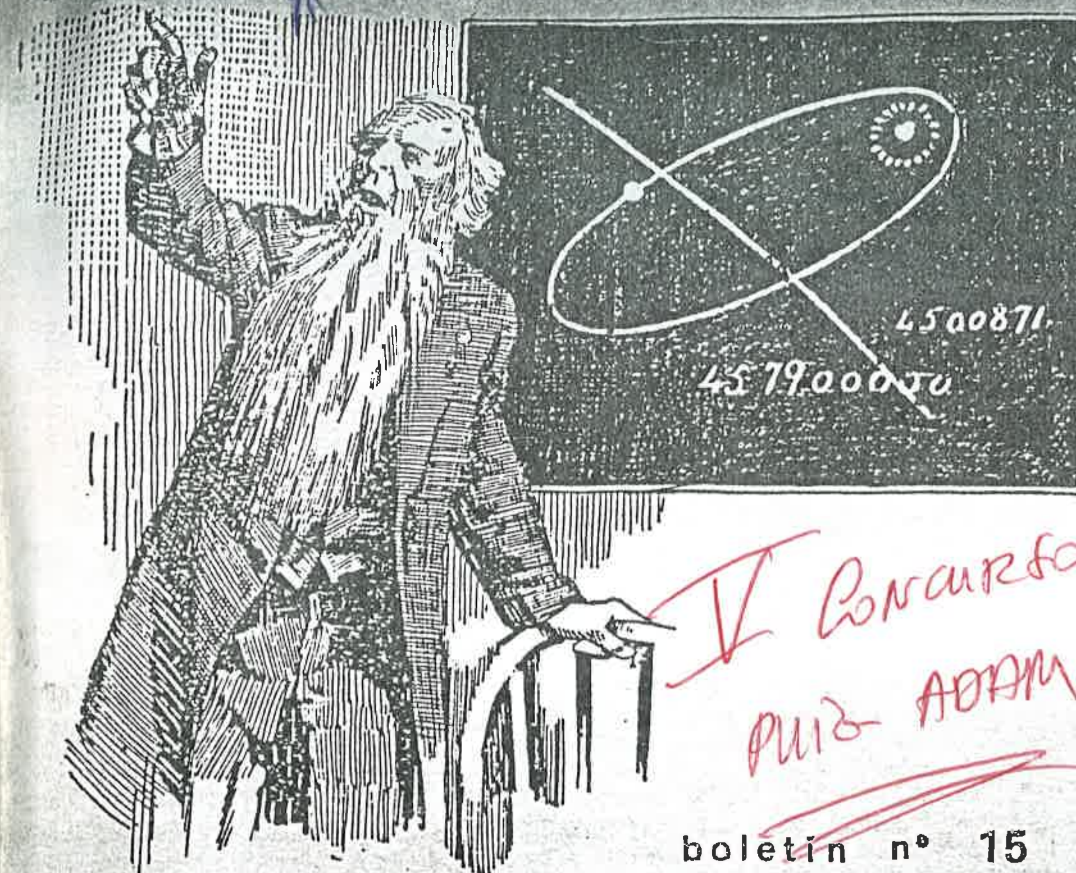


V Concurso Puig Adam

boletín nº 15

octubre 1987

sociedad castellana

PUIG ADAM

de profesores

de matemáticas

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Octubre de 1987 nº 15 (1987 - 88)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en Ronda de Atocha, 2 (INBAD)

- La correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:
FERNANDEZ BIARGE, JULIO

- La portada de este número reproduce un grabado antiguo sobre la pizarra y la tiza, que han venido siendo, durante muchos años, los instrumentos, casi exclusivos, para la enseñanza de las Matemáticas. ¿ Seguirá siendo así por mucho tiempo ?

- Vea la oferta, para nuestros socios, de números atrasados de este Boletín.

INDICE Pág.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: José Javier Etayo Miqueo

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Vicesecretario: Francisco Quesada Cobo

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

QUINTO CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS PARA ALUMNOS DE B.U.P Y F.P.

Como estaba anunciado, el pasado dia 27 de Junio se celebró el V Concurso de Resolución de Problemas organizado por nuestra Sociedad, en colaboración con el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias.

Por primera vez podían participar en este Concurso los alumnos de Tercer Curso de B.U.P., además de los de Primero y Segunda, al igual que los de Formación Profesional, siempre que fuesen presentados por Centros de nuestro ámbito territorial, hasta un máximo de dos por curso.

Las pruebas tuvieron lugar en el Instituto "Beatriz Galindo" de Madrid, que una vez más, nos cedió amablemente los locales. Concurrieron a ellas 62 alumnos de Primer Curso de B.U.P. (o equivalente de F.P.), 60 de Segundo y 65 de Tercero, y consistieron en la resolución de cuatro problemas, en dos tandas, distintos para cada curso. Al final de esta crónica damos sus enunciados.

La entrega de diplomas y premios se hizo el mismo día, en el Salón de Actos del I. B. "Beatriz Galindo", concurriendo a presenciarla numeroso público. Nuestro Prsidente, Sr. Etayo, pronunció unas palabras de aliento para todos los participantes en el Concurso y de agradecimiento para todos los que han contribuido a su organización. A continuación se procedió a la entrega de diplomas y premios.

Los ganadores de PRIMER CURSO fueron:

1°-D. Daniel Almodovar Herraiz, del I. B. "Alfonso VIII" de Cuenca.

2°-D. Gonzalo Bárcenas Medina, del Colegio "Virgen de Atocha" de Madrid.

3°-Dª. Carmen González Lois, del I. B. "Arcipreste de Hita" de Madrid.

4°-D. Joaquín Moreno Mateos, del Colegio "San José del Parque" de Madrid.

5°-D. Andrés Jesús de la Hoz Flores, del Colegio "Lope de Vega" de Madrid.

Los ganadores de SEGUNDO CURSO fueron:

1°-D. Pablo Sánchez-Biedma Sacristán, del Centro "Santa Bárbara" (Fabrica de la Marañosa).

2°-D. Jesús Fraile Cuesta, del I. B. "Padre Juan de Mariana" de Talavera de la Reina (Toledo)

3°-D. Javier Sebastián Vilariños, del Colegio "Berriz" de Molino de la Hoz (Las Rozas-Madrid)

4°-D. José Alfonso Martínez, del I.B. "Virrey Morcillo" de Villarrobledo (Albacete).

5°-D. Eduardo Solano Lumbreras, del I.B. de Las Rozas (Madrid).

En TERCER CURSO, sin duda por haberse anunciado tarde la posibilidad de participar en el Concurso, los resultados fueron poco brillantes, lo que obligó a declarar desiertos los premios 2° a 5°, entregándose el diploma tan solo a

1°-Dª. Carmen Casares Antón, del I.B. "Gran Capitán" de Madrid.

Esta concursante recibió el 2° premio de nuestro III Concurso, como alumna de primero y el 1° del IV, como alumna de segundo.

A todos los ganadores se les entregaron valiosos lotes de libros que, en su mayor parte, fueron donados expresamente para este Concurso, por el Instituto de la Juventud del Ministerio de Cultura. La Editorial Bruño también regaló 5 libros de "Ejercicos y Problemas Resueltos".

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en el Concurso. Detras de cada enunciado damos unos números proporcionales a las puntuaciones medias alcanzadas por todos los concursantes en ese problema, como medida de la facilidad relativa que encontraron en su resolución.

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PRIMER CURSO

1 - Calcular el exponente de la potencia máxima de 3 que sea divisora de 100 ! . (26)

2 - Un triángulo equilátero se descompone, mediante segmentos rectilíneos paralelos a sus lados y con sus extremos sobre ellos, en 64 triángulos equiláteros iguales. En la figura resultante ¿ Cuantos triángulos equiláteros, de cualquier tamaño, quedan dibujados ? (12)

3 - ¿ A qué intervalo ha de pertenecer la razón de una progresión geométrica para que tres términos consecutivos de dicha progresión sean las longitudes de los lados de un triángulo ? (7)

4 - Sean a , b , c , tres números naturales arbitrarios: a) Demostrar que la expresión

$$H = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

es un entero.

b) Supongamos que $a > b > c$. En estas condiciones ¿ Es necesario que $a < b + c$ para que sea $H > 0$? ¿ Es suficiente dicha condición para que $H > 0$? (27)

SEGUNDO CURSO

1 - Si dos circunferencias son tangentes exteriores en A y los puntos de contacto de una tangente común son B y C , demostrar que el triángulo ABC es rectángulo en A . En dicho triángulo calcular la altura correspondiente a la hipotenusa en función de los radios de las dos circunferencias. (2)

2 - Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación:

$$2x^{99}+3x^{98}+2x^{97}+3x^{96}+ \dots + 2x^3+3x^2+2x+3 = 0 \ .$$

(19)

3 - Mostrar, mediante figuras, cómo se puede descomponer un triángulo equilátero en seis, en siete y en ocho triángulos equiláteros (iguales o distintos). Deducir razonadamente que para todo número natural $n > 5$, se puede descomponer un triángulo equilátero en n triángulos equiláteros (iguales o distintos). (39)

4 - Demostrar que los números reales $A = \log_6 16$, $B = \log_{12} 27$, verifican una relación de la forma $(A+a)(B+b) = c$, con a , b , c , enteros; calcular los valores de a , b y c . (6)

TERCER CURSO

1 - Si A , B , C , son los ángulos de un triángulo y se verifica $\tan(A-B) + \tan(B-C) + \tan(C-A) = 0$, demostrar que el triángulo es isósceles. (8)

2 - Demostrar que todo polinomio de tercer grado en x , es diferencia de dos polinomios de tercer grado que, considerados como funciones de x , son monótonas crecientes en todo $\mathbb{R}$. (0)

3 - Si $|a|$ representa el valor absoluto del número real a , se define la siguiente sucesión de funciones: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |1 - f_1(x)|$, $f_3(x) = |1 - f_2(x)|$, ... y en general $f_{n+1}(x) = |1 - f_n(x)|$. Dado un valor de n , hallar las soluciones de la ecuación $f_n(x) = 0$. (11)

4- En un trapecio rectángulo, una base es doble de la otra y las diagonales son perpendiculares. Calcular el valor de las razones trigonométricas del ángulo formado por los lados no paralelos y las correspondientes a uno cualquiera de los ángulos formados por una diagonal y un lado. (7)

- - - -

28 OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICA
La Habana, Cuba • Julio 5 al 16 de 1987

Entre los dias 5 al 16 de Julio de 1987 se ha celebrado en La Habana (Cuba) la 28 Olimpiada Internacional de Matemática. Han participado en ella 42 paises y entre ellos, por primera vez, algunas repúblicas americanas de habla española como Panamá, Nicaragua, Méjico y Perú.

Todos los paises concurrieron con equipos de seis participantes, a excepción de Luxemburgo, con uno, Italia, con cuatro y Polonia, con tres. En total, 242 aspirantes.

Las pruebas consistieron en la resolución de 6 problemas cuyos enunciados incluimos en la sección de Problemas Propuestos de este mismo Boletín. El nivel de los participantes fué muy alto, lo que prueba la concienzuda labor de preparación y entrenamiento que algunos paises han llevado a cabo.

La puntuación máxima que podía obtenerse era de 42 puntos (7 por problema) y hubo 21 participantes que la alcalzaron, recibiendo todos ellos primeros premios (oro). Se concedieron además 42 segundos premios (plata) y 63 terceros premios (bronce).

Como dato asombroso, señalaremos que el australiano Terence Tao, de once años, que ya participó el pasado año en la Olimpiada de Varsovia, obteniendo un tercer premio, ha conseguido este año 40 puntos (dos menos del máximo posible) y en consecuencia, uno de los segundos premios.

Por paises ganó Rumanía, consiguiendo el resultado casi increible de 250 puntos (de un máximo posible de 252). En segundo lugar quedó la República Federal Alemana, con 248 y a continuación, la U.R.S.S. con 235, la R.D.A. con 231 y U.S.A. con 220.

El equipo español hizo un papel digno, ocupando el puesto 22, con 91 puntos, y obteniendo tres terceros premios. Por detrás de España quedaron paises con gran tradición en este tipo de competiciones, como Bélgica, Noruega, Dinamarca, Italia y Polonia (estos dos últimos con equipos incompletos) y también los restantes paises de habla española.

Del equipo presentado por España obtuvieron terceros premios:

D. Fernando Galve Mauricio (del I. B. "Jerónimo Zurita" de Zaragoza, campeón en la Olimpiada M. Española de este año y medalla de Oro en la II Olimpiada Iberoamericana celebrada en Uruguay), con 28 puntos.

D. Santiago Vila Doncel (del I.B. "Zurbarán" de Badajoz, que quedó en tercer lugar en la O. M. E. de este año), con 22 puntos.

D. Salvador Villegas Barranco (del I. B. "A. Ganivet" de Granada, segundo puesto en la O.M.E. de este año y medalla de bronce en la II O. Iberoamericana de Uruguay), con 18 puntos.

Los otros participantes, que hicieron un digno papel, aunque sin llegar a obtener premios, fueron:

D. Carlos J. Pérez Jiménez (del I.B. "Sagasta" de Logroño)

D. Juan R. Valderrama Alcalde (del I.B. "Cardenal López de Mendoza" de Burgos)

D. Pablo Benítez Jiménez (del Colegio de Huérfanos de la Armada de Madrid).

Nuestra Sociedad felicita cordialmente a todos los miembros del equipo por su esforzada participación, asi como a los Centros y a los profesores de Matemáticas que han contribuido a su formación. Seguiremos trabajando para conseguir, dentro de nuestro ámbito geográfico, la formación de jóvenes representantes españoles que sigan consiguiendo los destacados éxitos obtenidos en los últimos años.

- x - x - x -

29 OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

La próxima Olimpiada Internacional de Matemática se celebrará en Australia, en Junio de 1988. Esperamos que en ella participe también un equipo español, lo mismo que en la III Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que en 1988 tendrá lugar en Perú, en el primer trimestre de ese año.

- x -

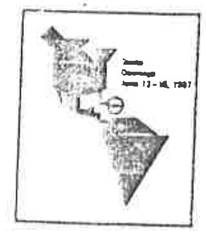
INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlos.

- - - - -

NOTICIAS

VII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACION MATEMATICA
INTER-AMERICAN CONFERENCE ON MATHEMATICS EDUCATION



Desde el dia 12 hasta el 16 de Julio pasado se ha celebrado en Santo Domingo (República Dominicana) la séptima Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM). La organización, impecable, estuvo a cargo de la Universidad Católica "Madre y Maestra", una de las cuatro del país.

Participaron cerca de 300 profesores de Matemáticas de todos los niveles docentes, pertenecientes a veinte paises distintos; entre esos profesores se contaron doce españoles, que presentaron interesantes trabajos y comunicaciones.

Con ocasión de la Conferencia tuvo lugar una importante reunión de profesores de los paises ibero-americanos, en la que se acordó iniciar la celebración de Congresos Ibero-americanos de Educación Matemática. Anunciamos en otra parte de este Boletín el primero de ellos, que tendrá lugar en Sevilla, en el otoño de 1990.

Con la celebración de esta séptima Conferencia termina el periodo de Presidencia del Profesor Ubiratán D'Ambrosio, brasileño, bien conocido en nuestro pais por sus aportaciones científicas y le sustituye el Profesor Eduardo Luna, Director del Departamento de Investigación Educativa en Matemáticas de la Universidad de Santiago.

CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA

COMUNICADO:

Reunidos representantes de los paises que participan en la VII CIAEM, han acordado por unanimidad, iniciar la celebración de CONGRESOS IBEROAMERICANOS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Dichos Congresos tendrán lugar alternativamente en los dos continentes, cada cuatro años, a partir de 1990.

Tienen por objetivo reconocer los profundos lazos histórico-culturales que unen a los paises iberoamericanos con España y Portugal; destacar la analogía de los sistemas educativos y la semejanza de los problemas que afectan a la educación matemática.

También es importante señalar los intereses comunes de nuestros paises que justifican una mayor coordinación y cooperación de nuestros esfuerzos, que tienda a un mejor desarrollo científico, tecnológico y educativo.

Esto es reflejo de la necesidad de crear un espacio propio en el mundo actual, para discutir específicamente los problemas típicos de nuestra área cultural.

Al realizarlos en fechas intermedias respecto a los años en que se celebran los Congresos Internacionales de Educación Matemática, estamos seguros de que se garantizará a nuestra comunidad una participación más intensa y efectiva en ellos.

I CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA

Fechas: A confirmar, en el Otoño (Europeo) de 1990.
Lugar: SEVILLA (España) Idiomas: Español y Portugués.
Comisión Provisoria: Ubiratán D'Ambrosio (Brasil), Gonzalo Sánchez (España), Eduardo Luna (Rep. Dominicana), Cesar Carranza (Perú) y Alicia Villar (Uruguay).

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

El discurso de apertura del próximo curso correrá a cargo del Prof. D. Enrique Linés Escardó y versará sobre Estética y Matemática, siendo la fecha probable de su celebración el día 28 de octubre, a las siete y media de la tarde.

HISTORIA DE LA MATEMATICA: SIGLOS XVII Y XVIII

Como continuación del anterior curso de Historia de la Matemática, se prepara en la Real Academia de Ciencias un nuevo curso que se celebrará aproximadamente durante los meses de febrero y marzo de 1988 y cuyo programa se dará a conocer una vez confeccionado. En principio se han esbozado los siguientes temas y conferenciantes:

- Prof. Guzmán: "Pascal".
- Prof. Etayo: "Los Caminos de la Geometría".
- Prof. R.-Salinas: "Newton".
- Prof. J. Guerra: "Leibniz".
- Prof. Cuesta: "Introducción del Cálculo en España".
- Prof. Torroja: "La Gravitación y sus Consecuencias".
- Prof. Dou: "Orígenes del Cálculo de Varaciones".
- Prof. Maravall: "Orígenes de la Mecánica y de la Física Matemática".
- Prof. Linés: "Teoría de números en el siglo XVIII".

Las conferencias, que son públicas, suelen celebrarse a las siete y media de la tarde, generalmente los martes y jueves.

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

Simposio Internacional:

" LA JUNTA PARA AMPLIACION DE ESTUDIOS E INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS, 80 AÑOS DESPUES. 1907 - 1987 "

Con motivo de celebrase el 80 aniversario de la creación de esa Junta, el C.S.I.C. ha decidido organizar un simposio dedicado a estudiar todos los aspectos de su obra.

Este Simposio se celebrará en Madrid, en los dias 15 al 17 de Diciembre de 1987. Tendrá lugar en la sede central del C.S.I.C. (c/ Serrano, 117). Se ha programado una serie de conferencias a cargo de expertos nacionales y extranjeros. El plazo de presentación de comunicaciones termina el próximo 30 de Octubre.

Para obtener información sobre el Simposio dirigirse a Extensión Científica: Simposio JAE , C.S.I.C. , Serrano 117, 28006-Madrid.

- - - - -

II CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE INVESTIGACION EN LA DIDACTICA DE LAS CIENCIAS Y DE LAS MATEMATICAS

Organizado por la Revista "Enseñanza de las Ciencias" , por el Institut de Ciències de lEducació de la Universitat Autònoma de Barcelona y por el Servei de Formació Permanent de la Universitat de València, se está desarrollando el Congreso citado, en Valencia, los dias 23 al 25 de Septiembre de 1987. El tema de este II Congreso es: Los paradigmas de Enseñanza/Aprendizaje y la Investigación en la Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas.

Comprende sesiones plenarias, sesiones simultáneas para la presentación de trabajos agrupados temáticamente y talleres, o sesiones de trabajo destinadas a mostrar las líneas de investigación en marcha.

- - - - -

III CONGRESO DE LENGUAJES NATURALES Y LENGUAJES FORMALES

En el marco de las actividades de la Universidad Internacional Menéndez Pelayo tendrá lugar este Congreso en el Palau Maricel de SITGES (Barcelona) en los dias 28 de Septiembre al 2 de Octubre de 1987.

Comprenderá una sección general, otra especial sobre Ligüistica Computacional, seminarios, mesas redondas y y un simposio sobre "350 años del Discurso del Método de Descartes (1637)".

- - - - - -

II^{as} JORNADAS PEDAGOGICAS

Y CURSOS DE FORMACION DEL PROFESORADO

En los meses de Septiembre y Octubre, organizados por el COLEGIO OFICIAL DE DOCTORES Y LICENCIADOS EN FILOSOFIA Y LETRAS Y EN CIENCIAS, se están celebrando las II^{as} Jornadas Pedagógicas, con los interesantes temas siguientes: "Sociedad en la que educamos", "La participación en la responsabilidad y gestión educativa","Igualdad de oportunidades y función selectiva del sistema escolar","La selectividad ¿ es necesaria ? ¿ es imprescindible ?" y "Crisis de identidad de los alumnos de BUP: Fases y avatares".

También organizados por el citado Colegio se están celebrando CURSOS DE FORMACION DEL PROFESORADO, entre los que destacaremos:

- "Curso de realización de trnsparencias para retroproyección en Matemáticas",del 14 al 18 de Septiembre.
- "El ordenador en el aula (intercambio de experiencias)", del 21 al 25 de Septiembre.
- "Diez lecciones de Epistemología", del 19 al 30 de Octubre.
- "La Huella de España en América", del 1 al 28 de Octubre.

- x - x -

En memoria de don Pedro Puig Adam:

ASI NACE LA MATEMATICA

Por Baltasar Rodríguez-Salinas
De la Real Academica de Ciencias

No exageran absolutamente nada los que afirman que la vida humana está impregnada de matemática. Esto se puede comprobar observando que gran parte de los juicios que el hombre expresa tanto con el lenguaje como con ciertos gestos y movimientos se refieren a propiedades aritméticas y geométricas. Razones para que sea así no faltan por estar el hombre en contacto permanente con el espacio y el tiempo, así como también, en el esplendor de las civilizaciones, con la técnica y la economía para las que es de vital importancia la Matemática.

De todas las operaciones matemáticas es sin duda la de contar la que está más arraigada en el hombre, pues está tan íntimamente unida a su forma de pensar que parece poco concebible que por lo menos en sus formas más rudimentarias haya sido alguna vez inventada o descubierta. Conviene recordar la aguda réplica de Platón a quienes, siguiendo una vieja leyenda, atribuían el arte de contar a Palamedes, mitológico personaje en quien se simbolizaba el Oriente con todos sus inventos. "*De manera* -preguntaba Platón- *que antes de Palamedes, ¿Agamenón no sabía cuantos pies tenía?*". Es claro, que mucho antes que Descartes dijese "*Pienso, luego existo*", los hombres más primitivos sabían pensar y, por lo tanto, contar, al menos en la forma más rudimentaria: uno, dos,..., muchos.

La historia no hace sino comprobar que el origen del proceso de contar se remonta a los tiempos más remotos en los que aparece el hombre, pues por los documentos e inscripciones que nos han dejado algunas civilizaciones queda probado que en ellas se empleaban ya sistemas de numeración, a veces muy perfeccionados.

Sin embargo, se pueden distinguir numerosas fases en la forma como el hombre, en el transcurso de la historia, ha ido aprendiendo a contar y que se va repitiendo de manera semejante en la vida de cada individuo. Un paso decisivo se dio cuando se supo sumar y multiplicar, pero hoy mismo, en pleno siglo XX, es muchas veces difícil determinar el número de elementos de que consta un conjunto, basta recordar las dificultades que encierran algunos problemas de combinatoria y teoría de números. En algunos casos, como para calcular el número (n) de números primos menores que un entero prefijado n se han vencido las dificultades expresando (n) asintóticamente mediante el logaritmo neperiano de n, pero en otros como en la determinación del número de enteros inferiores a n para los cuales es válida la conjetura de Fermat, relativa a la ecuación $x^m + y^m = z^m$, no se ha logrado ni siquiera eso. En la actualidad, las máquinas de calcular y ordenadores han significado un gran avance en el cálculo, tanto en cuestiones prácticas como teóricas. Así gracias a ellos se ha podido resolver el problema de los colores.

El concepto de número natural, que surge por abstracción del proceso de contar, no ha sido examinado hasta el siglo pasado, después de haberse desarrollado las teorías de los números racional, real y complejo. Anteriormente, todos los matemáticos lo consideraban como una cosa dada, opinión unánime que se puede resumir en la famosa frase de Kronecker: *"Dios creó el número natural; los demás números son obra humana"*.

Es una idea muy extendida la que supone el concepto de número natural estrechamente unido al de tiempo, por la impre-

sión que despierta en nosotros la sucesión de los fenómenos que observamos. Otros en cambio opinan que tiene más relación con el concepto de espacio, reduciendo el concepto de número a la idea que surge con la observación de objetos diferentes. Por último, hay quienes, independientemente de toda intuición de espacio y tiempo, ven en el número natural el reflejo de una especial aptitud del espíritu.

Aunque no pretendemos entrar en detalles en la fundamentación del número natural, ya que nos alejaríamos demasiado del objeto principal que estamos desarrollando, vamos a decir algunas cosas sobre dicha cuestión, recordando que el método axiomático y la reducción a otros conceptos primarios, como el de conjunto, son los principales procesos empleados.

El primer paso importante en el método axiomático lo dio Peano con su "Aritmética principia nova methodo exposita" (1889), en donde basó el concepto de número natural en un sistema de axiomas en los que intervienen propiedades de orden más el principio de inducción completa que caracterizan a la sucesión de números naturales. Otro método axiomático de mayores pretensiones es el desarrollado por Hilbert en varios de sus trabajos, entre ellos el que expuso en la célebre conferencia en el Congreso de Heidelberg de 1904 sobre los fundamentos de la Lógica y de la Aritmética, en donde con objeto de evitar caer en paradojas efectúa un desarrollo parcial y simultáneo de la Lógica y de la Aritmética con el que inicia la teoría de la demostración desde un punto de vista formal. En estos trabajos, como en todo método axiomático, la dificultad principal radica en probar la no contradicción de los axiomas.

Las primeras formulaciones del número natural mediante la teoría de conjuntos se deben a G. Frege y a Dedekind en sus obras "Grundlagen der Aritmetik" (1984) y "Was sind un was sollen die Zahlen" (1889), quienes junto con Cantor son los grandes clásicos y creadores de la investigación sobre los fundamen tos. Con los mismos fines Russell y Whitehead incorporaron la teoría de conjuntos en el sistema lógico de los "Principia Mathematica" (1910) en donde la aceptación de la teoría de los tipos obliga a sus autores a introducir el axioma de la reducibilidad y el axioma del infinito junto con los postulados de carácter puramente lógico, tropezando no obstante en la inconsistencia de conjunto universal que es contradictorio y dio anteriormente origen a multitud de paradojas que motivaron la revisión y formulación axiomática de la teoría de conjuntos. Zermelo y Fraenkel autores en 1908 y 1922-28 de estas primeras axiomáticas se esfuerzan en defender la independencia de la teoría de conjuntos de la lógica, mientras que Skolem en su axiomática de 1922 se contenta en dar a esta teoría una estructura lógica más precisa mediante la lógica elemental. Posteriormente, se ha representado un cuarto punto de vista en los trabajos de Quine (1936) y de Ackermann (1937), quienes desarrollan ciertos sistemas formales que son análogos a los sistemas de la lógica de los conjuntos. Todavía podíamos hablar de otras axiomáticas de la teoría de conjuntos como las de von Neumann (1923-29), Kuratowski (1923), P.G.C. Vrededuin (1931), Bernays (1937-48) y R.M. Robinson (1937) pero nos es imposible entrar en ellas.

Si importantes son estas investigaciones sobre los fundamentos de la Matemática nos parece mucho mayor lo que se logró con la gran concepción de número cardinal transfinito, introducido por Cantor, con el que podíamos decir, abusando un poco del lenguaje, que se pueden contar los conjuntos infinitos. No podemos terminar estas líneas dedicadas al proceso de contar y al número natural, sin dejar de admirarnos de lo que representó esta maravillosa creación para la mente humana, por ello declarándonos decididamente cantorianos no podemos aceptar ninguna idea filosófica que expulse completamente de la Matemática el número cardinal transfinito y las principales creaciones cantorianas que giran alrededor de la teoría de conjuntos y del infinito actual.

Pasamos ahora a analizar el concepto de medida. Las crecidas periódicas del Nilo al modificar las tierras de labranza de sus márgenes son al parecer, según una antigua opinión que conocemos a través de Herodoto, las que hicieron sentir la necesidad de medir su extensión para fijar el impuesto a pagar al faraón. La Geometría tuvo precisamente su origen, como indica su nombre, en la medida de la tierra.

Pero no sólo la tierra pudo haber sido el objeto de la medida, pues, no se puede comprender las grandes construcciones de los tiempos antiguos, como templos, palacios y monumentos funerarios, sin el concurso de unos mínimos conocimientos, por lo menos empíricos, de una noción de medida. Como siempre las guerras con todas las calamidades y males que llevan consigo, serían las impulsoras de gran número de esas construcciones como las murallas de las ciudades y, posiblemente, también de la rueda, pieza indispensable para los carros de combate. El comercio y la astrología tuvieron, sin duda alguna, también mucho que ver en la cuestión que se planteó con la medida de las cosas. Todas estas consideraciones nos hacen suponer que la necesidad de medir, aunque no tan acuciante como la de contar, surge con el nacimiento de las civilizaciones de la antigüedad. Efectivamente, según se sabe, los asirio-babilónicos conocían la determinación correcta del área de los rectángulos, triángulos y trapecios, así como también del volumen de los prismas rectos y pirámides de base cuadrada; en cambio, su conocimiento de la longitud de la circunferencia era muy grosero, pues, la consideraban igual a la de sus exágonos inscritos, o sea, igual a tres veces su diámetro. Este valor se da también implícitamente en la Biblia, donde se cuenta que el mar de fundición del rey Salomón, era diez codos de largo y le ceñía un cordón de treinta codos (Reyes I,7,23).

Los egipcios parece ser que se encontraban en un estado de conocimientos más avanzado que los asirio-babilónicos según resulta del análisis de los papiros conocidos, que permiten ase gurar que conocían ya reglas para la determinación de algunas figuras planas, así como también del volumen de algunos poliedros. Concretamente, en uno de esos papiros, en el de Golenishchev, se calcula correctamente el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada y, aproximadamente, el área de una semiesfera. Para el área del círculo utilizaban una regla equivalente a tomar 64/81 = 3,1604.../4 como valor de $\pi/4$, siendo curioso observar que entre todas las fracciones $(1-(1/n))^2$ (n = 1, 2, ...) es, precisamente, la anterior la que da el valor más aproximado.

Mención muy especial merecen las contribuciones de los geómetras griegos a la teoría de la medida. Antes que Pitágoras, Tales de Mileto (siglo VI a.C.) fue el filósofo griego al que, con cierto fundamento, se le atribuyen contribuciones a la geometría, entre las que figuran la determinación de las distancias de un barco al puerto y la medición de la altura de una pirámide cuando se conoce la sombra que proyecta. Frente al pensamiento de los jonios, Pitágoras (siglo V a.C.) y su escuela presentan una nota característica y original con la naturaleza especial del "número" como principio de todas las cosas, sin el cual no pueden éstas comprenderse o conocerse. Este número que los pitagóricos conciben no es nuestro ente ideal y abstracto sino un elemento natural constitutivo de los cuerpos que imaginaban formados por "puntos materiales" o "mónadas" cuya distribución y orden caracterizaba a cada cuerpo. A la sombra de esta concepción metafísica y al lado de una mística de los números nace la matemática como ciencia y recibe su nombre como la "ciencia por excelencia". Las dos principales contribuciones de los pitagóricos en el tema que nos estamos ocupando son, principalmente, el descubrimiento del teorema del cuadrado de la hipotenusa y, como consecuencia, de los irracionales. Aunque no es fácil saber qué grado de generalidad tuvo en la escuela de Pitágoras ese teorema, ni la demostración que se empleó, parece razonable admitir que gran parte de los esfuerzos realizados por los pitagóricos tuvieron por finalidad lograr

una demostración general del teorema. Posiblemente la existencia de los irracionales y de las cantidades inconmensurables lo deduciría también la escuela de su célebre teorema siguiendo una demostración semejante a la de Aristóteles. Sin embargo, este mismo descubrimiento habría de significar su descrédito y ruina por estar en evidente contradicción con la concepción monádica de los pitagóricos que implicaba la conmesurabilidad de todos los segmentos entre sí.

El miedo de los pitagóricos y su desaliento nos lleva a hacer una reflexión sobre el miedo. El miedo no es bueno para nada, ni para la ciencia ni para la religión. Por eso es malo incluso utilizarle para infundir a hombres y mujeres que hagan el bien y no el mal. El camino es otro, es hacer ver que la satisfacción que se siente al hacer el bien es suficiente para que se haga, de forma que se explote el mal, cuando no se puede evitar, para hacer el bien.

No vamos a seguir con la teoría de la medida porque nos alargaríamos demasiado. Ya nos hemos ocupado de ella en otras publicaciones de carácter histórico. Solamente recordamos que impulsó el nacimiento del cálculo integral y del cálculo diferencial y, por tanto, del cálculo infinitesimal, fundamento de la Física. En la actualidad la teoría de la medida ocupa un lugar importante en la Matemática y, en particular, en el Análisis Armónico y en el Análisis Funcional. El mayor elogio que se puede hacer de la Teoría de la Medida es que se puede garantizar al que se dedica a ella que está haciendo una cosa importante.

INTELIGENCIA ARTIFICIAL

por Julio Fernández Biarge

Pero ¿ Puede haber una máquina inteligente ?

Durante años se han mantenido controversias en torno a esa cuestión. Estas controversias, si no han conducido a una respuesta definitiva, exenta de matizaciones, no han resultado estériles. Gracias a ellas se ha profundizado en el estudio de los distintos aspectos de la inteligencia humana. En particular, han llevado a comprender mejor los rasgos que definen el "comportamiento inteligente", enfoque conductista de la cuestión que simplifica su estudio, pues es más fácil preguntarse si una máquina puede presentar comportamiento inteligente que preguntarse si puede "poseer" inteligencia; los que niegan esta última posibilidad, todavía pueden admitir la primera, añadiendo quizá la palabra "aparentemente" entre "comportamiento" e "inteligente". Pero para un conductista esa matización es supérflua, ya que el comportamiento que puede ser objeto de estudio es, por propia naturaleza "aparente" y las consideraciones sobre él que no "aparezcan" en la observación o en la experimentación han de interpretarse como excursiones metafísicas fuera de la teoría.

Sin necesidad de adoptar una postura claramente conductista, se comprueba fácilmente que la respuesta a la pregunta que encabeza estas líneas depende estrechamente de tenues matizaciones en el significado del adjetivo "inteligente". Casi lo mismo ocurre con la pregunta, mucho más antigua " ¿Hay animales inteligentes, aparte del Hombre ? " (Como veremos después la palabra "racional" se presta a equívocos mayores aún que la "inteligente"). Si no hay acuerdo previo sobre el significado exacto de las palabras contenidas en esas preguntas, las respuestas podrán ser discutidas indefinidamente, en un diálogo de sordos.

No intentaremos aquí dar una definición de "inteligente" lo suficientemente precisa para que, una vez aceptada, podamos responder que, efectivamente, puede haber máquinas inteligentes. Simplemente dejaremos constancia de que desde hace unos treinta años se ha ido generalizando el término de Inteligencia Artificial, normalmente abreviado con las siglas IA (AI, en inglés), para designar una nueva ciencia y unas nuevas técnicas, que han alcanzado un enorme desarrollo, con multitud de aplicaciones prácticas y cuya evolución futura promete ser de importancia decisiva para la humanidad. Al lado de estos hechos, presenta un interés secundario la discusión sobre si el nombre adoptado es cabalmente adecuado o más bien metafórico o impropio.

Sistemas inteligentes

Los productos de las investigaciones en IA son los "sistemas inteligentes". Es preferible llamarlos sistemas en lugar de máquinas, pues en ellos juega un papel primordial el logical (o software), es decir, los programas e

informaciones que se almacenan en los aparatos electrónicos, magnéticos o mecánicos que constituyen el fisical (o hardware). Es común asociar el nombre de "máquina" tan sólo a estos dispositivos, y por ello se prefiere hablar de "sistemas".

Un sistema merece el calificativo de "inteligente" cuando puede realizar funciones que, de ser llevadas a cabo por personas, aceptaríamos que necesitaban de su inteligencia. Por ejemplo, se suele aceptar sin discusión que el jugar bien al ajedrez exige la inteligencia de los jugadores; como todos saben, hoy día existen en el mercado aparatos electrónicos capaces de jugar al ajedrez mejor que la mayor parte de los aficionados y que incluso participan en competiciones con los campeones. Habrá que convenir en que esas máquinas deben considerarse como sistemas inteligentes.

Hay quienes, a pesar de ello, se resisten a aceptar que el atributo de inteligente pueda ser aplicado a una máquina. Alegarán que una máquina jamás podrá realizar una determinada actividad que la inteligencia humana lleva a cabo con eficacia; si un día se les presenta una máquina que realiza esa actividad igual o mejor que una persona, lo admitirán, pero alegarán que, en cambio, jamás llegará a realizar otra, y así sucesivamente.

Por supuesto que un sistema de IA tan solo puede competir con una persona en una actividad inteligente, y muchas veces consigue hacerlo con ventajas de rapidez, seguridad y precisión, pero nunca se ha tratado de emular la inteligencia humana en todos sus aspectoa a la vez. Sería un despropósito tratar de conseguir ésto en el estado actual de la tecnología. El cerebro de cualquier persona tiene más de 10^{10} neuronas. Cada neurona es inmensamente más complicada que uno de los elementos (transistores, puertas, diodos, etc.) de que consta un circuito integrado de los que constituyen las máquinas informáticas de hoy dia, hasta el punto de que habría que compararla más bien con un procesador especializado que con uno de esos componentes elementales. El número de sinapsis, o conexiones entre esas neuronas , en un hombre, es del orden de 10^{13}. La complejidad de los mayores ordenadores que el hombre ha sido capaz de construir está lejísimos de alcanzar la de un cerebro humano; sería insensato pensar que con la tecnología actual o con la previsible para dentro de pocos años, se iban a poder construir máquinas informáticas que pudiesen competir globalmente con nuestros cerebros. La competencia sólo puede mantenerse si se limita a un campo muy restringido, a base de concebir un sistema inteligente altamente especializado en él.

Algunos aspectos de la actividad inteligente del hombre se han prestado mejor que otros a ser emulados por los sistemas de la IA. El razonamiento lógico, que algunos pensaron que era la actividad inteligente más genuinamente humana, es una de las que se han mostrado más asequibles a los sistemas de IA. Por eso advertíamos antes

del peligro de identificar "humano" con "racional", si por racional se entiende la capacidad de llevar a cabo razonamientos lógicos. Como veremos, se han desarrollado sistemas informáticos capaces de realizar deducciones, de demostrar teoremas matemáticos o lógicos y de resolver problemas (no por simple aplicación de métodos preestablecidos). Tampoco las actividades de aprendizaje están vedadas a los sistemas de IA, y pueden diseñarse algunos capaces de adquirir conocimientos o habilidades, observando su entorno, experimentando sobre él, recordando y analizando los fallos, para adquirir "experiencia" o consultando a un "maestro" lo que deducen que necesitan "saber" para resolver los problemas, tal como haría una persona.

Las realizaciones prácticas de la IA se han manifestado principalmente en el desarrollo de <u>sistemas expertos</u>, capaces de ser consultados en una forma muy semejante a como se haría con una persona especialista en un tema, o con un equipo de ellas, hasta el punto de que estos sistemas expertos no solo proporcionan respuestas útiles a las preguntas que se le formulan, sino que pueden explicar por qué han llegado a ellas, desechando otras posibles, o bien requerir datos adicionales que necesitan para decidir entre varias respuestas. También se han desarrollado sistemas inteligentes capaces de mostrar una habilidad determinada, como la de jugar al ajedrez u otros juegos de inteligencia, o para elaborar programas de ordenador, codificados en un lenguaje adecuado, que resuelvan problemas bien especificados.

Perspectiva histórica

El nombre de Inteligencia Artificial se acuñó en una Conferencia que tuvo lugar en el Darmouth College, en 1956, con la participación de John McCarty, al que sue le atribuirse la introducción de esa denominación. Otros pioneros en la investigación en esta nueva Ciencia son Samuels, Newell, Simon, Nilsson, Kowalski, etc. En los 15 años siguientes se consiguieron avances muy importantes en ese campo, que constituyen la base sobre la que se asienta el estado actual del desarrollo de la IA. En esos años se perfilaron las técnicas básicas de trabajo, incluidos los métodos de búsqueda heurística, la adaptación del cálculo de predicados de primer orden a su manipulación informática, y el lenguaje LISP, que todavía constituye un poderoso instrumento para el desarrollo de los sistemas inteligentes. Los rápidos avances que se consiguieron en esos años, junto con algún espectacular éxito inicial, hicieron concebir esperanzas de que los principales problemas planteados quedarían resueltos en pocos años. Después, las dificultades encontradas fueron mayores que las previstas y no se alcanzaron resultados tan brillantes como se esperaba. Las mayores decepciones se obtuvieron en el campo de la traducción automática de lenguajes naturales. Esas dificultades, lejos de desanimar a los investigadores, se constituyeron en un reto aceptado por millares de ellos, y con su trabajo se han hecho grandes progresos en la comprensión profunda del

comportamiento inteligente y en el desarrollo de los medios para emularlo mediante sistemas informáticos.

En la década 1970 - 80 se consiguió poner en funcionamiento diversos prototipos de sistemas inteligentes, con resultados satisfactorios. Destaca la presentación de los primeros sistemas expertos realmente operativos, como el MACSYMA (1971) para la manipulación de expresiones matemáticas, perfeccionando los SAINT y SIN desarrollados antes para la integración (indefinida) simbólica, el MYCIN (1976) para el diagnóstico médico y la selección de terapias, que ha sido muy usado y perfeccionado posteriormente, el PROSPECTOR (1976) para la prospección geológica, el DENDRAL (1978) para describir las estructuras de compuestos orgánicos a partir de datos experimentales (espectroscopía de masas, principalmente), y otros muchos. En el mismo periodo se consiguieron avances importantes en el desarrollo de planificadores inteligentes para la acción de robots y en los sistemas de comprensión de los lenguajes naturales.

A partir de 1975 se desarrolló también un nuevo lenguaje de programación, llamado PROLOG, que permite formular tanto los conocimientos básicos sobre un tema determinado como las preguntas que se desea que sean respondidas por el sistema mediante las reglas de la inferencia lógica. Mediante el lenguaje PROLOG no se trata de expresar cómo ha de resolverse el problema, sino de especificar claramente los términos de éste, de modo que un "motor de inferencia" adecuado pueda encargarse de las manipulaciones lógicas requeridas para resolverlo. A la vez, también se perfeccionó el LISP, apareciendo además en el mercado las primeras máquinas concebidas expresamente para trabajar eficazmente con ese lenguaje.

A partir de 1980 es cuando la IA comienza a ofrecer productos de aplicación inmediata, susceptibles de comercialización. Se han creado recientemente numerosas empresas para explotar las posibilidades de las técnicas de IA desarrolladas en los años anteriores, especialmente por lo que se refiere a los sistemas expertos. La construcción de un sistema experto exige un esfuerzo muy considerable en el desarrollo de rutinas de acceso a las bases de datos, de comprensión del lenguaje empleado por el usuario, que debe ser lo más parecido posible a su lenguaje natural, de síntesis de las respuestas, expresadas en lenguaje comprensible, de presentaciones gráficas en pantalla, etc. Estas rutinas pueden elaborarse de forma que sirvan para una gama muy amplia de sistemas expertos, hasta el punto de hoy dia se comercializan sistemas expertos "vacíos", llamados "shells" , que contienen un juego completo de esas rutinas, de modo que,con su auxilio,se pueden construir sitemas expertos en materias concretas,con un esfuerzo relativamente pequeño.

La traducción automática, que en los años anteriores pareció presentar dificultades casi insalvables, ha conducido al desarrollo de sistemas de auxilio a los traductores, que permite multiplicar asombrosamente su productividad, a pesar de que no llegan a constituir sistemas automáticos propiamente dichos.

La nueva generación de ordenadores que están preparando los investigadores japoneses, seguidos por otros norteamericanos y europeos, con vistas al año 1992, aprovecha muchos de los resultados de la investigación reciente en IA, a la vez que está siendo diseñada de modo que sirva de soporte a los sistemas de IA en forma mucho más eficaz que los ordenadores actuales, que no están concebidos especialmente para ello.

Las realizaciones actuales aparecen como muy modestas, si se comparan con las fantasías (razonables, aunque irrealizables con los medios de hoy) de los escritos o películas de ciencia ficción (de las que es el ejemplo más representativo el ordenador HAL de "2001, Odisea en el Espacio"), pero hubieran parecido inverosímiles hace sólo treinta años.

Ingenieria del Conocimiento

El desarrollo de sistemas de IA, como cualquier progreso orientado a las aplicaciones prácticas, ha exigido un tipo especial de ingeniería: La que sirve para conseguir una manipulación eficaz del conocimiento almacenado en una máquina informática. Ese conocimiento puede ser de hechos o de procedimientos o habilidades.

El problema primordial de esa ingeniería es el de conseguir una representación de los conocimientos humanos adecuada para su almacenamiento en los ordenadores y para su utilización posterior. Intimamente relacionado con él están los problemas de la adquisición de conocimientos por parte del sistema, o "aprendizaje" y el de la recuperación de conocimientos, no entendida como simple extracción de los mismos que se introdujeron previamente, sino como deducción de respuestas a preguntas concretas, elaboradas a través de mecanismos de inferencia lógica aplicada a los hechos registrados, convenientemente seleccionados. La eficacia de estas operaciones depende esencialmente del método de representación escogido, y durante bastantes años, las investigaciones en IA se han centrado en idear maneras de representar el conocimiento que, a la vez que resulten adecuadas a las máquinas informáticas disponibles se presten a conseguir una adquisición y una recuperación eficaces. En la base de todos los métodos de representación adoptados se encuentra simpre, más o menos explícita, la lógica de predicados de primer orden; gran parte del esfuerzo investigador se ha dedicado a obtener una normalización adecuada de sus fórmulas, a desarrollar lenguajes simbólicos para expresarlas eficazmente y a idear métodos para manipularlas, especialemnte en lo que se refiere a la inferencia lógica o deducción.

En muchas aplicaciones en las que los conocimientos se caracterizan por su inseguridad o por expresarse en términos probabísticos, se ha hecho preciso acudir a representaciones con lógicas multivalentes o a la teoría de conjuntos borrosos o difusos (fuzzy). Se han ido resolviendo dificultades aparecidas con determinados tipos de conocimientos, como las opiniones, las creencias, los conocimientos sobre los conocimientos propios o ajenos, etc. Un tipo de conocimiento que ha dado gran trabajo a los investigadores es el que suele denominarse como el "sentido común", que determina la mayor parte de las decisiones humanas, sin que pueda identificarse con el proceso racional de deducción lógica. El problema de dotar a un sistema inteligente de algo que se asemeje al sentido común humano ha resultado tan tentador como difícil.

Robótica

Otro problema que ha ocupado ampliamente a los investigadores en IA ha sido el de sentar las bases para el desarrollo de robots inteligentes.

Los robots son máquinas que se caracterizan por su capacidad para llevar a cabo actividades complejas que anteriormente realizaba personal especializado. Suelen distinguirse tres generaciones de robots; los de la primera, llamados también robots autómatas, son versátiles en el sentido de que pueden ser programados con amplia libertad para realizar tareas diferentes, sin introducir modificaciones en sus mecanismos. No obstante. cuando están ejecutando un programa determinado, repiten siempre la misma secuencia de operaciones. Esto hace que la pieza sobre la que ha de trabajar esté colocada con toda precisión en determinada posición. La segunda generación resultó de la incorporación de sensores a los robots, que les permitían obtener datos de su entorno y de la utilización de programas que, con esos datos, adaptaban convenientemente la operación a las circunstancias detectadas. Se desarrollaron sensores ópticos, tactiles, electromagnéticos, térmicos, etc. y con ello se iniciaron dos importantes líneas de investigación: Una sobre la emulación de la visión humana (incluyendo los procesos de interpretación de lo visto) y otra sobre la programación para robots, con la creación de lenguajes especiales para ella. Un robot de la segunda generación ya no necesitará la colocación exacta de la pieza para trabajar sobre ella y puede llevar a cabo tareas de verificación y control de calidad.

Las investigaciones en IA están preparando una tercera generación de robots, los robots inteligentes, que no sólo interaccionan con su entorno sino que pueden elaborar sus propios planes de acción para adaptarse a él y conseguir los objetivos que se le hayan marcado,salvando los obstáculos que accidentalmente se le interpongan. Estos robots pueden tener facultades de aprendizaje (ya sea con profesor o sin él) adquiriendo experiencia, por análisis de sus errores. La tercera generación de robots no ha pasado todavía a la fase de explotación comercial, pero se han construido prototipos con comportamiento muy satisfactorio. En 1972 el SRI (Stanford Research Institute) construyó ya el "Shakey", con las características que hemos señalado para la tercera generación, y desde entonces se está progresando rápidamente.

De hecho, los automatismos introducidos en ciertas armas de guerra y en algunos ingenios de exploración espacial, pueden considerarse ya como robots de la tercera generación.

La evolución futura de la IA

Para un futuro muy próximo, anterior al fín de siglo, cabe esperar resultados muy transcendentes de los trabajos en IA. No decimos sorprendentes, pues los escritores de ciencia-ficción nos proporcionan tal cantidad de visiones imaginativas y fantásticas de ese futuro, que ya nada podrá sorprendernos.

En primer lugar debemos esperar la aparición de máquinas informáticas más adecuadas para los trabajos de IA que los actuales ordenadores. Estos están generalmente concebidos para un funcionamiento secuencial, adecuado a la resolución de problemas mediante la ejecución de algoritmos, que no se parece en nada a los procesos que se van descubriendo en el funcionamiento de nuestros cerebros, y que tampoco parece óptimo para la IA.

Los problemas de IA se plantean mal de forma algorítmica, aunque al final, por imperativo de las máquinas utilizadas, su solución real acabe adoptando la forma de programa clásico, derivado de un algoritmo.

Simplificando mucho la situación, el esquema teórico de los métodos de resolución de los problemas de la IA se basa en los llamados sistemas de producción, en los que aparecen separados: una base de datos, en la que se representan, en forma conveniente, los conocimientos (hechos), un conjunto de "reglas", cada una de las cuales sólo es aplicable cuando en la base de datos se cumplen determinadas condiciones (condiciones de aplicabilidad de la regla) y cuya aplicación produce efectos bien determinados en dicha base de datos, unas "condiciones de terminación, que permiten detectar cuando ha aparecido en la base de datos un conocimiento que satisface a las exigencias del problema, y, por último, un sistema de control que decide qué reglas, de las que resultan aplicables en cada momento, conviene aplicar efectivamente. La separación de los elementos mencionados permite añadir o modificar conocimientos, introducir o cambiar reglas o mejorar la estrategia del control, sin tocar para nada las otras partes del sistema, lo que da una flexibilidad de la que carecen, por su estructura monolítica, los programas convencionales de los ordenadores actuales. Los ordenadores de la nueva generación se mostrarán más adecuados para este tipo de utilización propia de la IA, y ello redundará en un rápido desarrollo de sus aplicaciones. La reciente aparición de máquinas LISP se orienta en esa dirección.

Para los próximos años debemos esperar, en primer lugar, un desarrollo explosivo de los sistemas

expertos, con las ventajas que proporcionan los "shells" a que nos hemos referido antes. Se han comenzado a presentar los llamados sistemas expertos de la 2ª generación, que, además de proporcionar respuestas (normalmente afirmaciones o negaciones de hechos, a veces acompañadas de un número que expresa una estimación de la probabilidad de que sean ciertas), obtenidas mediante inferencias lógicas a partir de los hechos de su base de datos, pueden proporcionar respuestas numéricas, resultados de cálculos técnicos, muy especialmente los obtenidos con algoritmos de optimización. Pueden así decidir sobre una respuesta u otra en virtud de la comparación de resultados numéricos a que conducen las hipótesis alternativas y no por mera aplicación de la deducción lógica. La utilización de los sistemas expertos, de uno u otro tipo, se generalizará a toda clase de actividades humanas.

También están muy próximas a dar fruto las investigaciones que se están realizando, con gran esfuerzo material y humano, en algunos temas íntimamente relacionados con la IA, como son la percepción visual emulada por sistemas inteligentes, que incluye el problema del reconocimiento de formas, tanto en dos como en tres dimensiones, el reconocimiento, la interpretación y la síntesis de la voz humana, en un lenguaje natural, el problema de la traducción automática, del que hemos hablado antes, el de la generación automática de planes para alcanzar objetivos (en íntima relación con la robótica), el de la programación automática para ordenadores, y los sistemas de manipulación inteligente de los grandes volúmenes de información que hoy dia se puede recoger en cualquier aspecto de la actividad humana. Confiemos en que no sean los artificios ideados para la destrucción y la guerra los que más se beneficien de estos progresos.

- x - x - x - x -

PARTICION DE UN TRIANGULO EN TRIANGULOS SEMEJANTES

Por Luis Villacorta Mas

En la línea de la búsqueda de cuestiones de matemática elemental, de posible comprensión por parte de alumnos de bachillerato, abiertas hasta tiempos recientes o que aún permanecen abiertas, vamos a estudiar posibilidades de partir un triángulo en triángulos semejantes.

En 1970, Freese, Miller y Usiskin estudian la posibilidad de dividir un triángulo en n triángulos semejantes a él. Demuestran que para cualquier número natural n, $n \neq 2$, 3 ó 5, existe una descomposición de cualquier triángulo en n subtriángulos semejantes a él. En la figura 1, por ejemplo, aparecen formas de descomponer un triángulo en 4, 6 y 7 subtriángulos semejantes al inicial.

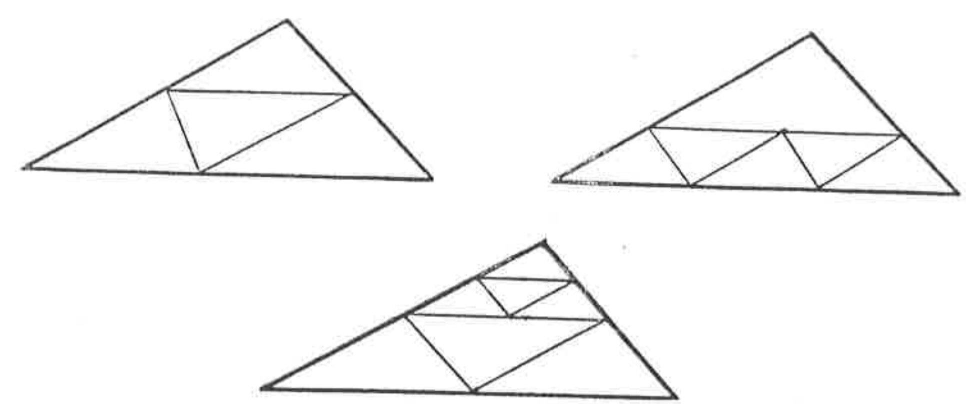


Figura 1

Demuestran también que solamente los triángulos rectángulos pueden dividirse en tres, y, por tanto, en cinco triángulos semejantes al inicial. Finalmente plantean en su trabajo las siguientes cuestiones: si un triángulo puede dividirse en 5 triángulos semejantes a él ¿debe ser el triángulo rectángulo? Y a la inversa, conviniendo en que, siendo n un número natural, n es un número aceptable de un triángulo si existe una descomposición de él en n subtriángulos semejantes a el mismo ¿cuál es el conjunto de números aceptables de un triángulo?

Dos años más tarde, en 1972, Usiskin y Wayment encuentran que existen otros triángulos con la propiedad de tener a n = 5 como número aceptable. En concreto, demuestran que un triángulo puede descomponerse en 5 triángulos semejantes a él si y solo si es rectángulo o es isósceles de ángulos 30°, 30° y 120°. La figura 2 muestra la forma de realizarlo en el sengundo caso.

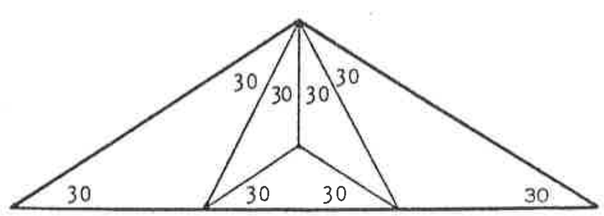


Figura 2

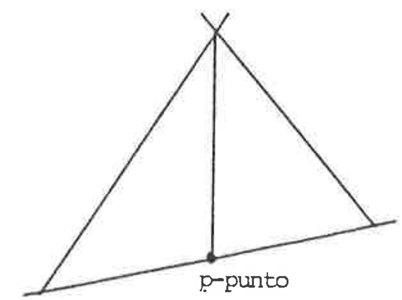
Y plantean las siguientes cuestiones: ¿qué triángulos pueden partirse en n triángulos semejantes sin la restricción de ser semejantes al triángulo inicial? ¿Para qué valor de n puede un cuadrilátero ser partido en n cuadriláteros semejantes y (o no) semejante al inicial?

A continuación vamos a estudiar la primera de las cuestiones planteadas. Llamaremos $\widehat{ABC}$ al triángulo inicial. A cada

punto distinto del A, B ó C y que sea vértica de un triángulo de la partición llamésmole un p-punto. Veamos dos observaciones previas:

1ª Observación.- Si en una partición existe un p-punto común solamente a dos triángulos, la partición tiene que ser en triángulos rectángulos.

En efecto, los ángulos de los triángulos que concurren en esos vértices suman dos rectos y cada uno es exterior respectivamente del otro triángulo, por tanto, no puede ser igual a ninguno de los ángulos interiores no adyacentes; la única posibilidad es que sea igual a su adyacente.



2ª Observación.- En cualquier partición de un triángulo en triángulos semejantes y no semejantes al inicial no pueden quedar sin dividir dos ángulos distintos del triángulo inicial.

Supongamos dos ángulos del triángulo inicial $\widehat{ABC}$ son distintos, por ejemplo, $\hat{A} \neq \hat{B}$, y que en una partición estos ángulos quedasen sin dividir, entonces cada triángulo de la partición tendría que tener un ángulo igual a $\hat{A}$ y otro ángulo igual a $\hat{B}$ y, por tanto, el tercer ángulo igual a $\hat{C}$; en consecuencia, sería semejante al inicial.

Realizaremos la búsqueda de las posibles particiones de un triángulo en n triángulos semejantes y no semejantes a él cuando n = 2, 3 y 4.

I) Para $n = 2$.- De las observaciones anteriores resulta evidente que solamente los triángulos isósceles se pueden dividir en dos triángulos rectángulos semejantes. Y, por consiguiente, todo triángulo isósceles se puede partir en $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ triángulos rectángulos semejantes. En la figura 3 se muestran varias formas de hacerlo.

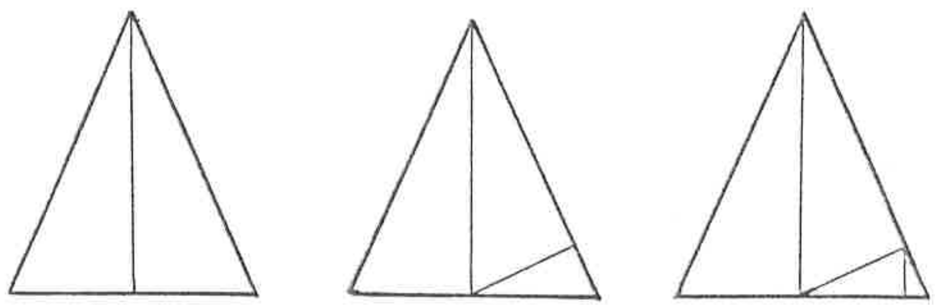


Figura 3

II) Para $n = 3$.- Observemos que hay cuatro modos diferentes de dividir un triángulo en tres triángulos (figura 4).

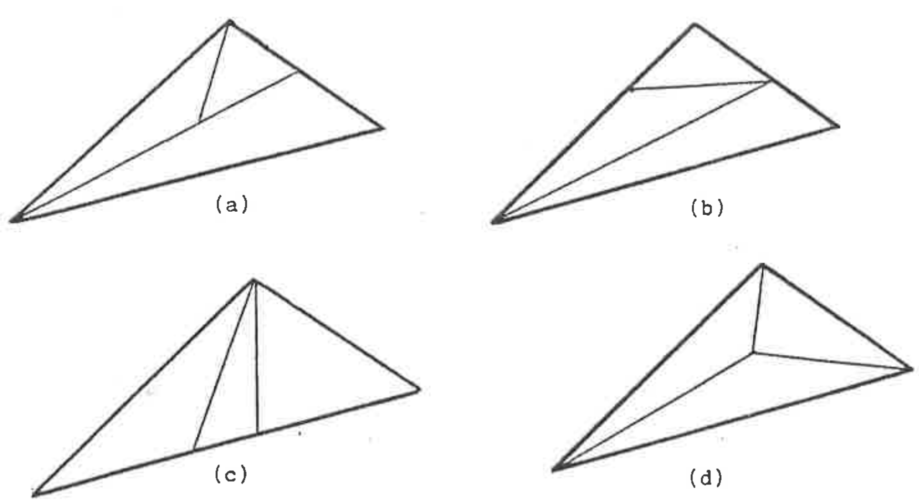


Figura 4

Es sencillo observar que las disposiciones (a) y (c) no pueden proporcionar maneras de partir un triángulo en tres triángulos semejantes y no semejantes al inicial.

En la disposición (b), de acuerdo con la 2ª observación, los ángulos del triángulo inicial no divididos no pueden ser desiguales; además, según la 1ª observación, la partición tiene que ser en triángulos rectángulos. Por tanto, nos encontramos en el caso particular de I cuando $n = 3$.

En la disposición (d), figura 5, tiene que ser $\alpha = \beta = \gamma$ porque, en caso contrario, llamando $x = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$, x no puede ser igual a ningún ángulo de los triángulos de la partición. Facilmente observamos que todo triángulo equilátero se puede descomponer en tres triángulos isósceles semejantes de ángulos 120°, 30° y 30°.

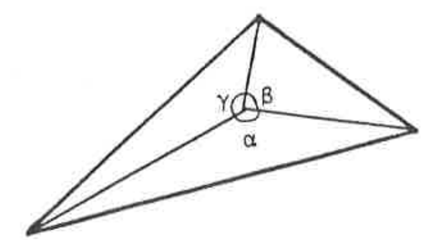


Figura 5

De acuerdo con el trabajo de Freese y otros, antes citado, concluímos que todo triángulo equilátero se puede partir en n, $n \neq 2$, 4 ó 5, triángulos isósceles semejantes de ángulos 120°, 30° y 30°. En la figura 6 aparecen formas de hacerlo en $n = 3$, 6 y 7.

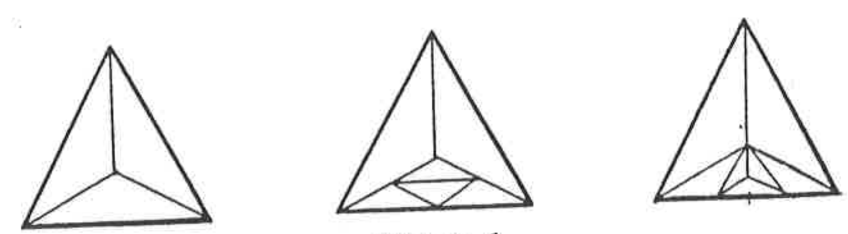


Figura 6

III) Para $n = 4$.-

Caso 1: Ningún ángulo del triángulo inicial resulta dividido en la partición.

Ya sabemos que si los ángulos del triángulo inicial son desiguales no es posible la partición en triángulos semejantes y no semejantes al inicial.

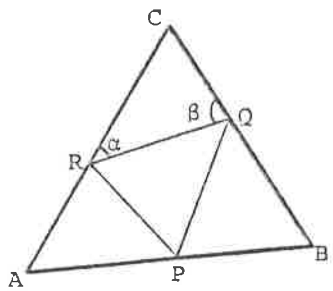


Figura 7

Si el triángulo es isósceles la partición sólo es posible según la disposición de la figura 7, y esta disposición sólo proporciona una partición en triángulos semejantes al triángulo inicial, ya que tendría que ser $\alpha = \hat{A} = \hat{B}$, o bien, $\beta = \hat{A} = \hat{B}$ y en cualquiera de los casos sería QR//AB.

Si $\widehat{ABC}$ es equilátero, supongamos que $\beta = \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$, entonces: si $\alpha = \hat{2}$ tiene que ser PR//BC, luego $\alpha = \hat{1}$; si $\alpha = \hat{4}$ tiene que ser PQ//AC, luego $\alpha = \hat{3}$. Con lo que $\gamma = \hat{4} = \hat{2} = \hat{5}$. De todo lo anterior se deduce facilmente que la partición sería en triángulos semejantes al inicial (figura 8).

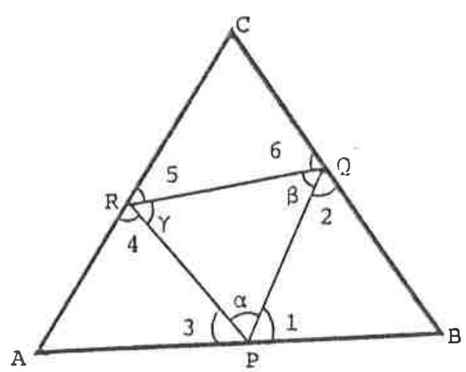
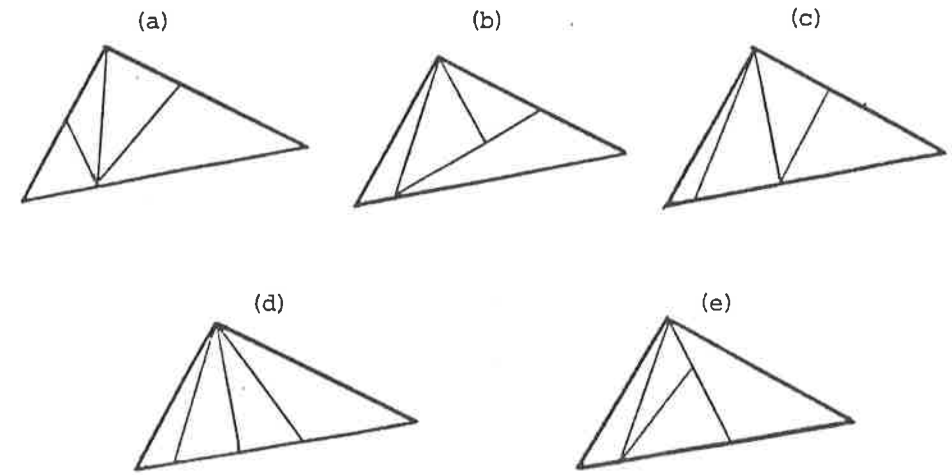


Figura 8

Caso 2: Un ángulo del triángulo inicial resulta dividido en la partición. Pueden presentarse las siguientes disposiciones:



En todas ellas, las posibles particiones tienen que ser en triángulos rectángulos. Necesariamente los ángulos del triángulo inicial no divididos tienen que ser iguales.

La disposición (a) ya está observada en I. Ya sabemos que todo triángulo isósceles se puede descomponer en 4 triángulos rectángulos semejantes.

Se observa facilmente que las disposiciones (b), (d) y (e) son imposibles que nos proporcionen formas de partir un triángulo en 4 triángulos semejantes entre sí y no semejantes al inicial.

Analicemos la disposición (c), figura 9,

Para que la partición sea en triángulos semejantes, el triángulo $\widehat{AQC}$ tiene que ser isósceles o rectángu-

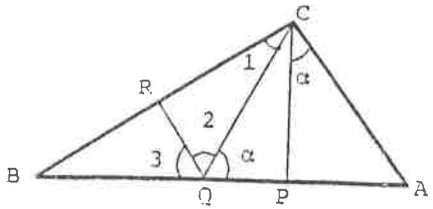


Figura 9

lo en $\widehat{ACQ}$. Ahora bien, $\widehat{AQC}$ no puede ser isósceles, luego será rectángulo en $\widehat{ACQ}$. Tiene que ser $\hat{2} = \hat{3}$ y $\hat{1} = \hat{B} = \hat{A}$; por tanto, $\alpha = \hat{2} = \hat{3}$. Luego un triángulo isósceles de ángulos 120°, 30° y 30° se puede descomponer en 4 triángulos rectángulos semejantes, aparte de la forma estudiada en I, según la disposición (c), figura 10.

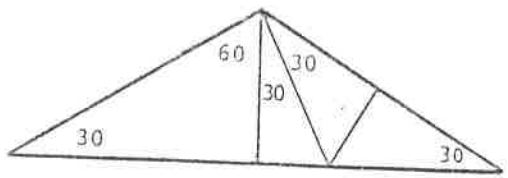
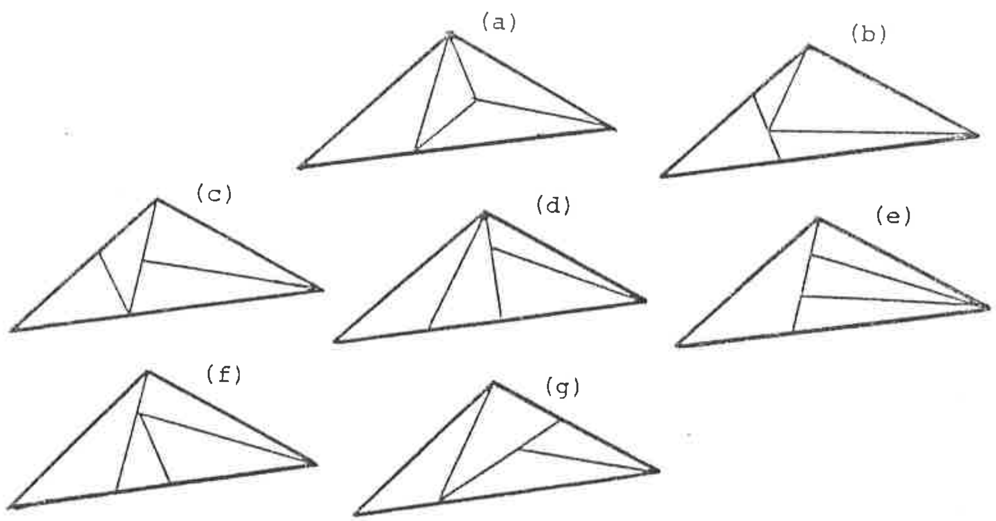


Figura 10

Caso 3: Dos ángulos del triángulo inicial resultan divididos en la partición. Pueden presentarse las siguientes disposiciones:



Observamos que todas las disposiciones, salvo la (a), sólo pueden proporcionar posibles particiones en triángulos rectángulos. De éstas, se observa también facilmente que salvo la disposición (c) es imposible que nos proporcionen particiones en 4 triángulos semejantes.

Analicemos la disposición (a). Para descomponer el triángulo $\widehat{PBC}$ (figura 11) en tres triángulos semejantes y no semejantes a él tendrá que ser equilátero y la descomposición será en triángulos isósceles de ángulos 120°, 30° y 30°. Luego tendrá que ser $\hat{1} = \hat{2} = 30°$, y el triángulo $\widehat{ABC}$ rectángulo en $\hat{C}$. Por tanto, tomando un triángulo rectángulo de ángulos 30° y 60° podemos descomponerlo en 4 triángulos isósceles semejantes de ángulos 120°, 30° y 30°, figura 11b

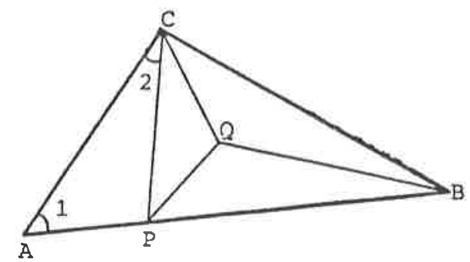


Figura 11

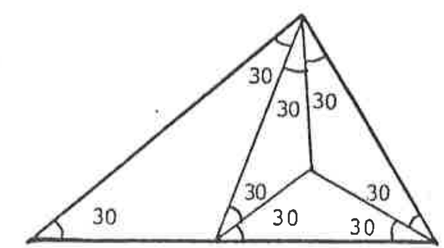


Figura 11b

Analicemos la disposición (c). Observamos en la figura 12 que CQ divide a $\widehat{ABC}$ en dos triángulos y el problema se reduce a dividir $\widehat{AQC}$ y $\widehat{QBC}$ en dos triángulos rectángulos semejantes, lo que es posible si son isósceles. Es decir, $\widehat{AQC}$ y $\widehat{QBC}$ tienen que ser isósceles. No puede ser $\hat{1} = \hat{3}$ porque sería QB// AC, luego $\hat{1} = \hat{4}$, con lo que el triángulo inicial sería rectángulo y no es válido para nuestros propósitos.

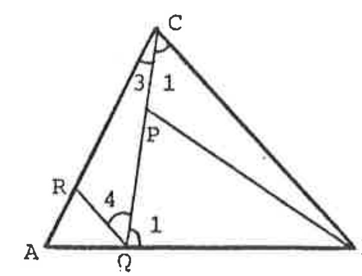
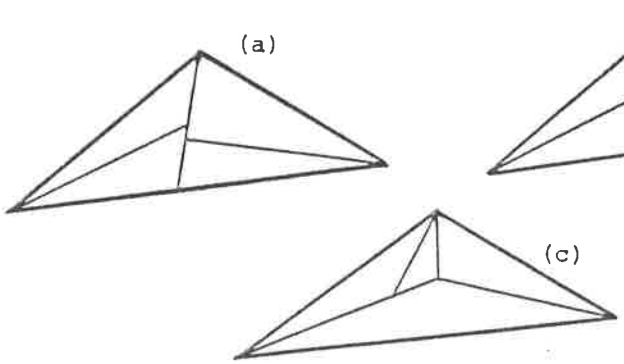


Figura 12

<u>Caso 4</u>: Los tres ángulos del triángulo inicial resultan divididos en la partición. Pueden presentarse las siguientes disposiciones:



<u>Figura 13</u>

Es evidente que la disposición (a) no puede proporcionar una partición en 4 triángulos rectángulos semejantes.

En la disposición (b), alrededor del vértice Q concurren cuatro ángulos (figura 13); es imposible que los cuatro ángulos sean rectángulos, luego alguno de ellos será mayor que 90°; ahora bien, el triángulo de la partición correspondiente a dicho ángulo no puede ser rectángulo, por lo que es imposible que nos proporcione una partición en 4 triángulos rectángulos semejantes.

Un razonamiento análogo al anterior nos muestra la imposibilidad de partir un triángulo en 4 triángulos rectángulo semejantes según la disposición (c).

Observando las posibles disposiciones de partir un triángulo en 5 triángulos, podemos conjeturar que solamente los triángulos isósceles pueden partirse en 5 triángulos rectángulos semejantes entre sí. Finalizamos recordando la se-

gunda cuestión planteada por Usiskin y Wayment: ¿para qué valor de n puede un cuadrilátero ser partido en n cuadriláteros semejantes y (o no) semejantes al dado? Y más general, ¿para qué valores de n puede un k-gono ser partido en n k-gonos semejantes?

<u>REFERENCIAS</u>

R.W. Freese, Ann K. Miller, and Zalman Usiskin.- "Can Every Triangle Be Divided into n Triangles Similar to it?", Amer. Math. Monthly, 77 (1970).

Zalman Usiskin, Stanley G. Wayment.- "Partitioning Triangle into 5 Triangles Similar to it", Mathematics Magazine (Jan-Feb, 1972).

GENERALIZACION DE UN PROBLEMA DE APOLONIO

Por Vicente Fraile Ovejero

1.- La geometría que construyeron los griegos clásicos, la que sistematizó Euclides y enriquecieron Arquímedes y Apolonio, es una obra que deja maravillados a quienes la contemplan sin resabios pedantes. Esta geometría está hoy en los museos. Y son pocos los visitantes. Es una lástima porque, a pesar de su techo en la evolución de la matemática, contiene todas las vitaminas necesarias para que las mentes jóvenes asimilen la lógica y la ejerciten en problemas elegantes y en modo alguno pueriles. Por el contrario, los primeros pasos -y aún los segundos- del álgebra de conjuntos que hoy inundan aulas y libros de EGB y bachillerato son desnudas trivialidades sin paliativos a las que se dedica machaconamente demasiado tiempo y demasiados cursos.

Bien sabemos que las nociones de conjunto, aplicación, ley de composición, etc., son el acceso al rigor estructural de toda la matemática; pero en las enseñanzas elementales está siendo nefasta la obsesión por recrearse año tras año en pintar flechas de correspondencia sobre los profundísimos diagramas de Venn. A mi juicio -y al de muchísimos más- sería más formativo disminuir la dosis de los conjuntos y enseñar, a cambio, geometría clásica y algo de la vieja y sustanciosa teoría de números, que fueron -entre otros- los alimentos de los que más tarde escribirían los libros de Bourbaki.

En la enseñanza, como en todo, es saludable tener en cuenta la evolución de las ideas, incluso para incubar revoluciones , pero sobre la base de una crítica profunda de la física de Newton que, naturalmente, conocía al dedillo. No se trata de que haya que incorporar a la enseñanza todos los frutos del desarrollo de la matemática, la física o la biología a lo largo de los siglos; pero tampoco es acertado arrinconar definitivamente algunos frutos tan jugosos como la geometría clásica, que introduce el gusto por la lógica a través de problemas cercanos a la naturaleza.

Varios matemáticos actuales, españoles y extranjeros, han manifestado en alguna ocasión que debe rescatarse la geometría olvidada en los programas escolares. Recuerdo, por ejemplo, sendos artículos de los profesores Dou y Guzmán. Y en el número 2 de este mismo Boletín, el profesor Etayo, en un artículo sobre la geometría del compás, se lamenta de que se la haya abandonado en los estudios, puesto que educaba la imaginación. Así, pues, un sugerente ejercicio de la lógica y un buen medio de educar la imaginación han sido suprimidos en los centros docentes. Por otra parte, Etayo, buen conocedor del helenismo y de los grandes movimientos culturales históricos, hace a veces sabrosos comentarios sobre la estática solemne en las creaciones del pensamiento griego y la dinámica en la obra renacentista.

La geometría gráfica es geometría física, como dice el profesor García Aráez. Está en el suelo y en las construcciones monumentales y urbanas. Por eso mismo es profundamente educativa. Los estudiantes de EGB y bachillerato adquirirían el gusto por la lógica sobre figuras que les son familiares, en las cuales pueden intuir y someter después a la crítica esa intuición. Porque la intuición es necesaria en la formación de un futuro científico; es el ejercicio de la imaginación.

¿Pero es fácil que estos chicos intuyan en una matemática escrupulosamente rigorista como la de hoy? Una vez pasada la ancha zona de las trivialidades, es una matemática minuciosamente codificada, que podría publicarse en el Boletín Oficial del Estado de cualquier país maduro. Un texto legal con una axiomática profusa, con lemas, teoremas y estructuras en una relación interminable y aburrida, con conceptos cuyo alto grado de abstracción les impide adivinar de qué cosa se trate. Para ellos es un mundo extraño, frio y farragoso, donde la imaginación espera agazapada una corriente inteligible en la que poder volar. Para ellos es una matemática estéril.

2.- Entre los numerosos problemas que se propuso y resolvió Apolonio de Pérgamo (siglos II-III a.C) hay uno que es, por antonomasia, "el problema de Apolonio": *Dibujar las circunferencias que son tangentes a tres dadas en un plano.* El número de soluciones depende de cómo estén dispuestas las tres circunferencias. Puede haber infinitas o no haber ninguna. Si cada circunferencia dada es exterior a los círculos de las otras dos, y además sus centros no están alineados, hay ocho soluciones, que son: la circunferencia tangente que deja fuera de su círculo a las tres dadas (excepto, claro es, los puntos de tangencia); la que deja a las tres dentro; las que dejan fuera a una y dentro a dos (tres soluciones), y las que dejan a dos fuera y a una dentro (otras tres soluciones). Apolonio obtuvo los centros de estas ocho circunferencias con la regla y el compás; o, como se diría después de Descartes, por medio de radicales cuadráticos. Consideró también los casos en que una o dos de las circunferencias dadas degeneran en rectas o puntos.

* * *

Un problema más general que el de Apolonio, y que se puede resolver con los recursos de la geometría elemental, es el siguiente:

"*Dadas tres circunferencias coplanarias, tomamos arbitrariamente un punto en cada una de ellas. Cada terna de puntos* *elegidos determina otra circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias determinadas por todas las ternas posibles de puntos así elegidos".*

Es evidente que entre los puntos de este lugar han de figurar los ocho de Apolonio (caso de haber en él ocho soluciones), y que tienen, como veremos, una singularidad en la figura resultante.

Este problema puede ser enunciado también así: *"Hallar el l.g. de los centros de las circunferencias que tienen puntos comunes simultáneamente con tres dadas".*

El lugar geométrico resulta ser un recinto plano ; es uno de los llamados lugares de puntos áreas en el plano no definidos por desigualdades. El estudio de estos lugares fue iniciado y desarrollado por el entonces joven matemático bilbaino Carmelo Crespo Landaluce, allá por los años treinta, y sus trabajos fueron publicados en varias revistas de Madrid y Buenos Aires. Este que nos ocupa constituyó una modesta contribución mía a aquellos ejemplos de lugares áreas.

3.- Empecemos por resolver el siguiente problema: "Hallar el l.g. de los centros de todas las circunferencias que tienen puntos comunes simultáneamente con dos dadas en un plano".

Sean γ_1 y γ_2 las dos circunferencias dadas (figura 1), de radios r_1 y r_2 respectivamente, y centros O_1 y O_2. Tracemos el eje radical ρ de ambas

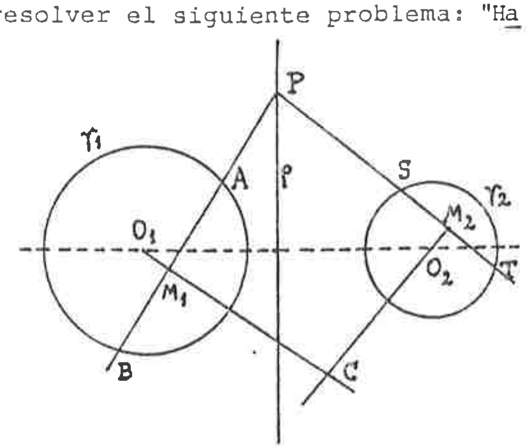


Figura 1

circunferencias y tomemos un punto cualquiera P de ρ. Desde P tracemos dos rectas secantes cualesquiera, una a cada circunferencia, que cortarán a las mismas en los puntos A, B de γ_1 y S, T, de γ_2. Por tener P igual potencia respecto de ambas circunferencias (pues $P \in \rho$) será $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PS} \cdot \overline{PT}$. Por lo tanto, los cuatro puntos A, B, S, T están en una misma circunferencia γ_3, no dibujada; y el centro C de ella pertenece al l.g. que nos piden. Este centro C se obtiene trazando por los puntos medios M_1 y M_2 de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{ST}$ las perpendiculares a dichas cuerdas respectivas, que también serán cuerdas de la circunferencia γ_3. La intersección de estas dos perpendiculares (que han de pasar respectivamente por O_1 y O_2) es el centro C de γ_3. El punto P elegido en ρ es el centro radical de γ_1, γ_2 y γ_3.

Si desde el mismo punto P anterior trazamos otras dos rectas secantes (una, al menos, distinta a las anteriores) a γ_1 y γ_2 respectivamente, tendremos dos nuevas cuerdas (una, al menos, nueva) de otra circunferencia γ_4, cuyo centro se obtendrá por la intersección de las rectas que unen O_1 y O_2 con los respectivos puntos medios de las nuevas cuerdas. El Centro radical de γ_1, γ_2 y γ_4 sigue siendo P.

Pues bien, vamos a "agotar" el punto $P \in \rho$ trazando todos los pares posibles de rectas secantes y tangentes a las circunferencias dadas desde P. Es decir, vamos a hallar el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias γ_3, γ_4,..., que son secantes o tangentes a γ_1 y γ_2, tales que cada una de ellas y las dos dadas tengan como centro radical el punto P elegido en ρ. Dicho lugar geométrico, que llamaremos λ_P, estará incluido en el que nos piden en el enunciado del problema. Una vez hallado este lugar parcial, bastará desplazar P a lo largo del eje radical ρ de γ_1 y γ_2, y determinar el recinto barrido por λ_P a medida que se deforma. Dicho recinto barrido será la solución del problema, pues toda circunferencia secante o tangente a las dadas tiene con ellas su centro radical situado en ρ.

Para hallar el l.g. parcial λ_p, recordemos que si desde un punto P (figura 2) trazamos rectas secantes a una circunferencia γ de centro O, el l.g. de los puntos medios de las cuerdas producidas por todas las secantes trazadas desde P es el arco de la circunferencia de diámetro $\overline{OP}$ ubicado en el círculo de γ, y este arco tiene como extremos los puntos de contacto H_1 y H_2 de las dos tangentes a γ desde P. (Si P fuera interior al círculo de γ, la circunferencia de diámetro $\overline{OP}$ sería, ella entera, el lugar de los puntos medios de todas las cuerdas que pasan por P).

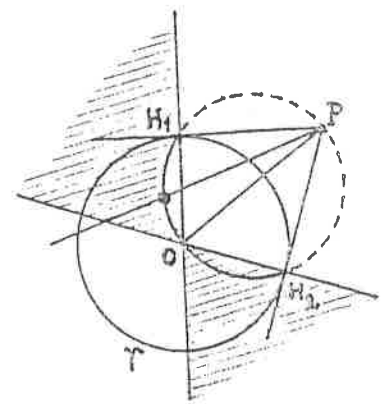


Figura 2

Así, pues, todas las rectas que unen el centro O de la circunferencia con los puntos medios de las cuerdas producidas en ella por las secantes desde P constituyen un haz limitado por las rectas $\overline{OH_1}$ y $\overline{OH_2}$ (ángulo rayado en la figura).

Pasemos de nuevo a las dos circunferencias γ_1 y γ_2, con su eje radical ρ y un punto $P \in \rho$ (figura 3). Tracemos el arco $\overset{\frown}{H_1O_1K_1}$ perteneciente a la circunferencia de diámetro $\overline{O_1P}$. Las rectas $\overline{O_1H_1}$ y $\overline{O_1K_1}$ limitan el haz de rectas que unen O_1 con los puntos medios de todas las cuerdas producidas en γ_1 por las secantes a ella trazadas desde P. Por lo tanto, en dichas rectas, y también en las $\overline{O_1H_1}$ y $\overline{O_1K_1}$, tienen que estar los puntos del lugar parcial λ_p. De la misma manera, tracemos el arco $\overset{\frown}{H_2O_2K_2}$ de la circunferencia de diámetro $\overline{O_2P}$; entonces en las rectas del haz limitado por las $\overline{O_2H_2}$ y $\overline{O_2K_2}$ (incluídas éstas) estarán también los puntos de λ_p. La intersección de ambos haces es, pues, el lugar parcial λ_p. Es el cuadrilátero convexo de vértices V, W, V' y W', rayado en la figura.

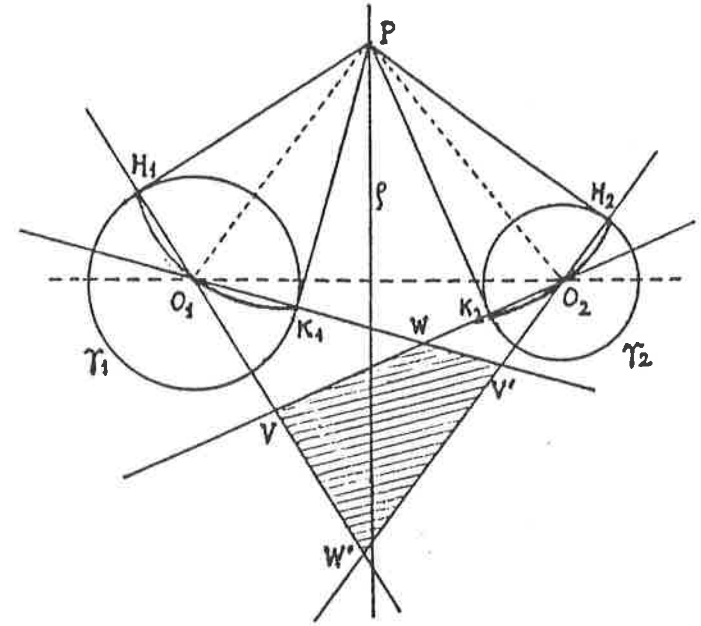


Figura 3

Ahora bien, el cuadrilátero de contorno $H_1PK_2VH_1$ tiene iguales los lados $\overline{PH_1}$ y $\overline{PK_2}$, por ser P un punto del eje radical de γ_1 y γ_2. Los ángulos en H_1 y K_2 son rectos, obviamente; luego $\overline{VH_1} = \overline{VK_2}$. De esto se desprende que V es el centro de una circunferencia tangente a γ_1 y γ_2, que deja dentro de su círculo a γ_1 y fuera a γ_2. Con el vértice opuesto V' ocurre lo mismo, pero queda fuera λ_1 y dentro γ_2. De manera análoga se comprueba que los vértices W, W' de λ_p son centros de sendas circunferencias tangentes exterior e interior respectivamente a las dadas. Estas, las dadas, y cada una de las cuatro reseñadas tienen el mismo centro radical P elegido en ρ.

Ahora vamos a desplazar P a lo largo del eje radical ρ, y veamos cuáles son las trayectorias de los vértices del lugar parcial λ_p. Si r_1 y r_2 son los radios de γ_1 y γ_2, y puesto que, como acabamos de ver, es $\overline{VH_1} = \overline{VK_2}$, tendremos: $\overline{VO_1} + r_1 =$

$= \overline{VO}_2 - r_2$; o sea, $\overline{VO}_2 - \overline{VO}_1 = r_1 + r_2$. Esto nos dice que el vértice V describe una hipérbola de focos O_1 y O_2 y constante $r_1 + r_2$. Análogamente se ve que es $\overline{V'K}_1 = \overline{V'H}_2$, o sea, $\overline{V'O}_1 - r_1 = \overline{V'O}_2 + r_2 \Longleftrightarrow \overline{V'O}_1 - \overline{V'O}_2 = r_1 + r_2$. Por lo tanto, V' describe la misma hipérbola que V, aunque una rama distinta. Finalmente, las igualdades $\overline{WK}_1 = \overline{WK}_2$, $\overline{W'H}_1 = \overline{W'H}_2$ equivalen respectivamente a $\overline{WO}_1 - \overline{WO}_2 = r_1 - r_2$, $\overline{W'O}_2 - \overline{W'O}_1 = r_1 - r_2$, con lo cual W y W' tienen como trayectorias sendas ramas de una misma hipérbola, homofocal a la anterior, y como la constante de esta hipérbola descrita por W y W' es $r_1 - r_2 < r_1 + r_2$, dicha cónica tiene sus ramas situadas entre las de la primera hipérbola, y en su parte exterior. Quiere esto decir que el recinto barrido por el lugar parcial λ_p (que va deformándose en su recorrido) es la zona no interior a la hipérbola descrita por los vértices V y V'. La figura 4 da una idea de la situación de ambas curvas. Así, pues, el l.g. de los centros de todas las circunferencias que tienen puntos comunes simultáneamente con las dos dadas es el recinto rayado. Y la hipérbola de constante $r_1 + r_2$ será, a su vez, el l.g. de los centros de las circunferencias tangentes a γ_1 y γ_2 que dejan fuera a

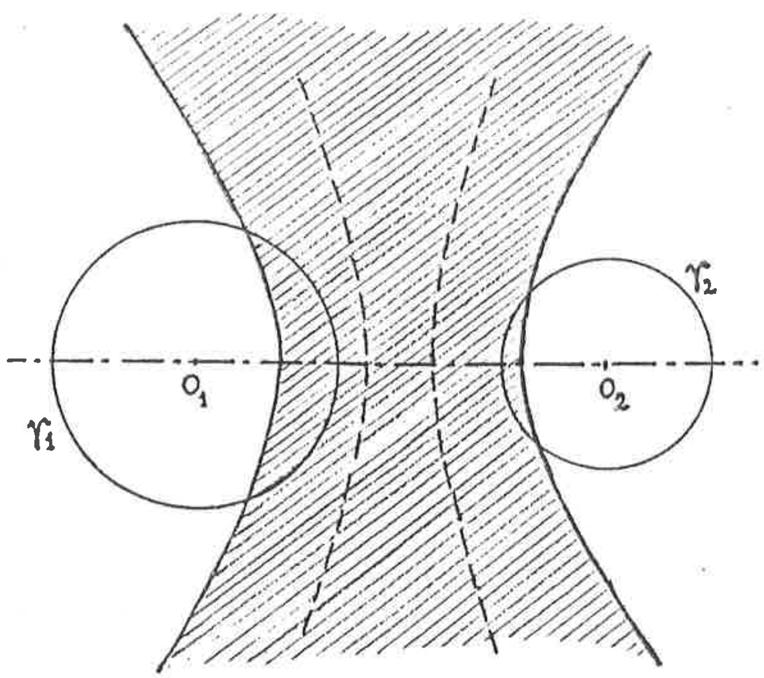


Figura 4

una de las dos y dentro a la otra. La hipérbola de constante $r_1 - r_2$ homofocal a la anterior es el l.g. de los centros de las circunferencias tangentes a las dos dadas que dejan a ambas o bien fuera o bien dentro.

4.- Sean ahora γ_1, γ_2, γ_3 tres circunferencias cuyos círculos no tienen puntos comunes y cuyos centros O_1, O_2, O_3 no están alineados (figura 5). Los radios respectivos son r_1, r_2, r_3. Elijamos dos de estas tres circunferencias, por ejemplo γ_1 y γ_2, y hallemos el l.g. de los centros de las que cortan o son tangentes a γ_1 y γ_2. Como acabamos de ver en el párrafo anterior, este lugar es el recinto no interior a la hipérbola de focos O_1 y O_2 y constante $r_1 + r_2$. Hagamos lo mismo con los dos pa

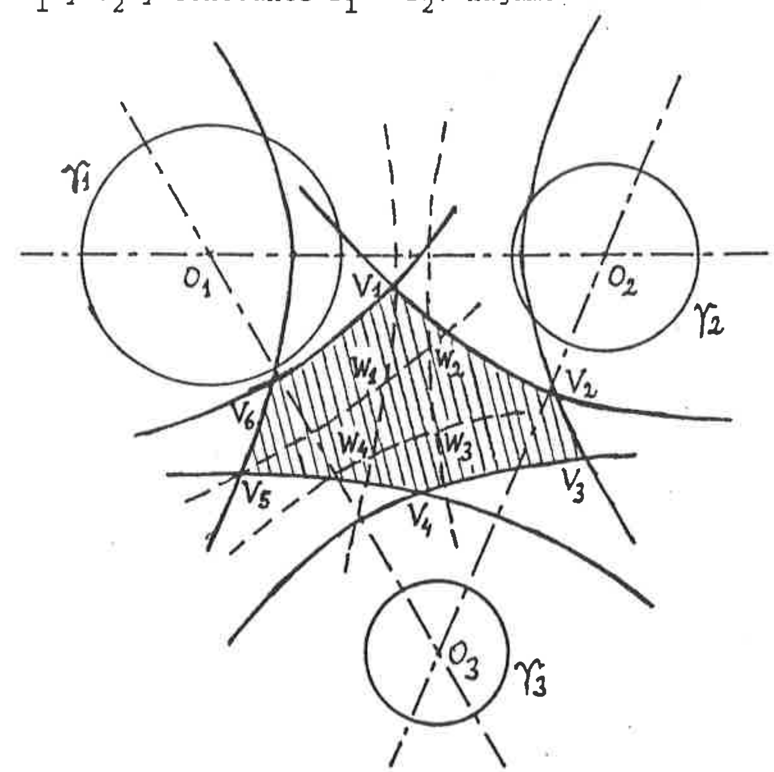


Figura 5

res restantes γ_1, γ_3 y γ_2, γ_3. Tendremos entonces tres recintos, y la intersección R de los mismos será el l.g. de los centros de las circunferencias que cortan o son tangentes a las tres dadas. El lugar R es un exágono cuyos lados son arcos de hipérbola (rayado en la figura) Los vértices son seis de las ocho soluciones del problema de Apolonio: cada uno de ellos es centro de una circunferencia tangente a las tres dadas, pero que deja fuera a una de ellas y dentro a las otras dos, o bien deja fuera a dos y dentro a la otra, cosa que se deduce inmediatamente de lo dicho al final del párrafo 3. Y precisamente por quedar dos de las circunferencias dadas a un mismo lado de la que es tangente a las tres, con centro en cada vértice del éxagono, dichos vértices pertenecerán también, respectivamente, a las hipérbolas homofocales a las anteriores y cuyas constantes son las diferencias de los pares de radios de las tres circunferencias dadas.

Llamemos $h_{1,2}$, $h_{1,3}$, $h_{2,3}$ a estas tres hipérbolas de focos O_1 y O_2, O_1 y O_3, O_2 y O_3 y constantes $r_1 - r_2$, $r_1 - r_3$, $r_2 - r_3$, respectivamente. Dos de ellas, por ejemplo, $h_{1,2}$ y $h_{1,3}$ se cortan en cuatro puntos W_1, W_2, W_3, W_4 pertenecientes al exágono R y señalados en la figura 5. Pues bien, por dos de estos cuatro puntos pasa la otra hipérbola $h_{2,3}$ (no dibujada). Es decir, hay <u>dos</u> puntos interiores a R por los cuales pasan las tres hipérbolas $h_{i,j}$. Veámoslo. El punto W_1 pertenece a $h_{1,3}$ y a $h_{1,2}$; por lo tanto, $\overline{W_1O_3} - \overline{W_1O_1} = r_1 - r_3$; $\overline{W_1O_2} - \overline{W_1O_1} = r_1 - r_2$; restemos ambas igualdades y tendremos: $\overline{W_1O_3} - \overline{W_1O_2} = r_2 - r_3$, que nos dice que $W_1 \in h_{2,3}$. También $W_3 \in h_{2,3}$, aunque a la otra rama. Si ensayáramos el punto W_2, para el cual es $\begin{cases} \overline{W_2O_3} - \overline{W_2O_1} = r_1 - r_3, \\ \overline{W_2O_1} - \overline{W_2O_2} = r_1 - r_2 \end{cases}$ sumando tendríamos:

$$\overline{W_2O_3} - \overline{W_2O_2} = 2r_1 - r_3 - r_2 \Longrightarrow W_2 \notin h_{2,3}$$

En resumen, el l.g. de los centros de todas las circunferencias secantes y tangentes a tres dadas (con centros no alineados y círculos sin puntos comunes) es la superficie de un exágono cuyos lados son arcos de hipérbola. Los vértices son seis de las ocho soluciones del problema de Apolonio. Las otras

dos son dos puntos interiores al exágono por los cuales pasan las tres hipérbolas $h_{1,2}$, $h_{1,3}$, $h_{2,3}$, homofocales respectivamente a las tres que forman los lados del exágono; las constantes de estas $h_{i,j}$ son las diferencias de los tres pares de radios de las circunferencias dadas. Estos dos puntos interiores son los centros de las dos circunferencias tangentes interior y exterior a las tres que nos dan.

* * *

Es interesante la solución de este problema cuando las tres circunferencias están dispuestas de otra manera a como las hemos dibujado aquí. Pero es aún más interesante la solución cuando una o dos de las circunferencias dadas degeneran en rectas o puntos. Si es sólo una la que degenera en recta, el recinto lugar está limitado por arcos de dos parábolas y una hipérbola. Si son dos las que degeneran en rectas, el recinto lugar está limitado solamente por arcos de parábola.

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

RESEÑA DE LIBROS

"DIALOGOS DE ARITMETICA PRACTICA Y ESPECULATIVA (1562)" por el Bachiller Juan Pérez de Moya. Prólogo y notas de R. Rodriguez Vidal. Prensas Universidad de Zaragoza, 1987. 106 páginas.

De tarde en tarde cae en nuestras manos una de estas pequeñas joyas que beneméritos compañeros buscan rescatar del olvido y aun de la ignorancia. Muchas veces hemos oido hablar del Licenciado Pérez de Moya pero qué pocas veces - y, mejor, ninguna - hemos podido leerle o sentido, quizás, la curiosidad de hacerlo. La Universidad de Zaragoza ha tenido el acierto de editar el noveno y último libro de su "Aritmética práctica y especulativa", al cuidado del Prof. Rodriguez Vidal que lo prologa y acompaña con unas esclarecedoras notas que resultan valiosísimas, no sólo para el entendimiento del texto sino también para situarlo en su momento histórico.

Pérez de Moya es uno de los matemáticos españoles del siglo XVI, seguramente el más preclaro. Cierto que nuestra ciencia no conocía entonces un buen momento, y cuando Europa bullía en el fragor del álgebra andábamos nosotros todavía anclados en una aritmética superada. He aquí, sin embargo, que Moya empieza ya a traernos los problemas de la "regla de la cosa" y que lo hace y transmite sus conocimientos con un entusiasmo que quiere ser contagioso, aunque quizá no lo logre, y con una claridad y corrección de estilo no frecuente en un tiempo en que abundaban - y en todo el mundo - los malos expositores.

Los "Diálogos" vienen a ser la vulgarización de lo que en los capítulos anteriores ha expuesto científicamente y resultan, así, asequibles al que no pretendía especializarse en Matemáticas. Constan de dos partes: La primera es un debate entre dos estudiantes, partidario uno de la aritmética y contrario el otro; no hace falta decir quién convence a quién. En la segunda, se incorporan otros dos compañeros y se proponen entre sí y resueven distintos ejercicios y problemas. Es éste un compendio enormemente ilustrativo de la época. Se utilizan razonamientos puramente aritméticos, se da en ocasiones la solución sin otra justificación que la comprobación, sin establecer una teoría, ni más ni menos como nuestros mayores hacían en aquellas conversaciones de café cuya semblanza debería hacerse algún día; cuando la regla es general, se aplica enseguida a uno o más ejemplos, de modo análogo a como solemos hacer en clase. Hay ahí un jugoso venero de cuestiones, sorprendentes algunas, que el maestro puede aprovechar para amenizar sus lecciones. Por su parte, Rodriguez Vidal hace una auténtica labor de orfebrería, aclarando todas las cosas y traduciéndolas, cuando el caso lo requiere, a nuestra actual formulación, demostrando así como la notación y el razonamiento algebraico, que en aquel momento estaba fraguándose, provee de una facilidad y de una esbeltez inaccesibles a las normas aritméticas.

Pero qué placentero resulta sumergirse en aquellas conversaciones, en las que casi siente uno escuchar una comedia de Lope; un Lope que nació precisamente en aquel 1562 de la edición del libro. Acompañan además al texto dos informes sobre el mismo, uno de ellos de El Brocense, que era, como todos sabemos, retórico y no matemático. Rodriguez Vidal resalta la diferencia entre el ampuloso tratamiento por él de una cuestión y la sencillez y elegancia con que Moya la toca. No obstante, hasta en ese pequeño informe, sin valor matemático, encuentra uno perlas en que deleitarse. Véase, si no, con qué perspicacia describe, probablemente sin saberlo, lo que hoy entenderíamos por equivalencia, clasificación, conjunto cociente, ente abstracto : "Al entendimiento por ser divino llaman unidad, que no es divisible: pues por él entendemos todos los hombres (aunque infinitos sean) no ser más que uno, cuyo semejante no hay otro: y así de los caballos y otras cosas, aunque en el sentido juzguemos ser muchos, con el entendimiento sólo uno entendemos."

Una felicitación muy cordial, en fin, al querido compañero Rodriguez Vidal y a la Universidad de Zaragoza.

Estrambote. Uno de los problemas que plantea el texto es el de colocar treinta caballos en círculo y eliminar la mitad contándolos de nueve en nueve, como en el "pito, pito, gorgorito". Se pregunta en qué lugar colocar nuestros quince caballos para que los eliminados sean precisamente los quince de nuestro adversario. Se da la solución: poner cuatro nuestros los primeros, a continuación cinco del otro, dos nuestros, etc.; y también la regla mnemotécnica de asignar a cada vocal el número del lugar que ocupa, y se tendría la sucesión de vocales O,U,E,A,I,A,A,E,E,I,A,E,E,A , la cual puede recordarse por una frase que las contenga en ese orden. Hay en el libro unas frases latinas y otra francesa que lo resuelven, pero el prologuista y anotador invita "a quien tenga ingenio y paciencia" a encontrar una frase en español que contenga la clave. Uno no tiene ni una cosa ni otra pero así, a botepronto, ha compuesto algunas que brinda más que todo para que otros se animen a encontrar la frase verdaderamente lapidaria que pueda quedar en adelante. Y, entre ellos, al mismo R. Vidal a quien sobra para ello erudición e ingenio. A él me permito dedicarle la primera, solicitando su perdón, porque es malísima:

"Lo cuenta R. Vidal al reeditar el tema".

Veamos otras, parodiando a Cyrano:

-madrigalesco: "¡Oh, dulce, ansiada, celestial belleza!"

-triste: "Comprueba mi ancha frente sin cabellera"

-refranero: "Contuleras, ni las alejes ni las retengas"

-alejandrino: "Procure la mi dama remediar este mal"

-periodístico: "Ormuz desgraciadamente incandescerá" (¡hala!)

-antifolklórico: "Orquestas sin cascabeles ni panderetas"

-neroniano: "¡Oh, qué artista barre de sí la escena!"

-tanguista: "Coqueta, piba alegre, china perversa!"

-taurino: "Cornúpetas sin casta embestían de cerca"

-cuartelero: "¡So puñetas!: ¡vista al frente!, ¡fila derecha!"

.....

Y así.

J.J.E.

"CURSO DE LOGO", por Carlos San José, Javier Zabala y Ricardo Zamarreño. Editorial El Ordenador Amigo. Madrid, 1987. 288 páginas.

Un libro escrito por tres profesores de Matemáticas, con amplia experiencia en la enseñanza de la Informática, tanto a alumnos como a profesores de Bachillerato y E.G.B.

Pensado para ser utilizado en el aula de Informática, tiene la clásica estructura del manual escolar: capítulos con apartados, y dentro de éstos, una explicación clara, basada en ejemplos. Cada capítulo se complementa con numerosos ejercicios propuestos, con indicación de los que van resueltos en los apéndices finales.

Además de la geometría plana de la tortuga, en este libro hay que destacar los capítulos dedicados al manejo de listas, a los gráficos en color y en tres dimensiones, y un interesante capítulo sobre música con LOGO.

Un extracto del índice es el siguiente:

1. Dibujos en modo inmediato.
2. Procedimientos.
3. Recursividad.
4. Programación modular.
5. LOGO y las Matemáticas.
6. Objetos LOGO. Manejo de listas.
7. Programación funcional. La primitiva DEVUELVE.

8. Uso avanzado de listas.
9. Gráficos avanzados.
10. Música con LOGO.

APÉNDICES: Ejercicios resueltos, primitivas español-inglés y primitivas por grupos.

R. A.

- x - x - x -

PROBLEMA 4°:

Pruebe que no existe una función (aplicación) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(f(n)) = n + 1987$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathbb{N} = \{ 0 , 1 , 2 , \dots , n , \dots \}$.

PROBLEMA 5°:

Sea n un número natural ($n \geq 3$) . Demuestre que existen n puntos en el plano tales que la distancia entre dos cualesquiera de ellos es irracional, mientras que el área determinada por cualesquiera tres de ellos es racional y no nula.

PROBLEMA 6°:

Sea n un número natural mayor o igual que 2. Demuestre que si $k^2 + k + n$ es primo para todo entero k , con $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$, entonces $k^2 + k + n$ es primo para todo entero k , con $0 \leq k \leq n - 2$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA 28 OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA CELEBRADA EN CUBA EN JULIO DE 1987 :

PROBLEMA 1°:

Sea S un conjunto de n elementos y sea $p_n(k)$ el número de las permutaciones de S que tienen k puntos fijos. Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n\,!$$

- - -

PROBLEMA 2°:

La prolongación de la bisectriz AL del triángulo acutángulo ABC interseca en el punto N a la circunferencia circunscrita al triángulo. Desde el punto L se trazan las perpendiculares LK y LM a los lados AB y AC respectivamente. Probar que el área del triángulo ABC es igual al área del cuadrilátero $AKNM$.

- - -

PROBLEMA 3°:

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números reales tales que $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Demuestre que para cualquier valor entero $k > 1$, existen enteros e_i , no todos nulos, con la propiedad de que $|e_i| < k$ y tales que

$$\left| e_1 x_1 + \ldots + e_n x_n \right| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

- - -

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 2° del Boletín n° 10 :

Encontrar 10 números naturales consecutivos compuestos.

Solución:

Considero el menor número primo mayor que 10, es decir, $p = 11$. El número obtenido como producto de los primos menores o iguales a p es obviamente compuesto, e igualmente lo serán los números obtenidos sumándole los sucesivos enteros del 2 al 11. Como estos son 10 y ciertamente consecutivos, el problema está resuelto.

En concreto, sea $p' = 2.3.5.7.11 = 2310$ y pongamos $a_1 = 2 + p'$, $a_2 = 3 + p'$, ... , $a_{10} = p + p'$; los a_i son consecutivos y compuestos, pues si $i+1$ es primo, aparece como factor en p' y por tanto en $a_i = i+1+p'$, y si no es primo, tiene un factor primo t que es uno de los primos anteriores a 11, con lo que a_i es divisible por t . Son, por tanto, números consecutivos compuestos, los 2312 al 2321 . Nótese que este método permite construir tantos números compuestos consecutivos queramos.

Joaquín Hernández Gómez
(Madrid)

- x - x - x -

PROBLEMA 5° del Boletín n° 10 :

Si $x + y + z = 0$, probar que

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{x^5+y^5+z^5}{5}\right) = \frac{x^7+y^7+z^7}{7} .$$

Solución :

Como $x + y = -z$, será $(x+y)^2 = z^2$, $(x+y)^5 = -z^5$, $(x+y)^7 = -z^7$; por otra parte, $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$, de donde:

$$x^5 + y^5 + z^5 = -z^5 - 5x^4y - 10x^3y^2 - 10x^2y^3 - 5xy^4 + z^5$$

con lo que $(x^5 + y^5 + z^5)/5 = -x^4y - 2x^3y^2 - 2x^2y^3 - xy^4$.
Haciendo lo mismo con $(x+y)^7$, llegamos a que:
$(x^7 + y^7 + z^7)/7 = -x^6y-3x^5y^2-5x^4y^3-5x^3y^4-3x^2y^5-xy^6$ y
finalmente $(x^2 + y^2 + z^2)/2 = (x^2 + y^2 + (x+y)^2)/2 = x^2 + xy + y^2$. Todo consiste en probar que
$(x^2+xy+y^2)\cdot[-(x^4y+2x^3y^2+2x^2y^3+xy^4)] = -(x^6y+3x^5y^2+5x^4y^3+5x^3y^4+3x^2y^5+xy^6)$, igualdad que es inmediata, sin más que efectuar el producto indicado de la izquierda.

Joaquín Hernández Gómez
(Madrid)

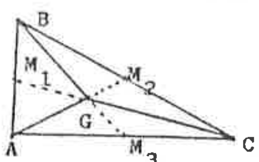
- x - x - x - x -

PROBLEMA 8º del Boletín nº 11 :

Se consideran los triángulos que resultan de unir el baricentro de un triángulo rectángulo con cada uno de los vértices. Demostrar que si los lados del triángulo rectángulo son números naturales, las áreas de los triángulos considerados son números pares.

Solución :

Para cualquier triángulo, no necesariamente rectángulo, los tres triángulos considerados tienen igual área pues los triángulos AGM_3 y CGM_3 tienen bases iguales



y la misma altura. Análogamente los BGM_2 y CGM_2 y los AGM_1 y BGM_1, Como también tienen la misma área los ABM_3 y BCM_3 e igual también los otros dos pares (con vértices y puntos medios) se deduce que los seis triángulos en que queda dividido ABC tienen igual área, y por tanto tienen igual área los triángulos obtenidos uniendo vértices con el baricentro.

Nuestro único problema es, por tanto, probar que si los lados de un triángulo rectángulo tienen dimensiones enteras, la tercera parte de su área, o sea $bc/6$ será par, o sea que $bc = \dot{12}$.

Al ser a , b , c números enteros, se puede utilizar la parametrización $b = u^2-v^2$, $a = u^2+v^2$, $c = 2uv$, de donde el problema se reduce a probar que bc , que es $2uv(u^2-v^2)$, es múltiplo de 12 , o sea a probar que $uv(u-v)(u+v)$ es múltiplo de 6 ; si u ó v es par, lo será ese producto y si los dos son impares, también, por ser par su suma; si u ó v es múltiplo de tres, lo será ese producto; si ambos dan de resto 1 (mod 3) también lo será, por serlo $u-v$; si uno da resto 1 y el otro resto 2 , también lo será dicho producto, por serlo $u+v$. Así, $bc/2$ es múltiplo de 6, como se deseaba probar.

Joaquín Hernández Gómez
(Madrid)

- x - x - x -

PROBLEMA 5º del Boletín nº 12 :

Si r, s, t son las raíces de la ecuación

$$x(x-2).(3x-7) = 2$$

a) Demuestre que r, s, t son positivas.
b) Calcule arctg r + arctg s + arctg t.

(Nota: Se denota con arctg x, el arco comprendido entre 0 y π cuya tangente es x).

Solución

a) Que r, s, t son positivas es evidente, puesto que si es $x < 0$, el producto $x(x-2).(3x-7)$ es negativo y no puede ser igual a 2.

b) La ecuación dada se puede escribir en la forma $3x^3 - 13x^2 + 14x - 2 = 0$, por lo que se tienen las relaciones:

$$r+s+t = \frac{13}{3}, \quad rs+st+tr = \frac{14}{3}, \quad rst = \frac{2}{3}$$

Sea,

$$a = \text{arctg } r \ , \quad b = \text{arctg } s \quad , \quad c = \text{artg } t$$

y, por tanto,

$$r = \text{tg } a \quad , \quad s = \text{tg } b \quad , \quad t = \text{tg } c$$

Se tiene:

$$\text{tg}(a+b+c) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b + \text{tg } c - \text{tg } a \cdot \text{tg } b \cdot \text{tg } c}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b - \text{tg } b \cdot \text{tg } c - \text{tg } a \cdot \text{tg } c} = \frac{\frac{13}{3} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{14}{3}} = -1$$

De donde,

$$a + b + c = \frac{3\pi}{4} \ .$$

Francisco Lorenzo Miranda

- x - x - x -

PROBLEMA 7º del Boletín nº 12 :

Sean a , b , c números tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Demostrar que $-\frac{1}{2} \leqslant ab + bc + ca \leqslant 1$.

Solución:

Para demostrar que $-\frac{1}{2} \leqslant ab + bc + ca$, partiremos de que $\forall\ a , b , c \in \mathbb{R}$ es $(a+b+c)^2 \geqslant 0$, o sea $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \geqslant 0$, es decir $1+2ab+2bc+2ac \geqslant 0$ que da $ab+bc+ca \geqslant -\frac{1}{2}$, c. q. d.

Para demostrar que $ab + bc + ca \leqslant 1$, partiremos de que $\forall\ a , b , c \in \mathbb{R}$ es $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$ con lo que $a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+c^2+a^2-2ac \geqslant 0$ ó sea $2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ac) \geqslant 0$ de donde resulta $1 \geqslant ab + bc + ac$, c. q. d.

Carmen Castro Merino y Marcial Espinosa del Val
(otra solución de Juan José Bermejo Crespo)

- x - x - x -

PROBLEMA 8º del Boletín nº 12 :

Determinar los números a , b , c para que la ecuación

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

tenga como soluciones a dichos tres números.

Solución :

Si a , b , c son soluciones de la ecuación citada, teniendo en cuenta que el coeficiente de x^3 es 1 , obtenemos que

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - ax^2 + bx - c$, o sea

$x^3+(-a-b-c)x^2+(bc+ab+ac)x-abc = x^3-ax^2+bx-c$; de esa identidad obtenemos las igualdades de coeficientes

(1) $-a-b-c = -a$

(2) $bc+ab+ac = b$

(3) $-abc = -c$

Si $c \neq 0$, de $abc = c$ se deduce $ab = 1$, de donde $a = \frac{1}{b}$; de (1) resulta $b = -c$; sustituyendo en (2) : $-b^2+1-1 = b$, o sea $b^2+b = 0$. Si fuese $b = 0$, resultaría $c = 0$, en contra de la hipótesis, por lo que habrá de ser $b = -1$ y en consecuencia, $c = 1$ y $a = -1$.

Si $c = 0$, de (1) se deduce $b = 0$ y (2) se cumple para todo $a \in \mathbb{R}$. En consecuencia, las solucione son $(-1 , -1 , 1)$ y $(a , 0 , 0)\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Carmen Castro Merino y Marcial Espinosa del Val
(Profesores Agregados de Bachillerato)

- x - x - x - x -

PROBLEMA 9º del Boletín nº 12 :

Descomponer el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en infinitos subconjuntos disjuntos dos a dos, tales que cada uno de esos subconjuntos tenga, a su vez, infinitos elementos.

El conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales se puede escribir:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Las diagonales constituyen subconjuntos disjuntos dos a dos tales que cada uno tiene, a su vez, infinitos elementos.

Otra solución consiste en escribir los elementos de $\mathbb{N}$ en un arreglo infinito siguiendo las diagonales:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots \\ 2 & 4 & 7 & 11 & \cdots \\ 5 & 8 & 12 & \cdots \\ 9 & 13 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

y considerar después los subconjuntos de elementos de las filas.

Juan José Bermejo Crespo
(Madrid)

- x - x - x - x -

PROBLEMA 1º del Boletín nº 14 :

Las constantes reales a , b , A , B son conocidas y

$f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\,\mathrm{sen}\,\theta - A\cos 2\theta - B\,\mathrm{sen}\,2\theta$;

probar que si $f(\theta) \geqslant 0$ para todo número real θ , es

$$a^2 + b^2 \leqslant 2 \qquad \text{y} \qquad A^2 + B^2 \leqslant 1 \ .$$

Solución :

Sumando las desigualdades:

$f(\theta + \pi) = 1 + a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta - A\cos 2\theta - B\,\mathrm{sen}\,2\theta \geqslant 0$

$f(\theta) \quad = 1 - a\cos\theta - b\,\mathrm{sen}\,\theta - A\cos 2\theta - B\cos 2\theta \geqslant 0$

se obtiene: $2 - 2A\cos 2\theta - 2B\,\mathrm{sen}\,2\theta \geqslant 0$, o sea

$$1 \geqslant A\cos 2\theta + B\,\mathrm{sen}\,2\theta \ .$$

Sea (ρ, α) la representación en polares de (A, B); entonces $\rho = \sqrt{A^2+B^2}$, $A = \rho\cos\alpha$, $B = \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

Luego $1 \geqslant \rho(\cos\alpha\cos 2\theta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,2\theta)$ o sea

$1 \geqslant \rho\cos(\alpha - 2\theta) \quad \forall\,\theta \in R$.

Si hacemos $2\theta = \alpha$, resulta $1 \geqslant \rho$ o sea $1 \geqslant \sqrt{A^2+B^2}$ y en consecuencia $1 \geqslant A^2+B^2$.

Por otra parte, sumando las desigualdades:

$f(\theta + \frac{\pi}{2}) = 1 + a\,\mathrm{sen}\,\theta - b\cos\theta + A\cos 2\theta + B\,\mathrm{sen}\,2\theta \geqslant 0$

$f(\theta) \quad = 1 - a\cos\theta - b\,\mathrm{sen}\,\theta - A\cos 2\theta - B\,\mathrm{sen}\,2\theta \geqslant 0$

resulta $2 - (b+a)\cos\theta - (b-a)\,\mathrm{sen}\,\theta \geqslant 0$, o sea $2 \geqslant (b+a)\cos\theta + (b-a)\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Si (ρ', α') es $(b+a\ ,\ b-a)$ en polares, de forma análoga al apartado anterior se tiene que $2 \geqslant \rho'$, o sea $2 \geqslant \sqrt{(b+a)^2 + (b-a)^2}$ y en definitiva $4 \geqslant b^2 + a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab$ o sea $4 \geqslant 2b^2+2a^2$ es decir, $2 \geqslant a^2 + b^2$ c.d.d.

Salvador Calvo-Fernández Pérez.

- x - x - x - x -

PROBLEMA Nº 2 del Boletín nº 14 :

Se supone que m y n son números naturales tales que m n 1 y que las tres últimas cifras de la representación decimal de 1978^m son las mismas que las de 1978^n . Encontrar los valores de m y n que hacen mínima la suma $m + n$.

Solución :

En primer lugar se advierte que $m - n$ es múltiplo de 4 , pues la última cifra de las sucesivas potencias de cualquier número que acabe en 8 sigue el ciclo 8, 4, 2, 6, 8, ...

En segundo lugar, desarrollando 1978^m como $(1000 + 978)^m$ por la fórmula del binomio de Newton observamos que las tres últimas cifras son las mismas que las de 978^m .

Podemos desarrollar ahora 978^m en la forma:

$$978^m = (900 + 78)^m = 900^m + \dots + \binom{m}{m-1} 900 \times 78^{m-1} + 78^m$$

y las tres últimas cifras dependen de los dos sumandos finales $\binom{m}{m-1} 900 \times 78^{m-1} + 78^m = 78^{m-1}(900m + 78)$.

Del mismo modo las tres últimas cifras de 1978^n son las mismas que las de $78^{n-1}(900n + 78)$. Por la hipótesis del problema, la difrencia

$$78^{m-1}(900m + 78) - 78^{n-1}(900n + 78)$$

debe ser múltiplo de 1000 ; pero esta diferencia se puede expresar así:

$$78^{n-1}\left[78^{m-n}(900m + 78) - 900n - 78\right] \qquad (*)$$

o lo que es lo mismo

$$78^{n-1}\left[(78^4)^k(900m + 78) - 900n - 78\right] \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Es evidente que el corchete ha de ser múltiplo de 125, y como $78^4 = 37015056$, será un múltiplo <u>par</u> de 125, por lo que sus tres últimas cifras serán 250 ó 500 ó 750 ó 000 .

Supongamos ahora que $\overline{a6}$ son las dos últimas cifras de $(78^4)^k$. Las del corchete citado serán las mismas que las de

$$(10a + 6).78 - 78 = 780a + 390 = 390(2a + 1) ,$$

y por lo deducido antes, esas cifras han de ser 00 ó 50. La cifra de las unidades es claramente cero. Si la de las decenas fuese cero, la última cifra de $9(2a + 1)$ sería cero, cosa notoriamente imposible. Si la cifra de las decenas fuese 5, la última cifra de $9(2a + 1)$ habría de ser 5 , cosa que se cumple para $a = 2$ y para $a = 7$. Pero las dos últimas cifras de las sucesivas potencias de 78^4 siguen el ciclo 56, 36, 16, 96, 76, 56, ... , por lo que necesariamente es $a = 7$ y el corchete acaba en 250 ó 750. Además $k = 5t$, $t \in \mathbb{N}$, por lo que $m - n = 20t$.

Sean ahora $\overline{a76}$ las tres últimas cifras de $(78^{20})^t$; las del corchete serán las mismas que las de

$$(100a + 76)(900m+78) - 900n - 78 =$$
$$= 90000am + 100(684m + 78a - 9n + 58) + 50 ,$$

que deben ser bien 250 , bien 750 . Es evidente que la cantidad arriba reseñada acaba en 50. Si la cifra de las centenas es 2 , también debe serlo la última cifra de

$$684m + 78a - 9n + 58 = 684(n + 20t) + 78a -9n + 58 =$$
$$= 13680t + 675n + 58 + 78a .$$

Si n es par, ello acurre para $a = 3$ y $a = 8$. Si n es impar, no sucede para ningún valor de a .

Si la cifra de las centenas es 7 y n es impar, a debe ser 3 u 8 . Si n es par, no hay soluciones para a .

Pero las tres últimas cifras de 78^{20} son 776 y las tres últimas cifras de las potencias sucesivas de $(78^{20})^k$ siguen el ciclo 776 , 176 , 576 , 376 , 776 , ... ; por tanto, para cualquier valor natural de n , las tres últimas cifras de $(78^{20})^t$ serán 376. Además, $t = 5s$ con $s \in \mathbb{N}$, por lo que $m - n = 100s$, $s \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, $78^{n-1} = 1$ y el corchete acaba en 750, luego (*) no es múltiplo de 1000. Para $n = 2$, $78^{n-1} = 78$ y el corchete acaba en 250, luego (*) tampoco es múltiplo de 1000. Para $n = 3$, $78^{n-1} = 39^2.2^2$ y el corchete acaba en 750, con lo que (*) ya es en este caso múltiplo de 1000. En conclusión, los valores que hacen mínimo $m + n$, cumpliendo las hipótesis del enunciado, son $n = 3$, $m = 103$.

Ramón Fraile Peláez

- x - x - x - x -

<u>Damos a continuación otra solución de este mismo problema:</u>

Que coincidan las tres últimas cifras en la representación decimal es equivalente a que
$1978^m \equiv 1978^n$ (mód 1000) ó sea $978^m \equiv 978^n$ (mód 1000)
es decir, $978^n(978^{m-n} - 1) \equiv 0$ (mód 1000) .

Como $978 = 2 \cdot 489$, poniendo $k = m - n$, queda
$2^n \cdot 489^n (978^k - 1) \equiv 0$ (mód 1000).

Teniendo en cuenta que m.c.d.(1000,489) = 1 , 489 es unidad (mód 1000) , con lo que lo anterior equivale a
$2^n(978^k - 1) \equiv 0$ (mód 1000) ó sea $2^n(978^k - 1) = 1000\, r$ con r entero; ya que $978^k - 1$ es impar y $1000 = 2^3 5^3$ se tiene que $n \geq 3$. Luego $2^n(978^k - 1) = 1000\, r$ con $n \geq 3$ implican $2^{n-3}(978^k - 1) = 125\, r$; como m.c.d.(2,125) = 1 , será $978^k - 1 = 125\, s$, con s entero , es decir $978^k - 1 \equiv 0$ (mód 125) y como $978 \equiv 103$ (mód 125) , eso equivale a $103^k \equiv 1$ (mód 125) .

Si k es el mínimo valor tal que $103^k \equiv 1$ (mód 125) se sabe que k será divisor de la indicatriz de Euler de 125 (número de enteros positivos menores que 125 y primos con él) que es $\varphi(125) = 100$. Esos divisores son 1 , 2, 4 , 5 , 20 , 25 , 50 y 100 , pero (mód 125) :
$103^1 = 103$, $103^2 \equiv 109$, $103^4 \equiv 6$, $103^5 \equiv 118$;
$103^{10} \equiv 49$, $103^{20} \equiv 26$, $103^{25} \equiv 68$, $103^{50} \equiv 124$,
$103^{100} \equiv 1$, luego k debe ser 100 , es decir, $m-n = 100$ y $n \geq 3$. Por tanto, el mínimo valor de $m + n$ puede conseguirse con $n = 3$, $m = 103$. Efectivamente, $1978^3 \equiv 1978^{103} \equiv 325$ (mód 1000).

Nota: Otra forma de probar que $k = 100$ es:
103 es una raiz primitiva (mód 5), ya que $103 \equiv 3$ (mód 5) y $3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 4$, $3^3 \equiv 2$, $3^4 \equiv 1$ (mód 5) . Pero 103^4 da resto 6 (mód 25) luego 103 es raiz primitiva (mód. 5^α) con α entero ≥ 1 ; ciertamente, 103 es raiz primitiva (mód 125) , luego el menor entero k tal que $103^k \equiv 1$ (mód 125) es $k = \varphi(125) = 100$.

Salvador Calvo-Fernández Pérez

- x - x - x - x - x -

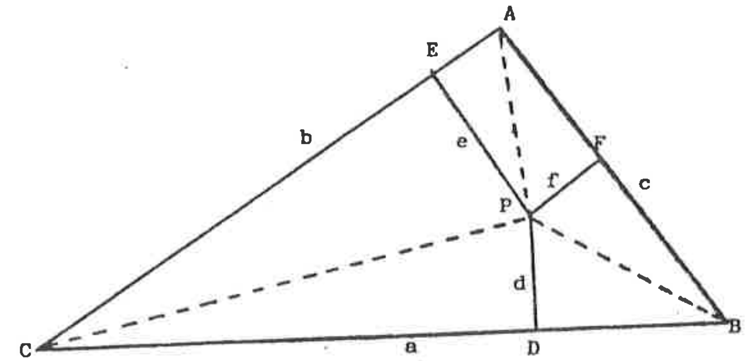
PROBLEMA nº 3 del Boletín nº 14 :

Sea P un punto interior a un triángulo ABC y sean D, E, F, los pies de las perpendiculares trazadas desde P a las rectas BC , CA , AB , respectivamente.

Encontrar todos los puntos P para los cuales $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ sea mínimo .

Solución :

Sea $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $d = PD$, $e = PE$, $f = PF$, con lo que $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} = \frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f}$.



Sea S = área(ABC) = área(PBC) + área(PCA) + área(PAB) = $= \frac{ad}{2} + \frac{be}{2} + \frac{cf}{2}$, lo que da:

$$1 = \frac{1}{2S}(ad + be + cf) \qquad (1)$$

Multipliquemos los dos miembros de (1) por $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{f}$ sucesivamente y obtenemos:

$$\frac{a}{d} = (a^2 + ab\frac{e}{d} + ac\frac{f}{d})/(2S) \qquad \frac{b}{e} = (ab\frac{d}{e} + b^2 + bc\frac{f}{e})/(2S)$$

$$\frac{c}{f} = (ac\frac{d}{f} + bc\frac{e}{f} + c^2)/(2S)$$

Luego:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} = \frac{1}{2S}(a^2+b^2+c^2+ab(\frac{e}{d}+\frac{d}{e})+ac(\frac{f}{d}+\frac{d}{f})+bc(\frac{f}{e}+\frac{e}{f})).$$

Ahora bien, $(\frac{e}{d}+\frac{d}{e})$, $(\frac{f}{d}+\frac{d}{f})$, $(\frac{f}{e}+\frac{e}{f})$ son sumas de un número positivo con su recíproco, y dicha suma es siempre igual o mayor que 2 , y sólo vale 2 si el número es 1.

Esto es, si $x \quad 0$, $(x-1)^2 \quad 0$ o sea $x^2 + 1 \quad 2x$ ó, en definitiva $x + \frac{1}{x} \quad 2$ y es claro que $x + \frac{1}{x} = 2 \Longleftrightarrow x = 1$.

Luego si $\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f}$ alcanza un valor mínimo, ha de ser $\frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \frac{f}{d} = 1$ lo que implica $d = e = f$, y en tal caso P es el incentro del triángulo, pues equidista de sus tres lados.

Salvador Calvo-Fernández Pérez

- x - x - x - x -

PROBLEMA 4º del Boletín nº 14 :

Sea a un entero no negativo y definamos la sucesión $\{a_n\}$ poniendo $a_o = 0$ y $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = (a_n + 1)\, a + (a+1)\, a_n + 2\sqrt{a(a+1)a_n(a_n+1)} \;;$$

demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n es entero no negativo.

Solución :

Ya que $a \geqslant 0$ y $a_o = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ será $a_n \geqslant 0$, como probaremos por inducción:

$a_o = 0 \geqslant 0$. Si $a_n \geqslant 0$, será $(a_n + 1) \geqslant 0$ y resulta que $a_{n+1} \geqslant 0$, por ser producto y suma de números no negativos.

Por otra parte es claro que $a_{n+1} = \left(\sqrt{a(a_n+1)} + \sqrt{a_n(a+1)}\right)^2$. Además

$a_{n+1} + 1 = \left(\sqrt{a\, a_n} + \sqrt{(a+1)(a_n+1)}\right)^2$ ya que

$$a_{n+1} + 1 = (1 + aa_n + a + a_n) + aa_n + 2\sqrt{aa_n(a+1)(a_n+1)}$$
$$= (a+1)(a_n+1) + aa_n + 2\sqrt{aa_n(a+1)(a_n+1)} =$$
$$= \left(\sqrt{aa_n} + \sqrt{(a+1)(a_n+1)}\right)^2 .$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a}\sqrt{a_n+1} + \sqrt{a+1}\sqrt{a_n} \qquad (1)$$
$$\sqrt{a_{n+1}+1} = \sqrt{a+1}\sqrt{a_n+1} + \sqrt{a}\sqrt{a_n} \qquad (2) .$$

Si multiplicamos (1) por $\sqrt{a+1}$ y (2) por $\sqrt{a}$ y restamos, resulta:

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n+1}(a+1)} - \sqrt{a(a_{n+1}+1)} \quad , \text{ luego}$$
$$a_n = \left(\sqrt{a_{n+1}(a+1)} - \sqrt{a(a_{n+1}+1)}\right)^2 , \text{ y como}$$
$$a_{n+2} = \left(\sqrt{a_{n+1}(a+1)} + \sqrt{a(a_{n+1}+1)}\right)^2 , \text{ desarro-}$$

llando los cuadrados y sumando a_n con a_{n+2} resulta

$$a_n + a_{n+2} = (4a + 2)a_{n+1} - a_n + 2a \quad , \text{ de donde}$$
$$a_{n+2} = (4a+2)a_{n+1} - a_n + 2a \;;$$

y por inducción, como a es entero, a_n será entero si lo son a_o y a_1 . Pero $a_o = 0$ y $a_1 = a$, ambos enteros. Por último, como $a_n \geqslant 0$, se tiene que a_n es entero no negativo, c. d. d.

Salvador Calvo-Fernández Pérez

- x - x - x - x -

En la redacción de esta Boletín, todavía no se han recibido soluciones a los siguientes problemas propuestos en números anteriores:

- Problema nº 3 del Boletín nº 6 (ver corrigenda en el nº 8).
- Problemas nº 3 y nº 4 del Boletín nº 7.
- Problema nº 3 del Boletín nº 8.
- Problemas nºs 1 al 8 y 10 del Boletín nº 9.
- Problemas nºs 1, 3, 4 y 6 al 9 del Boletín nº 10.
- Problemas nºs 6, 7, 9, 11, 12 y 14 del Boletín nº 11.
- Problemas nºs 1, 4, 6, y 10 del Boletín nº 12.
- Problemas nºs 1 al 6 del Boletín nº 13.

Esperamos que esta nota anime a nuestros compañeros a obtener esas soluciones y a enviárnoslas para su publicación en los próximos números.

Como socio de la Sociedad Castellana " Puig Adam " de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín: (señalar con unas aspas los que interesen)

4	5	6(*)	7	9	10	11	12	13	14
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Si solicitan más de un número, rogamos envien sellos para el franqueo (18 pts. por número para Madrid capital y 28 pts. por número para provincias).

(*) Del número 6 sólo quedan unos pocos ejemplares. Los números 1, 2, 3 y 8 están agotados.

Ponga su dirección en este recuadro, para el envío:

Recorte o copie este CUPON y envíelo al Apartado 9479 de MADRID - 28080 , si desea acogerse a este ofrecimiento.