMBRE 1987)

PROBLEMA 1° :

Expresar 1987 como suma de cuadrados de números primos distintos, de todas las formas posibles. Proceder razonadamente.

PROBLEMA 2° :

Probar que cualquiera que sea el polinomio $p(x)$, existe un valor del número k tal que uno de los polinomios $p(x) + k$ y $x\,p(x) + k$ carece de raices reales (es decir, no se anula para x alguno) y el otro se anula al menos para un valor de x.

PROBLEMA 3° :

Se considera el conjunto C de números

$$C = \{1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ \dots\}$$

que se obtiene a partir del 1 tomando los números naturales de cuatro en cuatro. Un número es "primo en C" si no se puede expresar como producto de números de C menores que él.

a) Comprobar que 4389 es un número de C que puede descomponerse al menos de dos formas distintas en producto de dos números "primos en C".

b) Hallar otro número perteneciente a C que tenga esa propiedad.

PROBLEMA 4° :

Los egipcios aproximaban el área de un círculo de diámetro d del siguiente modo: En cada uno de los cuatro vértices de un cuadrado de lado d, se considera un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos de longitud $d/3$ se superponen a un tercio del lado del cuadrado. Eliminando del cuadrado estos cuatro triángulos, resulta un octógono (irregular) cuya área se toma como

aproximación del área del círculo. ¿ Cual es la razón del área del círculo al área del octógono ?

Tratemos de hacer algo parecido para una esfera de diámetro d. Dado un cubo de arista d, en tres de cuyas caras de vértice común se han dibujado los octógonos antes mencionados, se consideran tres prismas rectos de bases respectivas dichos octógonos y altura d, contenidos en el cubo. El volumen del cuerpo de intersección de esos tres prismas no es mala aproximación del volumen de la esfera. ¿ Cual es la razón del volumen de la esfera al volumen del cuerpo ?

PROBLEMA 5° :

Dada la función f definida por

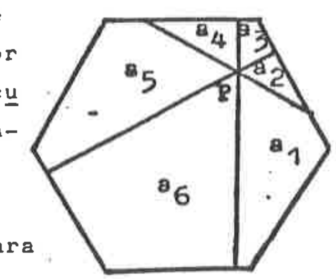
$$f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{16x^2 - 8x^3 + x^4}}$$

a) Representar gráficamente la curva $y = f(x)$.

b) Hallar, sin utilizar el cálculo integral, el área del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 6$, $y = 0$ y por la curva $y = f(x)$.

Nota: Se supone que las raices cuadradas son mayores o iguales que cero.

PROBLEMA 6° :



Un exágono regular de área a se descompone en seis partes trazando por un punto P interior rectas perpendiculares a los lados del exágono. Numeramos esas partes correlativamente en sentido antihorario, y llamamos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 a sus áreas. ¿ Para que puntos se cumple que $a_1+a_2+a_3 = a_2+a_4+a_6$? ¿ Entre que valores pede variar $a_1+a_2+a_3$?

PROBLEMA 7° :

Sea I_n el intervalo $(n\pi - \frac{\pi}{2},\ n\pi + \frac{\pi}{2})$ y f la función definida por $f(x) = tg(x) - x$.

a) Demostrar que la ecuación $f(x) = C$ tiene una raíz única en cada intervalo I_n , $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Siendo c_n la raiz de $f(x) = 0$ en I_n , calcular $\lim_{n \to \infty} (c_n - n\pi)$.

PROBLEMA 8° :

Se considera el conjunto E de los puntos (x,y,z) del espacio que cumplen:

$$x + y \leq 1 \quad , \quad 2x \quad z = 3 \quad .$$

Hallar los puntos (x,y,z) de E en los que la expresión $|x| + |y| + |z|$ es mínima. Hallar el valor mínimo e interpretar geométricamente el problema.

Nota: El $|x|$ es el mayor de los números x y $-x$.

- ▪ - ▪ - ▪ -

Como el buen sentido de nuestros lectores habrá deducido, en el número anterior del Boletín aparecían cambiadas de orden las páginas 73 y 74 de nuestra Sección de Problemas Propuestos.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 3° del Boletín n° 6 :

Sean $P_1, \ldots, P_n$ $(n \geq 2)$ puntos de un plano. Probar que se verifica

$$\underset{1 \leq i < j \leq n}{\text{Máx}} \overline{P_i P_j} > \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{n} - 1) \underset{1 \leq i < j \leq n}{\text{Mín}} \overline{P_i P_j}$$

donde $\overline{P_i P_j}$ es la distancia euclídea entre P_i y P_j .

Solución:

Sea $D = \underset{1 \leq i < j \leq n}{\text{Máx}} \overline{P_i P_j}$ la "separación" del conjunto de puntos.

Según un teorema de H. W. E. Jung, todo conjunto finito de puntos de separación D , tiene un círculo envolvente, que contiene todos los puntos del conjunto, de radio R no mayor que $\frac{\sqrt{3}}{3} D$. (Puede verse la demostración en Números y Figuras, Rademacher y Toeplitz, pág 152. Alianza Editorial).

Si se llama $d = \underset{1 \leq i < j \leq n}{\text{Mín}} \overline{P_i P_j}$, la mínima distancia entre los puntos del conjunto, los n círculos de radio $\frac{d}{2}$ y centros P_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ no se cortan, aunque hay al menos dos de ellos tangentes exteriormente.

Todos esos círculos están dentro del círculo concéntrico con el envolvente y de radio $R' = R + \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{1}{2} d$. Por tanto, el área de este último es mayor que la suma de las áreas de aquellos, es decir, $\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{1}{2} d \right)^2 > n \pi \frac{d^2}{4}$, de donde:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{1}{2} d > \sqrt{n} \frac{d}{2}$$

y basta despejar D para tener la desigualdad buscada.

F. O. Alonso

PROBLEMA 3º del Boletín nº 7:

Dado un polinomio cualquiera $P(x) = a_o+a_1x+\ldots+a_kx^k$ con coeficientes enteros, se denota por $w(P)$ el número de coeficientes a_j del polinomio P que son impares.

Para $i = 0, 1, 2, \ldots$, sea $Q_i(x) = (1 + x)^i$.

Demostrar que si i_1 , i_2 , ... , i_n son enteros tales que $0<i_1<i_2<\ldots<i_n$, entonces $w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \ldots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1})$.

Solución:

Es evivente que si los coeficientes de dos polinomios A , B son congruentes, módulo 2, a los de los polinomios A' , B' , también los coeficientes de $A + B$, $A - B$, AB son respectivamente congruentes (mód. 2) a los de $A'+ B'$, $A'+ B'$, $A'B'$. Bastará por tanto limitarse a polinomios con coeficientes en el cuerpo de las clases de restos respecto al módulo 2 . Así se hace en lo que sigue.

Se escribe frecuentemente $s = 2^p$ para aligerar la escritura, y un polinomio $P(x)$ de grado $k<s$, en la forma $P(x) = a_o+a_1x+\ldots+a_{s-1}x^{s-1}$, agregando términos de coeficiente nulo.

Probaremos que para cualquier polinomio $Q_s(x) = (1+x)^s$ ($s = 2^p$, $p\geq 1$), se cumple que $Q_s(x) = 1 + x^s$:

Es inmediato para $p = 1$ ($s = 2$) teniendo en cuenta que se toman por coeficientes los restos módulo 2 . Supuesto demostrado para $s = 2^p$, también se verifica para $s' = 2s = 2^{p+1}$, pues $Q_{s'}(x) = (1+x)^{2s} = ((1+x)^s)^2 = 1 + x^{2s} = 1 + x^{s'}$ y en consecuencia es cierto para todo s .

Si es $k<s$, $s = 2^p$ y $Q_k(x) = a_o+a_1x+\ldots+a_{s-1}x^{s-1}$, se tiene $Q_{s+k}(x) = (1+x)^{s+k} = (1+x)^s(1+x)^k =$

$= (1+x^s)(a_o+a_1x+\ldots+a_{s-1}x^{s-1}) =$

$= a_o+a_1x+\ldots+a_{s-1}x^{s-1}+a_ox^s+a_1x^{s+1}+\ldots+a_{s-1}x^{s-1}$.

Probemos primero que la proposición es cierta para dos sumandos:

En efecto, sean los polinomios $Q_i(x)$ y $Q_j(x)$, con $i<j$ y sea $s' = 2^p$ la menor potencia de 2 tal que $i<j<s'$. Pueden darse dos casos:

Caso a: $i<s\leq j<s'$, siendo $s = 2^{p-1}$. Los polinomios Q_i , Q_j pueden escribirse así: $Q_i(x)=a_o+a_1x+\ldots+a_{s-1}x^{s-1}$

$Q_j(x) = b_o+b_1x+\ldots+b_{s-1}x^{s-1}+b_ox^s+b_1x^{s+1}+\ldots+b_{s-1}x^{2s-1}$.

Su suma, S , operando con los coeficientes, módulo 2 , se escribirá $S = c_o+c_1x+\ldots+c_{s-1}x^{s-1}+b_ox^s+b_1x^{s+1}+\ldots b_{s-1}x^{2s-1}$

No puede ser $w(S)$ menor que $w(Q_i)$, pues si se pierde algún coeficiente impar en la primera mitad de S , es decir, $a_k= 1$ y $c_k = 0$, debe ser $b_k = 1$ y se recupera en la segunda mitad de S .

Caso b: $s\leq i<j<s'$, siendo $s = 2^{p-1}$. Los polinomios Q_i , Q_j pueden escribirse así:

$Q_i = a_o+a_1x+\ldots+a_{s-1}x^{s-1}+a_ox^s+a_1x^{s+1}+\ldots+a_{s-1}x^{2s-1}$

$Q_j = b_o+b_1x+\ldots+b_{s-1}x^{s-1}+b_ox^s+b_1x^{s+1}+\ldots+b_{s-1}x^{2s-1}$

y el problema se reduce a probar la desigualdad propuesta con los polinomios

$Q_{i'} = a_o+a_1x+\ldots+a_{s-1}x^{s-1}$ con $i' = i - s$

$Q_{j'} = b_o+b_1x+\ldots+b_{s-1}x^{s-1}$ con $j' = j - s$

que cumplen $i' < j' < s$.

Puesto que $i \neq j$, tras un número finito de reducciones de este tipo se llega a dos polinomios Q_i y Q_j que están en las condiciones del Caso a , para el cual ya está probada la desigualdad.

Supuesta probada la desigualdad para h sumandos, con $h < n$, se pasa a demostrarla para n sumandos. Sea $s' = 2^p$ la menor potencia de 2 para la cual $i_1< i_2< \ldots$ $\ldots< i_n < s'$, y $s = 2^{p-1}$. También hay que considerar dos casos:

Caso a' : Hay algún $i_k < s$ ($k \neq n$ por la hipótesis hecha sobre p). Se llama R a la suma de todos los polinomios Q_i con subíndices desde i_1 hasta i_k y se llama S a la suma de los polinomios Q_i con subíndices desde i_{k+1} hasta i_n. Entonces R y S son de la forma

$$R = a_o+a_1x+\dots+a_{s-1}x^{s-1}$$

y

$$S = b_o+b_1x+\dots+b_{s-1}x^{s-1}+b_ox^s+b_1x^{s+1}+\dots+b_{s-1}x^{2s-1};$$

el razonamiento hecho en "caso a" para Q_i y Q_j sigue siendo válido aquí y si se llama $T = R + S = \sum Q_i$ resulta $w(R) \leqslant w(\sum Q_i)$.

Por la hipótesis de inducción, $w(Q_{i_1}) \leqslant w(R)$, que con la desigualdad anterior prueba lo que se quería demostrar.

Caso b´ : Para todos los subíndices, $s = 2^{p-1} \leqslant i_k$. Para $k = i_1, i_2, \dots, i_n$, el polinomio Q_k es de la forma $Q_k = a_o+a_1x+\dots+a_{s-1}x^{s-1}+a_ox^s+a_1x^{s+1}+\dots+a_{s-1}x^{2s-1}$ y el problema queda reducido a probar la desigualdad para los polinomios $Q_{k'} = a_o+a_1x+\dots+a_{s-1}x^{s-1}$, $k' = k - s$, que cumplen todos $k' < s$.

Puesto que los $i_1, i_2, \dots, i_n$ son distintos, se ha de llegar, por reducciones sucesivas, al caso a´, en que la desigualdad está demostrada.

F. O. Alonso

- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 4° del Boletín n° 7 :

Dado un conjunto M formado por 1985 números enteros positivos y distintos, tales que ningún elemento de M tiene un divisor primo mayor que 26, demostrar que M contiene al menos un subconjunto de cuatro elementos distintos, cuyo producto es la cuarta potencia de un número entero.

Solución:

Hay 9 números primos menores que 26: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23.

Los números que no tienen otros divisores primos que los citados se pueden representar así:

$a = 2^{a_1}.3^{a_2}.\ \dots\ .23^{a_9}$, con a_i entero no negativo,

y se pueden clasificar según la relación de equivalencia:

$$a \approx b \iff a_i \equiv b_i \pmod 2\ ,\ i=1,2,..,9$$

El número de clases de equivalencia es $2^9 = 512$ y entre ellas destaca la clase θ caracterizada por

$$a \in \theta \iff a_i \equiv 0 \pmod 2\ ,\ i = 1,2,\dots,9$$

y formada por los números que son cuadrados perfectos. Además, el producto de dos números de la misma clase pertenece a la clase θ.

Utilizamos el índice $j = 1, 2, \dots, 512$ para indicar cada una de las clases que ha proporcionado la anterior relación de equivalencia. El número de elementos de M que pertenece a la clase j-ésima se indica por $2x_j + e_j$, siendo $e_j = 0$, 1, según que dicho número sea par o impar. Evidentemente

$$1985 = \sum(2x_j + e_j) = 2\sum x_j + \sum e_j\ ;$$

$\sum e_j$ no puede superar a 512 y ha de ser impar, luego $\sum e_j \leqslant 511$ y entonces $2\sum x_j \geqslant 1474$, $\sum x_j \geqslant 737$. Hay, por tanto, al menos 1474 elementos de M que se pueden agrupar de distintas maneras para formar parejas, pero una vez hecho ésto, de algún modo, consideremos para cada pareja $(m\ ,\ m')$ el número $n = mm'$. Todos estos números n, forman un conjunto N que tiene al menos 737 elementos. Según lo dicho arriba, $N \subset \theta$.

De nuevo los números de θ se vuelven a subclasificar de acuerdo con la relación

$$a \approx b \iff a_i \equiv b_i \pmod 4\ ,\ i = 1,2,\dots,9\ .$$

Como $a_i \equiv 0$, $2 \pmod 4$, también aquí hay 512 subclases, y entre ellas, una subclase θ' caracterizada por

$$a \in \theta' \iff a_i \equiv 0 \pmod 4\ ,\ i = 1,2,\dots,9$$

y formada por los números que son cuartas potencias. También el producto de dos números de la misma subclase pertenece a θ'.

Como en N hay más de 512 elementos, al menos hay dos números n y n´ de N que están en la misma subclase. Entonces si n = mm´ y n´ = m´´m´´´ (m, m´, m´´, m´´´ $\in$ M), el producto m.m´.m´´.m´´´ = n.n´ , pertenece a ϑ´ , es decir, es una cuarta potencia.

F. O. Alonso

- ▨ - ▨ - ▨ -

PROBLEMA 1° del Boletín n° 12 :

Halle las f(x) tales que $[f(x)]^2 . f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64\,x$ para todo $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.

Solución :

De las condiciones del enunciado se deduce que f(x) es distinto de cero si x no es ni 0 ni 1 .

Por otra parte, al ser $x \neq -1$, se puede sustituir x por $\frac{1-x}{1+x}$ en la condición

$$[f(x)]^2 . f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64\,x \qquad (1)$$

obteniendo $\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2 . f(x) = 64\,\frac{1-x}{1+x}$;

multiplicando ambas expresiones resulta

$$[f(x)]^3 \left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^3 = 16^3\,x\,\frac{1-x}{1+x}$$

, de donde

$$f(x) . f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 16\,\sqrt[3]{x\,\frac{1-x}{1+x}} \qquad (3)$$

y dividiendo (1) y (3), resulta:

$$f(x) = 4\,\sqrt[3]{\frac{x^2(1+x)}{1-x}} \qquad \forall\, x \notin \{0 , 1 , -1\}$$

José Pablo Sánchez Mielgo
Alcorcón (Madrid)

- ▨ - ▨ - ▨ -

BOLETIN DE INSCRIPCION

D. ____________________

Dirección particular ____________________

Código postal ________ Teléfono ________

Centro de trabajo ____________________

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO NUMERARIO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ____________________

____

para que cargue en mi cuenta numº. ____________________

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1987-88 y siguientes.

________ de ________ de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ________ Banco ____________________

____

Ruego abonen con cargo a mi cuenta ________ de número ____________, los recibos de mi cuota anual en la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: ____________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SOLICITUD DE ADHESION DE CENTRO

D. ____________________

como ________ del Centro ____________________

____

domiciliado en ____________________

________ Código postal ________ Tfno. ________

SOLICITA LA ADHESION A LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ____________________

____

para que cargue en la cuenta nº ____________, los recibos correspondientes al curso 1987-88 y siguientes.

________ de ________ de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ________ Banco ____________________

____

Ruego abonen con cargo a la cuenta ________ de número ____________, los recibos de la cuota anual de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: ____________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.