SOCIEDAD DE PROFESORES "PUIG ADAM"

JUNIO
1987

14

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de profesores de Matemáticas

Junio de 1987 nº 14 (1986-87)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

Ronda de Atocha, 2 (INBAD)
MADRID

- La correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:
FERNANDEZ BIARGE, Julio
PASCUAL IBARRA, José R.

- La portada de este número, de J.J.E.M., ofrece esta reflexión:
"Aunque, según las apariencias, la SOCIEDAD da la espalda a las MATEMATICAS, ambas están del mismo lado, ya que la banda de Möbius tiene una sola cara".

- Vea la oferta de números atrasados de este Boletín, para nuestros socios, en la última página.

INDICE Pag.

Este BOLETIN se distribuye gratuitamente entre los socios de la Sociedad Castellana PUIG ADAM de Profesores de Matemáticas y Centros adheridos a ella. No se vende ni se admiten suscripciones.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: José Javier Etayo Miqueo

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Vicesecretario: Francisco Quesada Cobo

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

VIDA DE LA SOCIEDAD

ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE 1987

El pasado dia 23 de Mayo, como estaba previsto, la Sociedad Castellana Puig Adam de Matemáticas celebró su Asamblea General, en los locales del Instituto "Beatriz Galindo" de Madrid.

En ella se informó sobre las actividades de la Sociedad y en particular sobre la preparación de nuestro V Concurso de Resolución de Problemas sobre el que damos noticias en otro lugar de este Boletín.

Se dió cuenta del estado económico de la Sociedad, que en estos momentos finales del curso dispone de unos recursos muy reducidos, apenas suficientes para publicar el presente número del Boletín y atender a los gastos ocasionados por el Concurso, que no son muchos, ya que el Instituto "Beatriz Galindo" nos cede amablemente sus instalaciones para ello, el trabajo personal lo realiza desinteresadamente un grupo de socios, y esperamos que concluyan con éxito nuestras gestiones para que nos asignen las subvenciones para adquirir los lotes de libros que entregaremos como premios, al igual que en años anteriores. La colaboración con el Colegio O. de Doctores y Licenciados ha sido muy importante para la difusión de la convocatoria. Se expresó nuestro agradecimiento a todos los que nos están ayudando en esta tarea.

Se renovó la Junta Directiva, que ha quedado constituida en la forma que aparece en la página precedente. Ha cesado como Secretario nuestro compañero José Francisco Carballido, que durante tres años ha trabajado con ahínco en los asuntos de la Sociedad, pero al que su cargo de Director de la E. U. de I. T. Industrial le impide continuar con su esforzada labor en nuestra secretaría, que todos debemos agradecerle.

Tras la Asamblea, un nutrido grupo de socios se reunió en un restaurante cercano para festejar la jubilación de los miembros de la Junta Directiva, D. Alberto Aizpún y D. Salvador Herrero. Los agasajados recibieron demostraciones de aprecio y afecto de los presentes,que con toda seguridad representan el sentir de todos nuestros socios.

- - - - -

V CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS

En el momento de cerrar la edición de este número del Boletín se encuentran muy avanzados los preparativos para la celebración de nuestro Concurso. Se han pre-inscrito en él más de 60 centros, la mayor parte de los cuales envían alumnos seleccionados para los tres cursos.

Las pruebas tendrán lugar en el Instituto de Bachillerato "Beatriz Galindo" el dia 27 de Junio a las 10 h. 15 m. como se ha comunicado, mediante una circular, a los Centros pre-inscritos.

- - - - -

N O T I C I A S

LAS MATEMATICAS EN PRIMARIA Y SECUNDARIA EN LA DECADA DE LOS 90

Con este sugestivo título se celebró en Valencia los días 4 a 7 de marzo, un simposio organizado y dirigido por el Grupo Cero y promocionado por la Consejería de Educación de la Comunidad Valenciana.

La idea de los organizadores era que los asistentes participaran muy activamente en la discusión de los distintos aspectos de la realidad educativa actual y su proyección en un futuro inmediato y en la subsiguiente elaboración de conclusiones.

Con ese fin, cada uno de los asistentes recibió unas diez semanas antes del simposio, un "documento de discusión", plagado de reflexiones y preguntas abiertas sobre la didáctica de las matemáticas que nos espera, y el ruego de que enviara respuestas y opiniones de algunos de los interrogantes planteados. Con todas ellas se elaboró un abultado dossier que sirvió de punto de partida a las discusiones del simposio.

Hubo siete grupos de trabajo:

- Curriculum
- Entorno
- Contenidos
- La clase (el aula)
- Nuevas tecnologías
- Dinámica de cambio
- Investigaciones

Cada asistente participó en dos de estos grupos. Las discusiones en ellos ocuparon los dos primeros días. Los dos últimos se dedicaron a sesiones plenarias en las que se discutió colectivamente sobre cada uno de los siete temas.

Las opiniones recogidas están siendo elaboradas por un colectivo de veintitantas personas que se han encargado de redactar un documento final que saldrá a la luz a mediados de junio.

*****

VIII JORNADAS DE LA SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMATICAS "ISAAC NEWTON"

Del 1 al 4 de mayo se celebraron en las Palmas estas jornadas que, como cada año, organiza la Sociedad Canaria, decana y pionera de las Sociedades de Profesores de Matemáticas de España.

Los temas que se han tratado este año fueron:

- Estadística y Probabilidad
- Geometría
- Proporcionalidad
- Resolución de Problemas

sobre los que pronunciarán conferencias los profesores José Colera, Adela Salvador, Joaquín Jiménez y Paolo Boero, respectivamente.

Sobre estos mismos temas, o relacionados con ellos, se presentaron numerosas comunicaciones y se organizaron grupos de trabajo cuyas conclusiones fueron expuestas el último día.

Excursiones, comidas y otras formas de convivencia completaron el programa.

CURSO SOBRE INFORMÁTICA

La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales organizó un curso de conferencias sobre "INFORMATICA: ASPECTOS Y FRONTERAS ACTUALES", que se ha desarrollado entre los dias 11 al 26 de Mayo. Inaugurado por el Presidente de la Academia, Sr. Martín Municio, han intervenido en él los profesores García Santesmases, Vaquero Sánchez, Moreno Díaz, Fernández Esteban, Jañez Escalada, Santisteban, Luque Falcón, Sáez Vacas, Ramos Salavert, Dormido Bencomo, Aguiló Llobet, Morán, Sopeña y Fernández Biarge. Las conferencias de este curso se recogerán en una publicación de la Real Academia que estamos seguros que será de gran interés.

\- - - -

XXVIII OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL

Esta Olimpiada se celebrará en Cuba, entre los dias 5 al 18 de Julio de 1987.

España estará representada por los ganadores de nuetstra XXII Olimpiada Matemática Española:

D. Fernando Galve Mauricio (de Zaragoza)
D. Salvador Villegas Barranco (de Granada)
D. Santiago Vila Doncel (de Badajoz)
D. Juan Rodrigo Valderrama Alcalde (de Burgos)
D. Pablo Benítez Jiménez (de Madrid)
D. Carlos J. Pérez Jimenez (de Logroño)

Deseamos que este selecto equipo consiga repetir o superar los brillantes resultados obtenidos por los seleccionados españoles en los años precedentes.

\- - - -

INTERNATIONAL CONFERENCE ON LINEAR ALGEBRA AND APPLICATIONS

Esta Conferencia Internacional se celebrará entre los dias 28 y 30 de Septiembre de 1987, en la Universidad Politécnica de Valencia.

Se publicarán sus Actas como un número especial de la Revista "Linear Algebra and its Applications".

Puede obtenerse información en la E. T. S. de Ingenieros Industriales de la citada Universidad, apartado de Correos 22012, 46071-Valencia, o a través del teléfono (96) 361 50 51 (Ext^{n} 280).

- - - -

ACTIVIDADES EN CIUDAD REAL

En los dias 17 al 20 de Junio de 1987 se celebrará el I Congreso Provincial de Educación, organizado por los Centros de Profesores de la provincia de Ciudad Real.

En los meses de Abril y Mayo últmos ha tenido lugar un cursillo sobre las regletas de Cuisenaire y su utilización didáctica, impartido por los profesores don Salvador Herrero y don Juan Ruiz.

- - - -

CORRIGENDA

En el Boletín n^{o} 13 (Pág. 9) incluíamos la crónica de la XXIII Olimpiada Matemática Española, pero en el titular que la encabezada apareció, por error, como la XXII (mientras que en los enunciados incluidos en la página 83, ese ordinal aparecía correctamente).

- - - -

DON ZOEL GARCIA DE GALDEANO MAESTRO Y APOSTOL DEL PROGRESO MATEMATICO ESPAÑOL

Por Rafael Rodríguez Vidal (*)
Catedrático de la Universidad de Zaragoza

Don Zoel García de Galdeano y Yanguas nació en Pamplona en el año 1846. Era hijo, pronto huérfano, de un brillante oficial de nuestro ejército, muerto en acción de guerra, al servicio de España. Luchando con la difícil situación económica consiguiente a su orfandad se costeó sucesivamente, por su propio esfuerzo, las carreras de Perito Agrimensor, Maestro Superior, Licenciado en Filosofía y Letras y, finalmente, en Ciencias Exactas. Estas últimas fueron ya, en lo sucesivo, el principal motivo de su actividad profesional. Pero su amplia cultura filosófica y literaria se manifestaba de un modo natural y simpático. Era, por ejemplo, un notable conocedor del teatro griego y un entendido aficionado a la música y el canto. De labios de quien lo recuerda hemos oído comentar que cuando el químico Zsigmondy (premio Nobel) desarrolló un curso en Zaragoza, en 1922, trabó gran amistad con don Zoel, por quien decía no haber conocido otro espíritu comparable en ingenio y atenta curiosidad a todo quehacer intelectual. Debemos recordar que entonces contaba ya don Zoel 76 años de edad.

(*) Nota de la redacción

El profesor Rodríguez Vidal ha querido honrar nuestro Boletín con el presente artículo en el que magistralmente resume la vida y obra de don Zoel García de Galdeano, figura ilustre del profesorado español, tanto de enseñanza media como universitaria. En él se nos presenta un paradigma de lo que ha sido, y debe seguir siendo, para mejor cumplir su excelsa función educativa, el profesor de bachillerato.

Volviendo al García de Galdeano matemático, resumiremos, que, graduado en 1871, fue Catedrático de Matemáticas (por oposición, naturalmente) en 1881, en el Instituto de Ciudad Real, y pasó luego a los de Almería y Toledo, ciudad esta última donde fue más permanente su docencia. Nombrado Catedrático de Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias de Zaragoza en 1889, pasa a la de Cálculo Infinitesimal en 1896 y la desempeña hasta su jubilación en 1918. La Facultad de Ciencias de Zaragoza se honró entonces en contarle como Catedrático honorario hasta su fallecimiento en 1924.

Cuando este Catedrático de Instituto irrumpe en la enseñanza universitaria, entre otros honrados expositores de ciencia ya sedimentada en libros no muy nuevos, destacan notablemente tres personalidades innovadoras: Echegaray, un expositor maravilloso que conocía perfectamente la matemática francesa de su tiempo y la enseñaba hasta donde sus auditores le seguían. Torroja, algo posterior, una mente profunda que en un campo particular del que nunca quiso salir, importó e impuso aquí la Geometría según Von Staudt. Y García de Galdeano, en fin, que advierte pronto, primero, que la matemática en España necesita <u>vida de relación</u>, sin la que no se puede convencer a los estudiantes de que se trata de una ciencia viva, que <u>se está haciendo ahora</u>, como siempre, y segundo, que una gran parte de la Matemática Moderna (la que hacia fines del siglo XIX se estaba haciendo en Alemania) necesitaba ser importada inmediatamente. A tal fin, aparte su personal asistencia a diversos Congresos internacionales, impulsa y apoya el viaje de Rey Pastor a Alemania. Esto en un tiempo en que importantes profesores -se lo he oído contar a testigo muy calificado- opinaban superfluo el ir a aprender fuera, cuando podía aprenderse en los libros. El extraordinario éxito de su joven e ilustre discípulo, le da a don Zoel derecho a aplicarse lo del romance:

si no vencí reyes moros
engendré quien los venciera.

Por breve que sea este resumen, no puede olvidar el hecho importante de que fue Galdeano el fundador y editor de la primera Revista española de Matemáticas: <u>El Progreso Matemático</u>, en 1894.

Con los criterios de hoy mismo, podrá decirse que la significación de García de Galdeano como matemático creador es modesta; pero es asombroso hasta qué punto ha sido fundamental el trabajo de un solo hombre para el desarrollo de la matemática española. Para decirlo con palabras que den fe, basta recordar las de Julio Rey Pastor (hombre que nunca se excedió en elogios), en varias ocasiones: En su conocida <u>Introducción a la Matemática Superior</u> (Manuales Corona 1916. Reimpresión 1983: Institutos de Estudios Riojanos) la dedicatoria dice: *"A mi querido Maestro D. ZOEL GARCIA DE GALDEANO, esforzado Paladín de la Matemática Moderna en España"*. Y en el epílogo, esta nota significativa: *"De la extensión inmensa de las teorías que constituyen la Matemática vigente, puede formarse idea consultando las obras del Profesor Galdeano, únicas fuentes de consulta en lengua castellana"*. Y todavía Rey Pastor, al terminar su clásico libro <u>Los Matemáticos Españoles del siglo XVI</u>, tan áspero para la matemática española, después de aludir con respeto a las figuras de Echegaray y Torroja concluye: *"Igualmente revolucionario, pero de una amplitud que asusta -y por esto mismo menos ordenada y perfecta- ha sido la obra del benemérito profesor García de Galdeano, cuya labor de apóstol -sólo comparable a la del Bachiller Pérez de Moya- es una protesta enérgica y constante contra nuestro voluntario atraso matemático; pero desgraciadamente no ha sido estimada todavía en su justo valor, perdiéndose su voz en el vacío"*.

No es posible resumir aquí los incontables títulos de las publicaciones de Galdeano. (Pueden verse en <u>Gaceta Matemática</u>, 1964, nº 1; o en Mariano Hormigón: <u>Tesis</u>, Publicaciones de la Universidad de Zaragoza). Digamos sólo, entre las anteriores a su Cátedra de Instituto:

. Observaciones útiles en el estudio de las Matemáticas, 1874.

. El método aplicado a la ciencia matemática, 1875.

. Consideraciones sobre la conveniencia de un plan nuevo para la enseñanza de las matemáticas elemenles, 1877.

En Toledo, como catedrático, publica entre otros los siguientes tratados.

. Tratado de Aritmética, 1884.

. Problemas de Aritmética y Algebra, 1885.

. Tratado de Algebra, 1886.

. Geometría Elemental, 1888.

Desde Zaragoza continúa sus incontables publicaciones, que debieron suponerle un gran esfuerzo económico, no menor que el de formar su valiosa biblioteca, que dejó íntegra a la Facultad de Ciencias de Zaragoza.

La vida de este hombre austero, sin familia, de economía muy modesta, entregado del todo a su apostolado matemático, ilustra cumplidamente el juicio de Eugenio D'Ors sobre la Geometría de Euclides: *"Una apariencia fría, una expresión contenida, pero en el fondo.... ¡cuánta pasión!"*.

EL PROBLEMA DE APOLONIO

Por Eugenio Roanes Lozano
Profesor Titular de la
E.U. de Profesorado de E.G.B.
"Pablo Montesino"

En el siglo tercero a. de C. Apolonio propuso su famoso problema de construcción de una circunferencia tangente a otras tres dadas. Pese a la simplicidad de su enunciado, la diversidad de técnicas utilizadas en las numerosas soluciones que de él se han dado permiten catalogarlo como de gran interés didáctico. En el presente artículo se pretende un doble propósito: de una parte, comentar las soluciones más ingeniosas dadas al problema y, de otra, ofrecer una solución informática, que permita familiarizarse rápidamente con él.

(Este artículo es resumen de un trabajo desarrollado por mí para la asignatura monográfica de doctorado "Problemas clásicos de la Matemática", impartida por el prof. Miguel de Guzmán, que me ha animado a publicarlo).

1. PLANTEAMIENTO Y EVOLUCION HISTORICA

Apolonio de Perga nació hacia el año 262 a. de C. y estudió en Alejandría con los discípulos de Euclides, estableciéndose posteriormente en Pérgamo (otra ciudad de Asia Menor), donde permaneció hasta su muerte, acaecida alrededor del año 190 a.de C. Escribió, entre otros, un libro titulado "Contactos" (en el sentido de "Tangencias") en el que propuso su famoso problema.

Este parece que fué propuesto en los siguientes términos: dados tres objetos (cada uno de los cuales puede ser punto, recta o circunferencia), construir una circunferencia (o recta) que sea tangente a los tres objetos dados (si el objeto es punto, la condición de tangencia se sustituirá por la de pasar por el punto).

Por tanto, el problema entraña varios casos. Su número será el de posibles descomposiciones de tres (tres son los objetos) en suma de tres sumandos (números de puntos, de rectas y de circunferencias), es decir

$$\binom{3+3-1}{3} = 10$$

Designando por P a la condición de pasar por un punto, por R a la condición de ser tangente a una recta y por C a la de ser tangente a una circunferencia, pueden denotarse estos diez casos (o problemas) así:

PPP, PPR, PRR, RRR, PPC, PRC, PCC, RRC, RCC, CCC

siendo naturalmente el CCC el caso más interesante.

El libro "Contactos" se perdió y solo es conocido a través de los comentarios de Pappus, el último gran geómetra griego (siglo IV). Por ello no se sabe con certeza si los diez casos o problemas fueron todos resueltos por Apolonio.

Según comenta el historiador sir Thomas Heath en [12], el bello problema de Apolonio ha ejercitado el ingenio de muchos grandes geómetras, desde su época hasta nuestros días.

El caso CCC fué resuelto por van Roomen (Adrianus Romanus, 1561-1615) haciendo uso de intersección de hipérbolas.

Francois Vieta, impulsado por las afirmaciones de Pappus de que una solución sencilla era posible, estudia los diez casos y publica sus soluciones en 1600 en su obra [19], en que trató de reconstruir el libro "Contactos" de Apolonio, siguiendo una moda de su época, de intentar completar libros clásicos perdidos, a partir de citas posteriores.

Newton dió otra solución en la cual solo se usaba regla y compás. Otras soluciones se deben a Descartes, Euler, Poncelet, Gergonne, Mannheim, Fouché, etc.

Intimamente relacionado con el problema de Apolonio, está el de calcular el radio de una circunferencia tangente a tres dadas, que, a su vez, son tangentes entre sí dos a dos, en función del radio de estas. Este problema, que trataremos más adelante, fué planteado y resuelto empíricamente por Soddy en 1936 (por lo que es conocido como "problema de Soddy") y generalizado a dimensión n por Pedoe (1967) y Coxeter (1968).

2. SOLUCIONES CLASICAS CON REGLA Y COMPAS

Vamos a comentar algunas de las soluciones clásicas de mayor interés didáctico.

La solución Vieta es quizá la mas sencilla, en el sentido de que apenas requiere aparato matemático, por lo que vale la pena desarrollarla. Consiste esencialmente en ir reduciendo el problema CCC a otros sucesivamente más simples, utilizando una técnica basada, casi exclusivamente, en el concepto de potencia respecto de una circunferencia.

Comienza restando a los radios de las tres circunferencias el de la menor, reduciendo así el problema al PCC, esto es, a determinar una circunferencia, x, que pase por un punto dado, A, y sea tangente a dos circunferencias dadas, c y c' (fig. 1).

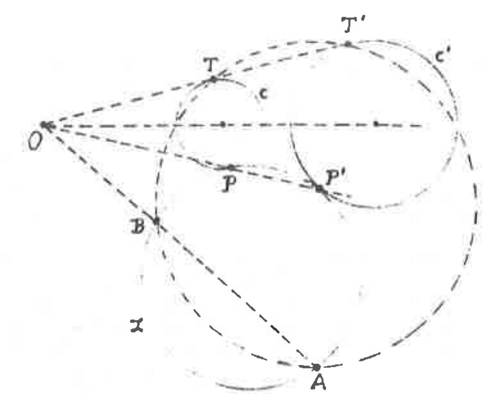


Figura 1

Si x es tangente a c y c' en los respectivos puntos P y P', entonces (según puede probarse) la recta PP' ha de pasar por el punto O de intersección de la recta de centros de c y c' con una recta TT', tangente común a c y c', verificándose además

$$\overline{OP}\cdot\overline{OP'} = \overline{OT}\cdot\overline{OT'}$$

En consecuencia, si B es el otro punto de intersección de x con la recta OA, habrá de ser

$$\overline{OB}\cdot\overline{OA} = \overline{OP}\cdot\overline{OP'} = \overline{OT}\cdot\overline{OT'}$$

luego los puntos B,A,T y T' son concíclicos. Por tanto, x ha de pasar por el punto B, de intersección de la recta OA con la circunferencia ATT'.

Se ha reducido así el problema al PPC, esto es, a determinar una circunferencia, que pase por A y B y sea tangente a la circunferencia c, para determinar la cual basta considerar una circunferencia auxiliar, g, que pase por A y B y sea secante con c. Si M y N son los puntos de intersección de g y c, entonces el punto V, de intersección de las rectas MN y AB, pertenecerá a la tangente común a c y x en su punto de contacto, P. Por tanto, x ha de pasar por el punto de contacto de c con una tangente a ella trazada desde V.

Se ha reducido así al problema PPP, es decir, al problema trivial de construir la circunferencia circunscrita al triángulo $\widehat{ABP}$.

La solución de Gergonne y Bobillier aborda directamente el problema CCC, utilizando los conceptos de centro radical, de transformación de inversión y de polaridad. Dadas tres circunferencias, c_1, c_2 y c_3, de centros no alineados, sea P su centro radical e I la inversión de polo P en la que son dobles las circunferencias dadas. Si la circunferencia x es tangente a c_1, c_2 y c_3 en T_1, T_2 y T_3, respectivamente, entonces (por ser I transformación isogonal) por los puntos $T_i^* = I(T_i)$: i = 1, 2, 3 pasará otra circunferencia o recta $x^* = I(x)$, tangente en esos puntos a c_1, c_2 y c_3 (fig. 2).

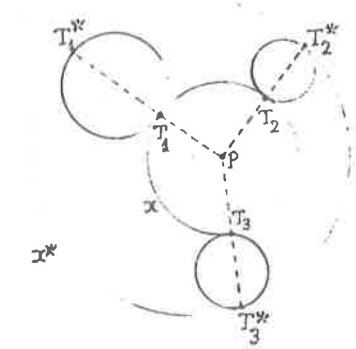


Figura 2

En consecuencia, las soluciones al problema CCC aparecen por pares de circunferencias homólogas en una inversión de polo P (pares inversos de soluciones).

El resto del razonamiento, omitido por brevedad, puede verse en [11] , [16] ó [17].

La solución de Mannheim, descrita en [14] , es un buen ejemplo de cómo a menudo puede ser útil recurrir a un razonamiento con figuras del espacio tridimensional, para llegar a una solución sencilla de un problema de Geometría del plano.

La solución de Fouche, que no difiere esencialmente de la dada por Poncelet en su "Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras", también aborda directamente el problema CCC, pero ahora haciendo uso del concepto de haz de circunferencias. Esta construcción puede verse en [9].

El gran geómetra francés Lemoine comparó las cuatro soluciones precedentes, definiendo para ello, un coeficiente de simplicidad y un coeficiente de exactitud de las construcciones. En este estudio, publicado en [13] , se situa en primer lugar la solución de Mannheim, seguida de la de Vieta y la de Fouche, señalandose como la peor, desde el punto de vista del trazado gráfico, precisamente la debida a Gergonne y Bobilier, que suele ser considerada como la de más elegante demostración.

La <u>solución por inversión</u> suele ser considerada como la más didáctica, por ser un típico ejemplo de aplicación del método de la transformación denominada "inversión". Se comienza reduciendo el problema CCC al PCC, como se indicó en la solución de Vieta. Así el problema se reduce a determinar una circunferencia, x, que pase por un punto P y sea tangente a dos circunferencias c_1 y c_2. Mediante una inversión I de polo P, se transforma x en una recta t = I(x), tangente a $I(c_1)$ e $I(c_2)$. La construcción se simplifica, si como potencia de inversión se toma la potencia del punto P respecto de c_2, por ejemplo, ya que así c_2 es doble en I. La construcción de x puede pues resumirse en el siguiente proceso (fig. 3):

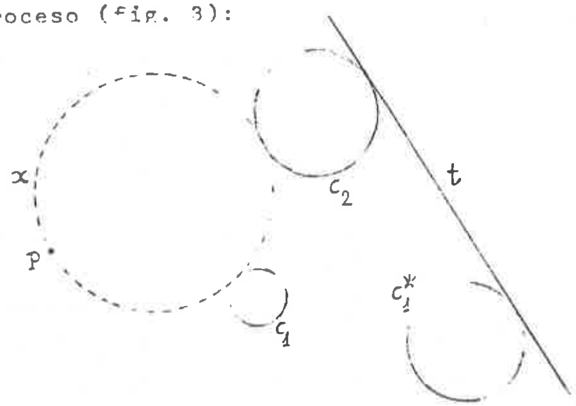


Figura 3

1°) determinar la circunferencia $c_1^* = I(c_1)$

2°) trazar una recta t, tangente a c_1^* y a $c_2 = I(c_2)$

3°) hallar la circunferencia x = I(t), que ha de pasar por P

Por ser I una transformación isogonal, x será tangente a c_1 y c_2, luego es solución del problema.

La <u>discusión</u> de este problema se hace bastante sencilla a partir de este método de inversión, considerando las posibles rectas tangentes, t, a c_1^* y c_2. Para discutir el problema CCC, basta reducirlo al PCC, como se ha indicado anteriormente y tener en cuenta que la solución del CCC es una circunferencia concéntrica con la solución del PCC a

que se haya reducido, y cuyo radio se obtiene del de esta, restando o sumando el radio de la menor de las tres, según que la solución buscada incluya o no a dicha menor. Por tanto, el número de soluciones del CCC duplicará al del correspondiente problema reducido PCC, pudiendo llegar a tener 8 soluciones, ya que existen, a lo mas, 4 tangentes comunes a c_1^* y c_2.

En todo caso, en [11] puede verse una discusión muy completa del problema de Apolonio.

3. <u>SOLUCION ALGEBRAICA</u>

El problema CCC admite un tratamiento algebraico bastante sencillo, que vamos a desarrollar brevemente.

Supongamos que los centros de las tres circunferencias dadas sean los puntos de coordenadas (a_1, a_2), (b_1, b_2) y (c_1, c_2) y sus respectivos radios sean r_1, r_2 y r_3. Si la circunferencia de centro (x, y) y radio r es una solución del problema, entonces la distancia de su centro a los centros de las tres dadas serán $r \pm r_1$, $r \pm r_2$ y $r \pm r_3$, según que la tangencia sea exterior o interior, luego habrán de verificarse las condiciones:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (r \pm r_1)^2$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = (r \pm r_2)^2$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 = (r \pm r_3)^2$$

Se tiene así un sistema de ecuaciones cuadráticas, con tres incognitas (x, y, r), equivalente al que resulta de sustituir las dos últimas ecuaciones por los resultados de restarles la primera:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (r \pm r_1)^2$$

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + 2(\pm r_2 \mp r_1)r = k$$

$$2(a_1 - a_3)x + 2(b_1 - b_3)y + 2(\pm r_3 \mp r_1)r = k'$$

donde k y k' son expresiones algebraicas dependientes de los centros y radios de las tres circunferencias dadas. De las dos últimas ecuaciones pueden calcularse x e y en función de r (supuesto que este subsistema lineal sea compatible), y sustituyendo en la primera, se tiene una ecuación cuadrática en r, una de cuyas soluciones será real positiva. Sustituyendo este valor de r se obtendrán x e y.

La circunferencia cuyo centro (x, y) y radio r se obtienen en la forma indicada es obviamente tangente a las tres dadas.

Como en todo el proceso descrito solo se han usado operaciones racionales y extracciones de raices cuadradas, se concluye (ahora por via algebraica) que el problema CCC puede resolverse con regla y compás (cosa que ya se había hecho en los párrafos precedentes).

Respecto del número de soluciones, según se tome signo + ó - en $r \pm r_i$; i = 1, 2, 3, resultarán, como máximo, $2^3 = 8$ soluciones. Ahora bien, el problema puede no tener solución, como ocurre para el caso en que las tres circunferencias dadas sean concéntricas y de radios distintos, en cuyo caso el subsistema lineal antes citado es incompatible.

4. RELACION CON EL PROBLEMA DE SODDY

El químico sir Frederick Soddy, premio Nobel (1921) por el descubrimiento de los isótopos, realizó un estudio de acoplamientos atómicos que le condujo a analizar el problema de relacionar los radios r_1, r_2 y r_3 de tres circunferencias tangentes entre sí dos a dos, con el radio, r, de otra circunferencia tangente a las tres (fig. 4).

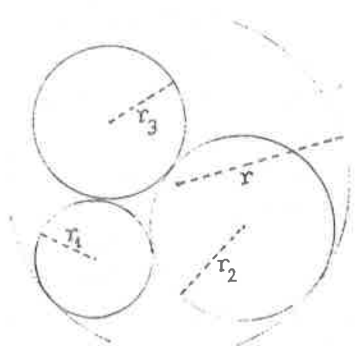


Figura 4

Se trataba pues de determinar el radio de la circunferencia so-

lución al problema CCC de Apolonio, para el caso en que las tres circunferencias sean tangentes.

Soddy llegó al siguiente resultado

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k)^2 = 2\,(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2)$$

(donde $k_i = 1/r_i$; i = 1, 2, 3 , k = 1/r) y lo publicó en Natura, 137 (1936), expresándolo en una poesía que tituló "The precise kiss", cuyas estrofas más enjundiosas se han traducido así en [4] :

Acuden cuatro círculos a un beso:
Si más pequeños, con más curvatura,
Precisamente es la curvatura
De la distancia al centro el inverso.
Aunque Euclides quedó mudo ante el dilema,
No hay ya necesidad de un "más o menos".
Pues la curvatura cero es una recta
Y si es cóncava tiene signo menos;
La suma de sus cuadrados dará
Del cuadrado de la suma la mitad.

Pero este resultado había sido descubierto anteriormente por Descartes, quien lo expresó en carta dirigida a su discípula la princesa Isabel de Bohemia en 1643, por lo que es conocido como el teorema del círculo de Descartes.

Doscientos años después el teorema fue redescubierto (1842) por el inglés Beecroft, quien observó que las cuatro circunferencias anteriores determinan otras cuatro tangentes entre sí en los mismos seis puntos de tangencia de las cuatro primeras, supuesto $r_1 = r_2 = r_3$ (fig. 5)

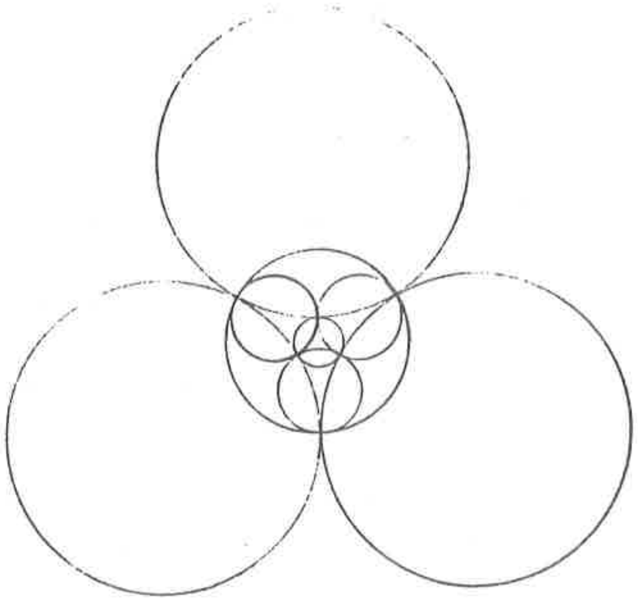


Figura 5

Soddy publicó su resultado sin demostración y un año después Glossett lo extendió a dimensión n, publicandolo en Nature, 139 (1937), pero también sin demostración. Esta condición para n+2 hiperesferas mutuamente tangentes en el espacio de dimensión n es la siguiente:

$$(k_1+\dots+k_{n+2})^2 = n(k_1^2+\dots+k_{n+2}^2)$$

y su demostración está desarrollada en [6] y [15].

5. ADAPTACION INFORMATICA DEL PROBLEMA CCC

Aunque a primera vista parezca que la solución algebraica es la que mejor se presta a ser informatizada, después de comparar los métodos descritos, he optado por basar la adaptación en el método de inversión.

Dadas tres circunferencias, α', β', γ', exteriores dos a dos, de centros A,B,C y radios respectivos a', b', c' (donde $a' \leq b'$, $a' \leq c'$), se trata de determinar una circunferencia x' tangente a aquellas tres.

Si comenzamos suponiendo que la circunferencia solución buscada x' no incluye a ninguna de las tres, entonces para reducir al problema PCC, basta considerar el punto A y las circunferencias β,γ de centros B, C y radios b = b'-a', c = c'-a'.

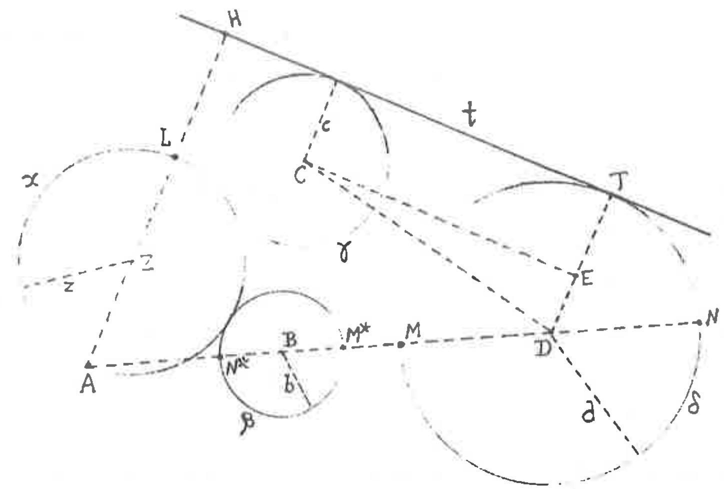


Figura 6

Sea I la inversión de polo A y potencia $p = \overline{AC}^2 - c^2$. Es claro que $I(\gamma) = \gamma$. Tratemos de determinar $I(\beta)$. Sean M* y N* los puntos de intersección de β con la recta AB, y, de acuerdo con la fig. 6, supongamos $\overline{AN^*} < \overline{AM^*}$, es decir

$$\overline{AM^*} = \overline{AB}+b \quad , \quad \overline{AN^*} = \overline{AB}-b$$

Entonces los puntos $M = I(M^*)$ y $N = I(N^*)$ pertenecerán a la recta AB y verificarán

$$\overline{AM} = p/(\overline{AB}+b) \quad , \quad \overline{AN} = p/(\overline{AB}-b)$$

Como β no pasa por A, la figura $\delta = I(\beta)$ será una circunferencia de la que M y N son puntos diametralmente opuestos, por lo que su centro D y su radio d verificarán:

$$\overline{AD} = 1/2(\overline{AM}+\overline{AN}) \quad , \quad d = 1/2(\overline{AN}-\overline{AM})$$

Por ser x una circunferencia que ha de pasar por A, la figura t = I(x) será una recta tangente a γ y δ. Para que x' no incluya a β' ni γ', x no ha de incluir a β ni γ, luego δ y γ deben quedar en el mismo semiplano que A, respecto de t. Si T es el punto de contacto de t y δ, y la proyección ortogonal de C sobre la recta DT es el punto E, será

$$\cos \widehat{CDE} = (d-c)/\overline{CD} \qquad (*)$$

lo que permite determinar la dirección de $\overrightarrow{DT}$, sin más que tener en cuenta que los ángulos orientados $\widehat{CDT}$ y $\widehat{ADC}$ han de ser del mismo sentido (para que δ y γ queden contenidos en el mismo semiplano que A, respecto de t).

Para determinar x = I(t), basta ahora considerar la proyección ortogonal, H, de A sobre t y un vector unitario $\vec{n} \parallel \overrightarrow{DT}$. La igualdad

$$\overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AT}\cdot\vec{n})\vec{n}$$

permite determinar H y ahora L = I(H) será un punto de la recta AH, tal que

$$\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{AH} = p$$

Puesto que x = I(t), A y L serán puntos diametralmente opuestos de la circunferencia x, cuyos centro Z y radio z vendrán pues dados por

$$\overrightarrow{AZ} = (1/2)\overrightarrow{AL} \quad , \quad z = (1/2)\overline{AL}$$

Ahora la circunferencia x', solución al problema CCC propuesto inicialmente, será la de centro Z y radio z-a.

Si suponemos ahora que la circunferencia solución buscada, x', incluye a una sola de las dos circunferencias β' y γ', otro tanto sucederá a x respecto de β y γ, luego δ y γ deben quedar en distinto semiplano respecto de t, por lo que (*) ha de sustituirse por

$$\cos \widehat{CDE} = (d+c)/\overline{CD}$$

Si x' incluyera a β', también x incluirá a β, luego δ estaría incluida en distinto semiplano que A respecto de t, y por tanto los ángulos orientados $\widehat{ADC}$ y $\widehat{CDT}$ habrían de ser de sentidos contrarios.

Tanto si x' incluye a α' y a β', como si no incluye a ninguna de las dos, al reducir al problema PCC, el radio de β será b = b'-a'. En cambio, si x' incluye a una sola de las circunferencias α' ó β', entonces b = b'+a'. Otro tanto sucede para el radio de γ, si x' incluye a una sola de las circunferencias α' ó γ', entonces c = c'+a, siendo c = c'-a en otro caso.

Finalmente, si x' incluye (respect. no incluye) a α', entonces, una vez calculado el radio z de x, el radio de x' será z+a' (z-a' respect.).

Para distinguir entre sí las ocho posibles soluciones al problema CCC vamos a caracterizar cada una de ellas por una terna ordenada de números (i,j,k), donde $i,j,k \in \{0,1\}$, de acuerdo con el siguiente convenio:

i es 0 (resp.1), si x' incluye (resp.no incluye) a α'
j es 0 (" "), si x' " (" " ") a β'
k es 0 (" "), si x' " (" " ") a γ'

Así, por ejemplo, a la circunferencia solución que incluye a α y γ, pero no a β, la llamaremos: solución (1,0,1).

Con este convenio, las variables comentadas en los puntos anteriores toman los valores indicados en el siguiente cuadro:

i	j	k	b	c	$\overline{DE}$	sentidos de $\widehat{ADE}$ y $\widehat{CDT}$	z'
0	0	0	b'-a'	c'-a'	|d-c|	iguales	z-a'
1	1	1	b'-a'	c'-a'	|d-c|	distintos	z+a'
0	0	1	b'-a'	c'+a'	|d+c|	iguales	z-a'
1	1	0	b'-a'	c'+a'	|d+c|	distintos	z+a'
0	1	0	b'+a'	c'-a'	|d+c|	distintos	z-a'
1	0	1	b'+a'	c'-a'	|d+c|	iguales	z+a'
1	0	0	b'+a'	c'+a'	|d-c|	iguales	z+a'
0	1	1	b'+a'	c'+a'	|d-c|	distintos	z-a'

En el cuadro anterior se observará que las 8 soluciones se separan por líneas horizontales en 4 parejas, cada una de las cuales está formada por dos soluciones inversas en el sentido de Gergonne.

6. PROGRAMACION EN LENGUAJE LOGO

El programa interactivo, al que vamos a titular *Apolonio* consta de los siguientes procedimientos Logo:

1) *procedimiento* CCC, en que se piden los datos de las tres circunferencias dadas (centros y radios)
2) *procedimiento* *CIRC :X :Y :R*, que permite dibujar la circunferencia de centro (X,Y) y radio R
3) *procedimiento* *DIST :X :Y :P :Q*, que calcula la distancia entre los puntos (X,Y) y (P,Q)
4) *procedimiento* *SOLUCIONES*, que informa sobre el modo de pedir alguna de las ocho posibles soluciones, o todas ellas
5) *procedimiento* *S :I :J :K*, que permite obtener la solución (I,J,K), dibujandola e indicando las coordenadas de su centro y su radio
6) *procedimiento* *CIRX :X :Y :R*, que borra la circunferencia de centro (X,Y) y radio R, previamente trazada
7) *procedimiento* *SOL :I :J :K*, que ordena borrar la última circunferencia solución obtenida y traza la que se ha pedido, enviando para ello al subprocedimiento S :I :J :K
8) *procedimiento* *TODAS*, que ordena encontrar todas las soluciones, dibujandolas e indicando las coordenadas de sus respectivos centros y radios
9) *procedimiento* *RED :X*, que permite reducir el ángulo X, expresado en grados, al intervalo (-180,180].
10) *procedimiento* *ABS :X*, que calcula el valor absoluto de X (no existe en Logo esta función)
11) *procedimiento* *ARCCOS :X*, que calcula el arco coseno de X (no existe esta función en Logo)

He aquí los listados de estos procedimientos:


```
TO CCC
CT TEXTSCREEN
PR []
PR []
PR []
PR [CIRCUNFERENCIA TANGENTE A TRES DADAS]
PR [ESCRIBE CENTRO Y RADIO DE LA MENOR]
MAKE "O RL
MAKE "A1 FIRST :O
MAKE "A2 FIRST BF :O
MAKE "A' LAST :O
CS
HT
WINDOW
.SETSCRUNCH 1.1
SETPC 2
CIRC :A1 :A2 :A'
PR [ESCRIBE EL CENTRO Y RADIO DE OTRA]
MAKE "O RL
MAKE "B1 FIRST :O
MAKE "B2 FIRST BF :O
MAKE "B' LAST :O
SETPC 3
CIRC :B1 :B2 :B'
PR [ESCRIBE EL CENTRO Y RADIO DE LA OTRA]
MAKE "O RL
MAKE "C1 FIRST :O
MAKE "C2 FIRST BF :O
MAKE "C' LAST :O
SETPC 5
CIRC :C1 :C2 :C'
MAKE "AC DIST :A1 :A2 :C1 :C2
MAKE "AB DIST :A1 :A2 :B1 :B2
SETPC 1
SOLUCIONES
MAKE "O 0
END


TO CIRC :X :Y :R
PU SETPOS SE :X :Y
SETH 0
FD :R
LT 90
MAKE "L 2 * :R * 3.1416 / 36
PD
REPEAT 36 [LT 5 FD :L LT 5]
PU
END


TO DIST :X :Y :P :Q
OUTPUT SQRT ( ( :X - :P ) * ( :X - :P ) + ( :Y - :Q ) * ( :Y - :Q ) )
END
```

```
TO SOLUCIONES
CT TEXTSCREEN
PR []
PR []
PR []
PR []
PR []
PR [Para obtener una solucion, ordena:]
PR []
PR [SOL i j k]
PR []
PR [donde i,j,k = 0,1 con el siguiente convenio:]
PR []
PR [si i = 1 ( respect. 0 ) , entonces la]
PR [circunferencia solucion ( no ) incluye a la primera]
PR [si j = 1 ( 0 ) , ( no ) incluye a la segunda]
PR [si k = 1 ( 0 ) , ( no ) incluye a la ultima dada]
PR []
PR [Para obtener todas las soluciones, ordena: TODAS]
PR []
END


TO SOL :I :J :K
IF :O = 1 [CIRX :Z1 :Z2 :Z']
S :I :J :K
MAKE "O 1
END


TO todas
S 0 0 0
S 1 1 1
S 1 0 0
S 0 1 1
S 0 0 1
S 1 1 0
S 0 1 0
S 1 0 1
END


TO CIRX :X :Y :R
PU SETPOS SE :X :Y
SETH 0
FD :R
LT 90
MAKE "L 2 * :R * 3.1416 / 36
PE
REPEAT 36 [LT 5 FD :L LT 5]
PU
END
```



```
TO S :I :J :K
IF :I = :J [MAKE "B :B' - :A'] [MAKE "B :B' + :A']
IF :I = :K [MAKE "C :C' - :A'] [MAKE "C :C' + :A']
MAKE "POT :AC * :AC - :C * :C
MAKE "AM :POT / ( :AB + :B )
MAKE "AN :POT / ( :AB - :B )
MAKE "AD ( :AN + :AM ) / 2
MAKE "D ( :AN - :AM ) / 2
SETPOS SE :A1 :A2
SETH TOWARDS SE :B1 :B2
FD :AD
MAKE "D1 XCOR
MAKE "D2 YCOR
MAKE "CD DIST :C1 :C2 :D1 :D2
IF :J = :K [MAKE "DE ( :D - :C )] [MAKE "DE :D + :C]
MAKE "W ARCCOS ( :DE / :CD )
SETPOS SE :D1 :D2
SETH TOWARDS SE :A1 :A2
MAKE "RA HEADING
SETH TOWARDS SE :C1 :C2
MAKE "RC HEADING
MAKE "R RED ( :RC - :RA )
IF OR :R > 0 :R = 0 [MAKE "S 1] [MAKE "S -1]
IF :J = 0 [RT :W * :S] [LT :W * :S]
MAKE "RDT RED HEADING
FD :D
MAKE "T1 XCOR
MAKE "T2 YCOR
SETH TOWARDS SE :A1 :A2
RT 180
MAKE "RAT RED HEADING
IF :J = 1 [MAKE "RAH RED ( :RDT + 180 )] [MAKE "RAH :RDT]
MAKE "N 90 - :RAH
MAKE "AH ( ( :T1 - :A1 ) * COS :N ) + ( :T2 - :A2 ) * SIN :N
MAKE "AL :POT / :AH
SETPOS SE :A1 :A2
SETH :RAH
FD :AL / 2
MAKE "Z1 XCOR
MAKE "Z2 YCOR
MAKE "Z ABS ( :AL / 2 )
IF :I = 1 [MAKE "Z' :Z + :A'] [MAKE "Z' :Z - :A']
CIRC :Z1 :Z2 :Z'
( PR [ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO] SE :Z1 :Z2 [Y RADIO] :Z )
PR []
END


TO ARCCOS :X
IF :X = 0 [OUTPUT 90] [OUTPUT ARCTAN ( SQRT 1 - :X * :X ) / :X]
END


TO ABS :X
OP IF :X < 0 [- :X] [:X]
END
```

7. EJECUCION DEL PROGRAMA

Para ejecutar el programa, basta ordenar CCC y pulsar Return (Enter).

El programa comienza pidiendo las coordenadas del centro y el radio de cada una de las tres circunferencias (comenzando por la de menor radio) y las va representando sucesivamente en pantalla. Conviene tener presente que la pantalla funciona como una ventana, por la que puede observarse un rectángulo del plano euclideo centrado en el origen de coordenadas y de dimensiones aprox.(-120,120)x(-90,90). No obstante, las figuras no contenidas en este rectángulo no son representadas en la pantalla, aunque si pueden realizarse cálculos sobre ellas.

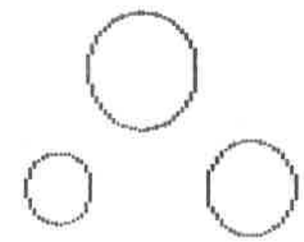
A continuación el programa ofrece unas instrucciones sobre el modo de pedir una cierta solución (i,j,k), o todas las soluciones. Para pedir, por ejemplo, la circunferencia solución que incluya a la primera y tercera circunferencia de las tres dadas, bastaría ordenar SOL 1 0 1 y aparecería dibujada dicha solución e indicadas las coordenadas de su centro y su radio. Si a continuación se desea obtener, por ejemplo, la circunferencia solución que incluye sólo a la tercera de las circunferencias dadas, se ordenará SOL 0 0 1 y el programa actua borrando la circunferencia solución anterior (la 101) y representando esta (la 001) e indicando las coordenadas de su centro y su radio.

Por comodidad en recordar el orden en que se dieron las tres circunferencias datos, la primera de ellas (la menor) se representa en color verde, la segunda en color naranja y la tercera en azul. Las circunferencias solución aparecen en color blanco.

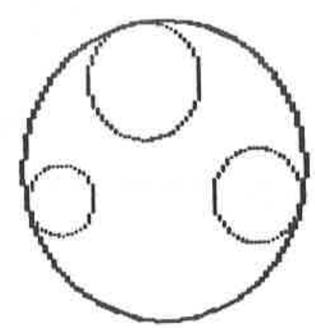
Si se desea obtener todas las soluciones basta ordenar TODAS y el programa irá dibujando sucesivamente cada una de las ocho posibles soluciones e indicando las coordenadas de su centro y su radio, una vez que ha terminado de reprentar cada circunferencia.

He aquí un ejemplo de cómo funciona el programa:


```
?CCC

CIRCUNFERENCIA TANGENTE A TRES DADAS
ESCRIBE CENTRO Y RADIO DE LA MENOR
-40 -20 15
ESCRIBE EL CENTRO Y RADIO DE OTRA
50 -20 20
ESCRIBE EL CENTRO Y RADIO DE LA OTRA
0 30 25
```



```
Para obtener una solucion, ordena:

SOL i j K

donde i,j,K = 0,1 con el siguiente con venio:

si i = 1 ( respect. 0 ) , entonces la
circunferencia solucion ( no ) incluye a la primera
si j = 1 ( 0 ) , ( no ) incluye a la segunda
si K = 1 ( 0 ) , ( no ) incluye a la ultima dada

Para obtener todas las soluciones, ordena: TODAS


?SOL 1 1 1
```

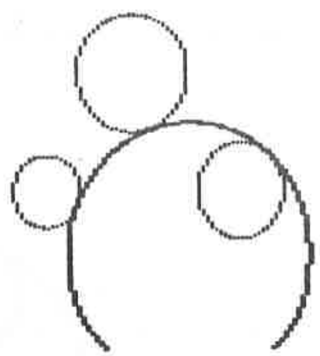


```
ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO 7.58379 -8.26629 Y RADIO 49.0101
```

?SOL 0 1 1

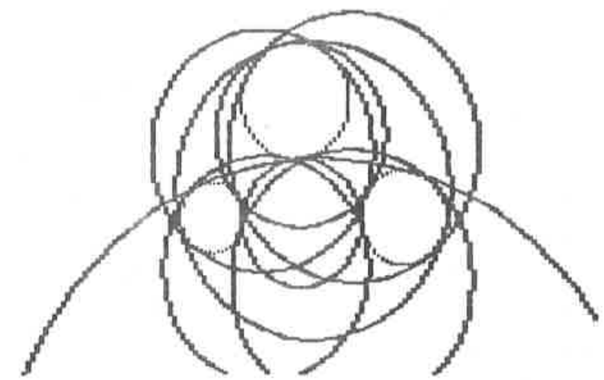
ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO 26.6557 10.2257 Y RADIO 73.1913

?SOL SOL 0 1 0



ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO 25.8655 -46.9244 Y RADIO 71.158

?TODAS



ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO 2.49619 -22.5109 Y RADIO 42.5718

ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO 7.58379 -8.26629 Y RADIO 49.0101

ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO -14.7863 -41.8738 Y RADIO 33.3798

ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO 26.6557 10.2257 Y RADIO 73.1913

ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO 1.81896 15.353 Y RADIO 54.7615

ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO 12.4782 -146.673 Y RADIO 137.119

ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO 25.8655 -46.9244 Y RADIO 71.158

ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION TIENE CEN.TRO -16.205 8.3694 Y RADIO 37.0274

8. VISUALIZACION DIDACTICA (PASO A PASO) DE LA SOLUCION POR INVERSION

Unas pequeñas modificaciones en el programa, permiten seguir paso a paso el proceso de determinación de soluciones al problema CCC por el método utilizado de la inversión.

El proceso puede efectuarse en los siguientes pasos:

1) representación (en color verde) de las tres circunferencias dadas, α', β' y γ'.
2) representación (en color naranja) del punto A y las circunferencias β y γ, resultantes de reducir al problema PCC.
3) representación (en azul) de las circunferencias δ y γ, inversas respectivas de β y γ.
4) representación (en violeta) de la recta t tangente (apropiada) a las circunferencias δ y γ.
5) representación (en violeta) de la circunferencia x, inversa de la recta t.
6) representación (en blanco) de la circunferencia solución buscada, concéntrica con x.

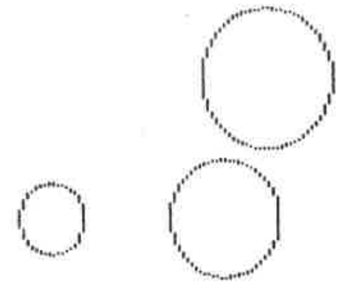
Para conseguir estos objetivos solo se precisa realizar ligeras modificaciones en los procedimientos CCC, SOL y S. Los procedimientos modificados, que denominamos respectivamente CCC', SOL' y S', se listan a continuación:


```
TO CCC'
CT TEXTSCREEN
PR []
PR []
PR []
PR [CIRCUNFERENCIA TANGENTE A TRES DADAS]
PR [ESCRIBE EL CENTRO Y RADIO DE LA MENOR]
MAKE "O RL
MAKE "A1 FIRST :O
MAKE "A2 FIRST BF :O
MAKE "A' LAST :O
CS
HT
WINDOW
.SETSCRUNCH 1.1
SETPC 2
CIRC :A1 :A2 :A'
PR [ESCRIBE EL CENTRO Y RADIO DE OTRA]
MAKE "O RL
MAKE "B1 FIRST :O
MAKE "B2 FIRST BF :O
MAKE "B' LAST :O
CIRC :B1 :B2 :B'
PR [ESCRIBE EL CENTRO Y RADIO DE LA OTRA]
MAKE "O RL
MAKE "C1 FIRST :O
MAKE "C2 FIRST BF :O
MAKE "C' LAST :O
CIRC :C1 :C2 :C'
MAKE "AC DIST :A1 :A2 :C1 :C2
MAKE "AB DIST :A1 :A2 :B1 :B2
SETPC 3
SOLUCIONES
MAKE "O 0
END

TO SOL' :I :J :K
IF :O = 1 [CIRX :Z1 :Z2 :Z']
S' :I :J :K
MAKE "O 1
END
```

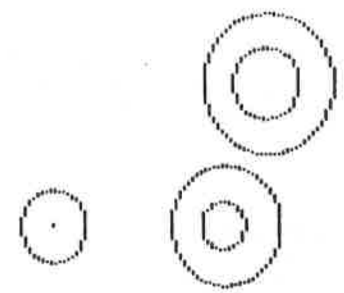
```
TO S' :I :J :K
IF :I = :J [MAKE "B :B' - :A'] [MAKE "B :B' + :A']
IF :I = :K [MAKE "C :C' - :A'] [MAKE "C :C' + :A']
SETPOS SE :A1 :A2
PD SETH 0 FD 1 PU
CIRC :B1 :B2 :B
CIRC :C1 :C2 :C
PR [REDUCCION AL PROBLEMA PCC ( EN NARANJA )]
MAKE "POT :AC * :AC - :C * :C
MAKE "AM :POT / ( :AB + :B )
MAKE "AN :POT / ( :AB - :B )
MAKE "AD ( :AN + :AM ) / 2
MAKE "D ( :AN - :AM ) / 2
SETPOS SE :A1 :A2
SETH TOWARDS SE :B1 :B2
FD :AD
MAKE "D1 XCOR
MAKE "D2 YCOR
MAKE "CD DIST :C1 :C2 :D1 :D2
IF :J = :K [MAKE "DE ( :D - :C )] [MAKE "DE :D + :C]
MAKE "W ARCCOS ( :DE / :CD )
SETPC 5
CIRC :D1 :D2 :D
CIRC :C1 :C2 :C
PR [SUS INVERSAS ( EN AZUL )]
SETPOS SE :D1 :D2
SETH TOWARDS SE :A1 :A2
MAKE "RA HEADING
SETH TOWARDS SE :C1 :C2
MAKE "RC HEADING
MAKE "R RED ( :RC - :RA )
IF OR :R > 0 :R = 0 [MAKE "S 1] [MAKE "S -1]
IF :J = 0 [RT :W * :S] [LT :W * :S]
MAKE "RDT RED HEADING
FD :D
MAKE "T1 XCOR
MAKE "T2 YCOR
SETPC 4
LT 90 PD FD 200 BK 400 FD 200 PU RT 90
PR [RECTA TANGENTE ( EN VIOLETA )]
SETH TOWARDS SE :A1 :A2
RT 180
MAKE "RAT RED HEADING
IF :J = 1 [MAKE "RAH RED ( :RDT + 180 )] [MAKE "RAH :RDT]
MAKE "N 90 - :RAH
MAKE "AH ( ( :T1 - :A1 ) * COS :N ) + ( :T2 - :A2 ) * SIN :N
MAKE "AL :POT / :AH
SETPOS SE :A1 :A2
SETH :RAH
FD :AL / 2
MAKE "Z1 XCOR
MAKE "Z2 YCOR
MAKE "Z ABS ( :AL / 2 )
IF :I = 1 [MAKE "Z' :Z + :A'] [MAKE "Z' :Z - :A']
CIRC :Z1 :Z2 :Z
PR [CIRCUNFERENCIA ( EN VIOLETA ) INVERSA DE LA RECTA TANGENTE]
SETPC 1
CIRC :Z1 :Z2 :Z'
PR [ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION ( EN BLANCO )]
( PR [TIENE CENTRO] SE :Z1 :Z2 [Y RADIO] :Z )
PR []
```


He aquí ahora un ejemplo de ejecución:

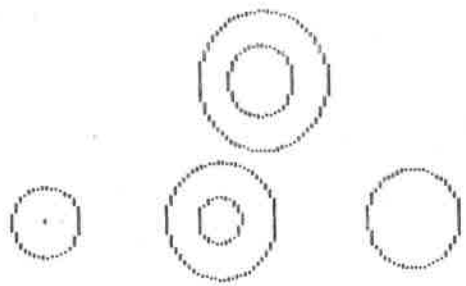
```
?CCC'

CIRCUNFERENCIA TANGENTE A TRES DADAS
ESCRIBE EL CENTRO Y RADIO DE LA MENOR
-100 -10 15
ESCRIBE EL CENTRO Y RADIO DE OTRA
-20 -10 25
ESCRIBE EL CENTRO Y RADIO DE LA OTRA
0 50 30
```



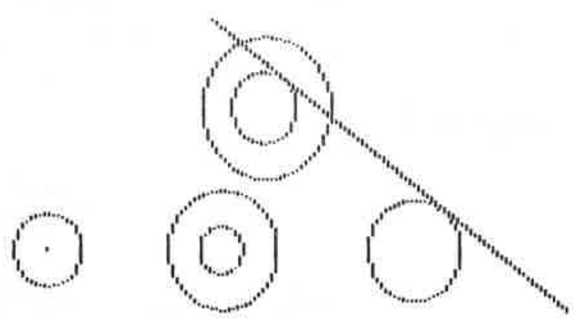
```
?SOL' 0 0 0
```



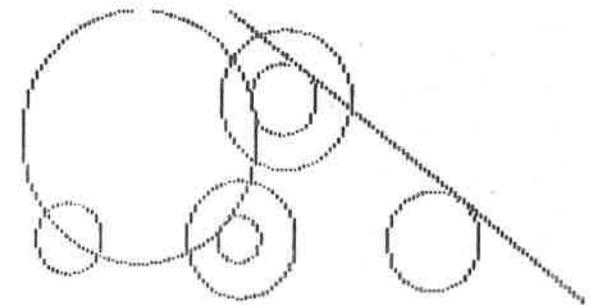
REDUCCION AL PROBLEMA PCC (EN NARANJA)



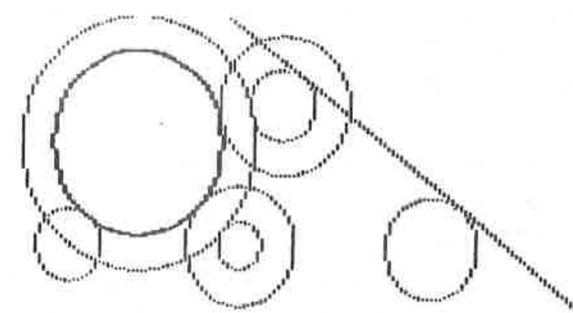
SUS INVERSAS (EN AZUL)



RECTA TANGENTE (EN VIOLETA)



CIRCUNFERENCIA (EN VIOLETA) INVERSA DE LA RECTA TANGENTE



ESTA CIRCUNFERENCIA SOLUCION (EN BLANCO)
TIENE CENTRO -67.4245 33.5655 Y RADIO 54.3991

9. CONCLUSION

Al desarrollar este trabajo se ha pretendido, en primer lugar, hacer notar la diversidad de soluciones que pueden encontrarse para un problema de enunciado aparentemente sencillo, pero cuya importancia es comparable a la de los tres problemas clásicos (cuadratura del círculo, duplicación del cubo y trisección del ángulo), si bien, a diferencia de estos, el problema de Apolonio sí tiene solución.

También se ha pretendido hacer notar que un problema de apariencia exclusivamente teórica, como es el de Apolonio, está relacionado con un problema surgido en el mundo físico real, como es el de Soddy, haciendo válida, una vez más, la famosa frase de Lobachevski: "no hay ninguna rama de la Matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real".

Por otra parte, el interés didáctico de la simulación informática desarrollada es evidente, si se tiene en cuenta que (según calculó Lemoine) la mas rápida solución con regla y compás requiere trazar 54 rectas y 19 circunferencias, mientras que la solución informática propuesta se obtiene inmediatamente, lo que, unido a su vistosidad, puede inducir a algunos alumnos a interesarse por el problema de Apolonio e, indirectamente, por las técnicas utilizadas en su resolución.

Finalmente, he de indicar que sólo han sido informatizados los problemas PCC y CCC para el caso de tres circunferencias exteriores dos a dos, por lo que, con ligeras variantes, el proceso puede ser continuado en las siguientes lineas:

1º) solución para circunferencias secantes, etc
2º) solución de los otros ocho casos del problema de Apolonio
3º) automatización de la discusión
4º) particularización para el problema de Soddy
5º) extensión al problema de Apolonio en dimensión tres (con Logo tridimensional)

BIBLIOGRAFIA

[1] ABELSON-DISESSA: Turtle Geometry.The computer as a medium for exploring Mathematics; M.I.T. 1981

[2] BOYER: A history of Mathematics; Wiley. 1968

[3] COURANT-ROBINS: ¿Qué es la Matemática?; Aguilar. 1971

[4] COXETER: Fundamentos de Geometría; Limusa-Wiley.1971

[5] COXETER: The problem of Apollonius; Am. Math.Monthly, 75(1968)5-15

[6] COXETER: Loxodromic sequences of Tangent Spheres; Aequationes Mathematicae, 1(1968)104-121

[7] ETAYO: "El algebra del cinquecento". Conferencia del curso "Historia de la Matemática hasta el siglo XVII"; Real Academia de Ciencias (11-III-1986)

[8] F.G.M.: Exercises de Géométrie; Maison. 1912

[9] FOUCHE: Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné: Nouvelles Ann. Math. (1892)227-224

[10] GUZMAN: "Apolonio". Conferencia del curso "Historia de la Matemática hasta el siglo XVII"; Real Academia de Ciencias (27-II-1986)

[11] HADAMARD: Lecons de Géométrie Elementaire; Colin.1947-49

[12] HEATH: A history of Greek Mathematics; Dover. 1981

[13] LEMOINE: Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions a la comparaison de quelques solutions du probléme d' Apollonius: Nouvelles Ann. Math. (1882)453-474

[14] MANNHEIM: Note de Géométrie; Nouvelles Ann.Math. (1885)105-109

[15] PEDOE: On a theorem in Geometry; Am.Math. Monthly, 74(1967)627-640

[16] PUIG ADAM: Curso de Geometría Métrica

[17] ROUCHE-COMBEROUSSE: Traite de Géométrie; Gauthier-Villars. 1912

[18] VAN DER WAERDEN: Geometry and Algebra in Ancient Civilizations: Springer. 1983

[19] VIETA: Varia Responsa. IX. Apollonius Gallus; Real Academia de Ciencias

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

ALGUNAS CUESTIONES DIDACTICAS ACERCA DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON DESFASE

José Miguel Pacheco Castelao
Isabel Fernández de la Nuez
César Rodríguez Mielgo

FACULTAD DE CIENCIAS DEL MAR
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CANARIAS
Las Palmas de Gran Canaria

En un trabajo anterior publicado en este mismo boletín (ver [4]) se efectuaban algunas consideraciones, que se reflejaban en el estudio de las curvas solución de una ecuación diferencial de primer orden con desfase. Sin ánimo de rigor, sino más bien con carácter expositivo, se vuelve aquí sobre aquellas ideas, teniendo en cuenta las posibles aplicaciones didácticas y metodológicas.

1. Consideraciones pedagógicas.

Los contenidos de los programas de matemáticas tienden a evolucionar en función de las aplicaciones, cada vez más extendidas, que pueden darse a teorías que se podían considerar, hasta hace poco, lejanas de su aplicabilidad inmediata. El auge de los métodos numéricos, cada vez más asequibles, ha hecho cambiar la mentalidad de profesores y alumnos hacia una comprensión más intuitiva, pero no por eso menos profunda, de las características esenciales de las teorías, dejando de lado las exigencias de rigor que hasta hace poco constituían el grueso de los programas. Esto es evidente en los cursos de matemáticas aplicadas y en los cursos preuniversitarios. Hay que suponer que las reformas actualmente en marcha, tanto en las Enseñanzas Universitarias como las proyectadas en el 2º ciclo de Bachillerato, permitirán extender este punto de vista en la realidad diaria del aula.

Con motivo de un curso sobre "Modelos matemáticos" que se imparte en 5º curso de la Facultad de Ciencias del Mar en la Universidad Politécnica de Canarias, y que contiene un gran porcentaje de ideas acerca del estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias, se planteó, a la vista de ejemplos extraidos de las Ciencias Naturales, un breve estudio de las propiedades de las ecuaciones diferenciales con retraso o desfase. Ello nos movió a redactar esta nota, en la que se entremezclan las ideas didácticas con las puramente matemáticas.

La motivación para introducir las ecuaciones diferenciales con retraso (desfase, retardadas,...) (EDD)es fácil de hallar en ejemplos sencillos. Basta observar el efecto de un medicamento, que no es inmediato a su suministro, o analizar el efecto de la aplicación de controles externos a determinados procesos, etc. Los ejemplos pueden extenderse incluso en niveles elementales. La mayoria de los modelos matemáticos de procesos de la vida real suelen describir la evolución de una magnitud que se supone continua y diferenciable (ésta es una de las hipotésis simplificadoras de la modelización), a lo largo del tiempo, esto es, se estudia el comportamiento de la primera derivada de la magnitud. En fórmulas, se contemplan ecuaciones del tipo:

$$x' = f(x,t)$$

En la expresión de f intervienen, por lo general, parámetros que deben inferirse de situaciones reales, lo cual es otra área del problema de la modelización. No entraremos aquí en esas ideas. Cuando se introduce un desfase o retraso, la ecuación anterior deviene en otra del tipo:

$$x' = g(x,x-T,t)$$

Por regla general, la dependencia explicita de g con x–T suele ser de carácter empirico, y en las aplicaciones puede tomarse como relativamente sencilla.

2. La pérdida de unicidad y de otras propiedades.

La característica esencial utilizada en las Ecuaciones Dife-

renciales radica en la unicidad de la solución del problema de valores iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right\} \text{I}$$

Esta propiedad, que es de importancia capital en las aplicaciones, se pierde en las EDD. Un ejemplo sencillo ayudará a comprenderlo Sea la ED $x' = -x$ con la condición inicial $x(0)=1$. La solución general es

$$x = ce^{-t}$$

y el valor de c para la condición dada es c=1, esto es, tenemos:

$$x = e^{-t}$$

como solución única del problema anterior.

Supongamos ahora la ecuación, derivada de la anterior por introducción de un retraso:

$$\left.\begin{array}{l} x' = -x(t-T) \\ x(0) = 1 \end{array}\right\} \text{II}$$

Si se desea llevar a cabo una integración, hay que conocer la forma explícita de $x(t-T)$, esto es, el aspecto de la magnitud x en el intervalo $[-T,0)$. Muy apropiadamente, podemos denominar a este aspecto la "historia" de x en ese intervalo.

Conocida la historia (lo que equivale a decir que para resolver el problema II hay que añadir una función arbitraria $X(t)$):

$$\left.\begin{array}{l} x' = -x(t-T) \\ x(0) = 1 \\ x(t) = X(t) \text{ si } t\in[-T,0) \end{array}\right\} \text{III}$$

el problema III puede ser resuelto integrando en $[0,T)$, determinando el valor de x en t=T y usándolo como condición inicial para el nuevo intervalo $[T,2T)$ etc. Veámoslo:

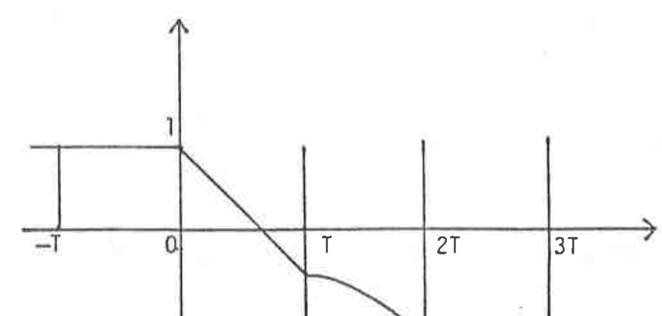


FIGURA.1

En el intervalo $[0,T)$ es $x'= -x(t-T)=-1$, de donde $x=-t+c$, luego $c=1$. La solución es la representada en la figura, que, si $t=T$, toma el valor $x= -T+1$. Usando ahora estos, en el intervalo siguiente será

$x=c+t-t^2/2$ Ahora el valor de c es $1-2T+T^2/2$ I y se obtiene otro tramo de la curva,etc..

Notamos que en los puntos 0, T, 2T, etc... se puede perder la diferenciabilidad de la solución, al contrario de lo que ocurre en el problema I.

Si ponemos $T=\pi/2$ es fácil hallar una solución diferenciable y además expresable en forma compacta para el problema III:

$x= \cos t$, de donde $x'= -\operatorname{sen} t= -\cos(t-\pi/2)= -x(t-\pi/2)$. En este caso la función historia es también $x=\cos t$.

Por tanto, observamos que las características esenciales de la solución de las EDD dependen no sólo de cómo sea la expresión de la función $g(x, x-T,t)$, sino también de la historia pasada del proceso. Esto se puede ilustrar en una buena sesión de clase acerca de la cuestión, modificando las funciones $X(t)$ y comparando losresultados, indicando el cúmulo de dificultades que se plantean. Por ejemplo ¿qué condiciones debe satisfacer $X(t)$ para no perder la diferenciabilidad en los puntos $t=kT$, $k\in\mathbb{N}$?

3. La aparición de oscilaciones.

Hay muchos procesos en los que la evolución de una variable x depende de las interacciones de la variable consigo misma. En particular, en la dinámica de poblaciones es corriente este fenómeno. Cuando se da este tipo de procesos, la introducción de desfases suede originar oscilaciones. El peligro está en que esas oscilaciones tiendan a amplificarse, destruyendo así el proceso. Vamos a presentar un ejemplo ilustrativo, precisamente el que motivó el trabajo citado al principio.

Si x representa una población con competencia intraespecifica, se puede describir la evolución de x con:

$$x'= ax -bx^2$$

donde a es el coeficiente de crecimiento y b el de decrecimiento debido a la competencia entre miembros de la pobación. Generalmente escribimos

$$x'= ax(1-bx/a) = ax(1-x/E)$$

y a la constante b/a la denotamos por 1/E, donde E representa el valor asintótico de x para $t\to\infty$.

En efecto, haciendo $x'= 0 = ax- bx^2$ obtenemos $x= a/b = x_{max}$, que corresponde al valor de x para el que la población deja de crecer y se estabiliza, luego $E=x_{max}$. Si imponemos una condición inicial $x(0)=x_0$, la solución, denominada logística, es $x = E/[1+E/x_0-1]e^{-at}$. Cuando $t\to\infty$, independientemente de si $x_0>E$ ó $x_0<E$, x tiende á E, pero sin que haya intersección entre la curva $x=x(t)$ y la recta $x=E$. (El cálculo explícito de x es un buen ejercicio de cálculo elemental, así como el análisis subsiguiente).

Introduzcamos ahora un desfase en el término $1-x/E$, que pasa a ser $1-x(t-T)/E$. Este desfase puede representar el conflicto generacional, por ejemplo, en algunas situaciones concretas.

Sea pues, conocida la historia del proceso en el intervalo $[-T,0)$. En cada punto t, el signo de x' depende únicamente de si $x(t-T)$ es mayor o menor que E. Si es mayor, el signo de x' es negativo, y x decrece, y al revés. Luego la evolución de $x(t-T)$ indicará el comportamiento de x en el futuro:

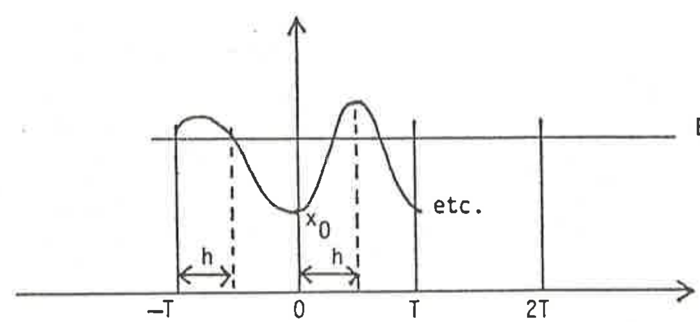


FIGURA.2

Atendiendo al número de veces que $x(t)$ intercepte la recta $x=E$ en $[T,0)$ se predice el número de ondas que aparecen en el siguiente intervalo, etc. La interpretación del fenómeno puede hacerse de modo fácil: Si el retraso T es grande, en un proceso con historia más o menos real, es posible que se produzcan ondas en el intervalo $[-T,0)$ que se propagarán a lo largo de la vida del proceso. La desestabilización se -- producirá si la amplitud de la onda propagada tiende a crecer desmedidamente, lo que puede ocurrir si se dan combinaciones adecuadas de T y los parámetros a y E del proceso. El análisis se escapa de esta presentación elemental (vease [2] para más detalles) aunque las ideas expuestas pueden servir de motivación a unas sesiones de clase sobre cuestiones de -- control, que no deben faltar en los cursos universitarios.

4.Referencias.

1. Braun, M. (1983): "Differential Equations and its Applications",Edit. Springer, New York.

2. May, R.M. (1976), "Theoretical Ecology", pp.4/26. Blackwell Scient. Publish., Oxford

3. Maynard Smith, J. (1978), "Models in Ecology", Cambridge U.P.

4. Pacheco, J. (1983), "Ecologia del Profesorado, o la Administración -- no aplica las Matemáticas". Bol.Soc.Cast."Puig Adam", nº 1, Madrid.

GENERACION ALEATORIA DE EJERCICIOS

Por Ricardo Aguado-Muñoz

1 INTRODUCCION

La generación aleatoria de ejercicios (GAE) consiste en la creación, mediante ordenador, de una lista de enunciados y otra de soluciones. Todos los ejercicios de la lista son del mismo tipo, únicamente los datos varían aleatoriamente de uno a otro.

Un programa GAE nos permite obtener el número deseado de ejercicios, de acuerdo con nuestras necesidades.

El hecho de tener una amplia lista de ejercicios "casi iguales", permite individualizar las tareas de los alumnos : cada alumno resuelve un ejercicio "diferente". El trabajo de calificación o autocalificación se ve facilitado al disponer de la lista de soluciones.

En temas como estadística, el solo hecho de disponer de una tabla de datos, distribuidos a nuestro gusto, ya supone una comodidad.

2 CUESTIONES DE ESCRITURA

Una de las mayores dificultades que se presentan al preparar un programa de GAE, es la propia escritura del enunciado, bien sea en la pantalla o en el papel de la impresora, pues los ordenadores no están especialmente dotados para la escritura matemática convencional. Piénsese en la escritura del polinomio

$$x^5 + x^3 - 17x^2 - 6x \ ,$$

que exige dos líneas : una para los exponentes y otra para las x y los coeficientes; con una serie de convenciones que hay que "enseñar" al ordenador, como son : los coeficientes 1 y -1 no se escriben, salvo en el término independiente; cuando el coeficiente es cero, no se escribe el término correspondiente; el exponente 1, tampoco se escribe; el espacio entre dos exponentes está en función del número de cifras de los coeficientes; etc.

Si se va a generar ejercicios de polinomios, se hace necesario diseñar una subrutina o procedimiento que los escriba tomando como entrada el grado y los coeficientes.

3 LOS DATOS

Los datos, que varían de un ejercicio a otro, son elegidos al azar dentro de un rango prefijado para que los números sean manejables.

La mayor parte de las veces hay que ajustar este rango de un modo experimental para que las soluciones pertenezcan, a su vez, a un rango que, naturalmente, está limitado por las condiciones de escritura y por la tradición escolar.

Otras veces hay que corregir el puro azar, porque la naturaleza del ejercicio así lo exige. Supóngase, por ejemplo, que se quiere obtener ejercicios de simplificación de fracciones P/Q , y que se decide que los terminos P,Q sean números de dos o tres cifras. Pues bien el 70% de las fracciones, así obtenidas, son irreducibles. No parece sensato obtener tantos ejercicios de simplificación que ... no se puedan simplificar. De algún modo habrá que corregir esta tendencia.

4 RESOLVER EJERCICIOS O PREPARARLOS

¿ Es mejor generar los datos y luego calcular la solución ? O bien, ¿ generar la solución y luego preparar un enunciado que se adecue a esa solución ?

No se puede responder de una manera absoluta a

esas preguntas. Depende de la naturaleza del ejercicio. Si el algoritmo de resolución es fácil de programar y su ejecución rápida, podemos hacer que el ordenador calcule realmente la solución. En otros casos podemos intentar la vía de generar primero la solución y luego preparar un enunciado adecuado.

En el apartado que sigue se desarrolla un ejemplo ilustrativo de esta última posibilidad.

5 GENERACION DE DETERMINANTES

Se trata de obtener un número ilimitado de ejercicios de cálculo de de determinantes de matrices cuadradas de orden cualquiera (no superior a 20).

Para matrices de orden superior a tres, el cálculo del determinante es complicado. Intentemos, pues, preparar una matriz cuyo determinante sea un número fijado de antemano, por ejemplo, 5. Por comodidad, ilustramos el proceso con un ejemplo de orden 3:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} 15 & -10 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}}$$

La matriz A es triangular, con "unos" en la diagonal principal, por tanto, su determinante vale 1. La B también es triangular y tiene "unos" en la diagonal principal, excepto en la posición (1,1), que tiene precisamente un 5; su determinante valdrá 5. En consecuencia, el determinante de C valdrá 1x5=5.

Los elementos que están por encima de la diagonal principal en A y por debajo en B, que son irrelevantes a efectos del valor del determinante de C, son importantes porque serán los que hagan variar el "aspecto final" de la matriz C. Estos números han de cumplir ciertas condiciones : no ser muy grandes, para que los elementos de C tampoco lo sean; no ser nulos, porque si no aparecen muchos ceros en C; y, por supuesto, ser aleatorios.

Finalmente, observemos que este algoritmo conserva la última columna de A y la última fila de B. Para evitar esto, la matriz C, que finalmente se utiliza, es la que resulta de cambiar la última columna por la suma de ella con la penúltima y, despues, la última fila por la suma de ella con la anterior. Con todos estos cambios el determinante se conserva :

$$\begin{pmatrix} 15 & -10 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & -10 & -7 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & -10 & -7 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

He aqui un programa en BASIC que genera ejercicios de determinantes:

```
10 REM determinantes
20 CLS
30 DEFINT A-Z
40 INPUT "Determinantes de  orden ";M:PRINT
50 INPUT "Cuántos ejercicios ";N
60 DIM X(N),A(M,M),B(M,M),C(M,M)
70 REM Generación de la matriz
80 FOR I=1 TO M:A(I,I)=1:B(I,I)=1:NEXT I
90 FOR K=1 TO N
100 FOR I=1 TO M-1
110 FOR  J=I+1 TO M
120 A(I,J)=INT(RND(1)*5)*2-3
130 B(J,I)=INT(RND(1)*5)*2-3
140 NEXT J
150 NEXT I
160 X(K)=INT(RND(1)*11-5)
170 B(1,1)=X(K)
180 FOR I=1 TO M
190 FOR J=1 TO M
200 C(I,J)=0
210 FOR L =1 TO M
220 C(I,J)=C(I,J)+A(I,L)*B(L,J)
230 NEXT L
```



```
240 NEXT J
250 NEXT I
260 FOR I=1 TO M
270 C(I,M)=C(I,M)+C(I,M-1)
280 NEXT I
290 REM Escritura de la matriz
300 PRINT:PRINT:PRINT "Num.";K:PRINT
310 FOR I=1 TO M
320 PRINT CHR$(179);
330 FOR J=1 TO M
340 PRINT RIGHT$("  "+STR$(C(I,J)),3);" ";
350 NEXT J
360 PRINT CHR$(179)
370 NEXT I
380 NEXT K
390 REM Escritura de la solución
400 PRINT:PRINT:PRINT"Soluciones de los
determinantes":PRINT
410 FOR K=1 TO N
420 PRINT "Num.";K; "  det =";X(K)
430 NEXT K
440 END
```

En las lineas 320 y 360 figura CHR$(179), que es la rayita vertical. Si su ordenador tiene esa rayita como carácter gráfico, puede sustituir CHR$(179) por "|".

El ordenador pregunta primero por el orden de las matrices que se van a manejar y luego por el número de ejercicios que se desean.

Veamos qué ocurre cuando se ejecuta el programa :

```
              Determinantes de orden ? 2

              Cuántos ejercicios ? 3

Num. 1

|  9  12 |
|  3   4 |
```

Num. 2

$$\begin{vmatrix} 11 & 16 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Num. 3

$$\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Soluciones de los determinantes

Num. 1 det = 0
Num. 2 det =-4
Num. 3 det =-4

Determinantes de orden ? 4

Cuántos ejercicios ? 2

Num. 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 19 & -2 & 1 \\ 7 & -15 & 2 & -1 \\ 8 & -4 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Num. 2

$$\begin{vmatrix} -9 & -9 & 26 & 31 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -4 & -5 \\ -3 & -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Soluciones de los determinantes

Num. 1 det =-3
Num. 2 det = 4

Determinantes de orden ? 10

Cuántos ejercicios ? 1

Num. 1

$$\begin{vmatrix} -37 & -7 & -2 & 9 & 18 & -3 & 14 & 11 & 14 & 17 \\ -17 & 15 & 8 & -1 & -6 & 21 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 12 & 28 & 18 & -3 & 20 & 15 & -4 & -9 & -8 & -11 \\ 7 & -29 & -9 & 15 & 20 & 21 & -2 & -7 & -6 & -9 \\ -14 & 14 & 8 & 0 & 6 & 9 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -27 & -15 & 23 & 21 & 33 & -8 & -3 & -6 & -9 \\ 8 & -6 & -4 & 2 & -4 & 4 & -4 & -3 & -4 & -5 \\ 7 & -3 & -3 & 1 & -3 & -1 & -5 & -3 & -4 & -5 \\ -12 & 6 & 2 & 0 & -4 & 8 & 10 & 10 & 10 & 13 \\ -3 & 3 & 1 & -1 & -3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Soluciones de los determinantes

Num. 1 det = 2

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlos.

- - - - -

UNA APLICACION PRACTICA: MEDIDA DEL RADIO DE LA TIERRA

Por Mª Agripina Sanz García
I.B. "Giner de los Rios" de Segovia

A propuesta del Seminario de Matemáticas del I.B. "Francisco de los Ríos" de Fernán-Núñez (Córdoba) nos animamos a colaborar en la determinación del radio de la Tierra.

Seguimos puntualmente el método descrito en el artículo "Determinación del radio de la Tierra por el método de Eratóstenes" de José Mª Vaquero Guerri, publicado en el nº 6 de la Nueva Revista de Enseñanzas Medias (Verano 84), y consultamos también la siguiente bibliografía:

- "El mundo de las matemáticas".- James R. Newman, Ed. Grijalbo.
- "Nuevos divertimientos matemáticos".- M. Mataix, Ed. Marcambo.

Explicamos a los alumnos de 2º de B.U.P. el método, que es de una sencillez extraordinaria y se basa en lo siguiente:

1º) En Asuán -que entonces se llamaba Syena-, situada en la orilla del Nilo, a mediodía, en un día a mitad del verano una varilla vertical no daba sombra alguna.

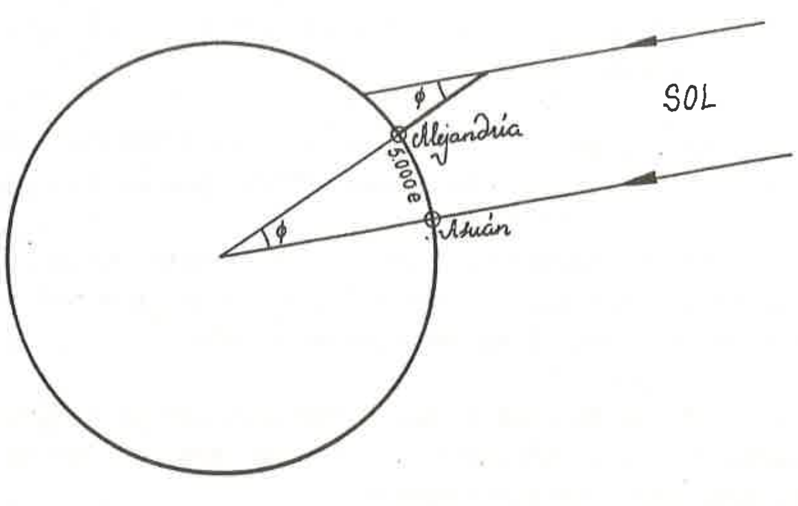
2º) Asuán está a unos 5.000 estadios de Alejandría. (Un estadio era aproximadamente, la octava parte de una milla marina), aproximadamente 160 metros.

3ª) Asuán está justamente al sur de Alejandría. Como, debido a la enorme distancia, podemos considerar que los rayos solares inciden paralelamente sobre la Tierra, el ángulo ϕ que forma el rayo del sol con la varilla vertical en Alejandría, es igual al que forma la vertical de Alejandría con el radio de la tierra que pasa por Asuán.

Se establece la siguiente proporción:

$$\frac{\phi}{4 \text{ ángulos rectos}} = \frac{5.000}{\text{circunferencia de la tierra}}$$

Por lo tanto, solamente necesitaba hallar el ángulo, lo que era muy fácil conociendo la altura de la varilla de Alejandría y midiendo la sombra que proyectaba (cuando la sombra de la de Asuán era nula).



Los rayos del sol caen perpendicularmente en Asuán, y en Alejandría forman un ángulo: = 7° 30'.

Así, Eratóstenes pudo establecer la proporción:

$$\frac{7^\circ\ 30'}{360^\circ} = \frac{5.000 \text{ estadios}}{X \text{ longitud circunferencia de la Tierra}}$$

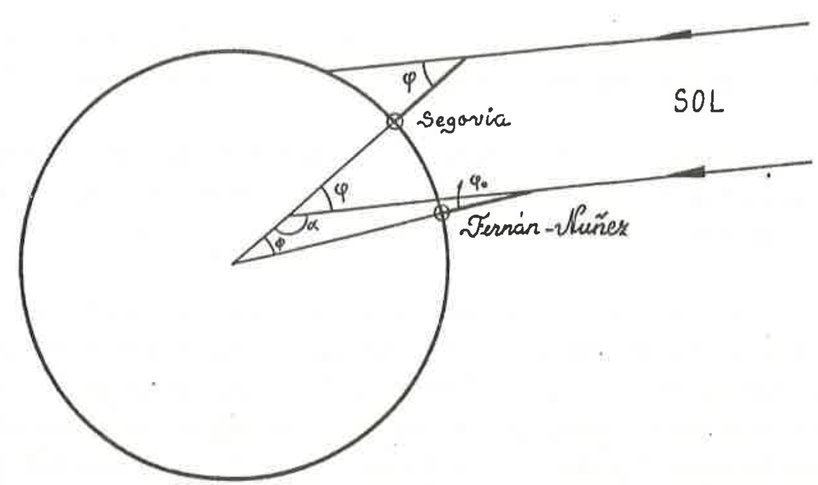
Obtuvo,

$$X = 250.000 \text{ estadios} = 38.400 \text{ kms}$$

siendo el valor admitido actualmente de 40.030 kms.

Una vez conocido el método, lo adaptamos a nuestra situación concreta:

Sí las dos poblaciones, Segovia y Fernán-Núñez estuvieran situadas en el mismo meridiano, el procedimiento sería el siguiente:



Como,

$$\alpha = 180° - \phi$$

entonces,

$$\phi = 180° - (\alpha + \phi_0) = \phi - \phi_0$$

o sea, el ángulo central, ϕ es la diferencia de los ángulos que forman los rayos solares con la vertical, en ambas poblaciones, a las 12 horas solares.

Como,

$$SF = \phi \cdot R \quad \text{(en radianes)}$$

el radio de la Tierra,

$$R = \frac{SF}{\phi} = \frac{363}{\phi - \phi_0}$$

Como Segovia y Fernán-Núñez, no están en el mismo meridiano (hay 8° de diferencia), tenemos que medir la longitud de la sombra en el mismo momento:

Cuando los rayos del Sol sean paralelos al plano que determinan ambas poblaciones y el centro de la Tierra: 1 h 35'.

Llegado el día previsto, 6 de marzo de 1987, estando en contacto telefónico ambos centros, procedimos a medir las longitudes de las sombras respectivas:

Sacamos al patio varias mesas, que se nivelaron, adaptamos las varillas soportes, de las que colgaba una plomada, y en la parte superior del hilo se hizo un nudo, cuya sombra se proyectaba en las cartulinas fijadas en la mesa. Los alumnos fueron marcando cada 2 minutos las sucesivas sombras, anotando al lado

la hora exacta de cada marca, desde la 1 de mediodía a las 2.

En Segovia, las 12 solares, el 6 de marzo, eran las 13 h 27' (hora oficial). En ese momento, una varilla vertical sobre el punto que determina Segovia en un mapa de España, proyecta su sombra hacia el Norte. Observando cuando la sombra coincidía con la línea Segovia-Fernán Núñez, trazada en el mapa, encontramos el momento preciso en que el Sol estaba en el plano que determinan ambas poblaciones y el centro de la Tierra: 1 h 35'.

Tomando en ese momento la longitud de la sombra sobre la cartulina, l, y la distancia del nudo de la cuerda a la mesa h, tenemos:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{l}{h}$$

El valor medio de ϕ, para los seis equipos participantes fue:

$$\phi = 47{,}4251°$$

El valor medio del ángulo ϕ_0 determinado de la misma manera en Fernán-Núñez fué:

$$\phi = 44{,}1293°$$

Sustituyendo en $R = (360.360/(\phi - \phi_0)2\pi$, resulta

$$R = 6.310{,}55 \text{ kms}$$

y la longitud de la circunferencia terrestre:

39.650 kms

Si se tiene en cuenta el valor conocido del radio de la Tierra 6370 kms, se observa que el error cometido es de 60 kms.

El interés suscitado entre los alumnos y la colaboración entre distintos centros, justifican la realización de esta sencilla y bonita experiencia.

RESEÑA DE LIBROS

"HISTORIA DE LA MATEMATICA HASTA EL SIGLO XII".- Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid 1986, 203 págs.

En los meses de febrero y marzo de 1986 la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales dictó un ciclo de conferencias sobre "Historia de la Matemática hasta el siglo XVII". Como en la presentación se anunciaba, éste se considera como el primero de tres ciclos de conferencias que cubran una Historia de las Matemáticas desde sus orígenes hasta el siglo XX.

El ciclo de conferencias tuvo una excelente acogida según se desprende del numeroso público interesado que participó en él. No en vano, reconsiderar los inicios de la Matemática y su desarrollo a través del tiempo, permiten descifrar el camino actual, más fragmentado, por la imposibilidad de abarcar individualmente todos sus logros.

Ahora la Real Academia edita ese ciclo de conferencias en un libro perteneciente al área de Historia de la Ciencia, cuyo contenido es de suma utilidad para todos los interesados en la historia del Pensamiento.

El índice consta del siguiente sumario:

- MIGUEL DE GUZMAN OZAMIZ.- Los Pitagóricos.
- MARIANO MARTINEZ PEREZ.- Los orígenes del método axiomático-deductivo.

- ALBERTO DOU MASDEXEXAS.- Euclides.
- BALTASAR RODRIGUEZ SALINAS.- Arquímedes.
- MIGUEL DE GUZMAN OZAMIZ.- Apolonio.
- JOSE MARIA TORROJA MENENDEZ.- La Astronomía griega.
- JUAN VERNET GINES.- La Matemática árabe.
- JOSE J. ETAYO MIQUEO.- El Algebra del cinquecento.
- ENRIQUE LINES ESCARDO.- Fermat.

C.C.

PRINCIPIOS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL. por N.J. Nilsson. Ed. Diaz de Santos. Madrid. 1987. 400 páginas. 4.240 pts.

Nos llega al fín, traducida al castellano, esta importante obra, que se había hecho prácticamente imprescindible como introducción al estudio de la Inteligencia Artificial. En ella, el profesor Nilsson hace una exposición magistral de las ideas fundamentales que subyacen bajo los recientes desarrollos de esta nueva disciplina.

Venía siendo usual agrupar los escritos sobre Inteligencia Artificial atendiendo a sus campos de aplicación, con lo que se ensombrecía su unidad conceptual. En esta obra, los últimos avances en esa ciencia aparecen clasificados por los conceptos generales informáticos o lógicos con los que están relacionados, tales como los tipos de estructuras de datos utilizados, las clases de operaciones que se realizan con ellos, y las características de las estrategias de control usadas. De este modo se consigue ir al fondo de los problemas que se agrupan con el nombre de Inteligencia Artificial, dándole así una unidad que anteriormente era difícil de percibir.

El libro hace especial hincapié en el estudio de los Sistemas de Producción y en el del Cálculo de Predicados de primer orden, como los instrumentos más importantes para abordar los problemas de la Inteligencia Artificial.

El libro tiene su origen en los cursos y seminarios que el autor impartió en las Universidades de Stanford y Massachusetts, en Amherts, y resulta de fácil estudio para estudiantes universitarios con un mínimo de formación informática. Al final de cada capítulo incluye jugosos ejercicios y una bibliografía tan profúsamente comentada que proporciona una clara visión del estado de la Ciencia en el momento de su publicación.

Un resumen de su índice es el siguiente:
Sistemas de producción e I.A. Estrategias de búsqueda para sistemas de producción de I.A. Sistemas de producción descomponibles. El cálculo de predicados en I.A. Sistemas de refutación por resolución. Sistemas de deducción basados en reglas. Sistemas generadores de planes básicos. Sistemas avanzados de generación de planes. Representación de objetos estructurados. Previsiones.

J. F.

GENERACIÓN ALEATORIA DE EJERCICIOS CON ORDENADOR, por Ricardo Aguado-Muñoz. Madrid, 1987. 142 págs.

Este libro desarrolla la idea que se expone en el artículo del mismo autor que aparece en este número acerca de la G. A. E. o Generación aleatoria de ejercicios.

Todos los interesados en las aplicaciones de los ordenadores a la Enseñanza conocen bien las obras del profesor Aguado-Muñoz, que han sido comentadas en otros números de nuestro Boletín. Esta presenta las mismas características de amenidad, grata presentación y profundidad en el estudio de los problemas abordados, dentro de una apariencia elemental y sencilla.

El autor resuelve en este libro el problema de generar muchos ejercicios de un tipo determinado, junto con sus soluciones, dando los programas,codificados en BASIC,que permiten llevar a cabo esa tarea. No cabe duda de que esta colección de programas puede ser de utilidad en ciertas ocasiones, así como servir de modelo para preparar otros análogos; pero además de esta utilidad directa, el libro resulta sumamente instructivo para cualquier profesor interesado en las aplicaciones de los ordenadores en la Enseñanza, como un ejemplo clarísimo de que lo difícil, y lo interesante, a la vez, no es resolver los problemas mediante un programa adecuado, sino plantear acertadamente esos problemas, de modo que respondan exactamente a las necesidades reales del usuario para el que se resuelven. Por eso creemos que la utilidad de este libro va mucho más allá de su aplicación directa a la generación de ejercicios resueltos.

J. F.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1ª

Las constantes reales a, b, A, B son conocidas y

$$f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\,\mathrm{sen}\,\theta - A\cos 2\theta - B\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

Probar que si $f(\theta) \geq 0$ para todo número real θ, es

$$a^2 + b^2 \leq 2 \qquad \text{y} \qquad A^2 + B^2 \leq 1$$

(De la Olimpiada Matemática Internacional de 1977).

PROBLEMA 2ª

Se supone que m y n son números naturales tales que $m > n \geq 1$ y que las tres últimas cifras de la representación decimal de 1978^m son las mismas que las de la de 1978^n.

Encontrar los valores de m y n que hacen mínima la suma m+n.

(De la Olimpiada Matemática Internacional de 1978).

PROBLEMA 3ª

Sea P un punto interior a un triángulo dado ABC, y sean D, E y F, los pies de las perpendiculares trazadas desde P a las rectas BC, CA y AB, respectivamente.

Encontrar todos los puntos P para los que:

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

sea mínimo.

(De la Olimpiada Matemática Internacional de 1981).

PROBLEMA 4ª

Sea a un número entero no negativo cualquiera y definamos la sucesión $\{a_n\}$ poniendo $a_0 = 0$ y para todo n natural,

$$a_{n+1} = (a_n+1)\, a + (a+1)\, a_n + 2\sqrt{a(a+1)\, a_n\, (a_n+1)}$$

Demostrar que para todo n, a_n es entero no negativo.

(Sugerido por Canadá para la O.M.I. de 1983).

CORRIGENDA

En el problema 3ª propuesto en el Boletín nª 11 (pág. 87) se deslizó una errata. Donde dice "x' la circunferencia de centro B que pasa por C' y D..." debe decir:

"x' la circunferencia de centro B' que pasa por C' y D ...."

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 6ª (Boletín nª 4)

Sean a, b, c, d, enteros impares, tales que verifican:

1ª) $0 < a < b < c < d$.

2ª) $ad = bc$.

3ª) $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$, $k, m \in \mathbb{N}$.

Demostrar que $a = 1$.

Incluímos otra solución de este problema, distinta de la publicada en el número precedente.

Solución

Sea $p = \text{m.c.d.}(a,b) \Longleftrightarrow a = pr$, $b = ps$, $1 = \text{m.c.d.}(r,s)$.

Por $ad = bc$, $prd = psc \Longrightarrow rd = sc$, luego $r|sc$ y como $1 = \text{m.c.d.}(r,s)$, se deduce que $r|c \Longleftrightarrow c = rq \Longrightarrow d = sq$.

Luego se reduce a encontrar p, q, r, s, impares positivos tales que:

(1) $pr < ps < qr < qs$

(2) $pr + qs = 2^k$

(3) $ps + qr = 2^m$

De (1) se deduce que $r < s$, $p < q \Longleftrightarrow s - r, q - p > 0$. Y de (2) y (3), $1 = \text{m.c.d.}(p,q) = \text{m.c.d.}(r,s)$ por ser impares.

De (2) - (3) obtenemos, $(q-p)(s-r) = 2^k - 2^m > 0$, pues $s - r$, $q - p > 0$. Luego $m < k$.

Y de (2) + (3), se obtiene: $(q+p)\ (s+r) = 2^k + 2^m$.

Estas dos últimas relaciones se pueden expresar como:

(4) $(q - p)\ (s - r) = 2^m(2^{k-m} - 1)$

(5) $(q + p)\ (s + r) = 2^m(2^{k-m} + 1)$

M.c.d.$(q-p,\ q+p)$ = m.c.d.$(s-r,\ s+r) = 2$.

E.e: $2 | q-p,\ q+p$, pues son pares, luego:

m.c.d.$(q-p,\ q+P) = 2t \Longrightarrow q-p = 2tx,\ q+p = 2ty \Longrightarrow q = t(x+y)$,

$$p = t(y-x) \Longrightarrow t | p,\ q \Longrightarrow t = 1$$

pues, 1 = m.c.d.(p,q).

Análogamente para m.c.d.$(s-r,\ s+r)$.

De lo visto anteriormente deducimos que $q-p$ ó $q+p$ ha de ser de la forma $2u$ donde u es impar. Y análogamente, $s-r$ ó $s+r$ ha de ser de la forma $2u'$, u' impar.

Dado que los valores mínimos para b y c son 3 y 5, se deduce que $m \geq 3$, utilizando la relación (3).

De estas dos últimas consideraciones y teniendo en cuenta (4) y (5) deducimos que si:

a) $q - p = 2u$, entonces $s + r = 2u'$.

b) $q + p = 2u$, entonces $s - r = 2u'$.

E.e: Si $q - p = 2u$ y $s - r = 2u'$, sustituyendo en (4) tenemos:

$$2u\ 2u' = 2^m(2^{k-m} - 1) \Longrightarrow uu' = 2^{m-2}(2^{k-m} - 1)$$

y el primer miembro es impar y el segundo par pues $m \geq 3$.

Y de manera similar para el otro caso.

Luego tenemos dos casos a estudiar:

a) $q - p = 2u,\ s + r = 2u',\ u', u'$ impares.

a1) $(q-p)\ (s-r) = 2^m(2^{k-m} - 1) \Longrightarrow 2u(s-r) = 2^m(2^{k-m} - 1) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow u(s-r) = 2^{m-1}(2^{k-m} - 1) \Longrightarrow 2^{m-1} | u(s-r)$,

y como u es impar

$\Longrightarrow 2^{m-1} | (s-r) \Longrightarrow (s-r) = 2^{m-1} \cdot v > 0 \Longrightarrow s > 2^{m-1}$.

$\cdot\ v > 0$

Como $ps + qr = 2^m$ y son enteros positivos, $s < 2^m$.

Luego,

$0 < 2^{m-1} \cdot v < s < 2^m \Longrightarrow 0 < 2^{m-1} \cdot v < 2^m \Longrightarrow 0 < v <$

$< 2 \Longrightarrow v = 1 \Longrightarrow (s-r) = 2^{m-1} \Longrightarrow u = 2^{k-m} - 1$

Por tanto,

$$\begin{cases} q - p = 2(2^{k-m} - 1) \\ s - r = 2^{m-1} \end{cases}$$

a2) $(q + p)\ (s + r) = 2^m(2^{k-m} + 1) \Longrightarrow (q + p)\ 2u' =$

$= 2^m(2^{k-m} + 1) \Longrightarrow (q + p)u' = 2^{m-1}(2^{k-m} + 1)$

y razonando como antes $(q + p) = 2^{m-1}\ v'$, v' impar, pues $(2^{k-m} + 1)$ es impar.

$0 < 2^{m-1} \cdot v' = q + p \leq qr + ps = 2^m$, pues

$r,s \geq 1 \Longrightarrow 0 < 2^{m-1} \cdot v' \leq 2^m \Longrightarrow 0 < v' \leq 2$, v' impar

$\Longrightarrow v' = 1$

Por tanto,

$$\begin{cases} q + p = 2^{m-1} \\ s + r = 2(2^{k-m} + 1) \end{cases}$$

Luego tenemos los dos sistems:

$$\begin{cases} q - p = 2(2^{k-m} - 1) \\ q + p = 2^{m-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} s - r = 2^{m-1} \\ s + r = 2(2^{k-m} + 1) \end{cases}$$

Resolviéndolos se obtiene:

$$\begin{cases} p = 2^{m-2} - 2^{k-m} + 1 \\ q = 2^{m-2} + 2^{k-m} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} r = 2^{k-m} - 2^{m-2} + 1 \\ s = 2^{k-m} + 2^{m-2} + 1 \end{cases}$$

Como,

$$p,\ r \geq 1 \Longrightarrow 2^{m-2} - 2^{k-m} \geq 0,\quad 2^{k-m} - 2^{m-2} \geq 0 \Longrightarrow 2^{m-2} \geq 2^{k-m} \geq 2^{m-2}$$

luego,

$$2^{m-2} = 2^{k-m} \quad y \quad k = 2m-2 = 2(m-1)$$

Sustituyendo 2^{k-m} por 2^{m-2} en las expresiones de p, q, r, s, se tiene:

$$\begin{cases} p = 1 \\ q = 2^{m-1} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} r = 1 \\ s = 2^{m-1} + 1 \end{cases}$$

Luego, $a = 1,\ b = 2^{m-1} + 1,\ c = 2^{m-1} - 1,\ d = 2^{2(m-1)} - 1$ que no es válida pues no verifica la única condición no utilizada, que es $b < c$.

b) $s - r = 2u'$, $q + p = 2u$, u, u' impares.

No es necesario desarrollar este caso pues es el mismo que a), donde se han cam-biado p, q, u, por r, s, u' y viceversa. Por tanto,

$$r = 1,\ p = 1,\ s = 2^{m-1},\ q = 2^{m-1} + 1$$

y de aquí tenemos que:

$$a = 1,\ b = 2^{m-1} - 1,\ c = 2^{m-1} + 1,\ d = 2^{2(m-1)} - 1$$

y esta solución sí verifica que $b < c$, y de aquí evidentemente se deduce que $a = 1$.

Salvador Calvo-Fernández Pérez
Ciudad Real.

PROBLEMA 2ª (Boletín nº 11)

Hallar todos los números reales x, y, z tales que

$$x\,y\,z = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$$

Solución

Llamemos $x + y + z = s$. Tenemos:

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3xy^2 - 3x^2y - 3xz^2 - 3x^2z - 3yz^2 - 3y^2z - 6xyz =$$

$$= s^3 - 3xy(x+y) - 3xz(x+z) - 3yz(y+z) - 6xyz =$$

$$= s^3 + 3xyz - 3xys - 3xyz - 3xzs - 3xyz - 3yzs - 6syz =$$

$$= s^3 + 3xyz - 3s(xy+yz+xz) \Longrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$$

$$= s^3 - 3\ (xy+yz+xz)\ s$$

En virtud de la condición del enunciado del problema y de esta última de cálculo, ocurre que

$$s^3 = 3(xy+yz+xz)s = 0$$

Lo cual implica o bien,

$$s = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x+y+z=0}$$

o bien,

$$s^2 = 3(xy+yz+xz) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz =$$

$$= 3(xy+yz+xz) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$$

Pero es fácil ver que si una terna (x,y,z) verifica la última igualdad, también la verifican $(kx,ky,kz)_{k\in\mathbb{R}}$, por lo que basta estudiarla, por ejemplo, para $z=1$. Es decir,

$$x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y \Longleftrightarrow x^2 - (1+y)\,x + (y^2-y+1) = 0$$

de donde,

$$x = \frac{1 + y \pm \sqrt{(1+y^2 - 4(y^2-y+1)}}{2} = \frac{1 + y \pm \sqrt{-3y^2 + 6y - 3}}{2}$$

pero $-3y^2 + 6y - 3 \leq 0$; sólo se anula para $y = 1$. Para este valor es

$$x = \frac{1 + 1 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

lo que nos da la terna

$$\boxed{(1,1,1)}$$

En resumen, las únicas soluciones del problema son:

$$(k,k,k)_{k\in\mathbb{R}} \qquad \text{y} \qquad (-r,-s,r+s)_{r,s\in\mathbb{R}}$$

Ramón Fraile Peláez

Otra solución de Dña. Amparo Ortega García

- ■ - ■ - ■ - ■ -

<u>PROBLEMA 3ª</u> (Boletín nª 11)

Dado un triángulo ABC, sea B' un punto del lado AB distinto de A y B, C' el punto de intersección con AC de la paralela por B' a BC, x la circunferencia de centro B que pasa por C, x' la circunferencia de centro B' que pasa por C' y D el otro punto de intersección de x' con la recta AC. Siendo t la tangente a x en C y t' la tangente a x' en D, demostrar que:

1ª) t y t' son rectas secantes.

2ª) Si T es el punto de intersección de t y t', el triángulo CTD es isósceles.

<u>Nota</u>.- Ver "Corrigenda" en páginas anteriores".

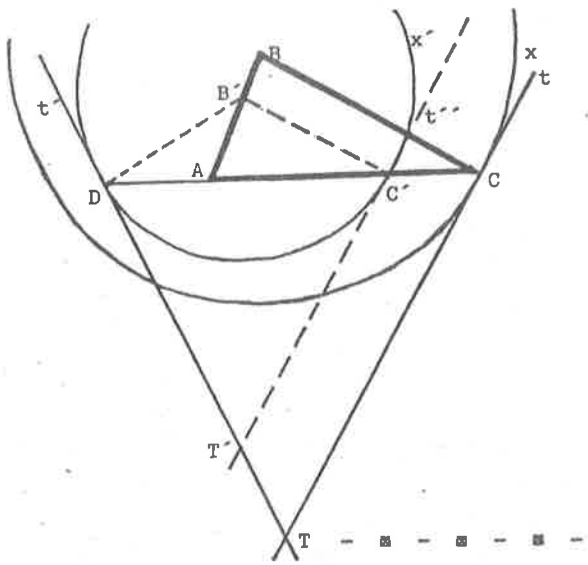
<u>Solución</u>

1ª) $B' \not\in \overline{AC}$ pues por hipótesis B' no puede ser A.

Entonces, D y C' no pueden ser los extremos de un diámetro $\Longrightarrow$ t' y t" han de cortarse, pues sólo en el caso de que los puntos de tangencia sean diametralmente opuestos las tangentes son paralelas.

Ahora bien, t y t" son paralelas pues lo son los radios $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$. $\Longrightarrow$ t' corta a t que es paralela a t".

2ª) Como el triángulo $\widehat{DB'C'}$ es isósceles, los ángulos de este triángulo de vértices D y C' son iguales y como las rectas t' y B'D son perpendiculares así como t" y B'C' resulta que los ángulos del triángulo $\widehat{DC'T'}$ de vértices D y C' también son iguales. $\Longrightarrow$ $\widehat{DC'T'}$ es isósceles y también lo será el triángulo semejante a éste $\widehat{DCT}$.



Amparo Ortega García
Valencia

PROBLEMA 4ª (Boletín nº 11)

Dadas las ecuaciones $x^2+bx+c=0$, $x^2+b'x+c'=0$, donde b, b', c, c' son números enteros que cumplen $(b-b')^2+(c-c')^2>0$, probar que si las dos ecuaciones tienen una raíz común, las dos segundas raíces son enteros distintos

Solución

Si x_1, x_2 son las raíces de la primera ecuación y x_1, x_2' son las de la segunda, se tiene las siguientes relaciones:

$$x_1+x_2=-b,\quad x_1+x_2'=-b',\quad x_1\,x_2=c,\quad x_1\,x_2'=c'$$

La desigualdad $(b-b')^2-(c-c')^2>0$ indica que no pueden ser simultáneamente $b=b'$ y $c=c'$. Si $b\neq b'$, al restar las dos primeras relaciones resulta $x_2-x_2'=b'-b$, por lo que $x_2\neq x_2'$. Si fuese $c\neq c'$, al dividir las dos últimas relaciones resultaría $\frac{x_2}{x_2'}=\frac{c}{c'}$ (o al revés, si fuera $c'=0$); por lo tanto $\frac{x_2}{x_2'}\neq 1$, es decir, $x_2\neq x_2'$.

Probemos ahora que las raíces son enteras. Sustituyendo en las ecuaciones del enunciado x por x_1 y restando, queda: $(b-b')\,x_1=c-c'$; $x_1=\frac{c-c'}{b-b'}$, donde, recuérdese, no pueden ser simultáneamente cero $b-b'$ y $c-c'$. La raíz x_1 es, pues, racional. Además,

$$(x_1+x_2)^2=(-b)^2 \Longleftrightarrow x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=b^2$$

Y como $x_1\,x_2=c$, podemos poner

$$x_1^2+x_2^2-2x_1\,x_2=b^2-4c$$

Por lo tanto, $(x_1-x_2)^2\in\mathbb{Z}$, lo cual implica que x_1-x_2 es o bien irracional o bien entero, En el primer caso, como $x_1+x_2=-b\in\mathbb{Z}$, la suma $(x_1-x_2)+(x_1+x_2)=2x_1$ será forzosamente irracional, o sea, $x_1\in\mathbb{I}$, que contradice nuestra anterior conclusión. Ha de ser entonces $x_1-x_2\in\mathbb{Z}$, y así,

$$(x_1-x_2)+(x_1+x_2)=2x_1\in\mathbb{Z},\quad (x_1+x_2)-(x_1-x_2)=2x_2\in\mathbb{Z}$$

es decir,

$$x_1 = \frac{n}{2}\ , \quad x_2 = \frac{m}{2}, \qquad n,m \in \mathbb{Z}$$

Si n y m fueran impares, $x_1x_2 = \frac{nm}{4} \notin \mathbb{Z}$ que contradice $x_1x_2 = c \in \mathbb{Z}$. Si n fuera impar y m par (o al revés), $x_1+x_2 = \frac{n+m}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Luego han de ser n y m pares, por lo que x_1 y x_2 son números enteros. Como $x_2' = -b' - x_1$, también se deduce que lo es x_2'.

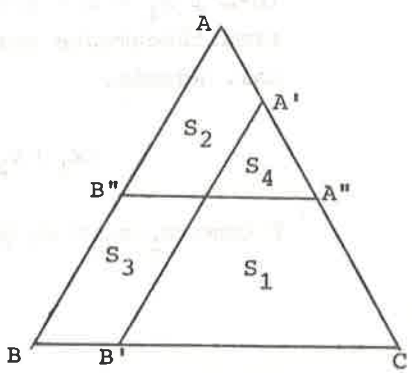
Ramón Fraile Peláez

Recibidas otras soluciones de Amparo Ortega García y de Joaquín Hernández Gómez.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 5º (Boletín nº 11)

En un triángulo equilátero de lado 1, determinar a qué distancia de los lados se han de trazar dos paralelas de modo que lo descompongan en cuatro regiones, como se indica en la figura, tales que sus áreas S_1, S_2, S_3, S_4 (en ese orden) estén en progresión aritmética. Expresar la solución exacta mediante radicales y simplificada (no hay que dar soluciones aproximadas).



Solución

Llamemos $\overline{BB'} = y$, $\overline{BB''} = x$; por lo tanto, $\overline{B'C} = 1-y$, $\overline{B''A} = 1-x$.

El área S_1 es la de un trapecio isósceles cuyas bases miden 1-y, 1-x-y (fácil de ver por el teorema de Thales) y cu-

yos lados no paralelos tienen longitud x. Los ángulos son de 60° y 120°. El área valdrá, pues,

$$S_1 = \frac{(1-y) + (1-x-y)}{2} \cdot x \text{ sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x-2xy-x^2)$$

El área S_2 es también la de otro trapecio isósceles de bases que miden 1-x, 1-y-x. Los lados no paralelos tienen longitud y. Los ángulos son de 60° y 120°. El área de este trapecio valdrá:

$$S_2 = \frac{(1-x) + (1-y-x)}{2} \cdot y \text{ sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}(2y-2xy-y^2)$$

S_3 es el área de un paralelogramo de lados que miden x, y, con ángulos de 60° y 120°. El área vale, pues

$$S_3 = y(x \text{ sen } 60°) = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$$

Finalmente, S_4 es el área de un triángulo equilátero de lado 1-x-y, por tanto,

$$S_4 = \frac{1}{2}(1-x-y)\ ((1-x-y) \text{ sen } 60°) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x-y)^2$$

Para que estas cantidades estén en progresión aritmética ha de suceder:

$$S_2-S_1 = S_3-S_2 = S_4-S_3$$

O sea,

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}(2y-2xy-y^2) - \frac{\sqrt{3}}{4}(2x-2xy-x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}xy - \frac{\sqrt{3}}{4}(2y-2xy-y^2) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}xy - \frac{\sqrt{3}}{4}(2y-2xy-y^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x-y)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}xy \end{cases}$$

Simplificando queda:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 2x = 4xy - 2y + y^2 \\ 4xy - 2y - y^2 = 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y \end{cases}$$

Agrupando, tenemos las dos ecuaciones,

$$\begin{cases} x^2 - (2+4y)\ x + (4y-2y^2) = 0 \\ x^2 - (2+4y)\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

por lo que ha de ser

$$4y^2 - 2y^2 = 1 \iff 2y^2 - 4y + 1 = 0$$

de donde,

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \begin{cases} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Sólo nos interesa la segunda solución, pues $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ supera la longitud del lado del triángulo. Sustituiremos $y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ en la segunda ecuación:

$$x^2 - (2+4-2\sqrt{2})\ x + 1 = 0 \iff x^2 - (6-2\sqrt{2})\ x + 1 = 0$$

de donde,

$$x = \frac{6 - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{(6-2\sqrt{2})^2 - 4}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{40 - 24\sqrt{2}}}{2} = 3 - \sqrt{2} \pm \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}$$

La solución con signo + es superior a 1, mientras que $0 < 3 - \sqrt{2} - \sqrt{10 - 6\sqrt{2}} < 1$, pues la suma de los dos radicales $\sqrt{2} + \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}$ es mayor que 2 y menor que 3, como se comprueba en las siguientes acotaciones:

$$2 < 1,4 + 1 < \sqrt{2} + \sqrt{10 - 6\sqrt{2}} < 1,5 + \sqrt{1,6} < 1,5 + 1,3 < 3$$

Por lo tanto,

$$y = \overline{BB'} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = \overline{BB''} = 3 - \sqrt{2} - \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}$$

Ramón Fraile Peláez

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 3ª (Boletín nº 12)

Pruebe que si m, n, r son enteros positivos, no nulos, y $1 + m + n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{2r-1}$, entonces m es un cuadro perfecto.

Solución

Sustituyendo $\sqrt{3}$ por $-\sqrt{3}$ en

$$1 + m + n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{2r-1} \tag{1}$$

se obtiene

$$1 + m - n\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^{2r-1}$$

Multiplicando miembro a miembro, resulta:

$$(1 + m)^2 - 3n^2 = 1$$

o bien,

$$m(m+2) = 3n^2 \tag{2}$$

Desarrollando el segundo miembro de (1) e igualando los coeficientes de $\sqrt{3}$ y los términos independientes de $\sqrt{3}$ en los dos miembros, se obtiene,

$$n = \binom{2r-1}{1} 2^{2r-2} + \binom{2r-1}{3} 2^{r-4} \cdot 3 + \ldots + \binom{2r-1}{2r-3} \cdot 2 \cdot 3^{r-2} + 3^{r-1} =$$

$$= 2a + 3^{r-1}, \quad (a \in Z)$$

$$1 + m = 2^{2r-1} + \binom{2r-1}{2} 2^{2r-3} \cdot 3 + \ldots + \binom{2r-1}{2r-2} \cdot 2 \cdot 3^{r-1} =$$

$$= 2^{2r-1} + 3b, \quad (b \in Z)$$

Pero,

$$3^{r-1} = (2+1)^{r-1} = 2c + 1, \quad (c \in Z); \quad 2^{2r-1} = (3-1)^{2r-1} = 3p - 1, \quad (p \in Z)$$

luego,

$$1 + m = 3k-1 \quad y \quad m + 2 = 3k, \quad (k \in Z)$$

En definitiva, m+2 es múltiplo de 3 y n es impar.

De la igualdad (2) se deduce que por ser n impar, también lo son m y m+2, y puesto que difieren en dos unidades, son primos entre sí. Poniendo en (2) $m+2 = 3k$, se obtiene $m \cdot k = n^2$, lo que implica que m y k son cuadrados perfectos, puesto que son primos entre sí.

Francisco Lorenzo Miranda

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

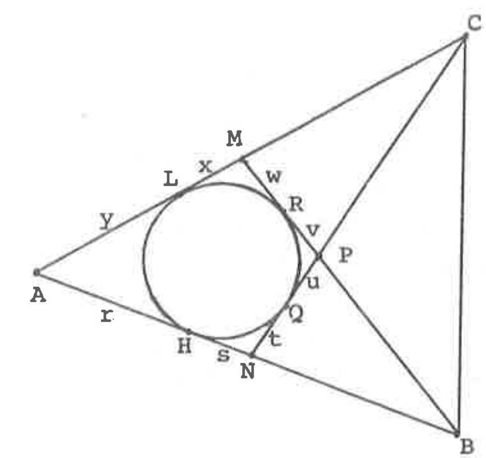
PROBLEMA 2ª (Boletín nª 12)

En un triángulo ABC, M y N son los puntos medios respectivos de los lados AC y AB, y P es el punto de intersección de BM y CN. Demuestre que, si es posible inscribir una circunferencia en el cuadrilátero ANPM, entonces el triángulo ABC es isósceles.

Solución

$\overline{CL} = \overline{CM} + x = \overline{AM} + x = 2x + y$ (véase la figura)

$\overline{CQ} = \overline{CP} + u = 2\overline{NP} + u = 3u + 2t$



y puesto que $\overline{CL} = \overline{CQ}$, resulta:

$$3u + 2t = 2x + y \qquad (1)$$

$\overline{BH} = \overline{BN} + s = \overline{AN} + s = r + 2s$

$\overline{BR} = \overline{BP} + v = 2\overline{MP} + v = 3v + 2w$

De donde

$$3v + 2w = r + 2s \qquad (2)$$

Restando (1) y (2), se obtiene:

$$3(u-v) + 2(t-w) = y - r + 2(x-s)$$

y, puesto que $u = v$, $y = r$, resulta:

$$t-w = x-s \implies t+s = x+w \implies 2s = 2x \implies s = x$$

Por tanto,

$$y+x = r+s \implies \overline{AM} = \overline{AN} \implies \overline{AC} = \overline{AB}$$

Francisco Lorenzo Miranda

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

En la redacción de este Boletín, todavía no se han recibido soluciones a los siguientes problemas propuestos en números anteriores:

- **Problema nº 3 del Boletín nº 6 (ver corrigenda en el nº 8).**
- **Problemas nº 3 y nº 4 del Boletín nº 7.**
- **Problema nº 3 del Boletín nº 8.**
- **Problemas nos 1 al 8 y 10 del Boletín nº 9.**
- **Problemas nos 1 al 9 del Boletín nº 10.**
- **Problemas nos 6 al 9, 11, 12 y 14 del Boletín nº 11.**
- **Problemas nos 1, 4 y 6 al 10 del Boletín nº 12.**

Esperamos que esta nota anime a nuestros compañeros a obtener esas soluciones y a enviárnoslas para su publicación en los próximos números.

Como socio de la Sociedad Castellana " Puig Adam " de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín: (señalar con unas aspas los que interesen)

4	5	6(*)	7	9	10	11
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Si solicitan más de un número, rogamos envien sellos para el franqueo (18 pts. por número para Madrid capital y 28 pts. por número para provincias).

(*) Del número 6 sólo quedan unos pocos ejemplares. Los números 1, 2, 3 y 8 están agotados.

Ponga su dirección en este recuadro, para el envío:

Recorte o copie este CUPON y envíelo al Apartado 9479 de MADRID - 28080 , si desea acogerse a este ofrecimiento.

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN DE INSCRIPCION

D. ____

Dirección particular ____

Código postal ________________ Teléfono __________________

Centro de trabajo ____

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO NUMERARIO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ____________________________

____

para que cargue en mi cuenta numº ___________________________

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1987-88 y siguientes.

____________________ de ____________ de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha __________________ Banco _____________________________

____

Ruego abonen con cargo a mi cuenta ______________ de número ________________________, los recibos de mi cuota anual en la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: _____________________________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SOLICITUD DE ADHESION DE CENTRO

D. ____

como ______________________ del Centro _______________________

____

domiciliado en ____

____________________ Código postal _________ Tfno. ____________

SOLICITA LA ADHESION A LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ____________________________

____

para que cargue en la cuenta nº ___________________________, los recibos correspondientes al curso 1987-88 y siguientes.

______________________________de ___________de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha __________________ Banco _____________________________

____

Ruego abonen con cargo a la cuenta ____________ de número ___________________________, los recibos de la cuota anual de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: _____________________________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.