Pag 11

abril
1987

BOLETIN Nº 13

SOCIEDAD CASTELLANA PUIG ADAM

DE PROFESORES DE MATEMATICAS

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Abril de 1987

nº 13 (1986 - 87)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

Ronda de Atocha, 2 (INBAD)
MADRID

- La correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

FERNÁNDEZ BIARGE, Julio
PASCUAL IBARRA, José Ramón

- La portada está basada en un motivo decorativo que aparece en La Aljafería de Zaragoza (siglo XIII) y que es objeto de estudio en el artículo del profesor Montesinos que publicamos en este número.

VEANSE EN ESTE NÚMERO LAS CONVOCATORIAS DE NUESTRA ASAMBLEA GENERAL Y DEL V CONCURSO DE PROBLEMAS.

INDICE Pág.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: José Javier Etayo Miqueo

Vicepresidentes:
José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardó (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: José Francisco Carballido Quesada

Vicesecretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

VIDA DE LA SOCIEDAD

Homenaje a los compañeros jubilados. Algunos socios han manifestado su deseo de ofrecer un homenaje a los miembros de la Sociedad que en este curso han llegado a la edad de su jubilación, y, en especial, a los profesores Alberto Aizpún y Salvador Herrero, pertenecientes a la Junta Directiva. Atendiendo sus deseos, y con este objeto, se aprovechará la ocasión de la Asamblea General, cuya celebración se anuncia en este mismo número del Boletín, para en ella rendirles el homenaje merecido, y a su terminación ofrecerles un almuerzo, no de despedida, sino de afecto y gratitud por los servicios prestados a la Sociedad, que esperamos seguirán prestando con igual interés y acierto.

Concurso de problemas. Se observará en la convocatoria del Concurso de Problemas de este año que se ha extendido la participación a los alumnos de los tres cursos del Bachillerato y correspondientes de la Formación Profesional. Se ha hecho así, por una razón de continuidad, y tratando de coordinar nuestros concursos con la Olimpiada Matemática Española, que viene realizando la Real Sociedad Matemática, entre alumnos de C.O.U., y a su vez, con las Olimpiadas Iberoamericana e Internacional. Pensamos que de esta forma los alumnos participantes pueden sentir un estímulo continuado, al tiempo que van adquiriendo una cierta práctica, con dominio de la voluntad, necesarios en la realización de este tipo de pruebas.

Este año contamos como el pasado con la colaboración inestimable del Colegio de Doctores y Licenciados, y esperamos contar también con las ayudas recibidas de las Consejerías de Cultura de las Comunidades de Madrid y de Castilla - La Mancha, necesarias para poder sufragar los gastos y las cuantías de los premios.

VEA LA
CONVOCATORIA
DE NUESTRA
ASAMBLEA
GENERAL

ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE 1987. CONVOCATORIA

La Junta Directiva ha acordado convocar la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente a 1987, para el sábado 23 de Mayo de este año, a las 11 h 30 m, en primera convocatoria y a las 12 h en segunda, en el Instituto "Beatriz Galindo" (c/ Goya, 10).

Se seguirá el siguiente Orden del Día:

1. Lectura y aprobación, en su caso, del Acta de la Asamblea anterior.
2. Informe del Sr. Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Colaboración con el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados.
5. Elecciones para la renovación de la mitad de la Junta Directiva.
6. Ruegos y preguntas.

Los miembros de la Junta cuya renovación establecen los Estatutos para este año son los siguientes: Vicepresidentes de Madrid, Ciudad Real y Guadalajara, Secretario y Bibliotecario.

Esperamos vuestra asistencia y participación.

NOTICIAS

- Coincidiendo prácticamente con la salida de este número, el día 1 de abril próximo, a las 7 h 30 m de la tarde se celebrará en la Real Academia de Ciencias, calle de Valverde nº 22, una sesión científica (entrada pública) en la que intervendrán los profesores de la Universidad de Salamanca:

  - D. Pedro Luis García Pérez: "Invariantes diferenciales de estructuras geométricas".
  - D. Daniel Hernández Ruipérez: "Integración en variedades graduadas".
  - D. Jaime Muñoz Masqué: "El problema de la regularidad en el cálculo de variaciones de segundo orden".

- La Real Academia de Ciencias ha elegido a don Pedro Jiménez Guerra, Catedrático de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, Académico Correspondiente de la Sección de Exactas. Enhorabuena.

- X CEDYA

  El décimo Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones tendrá lugar en Valencia durante los días 21 - 25 de septiembre de 1987.

  Los interesados pueden recabar información de:

  Comité Organizador X. CEDYA
  Facultad de Matemáticas
  c/ Dr. Moliner, 50
  46100 - Burjasot (Valencia)

V CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

Convocado por:
La Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas y el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras.

B A S E S

PRIMERA

Podrán participar los alumnos de B.U.P. y F.P. de los Centros de Albacete, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara, Madrid, Segovia y Toledo.Los de F.P.1 lo harán con los de primero de B.U.P., los de 1° de F.P.2 con los de segundo de B.U.P. y los de 2° o 3° de F.P.2, con los de tercero de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas del Concurso se realizarán en Madrid, en la segunda quincena del mes de Junio (probablemente el sábado, 27) y consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles).

TERCERA

Se concederán diplomas para los mejores de cada nivel, acompañados de los premios correspondientes.

CUARTA

Aquellos Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de dos en cada uno de los tres niveles) deberán realizar la preinscripción antes del día 15 de Mayo de 1987, dirigiéndose por carta a esta Sociedad, apartado de Correos n° 9.479, 28080 - Madrid. En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados.

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos Centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales en las que se haga constar el curso en que están matriculados en el año académico 1986-87 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

= = = = = = = =

XXII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA. FASE FINAL

Las pruebas de la fase final de este certamen que viene organizando desde hace 23 años la Real Sociedad Matemática Española, tuvieron lugar los días 27 y 28 del pasado mes de febrero en la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid. Concurrieron 37 candidatos -vencedores en las pruebas distritales-, además de los tres candidatos canarios que realizaron las pruebas en las Islas y los ejercicios -los mismos- remitidos a la Comisión calificadora en Madrid. Los 40 participantes se repartieron de la siguiente forma: uno de Oviedo, uno de Córdoba, dos de Alicante, y tres de cada una de las siguientes Universidades: Madrid, Barcelona, Málaga, Granada, Santiago, Salamanca, Zaragoza, Valladolid, Sevilla, Extremadura, Valencia y Canarias.

Los problemas propuestos, seis, se publican en la sección correspondiente de este mismo Boletín, y esperamos las soluciones.

Fueron ganadores, por orden de puntuación:

1ª) Fernando Galve Mauricio, I.B. "J. Zurita", de Zaragoza - 36 puntos.

2ª) Salvador Villegas Barranco, I.B. "A. Ganivet", de Granada - 32 puntos.

3ª) Santiago Vila Doncel, I.B. "Zurbarán", de Badajoz - 28 puntos.

4ª) Juan Rodrigo Valderrama Alcalde, I.B. "Cardenal López de Mendoza", de Burgos - 27 puntos.

5ª) Pablo Benítez Giménez, Colegio "Huérfanos de la Armada", de Madrid - 26 puntos.

y

6ª) Carlos J. Pérez Jiménez, I.B. "Sagasta", de Logroño - 25 puntos.

Obtuvieron también puntuaciones meritorias los siguientes: Alex Haro Provinciale (Barcelona), Jorge Antonio Carisimo Benavente (Córdoba), con 22 puntos cada uno, y Pablo Ariza Molina (Madrid), José García Espinosa (Burgos) y Carlos Gómez Ambrosi (Zaragoza), con 19. Observamos que Ariza fue ganador también en los concursos de nuestra Sociedad de 1984 (1er curso) y 1985 (2º curso).

Esperemos que con base en los ganadores pueda formarse un equipo entrenado para participar con dignidad, y hasta con éxito, como nos tienen acostumbrados en las Olimpiadas Iberoamericanas, en la próxima Olimpiada Internacional, que, como tenemos anunciado, se celebrará este año en Cuba en la primera quincena del mes de julio.

SOBRE LOS FUNDAMENTOS GEOMETRICOS DE LAS TEORIAS FISICAS

— algunas consideraciones histórico-metodológicas —

Por Pedro L. García Pérez.

Catedrático de la Universidad de Salamanca.

La Redacción se complace en agradecer al Profesor D. Pedro Luis García Pérez su valiosa aportación a este número del Boletín con el texto de la conferencia impartida en la Escuela de Estudios Superiores en Ciencias Físico-Matemáticas de la Armada, de San Fernando, como lección inaugural del curso 1985-86. Estamos convencidos de que el estudio que hace el ilustre catedrático de la Universidad de Salamanca sobre el fundamento geométrico de las teorías físicas ha de merecer el mayor interés por parte de nuestros socios.

Resulta sorprendente que en 1985, a más de setenta años de la aparición de la teoría de la relatividad de Einstein y a sesenta de la formalización de la física cuántica, se presenten todavía problemas conceptuales acerca de la naturaleza geométrica de la física teórica. Problemas planteados en muchas ocasiones en términos decimonónicos que, aunque no sorprendan demasiado a la gente de mi generación pues los tuvimos que sufrir en algunas de nuestras ya lejanas enseñanzas, pueden sin embargo producir cierta desorientación a nuestros estudiantes de ahora que tan tempranamente han sido educados en la matemática formalizada. No obstante, obligado también es decir que, a nivel de investigación y debido en parte al desmesurado entusiasmo de algunos físicos teóricos recientemente convertidos a la moderna metodología geométrica, se están produciendo ciertos excesos en el tratamiento geométrico de la física.

Estas son en cierto modo las dos posiciones extremas del tema que aquí deseo tratar: la primera, no es raro encontrarla todavía en algunas Juntas de Facultad con ocasión de las revisiones periodicas de los planes de estudios de la carrera de Física, mientras que la segunda se está empezando a percibir ya en algunos congresos internacionales recientes sobre "Métodos de Geometría Diferencial en Física Matemática'.

El tema del que deseo ocuparme en esta lección va a tratar "sobre los fundamentos geométricos de las teorías físicas", asunto éste, viejo y siempre de actualidad, en que: frente a la idea un poco tópica de la matemática como instrumento calculístico al servicio de una doctrina física concebida de antemano, aparecen las modernas estructuras de tipo geométrico como modelo natural de las teorías físicas.

1. La concepción tradicional.

Siguiendo más o menos fielmente la evolución histórica, empezaré con una breve descripción de la concepción tradicional de la ciencia física que puede decirse termina hacia 1905 con la aparición de la teoría de la relatividad de Einstein.

Según esta concepción, que podriamos calificar como el "pensar ingenuo del sentido común", el dominio de la física aparece como un universo de objetos puestos ante nosotros por una forma unívoca de la intuición ante la cual desfilan dichos objetos por una "evidencia' que se desmenuza en razonamiento lógico. Naturalmente que esta concepción ha chocado violentamente en la historia con los resultados más geniales del pensar matemático y físico, como por ejemplo en el caso de las geometrías no euclídeas en las que precisamente había que sacrificar la univocidad de la forma de intuición. Sin embargo, de mil maneras subrepticias esta mentalidad se ha mantenido, como en el caso de dichas geometrías en las que su compresión ha sido reducida por muchos a las intuiciones elementales de la teoría de conjuntos y a ciertas relaciones postulables.

Conforme a esta mentalidad, el marco natural de la ciencia física es la geometría de Euclides, la cual podria muy bien considerarse como el capítulo cero de esta ciencia. La metodología a emplear no podía ser otra que la axiomática —de la cual, la geometría euclídea constituye su mas brillante ejemplo—, auxiliada posteriormente por los métodos y técnicas que nacieron con el cálculo infinitesimal, aplicados a la versión analítica de esta geometría.

Describamos brevemente esta etapa del pensar físico que ha pasado a la historia con el nombre de "física clásica" en contraposición al nuevo punto de vista nacido en el primer cuarto del siglo XX con las teorías de la relatividad y de los cuanta.

Como es sabido, la geometría euclídea parte de la consideración de ciertos objetos primitivos tales como "punto", "linea recta", "plano", etc. relacionados entre sí por ciertas proposiciones simples también primitivas: los axiomas. La palabra primitivo significa que tanto a los objetos como a los axiomas no hay que darles ningún tipo de significado intuitivo o experimental previo. Los axiomas no son, como se decía en la escuela, verdades evidentes que se predican de unos objetos que se sabe ya lo que son. Se trata mas bien de una serie de enunciados idiomáticos con sentido, que constituyen una especie de definición implícita de los objetos primitivos a la vez que las reglas de juegos iniciales para generar el resto de las proposiciones mediante la aplicación del razonamiento lógico. El único requisito que deben cumplir los axiomas es el de ser independientes y no contradictorios entre sí; lo primero, para evitar redundancias y lo segundo, para que la teoría sea consistente.

Naturalmente que lo que acabo de decir no es toda la verdad del asunto. Esta sería más bien la situación mental en la que debería colocarse un estudioso del tema para leer linealmente el cuerpo de doctrina una vez construido.

Pero la realidad es algo distinta. Por una parte, la axiomatización a la que nos estamos refiriendo tiene por objeto introducir un ordenamiento preliminar en una parcela determinada de la ciencia —la geometría en este caso— mediante una adecuada selección de axiomas

a partir de los cuales pueda reconstruirse la totalidad del edificio. Y por otra, los objetos "primitivos" normalmente están asociados a ideas más o menos definidas intuitiva o experimentalmente en virtud de las cuales nos sentimos inclinados a aceptar los axiomas como "verdaderos".

En cualquier caso, de lo que no queda la menor duda de este modo de pensar es del carácter misterioso del punto de partida que, desde luego, resulta inexplicable desde la geometría misma, convirtiendo a ésta en la simple descripción de un mundo en el que estamos inmersos sin tener clara conciencia del cómo y del por qué.

Pero continuemos con la física propiamente dicha concebida a la vieja usanza.

La cinemática, su primer capítulo, no es otra cosa que el estudio infinitesimal de las curvas parametrizadas del espacio euclídeo, donde al parámetro de la curva se le llama tiempo y donde sus diferentes puntos se interpretan como las posiciones por las que pasa un "punto material" al transcurrir aquél. Así pues, la cinemática, cuyas nociones básicas son las de velocidad y aceleración, sigue siendo un capítulo de la geometría. De hecho constituye uno de los puntos de partida de la llamada geometría diferencial.

Con la famosa Ley de Newton, *fuerza* = *masa* × *aceleración*, se inicia la dinámica en su aspecto cuantitativo tras una larga etapa de investigación cualitativa cuyos máximos representantes fueron Kepler y Galileo. Dicha ecuación constituye el axioma fundamental de esta ciencia mediante el cual dos nuevas nociones primitivas, las de fuerza e inercia, se añaden a las ya existentes. A partir de este momento se inicia un largo y fructífero periodo (1687-1889) en el que la evolución de la mecánica se debe principalmente y hasta se identifica con el desarrollo paralelo del cálculo, las ecuaciones diferenciales y la teoría variacional; Newton, Euler, Laplace, Lagrange, Hamilton, Jacobi, etc., son los grandes artífices de este importante cuerpo de doctrina, cuyo ejemplo más atractivo y al que se dirigieron los principales esfuerzos fué la mecánica celeste.

Y es a propósito de este ejemplo y ante el fracaso de los métodos cuantitativos aplicados al estudio de la estabilidad del sistema solar, como se inicia con Poincaré un nuevo periodo cualitativo en mecánica —la teoría de los sistemas dinámicos— que constituye el origen de la topología y de la geometría diferencial global contemporáneas.

Pero no toda la física clásica es mecánica, ésta es también y sobre todo teoría de campos y medios continuos (gravedad, elasticidad, hidrodinámica, electromagnetismo, etc.) cuyas leyes vienen gobernadas por ecuaciones en derivadas parciales. Un punto clave de este tema en relación con la concepción del espacio fué la controversia sobre la "acción a distancia" o "a través de un medio". En contraposición a la mecánica newtoniana (que es una exitosa teoría de la acción a distancia) Descartes, en la etapa anterior, concibió el espacio lleno de tres tipos de materia: materia luminiscente o emisora de luz, transparente o transmisora y opaca o reflectora, a través de la cual y mediante un sofisticado esquema mecánico de "vórtices" y "presiones", las fuerzas eran transmitidas de un cuerpo a otro. En particular, así es como Descartes dedujo las leyes correctas de la optica geométrica.

A finales del siglo XIX las posiciones relativas de Inglaterra y el Continente se invirtieron. Mientras que los físico-matemáticos franceses se ocuparon principalmente de la mecánica analítica, en Inglaterra hace su aparición la teoría de campos, debido sobre todo a las experiencias físicas de Faraday y al genio conceptual de Maxwell. La vieja idea cartesiana de entender los fenómenos físicos de un modo mecanicista se sigue manteniendo aún pero ahora con un significado **más** abstracto y preciso:

Dar una explicación mecánica de un fenómeno físico consiste para Poincaré en expresar las leyes que rigen la variación de los parámetros que se miden directamente del experimento como ecuaciones de Euler-Lagrange para una cierta lagrangiana, cuya determinación se convierte así en el punto central de la doctrina.

Digamos a este respecto que esta idea no sólo ha perdurado hasta nuestros días sino que, como más tarde veremos, ha llegado a convertirse en el principio rector de la física más reciente, tras la moderna geometrización del cálculo de variaciones y la teoría de las variedades diferenciales de dimensión infinita introducidas escasamente hace veinte años.

No podia faltar, para concluir esta reseña de urgencia, la alusión a la ciencia del calor o termología. Esta doctrina, que como es sabido se construye mediante una axiomática tan impecable como la de la geometría euclídea a partir de las nociones de calor, trabajo y temperatura y de los famosos principios de termodinámica debe concebirse, a diferencia de los otros fenómenos de la física clásica, fuera del marco geométrico euclideano. Sin embargo, incluso en este caso y debido al interés por dar una explicación mecanicista de la teoría del calor, se lleva también ésta al espacio euclídeo bajo la forma de lo que se ha dado en llamar mecánica estadística.

En resumen, los fenómenos físicos según este 'pensar ingenuo del sentido común' se conciben como evolución temporal de una serie de objetos ubicados en el espacio euclídeo ordinario. Las idias más o menos vagas de 'espacio' y de 'tiempo' del hombre de la calle se mantienen rígidas e incuestionables. Y conforme la física descubre y trata más cosas, el espacio que las alberga se va llenando de nuevos objetos: masas, fuerzas, temperaturas, campos eléctricos y magnéticos, etc.) a los que a veces resulta necesario someter a artificiosas teorías para poder explicar los hechos observados. Se comprende en cierto modo que, habituados a expresar nuestras ideas con un lenguaje que fué inventado para describir las experiencias de la vida diaria, nos sintamos inclinados a construir la ciencia dentro de este ámbito en el que nacemos y vivimos. Pero lo que tambien parece claro es que con ésta actitud se está inconscientemente introduciendo una situación de privilegio en el pensar científico tan injustificable como innecesaria. En otras palabras, la ciencia se hace cada vez más esclava de una particular metaciencia que es justamente lo que se trata de evitar a toda costa.

Fué Einstein en 1905 quien, con su famoso principio de relatividad y el postulado de la constancia de la velocidad de la luz, rompe por primera vez con esta concepción tradicional, descubriendo la auténtica teoría que se amolda a los fenómenos electromagnéticos. Con ella, no sólo se llevó por delante el genial físico la mecánica de Newton sino, lo que fué más inconcebible aún, disolvió los intocables conceptos de "espacio" y de "tiempo". Pero, con ser esto último lo mas espectacular de la teoría de la relatividad, no es en modo alguno lo más sustancial y revolucionario de ella, que es precisamente: la formulación rigurosa del concepto de "objetividad" para la ciencia física.

Con ello se enlaza con una de las más importantes corrientes de ideas de la matemática del siglo XIX que treinta años antes condujeron a una nueva concepción de la geometría, establecida por Felix Klein en su famoso programa de Erlangen, desde cuya perspectiva la relatividad especial al igual que la mecánica de Newton no son otra cosa que sendos ejemplos físicos de geometrías en el nuevo sentido.

Digamos unas breves palabras sobre este tema que creo pueden ayudar a comprender mejor la identidad entre física y geometría que intento mostrarles a ustedes en esta charla.

2. La relatividad especial como geometría en sentido de Klein.

En 1872, el matemático alemán Félix Klein presentó para su ingreso en el senado académico de la Universidad de Erlangen una "disertación" de título: "Consideraciones comparativas sobre las investigaciones geométricas modernas" que, conocida desde entonces como "Programa de Erlargen", constituye sin duda alguna uno de los más grandiosos descubrimientos de la matemática de los últimos cien años. Con la nueva concepción de la geometría propuesta en dicho Programa culmina la larga y brillante historia de la geometría proyectiva del siglo XIX, que Klein aclara definitivamente a partir del concepto de grupo de transformaciones. Pero como pasa con todos los grandes descubrimientos, el nuevo punto de vista trasciende su propia época y el dominio concreto donde nació para verlo reflejado en los más revolucionarios dominios de la matemática y de la física.

El entorno histórico en el que se inscribe esta nueva concepción de la geometría es, más o menos, el siguiente:

Al comenzar el siglo XIX empieza la geometría proyectiva a tener una gran actualidad con la publicación del director de la Escuela Politécnica de París, Gaspard Monge, de su Geometría descriptiva. Uno de sus discípulos, Poncelet, especialmente atraido por la parte pura o sintética de la geometría desarollada por Monge, —en contraposición a la denominada geometría analítica,— se convierte en el fundador de la geometría proyectiva con su libro "Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras". La doctrina se basa en el concepto de transformación proyectiva de la que Poncelet dá su primer ejemplo,la homología. Se observa que estas transformaciones no conservan las propiedades usuales de la geometría euclídea; esto es: aquellas en las que intervienen las nociones de "distancia" y de "ángulo", y Poncelet distingue estas propiedades, denominadas "métricas", de aquellas que permanecen invariantes por las transformaciones proyectivas, que él llama propiedades "descriptivas".

Sin enbargo, una exposición clara y natural de esta cuestión no es alcanzada hasta la obra de Cayley, quien enuncia por fin: que las propiedades métricas son aquellas que quedan invariantes por las transformaciones proyectivas que dejan fijos ciertos elementos dados de antemano (por ejemplo, los "puntos cíclicos" en el plano proyectivo complejo), enunciado éste decisivo hacia el Programa de Erlangen. Desde este punto de vista, las geometrías no euclídeas de Lobatchewski-Bolyai y de Gauss-Riemann, recién inventadas por motivaciones de tipo axiomático también quedaban incluidas dentro del esquema proyectivo sin más que sustituir los puntos cíclicos por una cónica cualquiera en el dual. Fué tal el entusiasmo que produjo en Cayley el descubrimiento de esta síntesis que le hizo exclamar al término de su memoria: *"la geometría métrica es una parte de la geometría proyectiva... la geometría proyectiva es toda la geometría".*

Hacia 1860 la geometría sintética se encontraba en su más pleno apogeo, pero su final se hallaba ya muy cercano. En esta época las ideas de "grupo" y de "invarianza" empiezan a entrar en escena limitadas al principio al dominio en el que fueron introducidas por sus creadores, Cauchy y Galois (esto es, a los grupos de permutaciones de un conjunto finito de objetos), y se va cayendo en la cuenta de que los teoremas de la geometría clásica no son otra cosa que la expresión de relaciones idénticas entre invariantes o covariantes el grupo de las semejanzas. Estas ideas adquieren una forma clara y decisiva con Félix Klein, quien enuncia por fin su famosa definición de geometría como:

El conjunto de los invariantes respecto de un grupo de transformaciones.

Bajo este nuevo y revolucionario punto de vista, la antigua controversia entre las tendencias sintética y analítica para la construcción de la geometría deja de ser ya un tema de interés. Se ha conseguido una clasificación racional y estructural de los teoremas de la geometría a partir de los grupos correspondientes: el grupo lineal para la geometría proyectiva, el grupo ortogonal para las cuestiones métricas, el grupo simpléctico para la geometría de los complejos lineales, etc. Incluso las geometrías no euclídeas quedan también englobadas en este nuevo punto de vista sin más que considerar el grupo de las transformaciones que dejan invariante una cónica en el plano, con la noción de distancia dada por Cayley. Igualmente la Topología recibe su primera definición como el conjunto de las propiedades invariantes respecto del grupo de las transformaciones contínuas.

Con el punto de vista de Klein, la noción de geometría llega a tan alto grado de generalidad que, unido a la "teoria de invariantes" desarrollada en su seno, permite en el dominio de la geometría clásica construir todos los "invariantes" y todas sus "relaciones" de un modo sistemático. Desde esta época, la geometría clásica pasa a ser un edificio completamente acabado dejando de tener ya interés para el investigador matemático.

Pero, volviendo a nuestro tema, ¿qué tiene que ver la relatividad especial con este punto de vista?.

Si en el espacio de una geometría de Klein —que es el conjunto de puntos sobre el que actúa su correspondiente grupo de transformaciones— se considera un sistema de referencia de esa gemetría, la clase de todos los demás se obtiene aplicando a éste todas las transformaciones del grupo. De este modo se establece una correspondencia biunívoca natural entre los elementos del grupo y los sistemas de referencia, según la cual la definición de geometría anteriormente dada puede enunciarse también como: el conjunto de las nociones que no dependen del sistema de referencia usado para introducirlas. Y es así como el nuevo punto de vista aparece en la física, donde: sistema de referencia es sinónimo de "observador", noción geométrica de "fenómeno observado" y donde, en fin, la nueva definición de geometría se corresponde con el tan traido y llevado "principio de relatividad".

Bajo esta nueva concepción, la mecánica de Newton no es otra cosa que la geometría asociada al grupo de Galileo, el cual se corresponde con una clase especial de sistemas de referencia —los sistemas inerciales— que son aquellos respecto de los cuales las ecuaciones de Newton se expresan bajo su forma analítica usual. En particular, el "espacio" y el "tiempo" son conceptos físicos porque se trata de sendos invariantes numéricos asociados a las parejas de puntos de esa geometría. Por el contrario, la velocidad de la luz varía al pasar de un sistema inercial a otro, o lo que es peor aún: las ecuaciones de Maxwell, base de todo el electromagnetismo, no son invariantes respecto de las transformaciones del grupo de Galileo.

Estas ecuaciones sí que son invariantes en cambio respecto de otro grupo descubierto por el físico holandés Lorentz poco tiempo antes de la aparición de la toría de la relatividad. La historia es a partir de aquí bastante bien conocida y no vamos a insistir en ella: decisión de Einstein de sustituir el grupo de Galileo por el de Lorentz para fundar la mecánica, donde ahora la "constancia de la velocidad de la luz" —que habia sido firmemente establecida por la experiencia— sí que es un concepto físico pero no aquellos de intervalo espacial y temporal entre dos sucesos; propuestas de nuevas ecuaciones para la dinámica con el resultado de un sustancial combio en el concepto de "energía"; comprensión de la mecánica newtoniana desde la nueva doctrina como una primera aproximación (cuando las velocidades son pequeñas respecto de la velocidad de la luz, que es la traducción del hecho de que el grupo de Lorentz se convierte en el de Galileo cuando la velocidad de la luz tiende a infinito), etc., etc.

La relatividad no solo queda así comprendida y desdramatizada, sino que al lado de las geometrías clásicas constituyen un ejemplo sacado de la realidad del nuevo modo de pensar.

Modo de pensar que, insistimos, representa un gigantesco paso respecto de la concepción tradicional de la geometría con la que hemos comenzado esta charla. La geometría no es ya la descripción de un mundo en el que estamos inmersos sin tener clara conciencia del cómo y del por qué, sino es además y sobre todo la geometría misma la que posibilita y engendra las nociones con las que después se piensan sus propios objetos. El descubrimiento kleiniano fué tan simple como grandioso: señalar lo previo, la estructura de antemano que posibilita el pensamiento geométrico griego.

Y es este descubrir la estructura previa que está implicada en el pensamiento anterior el autentico destino del pensar matemático y del pensamiento en general. Naturalmente, que conocida la estructura previa, las generalizaciones son inmediatas, puesto que se ha adquirido conciencia de la anterior "encerrona" y una nueva libertad de pensar. Pero estas generalizaciones son el resultado, no el espíritu vivo de la creación.

Buen ejemplo éste del proceder científico en que toda nueva concepción no solo no trata de destruir la anterior sino que, por el contrario, al tomarla como punto de partida para explicitar lo implícito en ella produce el gran avance dentro del más escrupuloso respecto a la vieja mentalidad, la cual clarifica y sitúa en sus justas coordenadas históricas.

Pero volvamos a nuestro asunto, pasando a considerar un tercer nivel geométrico en donde, finalmente, parece hallarse situada la física teórica actual.

3. Geometría diferencial y física teórica.

Lo dicho hasta ahora supongo que nos habrá convencido bastante de la importancia del concepto de grupo en física. En la actualidad, podríamos añadir que la denominada "teoría de las representaciones lineales de grupos", dominio de investigación lejos aún de estar definitivamente cerrado, constituye una técnica indisplensable en mecánica cuántica y en la física de partículas elementales. Pero con todo ello, no parece que la teoría de grupos, por sí sola, constituya el marco adecuado para fundamentar la física.

De hecho, los conceptos básicos de esta ciencia son "conceptos diferenciales" y debe ser, por tanto, la geometría diferencial el marco más apropiado para introducirlos. El punto de partida de esta disciplina es el concepto de variedad diferenciable, cuyo origen histórico se encuentra en la teoría de superficies del espacio ordinario y en la mecánica analítica, donde: el espacio de configuración de un sistema dinámico constituye el primer ejemplo hallado por el hombre de una variedad diferenciable con un número arbitrario de dimensiones.

Sin embargo, hay que esperar otra vez a los primeros años de nuestro siglo para ver confirmado este extremo con la aparición, en 1915, de la Teoría de la Relatividad General. Qué duda cabe que Einstein pudo construir rápidamente su famosa teoría gracias, por una parte, a la obra de Riemann —que en su célebre disertación "Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría" introdujo los espacios que llevan su nombre, sobre los cuales Einstein modeló su teoría de la gravitación— y, por otra, al análisis tensorial que, introducido a principios de siglo por Christoffel, Ricci y Levi-Civitta, proporcionó a la geometría diferencial su instrumento más importante. Pero lo que también es cierto es que, debido al enorme interés despertado por esta teoría en físicos y matemáticos, alrededor de ella y de sus posterio-

res generalizaciones pudieron crearse nuevas estructuras geométricas que dieron un impulso decisivo a esta importante rama de la matemática.

La geometrización de la física no es ya desde ese momento una casualidad sino, por el contrario, pura evidencia que se manifiesta sobre todo en el desarrollo histórico de la geometría diferencial a partir de los años inmediatos a la terminación de la primera guerra mundial.

He aquí, en efecto, lo que a nustro juicio constituye las etapas más significativas de la evolución histórica de esta disciplina, que prueban claramente tal afirmación.

La primera etapa, que podemos situarla entre los orígenes del cálculo infinitesimal y la escuela francesa de fines del siglo XVIII y principios del XIX, se caracteriza por no ser profundamente original, sino más bién por haber hecho una aplicación casi directa a la geometría de los métodos e ideas que nacieron con el cálculo infinitesimal.

En la segunda etapa, que se inicia con Gauss y que culmina con Riemann, se produce el desarrollo más profundo y revolucionario de esta disciplina. A partir de aquí fueron las ideas riemannianas las que por mucho tiempo habrían de marcar el rumbo de la geometría diferencial. Dejando aparte el aspecto puramente métrico de la geometría riemanniana, fué sin duda alguna la idea de "variedad' la más importante aportación de Riemann a esta área de la matemática.

El lenguaje moderno, Riemann concibe una variedad como un par de conjuntos (X,A), donde cada elemento de A es una función sobre X con valores números reales (o complejos). X constituye el conjunto de los "puntos" de la variedad, mientras que los elementos de A, —que normalmente tiene la estructura algebraíca de anillo,— son las "funciones admisibles" de la misma. Físicamente (representación, por cierto, constantemente usada por Riemann en sus consideraciones), una variedad es un sistema físico, donde X constituye el conjunto de los "estados" por los que puede pasar el sistema y A el anillo de las "funciones de observación" que pueden efectuarse sobre éste; en particular, el número f(x) que una función de observación f hace corresponder a un estado x es lo que se interpreta en física como la "medida" de f en x, mientras que el concepto de dimensión de una variedad se corresponde con el número de grados de libertad del sistema. Lo que puede considerarse más revolucionario en el pensamiento de Riemann es el haber caido en la cuenta de que son las funciones y no los puntos del espacio lo que verdaderamente configura a una variedad como tal. Físicamente, esto viene a decir que son los datos de observación lo único que debe decidir la naturaleza del sistema físico considerado.

Este revolucionario punto de vista ha llegado a adquirir su expresión definitiva en la actualidad, donde por "estudiar variedades" se entiende tratar diferentes tipos de anillos (anillos de polinomios en geometría algebráica, anillos diferenciales en geometría y topología diferencial, anillos normados en análisis, etc.). Bajo este tratamiento, todos los conceptos deben ser introducidos a partir del anillo. !Hasta el espacio mismo!, el cual se identifica con un cierto conjunto de ideales del anillo que se denomina su "espectro'.

La idea no puede ser más atractiva físicamente al fijarse como objetivo definir todas las nociones asociadas a un sistema físico a partir de su "anillo de observables" exclusivamente. Y es, por cierto, desde este punto de vista como la física cuántica ha llegado a geometrizarse también. En efecto, cuantificar un sistema macánico no es hoy día otra cosa que "espectralizar" de cierta manera su anillo de Poisson de observables clásicos.

Todas estas ideas, especialmente su parte métrica e infinitesimal, fueron largamente explotadas a lo largo del siglo XIX por las escuelas alemana e italiana (Riemann, Christoffel, Ricci,etc.), culminando con la definición de lo que se dió en llamar derivación covariante o absoluta y el cálculo tensorial.

Y así llegamos a la tercera etápa de este desarrollo histórico, caracterizada por la aparición de los conceptos e ideas que nacieron con la Relatividad General y las teorías del campo unificado.

Según Riemann, la geometría debía fundarse sobre los siguientes dos hechos:

1) El espacio es una variedad tridemensional la cual puede ser localmente descrita por los valores de tres coordenadas x_1 x_2 x_3.

2) El cuadrado de la distancia entre dos puntos "infinitamente próximos" es una función cuadrática de las "coodenadas relativas" dx_i :

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$$

Por otra parte, la teoría de la relatividad especial condujo al descubrimiento de que el "tiempo" debe ser entendido como una cuarta coordenada x_4 con igual rango que las tres coordenadas espaciales y que el escenario de los sucesos materiales, el universo, es una variedad cuatridimencional métrica cuya forma cuadrática fundamental no es definido-positiva, sino de índice de inercia 3 : el espacio-tiempo de Minkowski.

Riemann mismo no cayó en la cuenta de que la forma cuadrática fundamental del espacio debía ser considerada como una realidad física, descubrimiento éste reservado a Einstein, que constituye la idea básica de su famosa teoría de la gravitación. Según Einstein, no existe espacio por una parte y fenómeno gravitatorio por otra, sino que la verdadera realidad física es la de un espacio geométrico sin ningún otro añadido, en el cual las leyes geométricas son exactamente las leyes de la gravitación (los coeficientes g_{ij} de la forma cuadrática fundamental son las componentes del llamado potencial gravitacional en el sistema de coordenadas considerado). En particular, si se puede encontrar un sistema de coordenadas globales sobre el espacio-tiempo respecto de las cuales la forma cuadrática fundamental pueda expresarse como:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dx_4^2$$

entonces nuestro espacio-tiempo —que es el de Minkowski— se entiende que está "vacío" de gravitación. La noción de "vacío" que tantos problemas conceptuales planteó a los físicos de siglos anteriores adquiere por fin un significado preciso.

Al lado de los fenómenos gravitatorios, los fenómenos electromagnéticos, gobernados por una forma diferencial lineal:

$$\omega = \sum_i A_i dx_i$$

cuyas componentes definen el potencial electromagnético, constituían el resto del pensamiento teórico de la época y dado el éxito conseguido por la teoría de la gravitación, resulta explicable que la física teórica se sintiera obligada a descubrir una "geometría" cuyas leyes dieran cuenta a la vez, de ambos fenómenos.

Tras el primer intento en este sentido, debido a Hermann Weyl en 1919, los esfuerzos dirigidos hacia una tal teoría unificada se multiplicaron (Weyl, Hesenberg, Eddington, Einstein, etc.) y aunque las diferentes teorías propuestas fracasaron en aquello que inicialmente pretendían, lo que sí quedó perfectamente claro es que la noción fundamental sobre la que tenía que basarse la geometría riemanniana, si es que quería estar de acuerdo con la naturaleza, era la de desplazamiento paralelo infinitesimal de un vector.

Las diferentes versiones propuestas fueron finalmente englobadas a partir de 1922 en la síntesis realizada por Elie Cartan, con lo cual empiezan por fin a comprenderse claramente todas las limitaciones anteriores, atravesando la geometría diferencial por uno de sus períodos más fecundos.

La idea de Elie Cartan es extremadamente original y abrió el camino,por otra parte, a la penetración de los grupos y de las ideas kleinianas en el dominio de la geometría diferencial: si a cada punto de una variedad se le asocia una geometría en sentido de Klein, todas ellas del mismo tipo, entonces definir un "espacio interconectado" correspondiente a esa geometría consiste en establecer un isomorfismo entre las geometrías en cada pareja de puntos dependiendo únicamente del camino que las une. Este isomorfismo constituye el último sustrato de la idea de desplazamiento paralelo. Bajo ese sorprendente punto de vista, la geometría diferencial no es otra cosa sino el estudio de la red de interconexiones entre las geometrías locales en cada punto, las cuales aparecen así como una primera aproximación de la verdadera geometría de la variedad. La noción de conexión se convierte de éste modo en el principal hallazgo de la geometría diferencial de ésta tercera etapa.

Con la obra de Elie Cartan culmina este periodo y da comienzo la última etapa de este proceso histórico que estamos describiendo. Lo más característico de ella es la fundamentación llevada a cabo alrededor de 1950 por la generación de matemáticos contemporáneos: Chevaley, Ehresmann, Lichnerowicz, Koszul, etc,; que permitió poner en claro, definitivamente, las ideas y métodos alcanzados en la etapa anterior. Esta es la época en que se da, por fin, la definición rigurosa del concepto de variedad diferenciable sobre la que se basa toda la geometría diferencial.

A partir de esta noción se ponen por delante de los ojos todas las estructuras subyacentes que en periodos anteriores eran usadas de un modo implícito. En particular, las estructuras tensoriales sobre una variedad así como su cálculo diferencial correspondiente, se aclaran para siempre vía la definición de "vector tangente" en un punto como derivación del anillo de las funciones diferenciables en los números reales.

Las geometrías a conexión lineal se presentan ahora con toda claridad. En efecto, los vectores tangentes en un punto definen un espacio vectorial llamado el espacio tangente a la variedad en dicho punto. Entonces, dar una geometría a conexión lineal consiste en definir un isoformismo entre los espacios tangentes en cada pareja de puntos dependiendo únicamente del camino que los une.

La reconstrucción de todo esto con los "espacios fibrados" principales y asociados, introducidos por Ehresmann y Whitney entre 1937 y 1939, completa esta etapa de fundamentación, proporcionando dichos espacios, casi veinticinco años después, el marco geométrico que hoy por hoy se considera más adecuado para describir la ciencia física.

Como ilustración de esto último, digamos unas breves palabras sobre la geometrización de la "mecánica de campos clásicos" que constituye, a nuestro enterder, uno de los cuerpos de doctrina más logrados y significativos de la física teórica moderna.

Un espacio fibrado consiste esencialmente en poner en cada punto de una variedad diferenciable algún tipo de espacio más sencillo, todos ellos isoformos entre sí (p.e. un espacio vectorial, un grupo, una geometría de Klein, etc.) de tal manera que la colección de espacios resultante sea también una variedad diferenciable. De este modo nos encontramos con un tipo de variedad constituida por "fibras", donde cada una de ellas consiste en el espacio situado en cada punto de la variedad de partida que, por tal motivo, se llama "variedad base". Dos ejemplos típicos son: el fibrado tangente y el fibrado de las referencias lineales de una variedad, los cuales se obtienen poniendo en cada punto de la variedad su correspondiente espacio tangente, o bien, el conjunto de todas las bases de éste; en el primer caso, las fibras son espacios vectoriales de dimensión la de la variable base, y en el segundo, grupos isomorfos al grupo general lineal de igual dimensión.

¿Pero cómo se construye una teoría de campos sobre un tal espacio fibrado?.

Consideremos, por ejemplo, la teoría del campo electromagnético. Aquí, el espacio fibrado es el fibrado tangente del espacio-tiempo de Minkowski. Definir un campo electromagnético concreto o "sección" de este espacio fibrado, consiste en dar para cada punto de la variedad base un vector de su correspondiente fibra. Sin embargo, no todas estas secciones

son campos electromagnéticos reales, sino solo aquellas que permanecen "estacionarias" en el sentido del Cálculo de Variaciones respecto de la funcional definida sobre el conjunto de todas las secciones por la "lagrangiana" del campo electromagnético.

Es difícil explicar aquí, en pocas palabras, el por qué de la elección de este modelo variacional para fundar la física. Digamos tan sólo, a título orientativo, que ello no responde a la idea más o menos ingenua de reducir la naturaleza a un problema de máximos y mínimos, sino más bien a que es el Cálculo de Variaciones y más concretamente la estructura geométrica que subyace al concepto de "estacionariedad", el modelo que mejor expresa la idea física de "observar" y de "medir" un campo en cada punto del espacio-tiempo.

Los diferentes campos reales de nuestra teoría vienen así caracterizados como las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange del correspondiente problema variacional.

Pero el asunto no acaba aquí. Nos encontramos en la fase meramente "lagrangiana" y se hace necesario dar un paso más, el "hamiltoniano", para acabar de desvelar la geometría que subyace a este importante cuerpo de doctrina.

En la segunda mitad de la década de los cincuenta, en plena etapa de fundamentación de la geometría diferencial y motivado en parte por el formalismo de Dirac de la mecánica cuántica, se aclara definitivamente la teoría de Hamilton de los sistemas dinámicos con un número finito de grados de libertad bajo la forma de lo que desde entonces se denomina una "geometría simpléctica" o equivalentemente una "estructura de Poisson" sobre una variedad diferenciable. Igualmente se aclara con la misma metodología el proceso que permite pasar del formalismo de Lagrange —que es como usualmente se define un sistema mecánico concreto— al formalismo de Hamilton, al darse una definición precisa del concepto de "transformación de Legendre". El punto clave era pues: generalizar a la teoría de campos el esquema geométrico anterior cuyo dominio de validez se reducía a los sistemas dinámicos conservativos con un número finito de grados de libertad.

A principios de los años sesenta, I. Segal inició un ambicioso programa sobre "cuantificación de campos no lineales" cuya idea básica consistía en considerar al conjunto de las soluciones de la ecuaciones de campo como sustituto del "espacio de fases" de la teoría hamiltoniana con la esperanza de poder generalizar a esta "variedad de soluciones", como se la conoce desde entonces, los métodos standard de cuantificación usados para los sistemas con un número finito de grados de libertad. De hecho, Segal estudió con detalle el caso de un campo escalar sobre el espacio-tiempo de Minkowski definido por una cierta ecuación en derivadas parciales hiperbólica no lineal, a cuyo conjunto de soluciones dotó de una estructura de variedad diferenciable (de dimensión infinita) a la cual equipó de una métrica simpléctica definida mediante el propagador asociado a dicha ecuación. El programa, si bien no tuvo el éxito esperado, debido fundamentalmente a las dificultades de tipo analítico que fueron presentándose, sí que aportó la brillante y original idea de considerar como espacio natural para fundar la teoría hamiltoniana de un sistema físico al conjunto de las soluciones de sus correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange.

Esta idea, adecuadamente incorporada al trabajo de tésis doctoral que sobre la "estructura geométrica del cálculo de variaciones" me encontraba desarrollando en 1965 bajo la dirección de mi maestro, el Profesor D. Juan Sancho Guimerá, nos permitió encontrar la estructura simplectica canónica sobre la variedad de soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange de un campo clásico arbitrario. Este trabajo, publicado en 1968, constituye una de las primeras versiones de lo que después a pasado a la literatura con el nombre de "Formalismo de Hamilton-Cartan del Cálculo de Variaciones", dominio de investigación éste que en muchos de sus temas (problemas de orden superior, cálculo de variaciones graduado, teorías gauge, etc.) se encuentra lejos aún de estar definitivamente cerrado. Con este formalismo se completa la descripción mecánica de la teoría clásica de campos al quedar definitivamente esteblecidos conceptos básicos tales como:

El álgebra de Poisson de observables de un campo; la subálgebra de invariantes Noether (o corrientes) asociada a las simetrias infinitesimales de su lagrangiana; el llamado grupo gauge de la teoría que, junto con los demás grupos de simetrías y ciertas hipótesis de simplicidad, permiten determinar de un modo casi unívoco la lagrangiana del campo por razones de invarianza del más puro estilo kleiniano, etc., etc.

Recapitulando: de una primera concepción de la física como colección de diferentes doctrinas construidas de modo axiomático en el espacio euclídeo ordinario, pasamos a considerar el punto de vista según el cual cada clase de fenómenos engendra su propia "geometría", desde la cual, dichos fenómenos se explican o, más exactamente, adquieren su verdadero sentido. El punto está en la elección del adecuado modelo geométrico. Dos ejemplos típicos han sido nuestro hilo conductor a este respecto:

Para los fenómenos electromagnéticos bajo la óptica de la teoría de la relatividad especial, la noción de geometría en sentido de Klein —esto es, la teoría de invariantes respecto de un grupo de transformaciones— constituye la elección más adecuada. Aquí, la noción de grupo es lo fundamental.

En cambio, en el caso de la gravitación, el modelo adoptado por Einstein para fundar su teoría fué el de un espacio de Riemann de la geometría diferencial, en el cual las leyes geométricas se identifican con las leyes gravitatorias. Aquí no hay grupos de transformaciones. Lo importante es un concepto más profundo y de más directo significado físico, que es: el de anillo de observaciones.

Sin embargo, estos dos modelos, que por otra parte estaban ya inventados en geometría mucho antes de que Einstein los usara para la física, pronto se vió resultaban demasiado restrictivos para explicar adecuadamente la naturaleza. Esto condujo a la concepción —y esta vez fué la física la gran sugeridora de la geometría— de un tipo de espacios más complejo,

especie de mezcla de los dos modelos anteriores, que es lo que más tarde se vino a llamar en topología algebráica un "espacio fibrado", estructura ésta que, insistimos, está constituída por una "variedad base" en cada punto de la cual se localiza una "fibra" que suele ser una geometría de tipo kleiniano (en física la variedad base es el espacio-tiempo, mientras que la fibra se corresponde con algún tipo de campo).

Sobre un tal espacio fibrado, al que se le añade una "red de interconexiones" para poner en comunicación las diferentes informaciones locales obtenidas en cada una de sus fibras, las ideas de la mecánica analítica tradicional, transformadas en los conceptos y operaciones básicas de un novísimo Cálculo de Variaciones pleno de significado físico y abierto a las modernas técnicas del Análisis, proporciona finalmente el entramado conceptual en el que se asientan la práctica totalidad de las teorías físico-matemáticas del momento presente.

Observación final.

Llegado aquí, no quisiera terminar esta charla sin responder a una pregunta que sin duda alguna habrá estado rondando la mente de todos ustedes a lo largo de mi expoxición; esto es:

Qué enseñar a partir de estas ideas en los primeros dos o tres cursos de una carrera de ciencias físico-matemáticas?.

La pregunta, que presupone ya la conveniencia y la posibilidad de una tal enseñanza refiriéndose tan sólo a cómo hacerla, puede formularse obviamente gracias al alto grado de formalización alcanzado por la geometría diferencial desde 1950, que ha hecho posible una paralela elementalización de sus conceptos básicos y que al coincidir éstos, por otra parte, con algunos de otras materias de los primeros cursos de carrera han obligado en cierto modo a la inclusión de esta disciplina en el primer ciclo universitario.

Contando como prerrequisito básico con un primer curso de Algebra Lineal que incluya la teoría de tensores sobre un espacio vectorial, la geometría diferencial se apoya en dos asignaturas más: "funciones de varias variables reales" y "ecuaciones diferenciales". Así pues, el secreto de una enseñanza efectiva de esta disciplina al nivel del que aquí estamos hablando se halla indudablemente, en una buena coordinación de su materia específica con las tres asignaturas anteriormente mencionadas. Por otra parte, dejando al Algebra lineal que es claramente autónoma, puede decirse que una buena parte de los citados dos curso de Análisis son geometría diferencial en su más estricto sentido; así, por ejemplo, la teoría de la integración de formas diferenciales sobre las hipersuperficies del espacio euclídeo de dimensión n con su teorema de Stokes como resultado central, o la teoría de los sistemas diferenciales exteriores con su más importante aplicación a las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, ¿es geometría o es análisis?.

En lo que respecta a la enseñanza universitaria, puede decirse que desde hace unos doce años este plan docente está prácticamente consolidado en su aspecto matemático, existiendo todavía algunos fallos de coordinación con las asignaturas de física, atribuible en parte a la falta de confianza de algunos profesores en los nuevos métodos, que no acaban de adoptarlos en sustitución del anacrónico "Cálculo vectorial" que a tantos errores conceptuales ha conducido desde su desarfortunada invención.

No puedo dejar de referirme aquí, en el caso de España, a la valiente experiencia puesta en práctica entre 1955 y 1960 por el profesor Sancho Guimerá en la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid, al desarrollar según esta metodología la asignatura que tenía encomendada de "Análisis Matemático 3° de la Sección de Física. A él se debe, sin duda alguna, la introducción en nuestro país de la Geometría diferencial moderna, justo en los años en que internacionalmente esta disciplina se hallaba en plena etapa de formalización. Es éste un ejemplo, sin embargo, que lejos de ser alentador para la ciencia española resulta más bien triste, pues ha sido después de casi veinte años cuando esta metodología se ha empezado a imponer en nuestras universidades tras haberse visto que daba resultado en los centros extranjeros, lo cual revela una vez más la enorme desconfianza que tenemos los españoles en nosotros mismos.

Y ya para terminar, cuando al empezar esta charla me referí al alto nivel de las asignaturas del plan de estudios de esta Escuela de Estudios Superiores en Ciencias Físico-Matemáticas de la Armada, creedme que lo decía con el convencimiento que se obtiene cuando se hace un estudio detallado del plan de estudios de un centro comparándolo con los correspondientes a otros Centros similares. En el caso de las materias de tipo geométrico, de las que me he ocupado aquí, debo decir, sin ningún tipo de reservas, que la programación de geometría de esta Escuela me ha llenado de satisfacción tanto por la amplitud como por la profundidad con que se abordan los temas que deben darse. Estoy convencido y aprovecho la ocasión para proponerlo aquí, que un cambio de información y de experiencias en este sentido sería un buen punto de arranque de nuestras deseadas futuras relaciones.

Obras consultadas.

P. Abellanas — "Unas reflexiones sobre la biografía de la Matemática". Leccion inaugural del Curso académico 1979-80 de la Universidad Complutense de Madrid.

A. Einstein — "Relativity and the problem of space". University Paperbacks Methuen, London, 1960.

J. Etayo — "Pequeña historia de las conexiones geométricas". Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1983.

P. Garcia — "Geometria simpléctica en la teoria clásica de campos". Collect. Math. Vol. XIX, 1968.

P. Garcia — "La mecánica como estructura geométrica", 2 Encuentro sobre Mecánica, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1983.

F. Klein — "Le programme d'Erlangen", Collection "Discours de la Methode", Gauthier-Villars, 1974.

A. Lichnrowicz — "Geométrie et Physique", Proceedings of the meeting "Geometry and Physics", Florence, 1982.

J. Palacios — "El lenguaje de la física y su peculiar filosofía", Discurso de ingreso en la Real Academia Española. Madrid. 1953.

J. Sancho — "Memoria de oposiciones a la Cátedra de Geometría Diferencial de la Universidad Complutense de Madrid", 1960.

S. Sternberg — "On the role of Field Theories in our Physical Conception of Geometry", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 676, Springer — Verlag, 1978.

H. Weyl "Gravitation and electricity", Dover Publications inc., 1923.

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlos.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Número y año	Convocado en Boletín	Crónica - Enunciados
I (1983)	1	2, pag 11
II (1984)	3	4, pág 7
III (1985)	5	7, pág 3
IV (1986)	9	10, pág 5
V (1987)	13	

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA :

Número y año	Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX (1984)		3, pág 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83

OLIMPIADA MATEMÁTICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
I (1986) Colombia	8, págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12, págs. 3 y 75

OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
XXIV (1983) París	2, pág. 15
XXV (1984) Praga	4, pág. 67
XXVI (1985) Helsinki	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986) Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987) Cuba	

- - - - -

CALEIDOSCOPIOS EN LA ALHAMBRA

Por José María Montesinos Amilibia
Catedrático de la Universidad Complutense

INTRODUCCION

Este artículo trata de diseños simétricos en el plano, de los que la Naturaleza proporciona algunos ejemplos interesantes, como las celdillas hexagonales de un panal de abejas; las minúsculas flores que tapizan la inflorescencia de un girasol, o la tela de una araña. Algunos de estos diseños han sido imitados por el hombre, desarrollados y complicados hasta límites inverosímiles como en el arte musulmán.

Como es bien sabido, tanto la religión judía como la musulmana prohíben la representación de personas o animales. Esto produjo un desarrollo extraordinario del arte abstracto en su versión simétrica (que tan en contraste está del arte abstracto actual como una obra de Bach con cualquiera de los ruídos, ambiguamente musicales, que oímos en la radio del vecino). Es cierto que algunos productos del arte actual tienden de nuevo como un imán a lo simétrico. Tómese como ejemplo el horrible monumento a la Constitución, que parece representar la 8-celda, tal vez para identificar plásticamente la utopía con la cuarta dimensión.

Lo cierto es que lo simétrico, en cualquiera esfera del arte, nos produce un influjo de belleza. Quizás ello sea debi-

---

Hemos de manifestar nuestro profundo agradecimiento al Prof. Montesinos que nos ha hecho el obsequio de exponernos algunos de los puntos tratados en su conferencia celebrada en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de la que es Miembro Correspondiente.

do a que casi todo lo que nos rodea en la Naturaleza es simétrico y a que el hombre ha tratado de plasmar artísticamente la Naturaleza abstrayendo la idea de simetría.

Este desarrollo del arte simétrico por influjo del islamismo tuvo lugar de modo especialmente bello y abundante en Granada, en los siglos XIII, XIV y XV. La Alhambra de Granada es un paraíso de diseños ornamentales planos, y es considerada como el máximo exponente a tal respecto.

Bien es sabido que aunque el número de posibles diseños planos es infinito, las reglas de formación son tan sólo diecisiete. Un caleidoscopio ilustra bellamente ésto. En él, la regla de formación son tres espejos que forman un triángulo equilátero, pero para cada posición del conjunto (asimétrico en general) de los abalorios de colores, se obtiene un diseño siempre nuevo. En cierto modo, las diecisiete reglas mencionadas antes pueden considerarse como diecisiete caleidoscopios distintos.

Pues bien, algunos autores actuales nos aseguran que una medida del desarrollo cultural de un pueblo vendría dada por el número de caleidoscopios distintos empleados en su ornamentaciones planas. Así se llegó a la cuestión de si los hispano-musulmanes de la Alhambra eran lo suficientemente cultos como para haber empleado los diecisiete caleidoscopios, o si, por el contrario, utilizaron menos, y así habrán de ser calificados de culturalmente deficientes.

Y es así como comenzó hace algunas décadas el juego de la "búsqueda del caleidoscopio". Durante varias decenas de años se pensó que sólo había trece caleidoscopios en la Alhambra [GGS] con el correspondiente juicio peyorativo lanzado a nuestros connacionales, pero ahora sabemos que están los diecisiete, aunque algunos de ellos pobremente representados (véase [M]).

En este artículo introduciremos la definición técnica de caleidoscopio ("orbifold"), un concepto inventado por Satake y redescubierto por Thurston (quien lo popularizó) empleándolo como un instrumento eficaz para obtener resultados sobre grupos que actúan en variedades. Adquiriremos la idea de caleidoscopio mediante un ejemplo proveniente de un grupo cristalográfico plano e ilustraremos todo mediante ejemplos provenientes de La Alhambra y de Asia Menor.

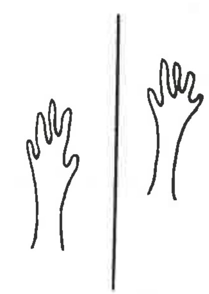
El plan del artículo es:

I. Grupos cristalográficos planos.

II. Caleidoscopios.

I. Grupos cristalográficos planos

<u>1.</u> Denotaremos por E^2 al plano euclídeo y por $E(2)$ a su grupo de isometrías. Los elementos de $E(2)$ son traslaciones y rotaciones, entre los que preservan la orientación de E^2, y reflexiones y reflexiones sesgadas, entre los que la invierten. Estas últimas son composición de reflexión y traslación:



La colección de haces de rectas paralelas y orientadas de E^2 es lo que apropiadamente llaman Bonahon y Siebenmann [BS] <u>esfera del horizonte</u>, o simplemente <u>horizonte</u>. Está parametrizada por cualquier 1-esfera de E^2.

La acción de $E(2)$ en el horizonte define un epimorfismo

$$h_\infty : E(2) \longrightarrow O(2)$$

sobre el grupo ortogonal $O(2)$, cuyo núcleo E^2_* consta de las isometrías que no alteran dirección, es decir, de las traslaciones. Hay pues una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow E^2_* \longrightarrow E(2) \xrightarrow{h_\infty} O(2) \longrightarrow 0$$

Para cada $Q \in E^2$, E^2_* puede identificarse con el grupo abeliano del espacio vectorial E^2_Q, definido por Q, al igualar la traslación (Q,P) que envía Q a P, con el punto P. También existe una sección

$$s_Q : O(2) \longrightarrow E(2)$$

de la sucesión exacta corta anterior, en donde $O(2)$ se identifica con el grupo ortogonal que actúa en el espacio vectorial E^2_Q. La acción de $O(2)$ en E^2_*:

$$t \longmapsto s_Q(\gamma)\ ts_Q(\gamma)^{-1}$$

se identifica entonces con la acción ordinaria de $s_Q(O(2))$ en E^2_Q.

2. Dado un subgrupo G de $E(2)$ llamaremos G_∞ a $h_\infty(G)$ y G_* a $G \cap E^2$. Se tiene una sucesión exacta (no escindida en general):

$$0 \longrightarrow G_* \longrightarrow G \xrightarrow{h_\infty} G \longrightarrow 0$$

Al fijar un $Q \in E^2$, G_* se identifica con un subgrupo G_Q de E^2_Q.

2.1. Proposición. $s_Q(G_\infty) \leq E(2)$ deja invariante el conjunto G_Q.

Demostración. Sea $P \in G_Q$ y $\gamma \in G_\infty$. Existe $g \in G$ tal que $h_\infty(g) = \gamma$. Entonces existe $t \in E^2_*$ tal que $tg = s_Q(\gamma)$. Luego la traslación

$$(Q,\ s_Q(\gamma)\ P) = (s_Q(\gamma)\ Q,\ s_Q(\gamma)\ P) = (tg\,Q, tg\,P) = (gQ,\ gP)$$

es conjugada de la $(Q,P) \in G_*$ mediante $g \in G$, y por tanto pertenece a G_*. Luego, $s_Q(\gamma)\ P \in G_Q$ □

3. Decimos que G_* expande E^2 si está generado por dos traslaciones que fijan haces paralelos diferentes. Equivalentemente, G_Q está generado por dos vectores de E^2_Q linealmente independientes. Se dice entonces que G_Q es una rejilla.

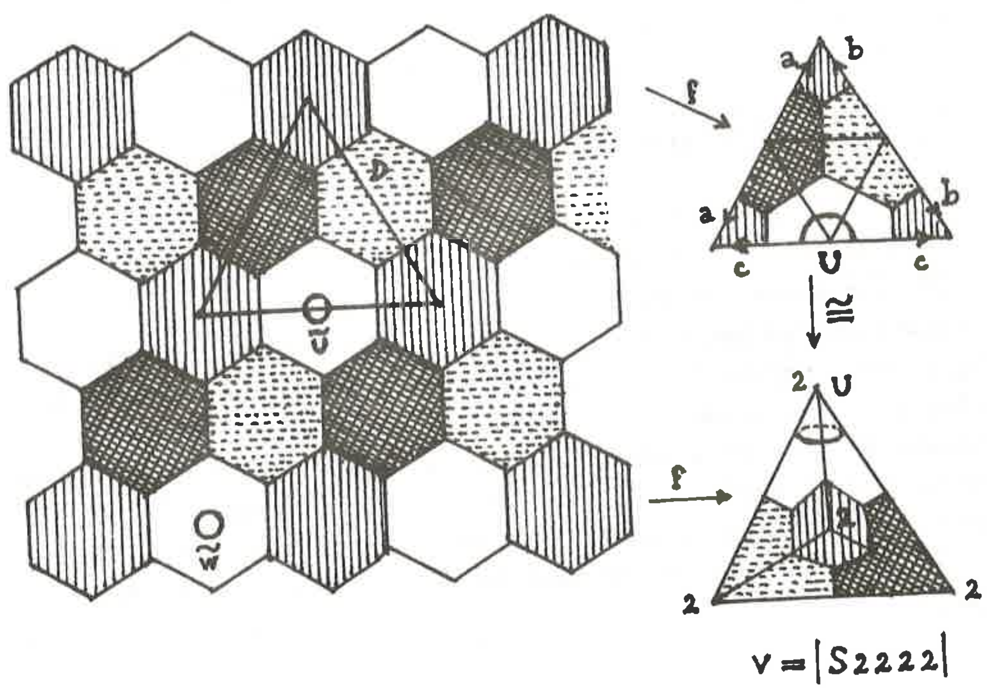
G se dice cristalográfico si G_* expande E^2.

La proposición 2.1. dice que $s_Q(G_\infty)$ deja invariante la rejilla G_Q. Por tanto el orden del subgrupo $G_\infty \cap SO(2)$ no puede ser mayor que el número de puntos de G_Q que yacen en una circunferencia de centro Q y que pasa por $P \in G_Q$. Se deduce que G_∞ es un subgrupo finito de $O(2)$. Por tanto G_∞ sólo puede ser cíclico C_m de orden $m \geq 1$, o diedral D_{2m} de orden $2m$, $m \geq 1$. Además E^2/G (= espacio de las órbitas) es el cociente del toro E^2/G_* por la acción del grupo finito G_∞. Por tanto E^2/G es compacto y la órbita de cada punto de E^2 bajo la acción de G es discreta. El recíproco es también cierto (ver, por ejemplo, [HC]).

II. Caleidoscopios

4. Consideramos ahora el cociente E^2/G, en donde G es un grupo cristalográfico, y queremos saber cuánta estructura de E^2/G es necesario capturar para poder reconstruir la acción de G en E^2. El siguiente ejemplo (inspirado en un ejercicio de Thurston [Th]) da la clave.

Tomemos el grupo cristalográfico $K(\ell)$ del alicatado ℓ coloreado de la figura: $K(\ell)$ consta de traslaciones y de rotaciones de 180° en los centros de los hexágonos.



Para hallar $E^2/K(\ell)$ tomemos el triángulo equilátero de la Figura como dominio fundamental D para la acción de $K(\ell)$. Así $E^2/K(\ell)$ es el resultado de identificar el borde ∂D consigo mismo como indica la Figura. Las identificaciones pueden realizarse en E^3 plegando D a lo largo de tres líneas, obteniéndose así $E^2/K(\ell)$ como la frontera V de un tetraedro regular en E^3.

El tetraedro V es un espacio métrico y contiene toda la información necesaria para reconstruir el alicatado ℓ. En efecto, basta "desarrollar" el tetraedro sobre el plano: colocando una cara de V sobre el plano y haciéndolo rodar. (Puede pensarse también en E^2 "envolviendo" a V).

Ejercicio (Thurston).- Una geodésica de V nunca se corta a sí misma.

Analicemos ahora la estructura de V teniendo en mente su estructura métrica y la definición de variedad diferenciable mediante cartas. Todo punto de V que no sea un vértice puede cubrirse con un "pequeño" abierto U tal que $f^{-1}U$ es una unión disjunta de abiertos de E^2, tal que cada uno de ellos se aplica isométricamente sobre U:

$$f|\tilde{U}:\tilde{U} \xrightarrow{1:1} U$$

donde f es la aplicación $f:E^2 \longrightarrow V$. De hecho, pues $V\setminus\{$vértices$\}$ es una 2-variedad diferenciable con estructura geométrica euclídea, pues los cambios de cartas son isometrías del plano euclídeo. Un vértice v de V se puede cubrir con un abierto U de modo que cada componente de $f^{-1}(U)$ se aplica 2 a 1 sobre U:

$$f|\tilde{U}:\tilde{U} \xrightarrow{2:1} U$$

Esto refleja el hecho de que los vértices de V son singulares (la medida de un círculo de radio r en torno a un vértice es

πr, es decir, el ángulo en el vértice es de 180°). Por otro lado si $f|\tilde{W}:\tilde{W} \xrightarrow{2:1} W$ es otra "carta" (carta plegada la llamaremos) que cubre a v, la relación entre $\tilde{V}$ y $\tilde{W}$ viene dada por una isometría.

Al igual que se hace en el caso de variedades ordinarias introducimos primero un concepto más general (el de caleidoscopio, correspondiente al concepto de "variedad diferenciable") y luego precisaremos el concepto de caleidoscopio "con geometría".

5. Un caleidoscopio M de dimensión n (sin frontera) es un espacio metrizable $|M|$ dotado de un atlas de cartas plegadas

$$p_i:\tilde{U}_i \longrightarrow U_i$$

en donde U_i, $i \in I$, es un cubrimiento por abiertos de $|M|$; $\tilde{U}_i$ es un abierto de una n-variedad diferenciable X (sin frontera); p_i es topológicamente equivalente al cociente de $\tilde{U}_i$ por un grupo finito de difeomorfismos que actúa en $\tilde{U}_i$. Hay una condición de compatibilidad de cartas que se expresa así: si $x_i, x_j \in \tilde{U}_i, \tilde{U}_j$ cumplen $p_i x_i = p_j x_j$, existen entornos abiertos V_i, V_j de x_i, x_j y un difeomorfismo $f:V_i \longrightarrow V_j$ tal que

$$p_j\ f(x) = p_i(x), \quad \text{para todo} \quad x \in V_i$$

Dos atlas definen la misma estructura de caleidoscopio en $|M|$ si su unión es un atlas. Nótese que la misma variedad X es un caleidoscopio.

Un isomorfismo $M \cong M'$ entre caleidoscopios es un homeomorfismo $|M| \cong |M'|$ que hace a los atlas compatibles.

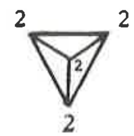
Un caleidoscopio es compacto si $|M|$ es compacto, y es orientable si los difeomorfismos locales y las acciones de grupos empleados en la definición de su atlas preservan la orientación.

Un caleidoscopio tiene una (G,X)-estructura si los difeomorfismos locales y las acciones de grupos empleados en la definición de su atlas son restricciones de elementos de un grupo G de difeomorfismos de X a abiertos de X. Así, por ejemplo, el cociente de E^2 por la acción de un grupo cristalográfico es un caleidoscopio con $(E(2),E^2)$-estructura, o caleidoscopio euclídeo.

Sea $\{p_i:\tilde{U}_i \longrightarrow U_i\}$ un atlas para un caleidoscopio M. Una métrica Riemanniana en $\tilde{U}_i$ define otra métrica Riemanniana en $\tilde{U}_i$, para cada $g \in G_i$. La media de todas (G_i es finito) es una métrica invariante para G_i. Si G_i es el grupo de isotropía de $x \in \tilde{U}_i$, G_i actúa (linealmente) en $T_x\tilde{U}_i$ por la diferencial. La función exponencial define un difeomorfismo ψ entre un entorno W de 0 en $T_x\tilde{U}_i$ y uno V de x en $\tilde{U}_i$ y como G_i pasa geodésicas a geodésicas es fácil ver que $\psi:W \longrightarrow V$ puede tomarse equivariante con respecto a G_i. Esto prueba que las cartas $\tilde{U}_i \longrightarrow U_i$ pueden tomarse de modo que $\tilde{U}_i \in \mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{R}^n_+$ y $G_i \subset O(n)$ (pero los cambios de cartas vienen todavía dados por difeomorfismos locales).

Para $n=2$, G_i es cíclico C_m ó diedral D_{2m}, $m \geq 1$, y $|M|$ es una 2-variedad. Todo punto de $|M|$ puede dotarse de un símbolo que indique su grupo de isotropía. Habitualmente un número i asociado a un punto aislado de Int $|M|$ indica grupo de isotropía C_i para tal punto. Los puntos con isotropía D_{2m} están en $\partial|M|$ (aunque no necesariamente componen todo $\partial|M|$); aquellos con $m>1$ se indican por $\bar{m}$ y aquellos con $m=1$ se "platean" (se marcan en la frontera de $\partial|M|$ con trazo grueso). Usaremos como notación, siguiendo a [BS], el poner $|M|$ seguido de los símbolos m de los grupos cíclicos y de los símbolos $\bar{m}$ de los diedrales.

Así el caleidoscopio euclídeo V del nº 4 tendría un caleidoscopio (diferenciable) subyacente representado por



$= S2222 \ (|M| = S = \text{esfera})$

6. Es pues posible dar una lista de los 2-caleidoscopios (diferenciables) ¿Cuáles de ellos admiten estructura geométrica?

Puede verse que salvo unos pocos todos son geométricos. Concretamente admiten una de las tres (G,X) - estructuras siguientes:

i) Esférica: $X = S^2$, $G = O(3)$

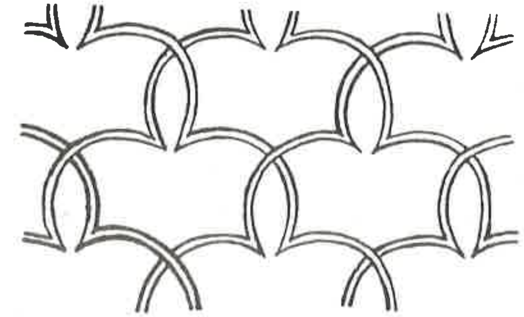
ii) Euclídea: $X = E^2$, $G = E(2)$

iii) Hiperbólica: $X = H^2$ (plano hiperbólico), G = grupo de isometrías hipérbólicas.

7. Volvamos a nuestra pregunta inicial sobre qué estructura era necesario capturar en el cociente $E^2/G(f)$ para reconstruir f.

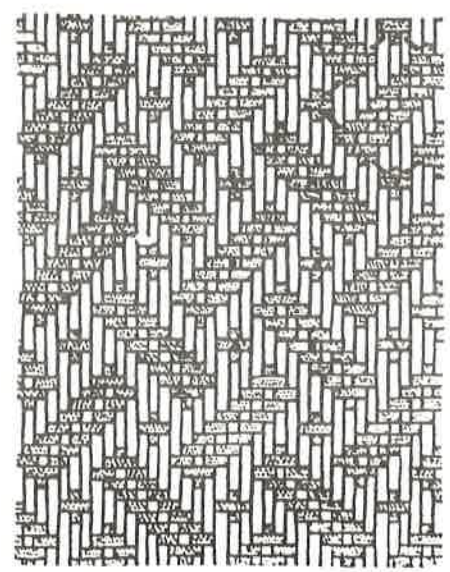
Análogamente al caso de una variedad (que por lo demás es un caso particular de caleidoscopio), un caleidoscopio diferenciable tiene una cubierta universal y un grupo de superposiciones. Si el caleidoscopio M es geométrico puede usualmente verse que la cubierta universal es el espacio X sobre el que está modelado el caleidoscopio y que el grupo de superposiciones es un grupo de isometrías. Esto se hace exactamente igual que con nuestro ejemplo inicial del tetraedro V: haciendo rodar (o "desarrollando") el caleidoscopio sobre X. Si pensamos en nuestro caleidoscopio M como provisto de cierta pintura no completamente seca, al rodar sobre X irá describiendo una teselación o alicatado, sobre el camino rodado, que no es sino una

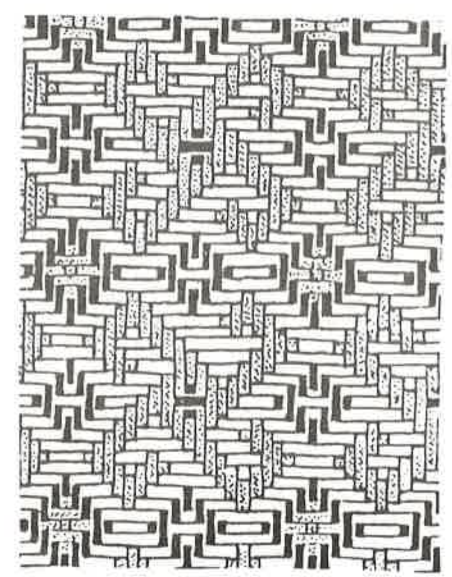

T


K


D22


P22


S2222


$D\bar{2}\bar{2}$

aplicación de un entorno de cierto camino en M sobre un entorno de cierto camino en X. Esto es realmente una aplicación de la cubierta universal de M sobre X, y en muchos casos es un homeomorfismo. De este modo M tesela X, del mismo modo en que, en la figura del nº 4, M = V tesela E^2. En este sentido podemos decir que a partir de M recobramos nuestra teselación en X y por tanto su grupo de simetría.

8. Para determinar qué caleidoscopios son euclídeos utilizaremos la característica de Euler $\chi(M)$ de un caleidoscopio M. Si celulamos M de modo que los puntos de cada célula C_i tengan igual grupo de isotropía $G(C_i)$,

$$\chi(M) = \sum_{C_i} (-1)^{\text{dimensión } C_i} |G(C_i)|^{-1}$$

en donde $|G(C_i)|$ es el orden del grupo de isotropía $G(C_i)$, y la suma se extiende a todas las células de M.

Ahora bien, si $M \longrightarrow N$ es una cubierta entre caleidoscopios, de h hojas, se tiene $\chi(M) = h\,\chi(N)$. Si N es euclídeo, sucede que N es el cociente de E^2 por un grupo cristalográfico G y por tanto $M = E^2/G_*$ (que es un toro) cubre a N. Luego $\chi(N) = \frac{1}{h}\chi(M) = 0$. Así los posibles caleidoscopios euclídeos son aquéllos con $\chi(N) = 0$. Un sencillo cálculo muestra que sólo hay diecisiete posibles:

T (toro), K (botella de Klein), A (anillo), M (banda de Möbius),

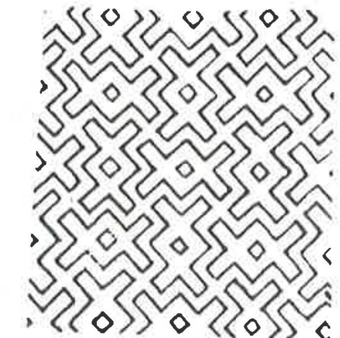
S2222, $D\overline{2222}$, $D2\overline{22}$, (D = disco), P22 (P = plano proyectivo),

S442, $D\overline{442}$, $D4\overline{2}$,

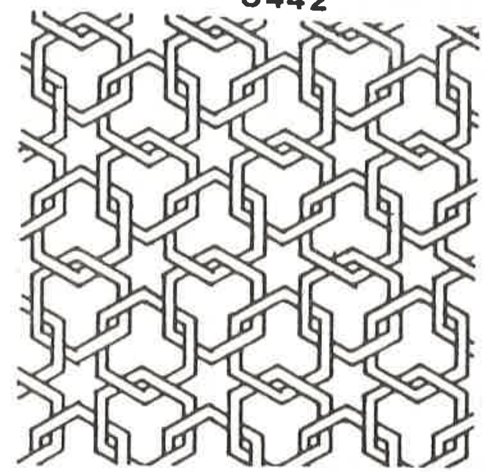
S333, $D\overline{333}$, $D3\overline{3}$,

S632, $D\overline{632}$

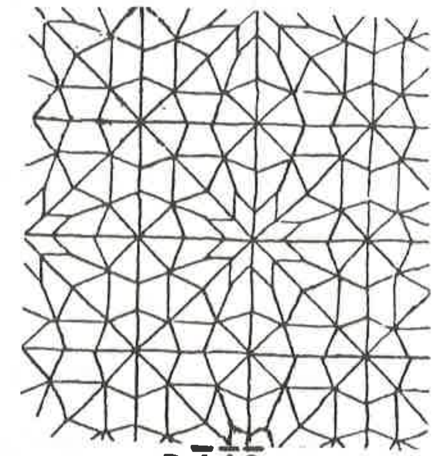
S442



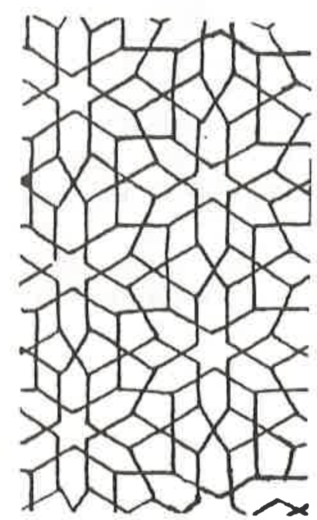
$D4\bar{2}$



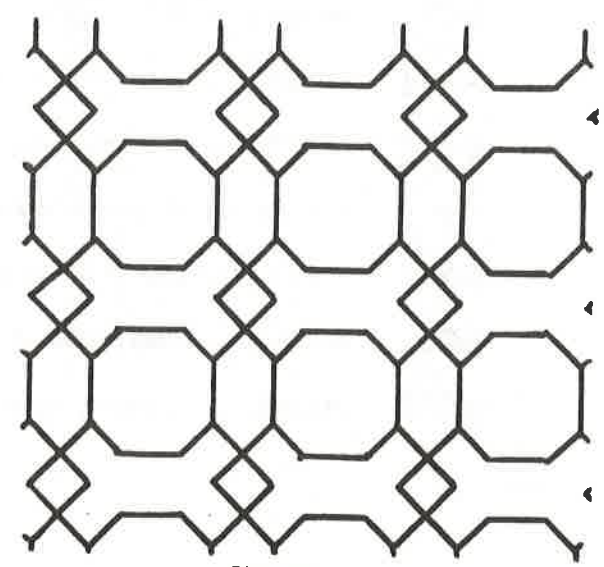
S632



$D\bar{4}\bar{4}\bar{2}$



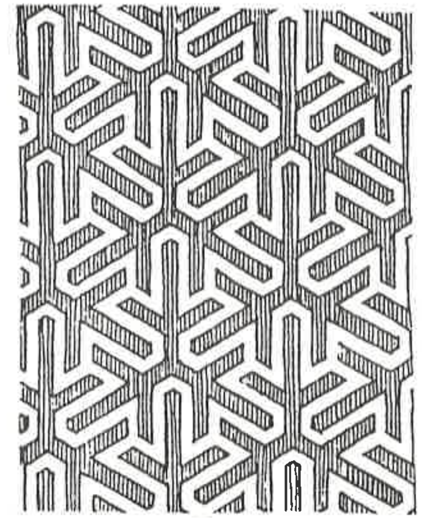
$D\bar{6}\bar{3}\bar{2}$



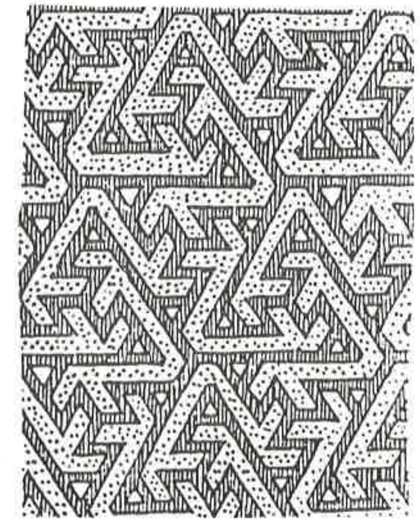
$D\bar{2}\bar{2}\bar{2}\bar{2}$

La Alhambra de Granada prueba que estos diecisiete existen. A continuación presentamos algunos ejemplos provenientes de Asia Menor y de la Alhambra:

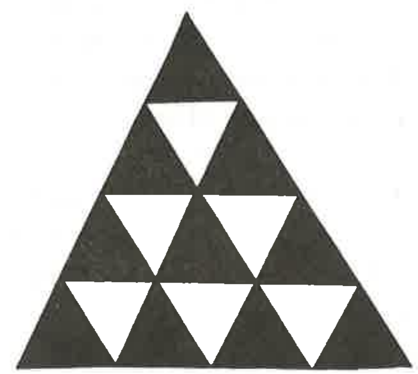
K	Granada, La Alhambra, Puertas del vino, s. XIV
T	Konya, Sahib Ata-Cami, 1258
S2222	Van, Ulu-Cami, Mucarna 1389/1400
D2$\overline{22}$	Konya, Sircali-Medrese, 1242-45
D22	Divrigi, Kale-Cami, 1080-81
P22	Konya, Sircaly-Medrese, 1280
S442	Sivas, Hospital Kaikavus, 1217-18
D4$\overline{2}$	Konya, Karatay-Medrese, 1251/55
D3$\overline{3}$	Konya, Seyh Sadrettin Konevi-Mescit, 1274/75
S333	Konya, Hasbey Darulhuffazi, 1421
D$\overline{333}$	Zaragoza, La Seo, s. XIV
S632	Zaragoza, La Aljafería, s. XIII
M	Granada, La Alhambra, Sala de los Reyes, x. XIV
A	Granada, La Alhambra, Comares, x. XIV
D$\overline{442}$	Ankara, Museo de Etnografía, 1355
D$\overline{632}$	Aksaray, Ulu-Cami, 1150/53
D$\overline{2222}$	Granada, La Alhambra, Museo



D3$\overline{3}$



S333



D$\overline{3}\overline{3}\overline{3}$

M

n = negro
m = melado
v = verde
a = azul

A

Los siguientes ejercicios pueden servir al lector para determinar su grado de comprensión del tema tratado.

Ejercicio 1.- Hallar los 2-caleidoscopios (sin frontera) que no admiten estructura geométrica.

Ejercicio 2.- Hallar los 2-caleidoscopios esféricos y poner ejemplos de alicatados en S^2 que definan sus cubiertas universales.

Ejercicio 3.- Hallar algún diseño en H^2 cuyo grupo de simetría G defina una estructura de 2-caleidoscopios en H^2/G.

REFERENCIAS

El lector puede leer [BS], [Th], [M] para más información sobre el tema. Acerca de teselaciones en el plano hiperbólico recomendamos [Ma]. El libro [HC] es óptimo para grupos cristalográficos planos y para entender el plano hiperbólico.

[BS] F. Bonahon y L. Siebenmann.- "Seifert Orbifolds and their Role as Natural Crystalline Parts of Arbitrary Compact Irreducible 3-orbifolds", 1982, Sussex Conference LMS Lecture Notes #95, pp. 18-85, Cambridge Univ. Press 1985.

[HC] Hilbert-Cohn Vossen.- "Geometry and Imagination", Academic Press, New Yor & London 1972.

[Th] W. Thurston.- "The Geometry and Topology of 3-manifolds", Princeton Univ. Press (aparecerá).

[GGS] B. Grunbaum, Z. Grunbaum y C.G. Shepard.- "Symmetry in Moorish and other ornaments", Comp. and Maths. with Appls. 12B (1968) 641-653.

[M] J.M. Montesinos.- "Caleidoscopios en la Alhambra", Memorias de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid (aparecera).

[Ma] J.W. Magnus.- "Non-euclidean tesselations and their groups", Academic Press, New York 1974.

LA DIDACTICA DE LA MATEMATICA QUE YO HE VIVIDO

por Alberto Aizpún López

Con motivo de la jubilación como Catedrático de Didáctica de la Matemática en la Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. "María Díaz Jiménez" de Madrid, del profesor don Alberto Aizpún, los profesores de su Area de Conocimiento promovieron un acto de homenaje que se desarrolló con gran cordialidad. En este acto, el homenajeado, que con tanto entusiasmo viene colaborando en las tareas de nuestra Sociedad, impartió una lección cuyo texto nos ha cedido amablemente para que puedan conocerlo nuestros socios.

¡Qué distinto panorama parece verse al iniciar el ejercicio en un Colegio de niños, recién terminada la Carrera de Magisterio, o después de treinta años de enseñanza en la Escuela del Profesorado¡. ¡Qué distintos matices se aprecian y qué distintas interpretaciones se hacen de lo que se ve¡. Y no siempre resulta la segunda visión más convincente para todos, más razonable o más deseable.

Permitidme por un momento una breve mirada al pasado. Algo más de cuarenta años atrás, yo entraba como responsable (como "propietario", se decía) de una Escuela unitaria. Era un local de unos 40 metros cuadrados, al mismo nivel que la calle y la única entrada de aire que tenía era la puerta. Allí acudían cincuenta niños entre 6 y 12 años. Pero no son las condiciones físicas del local lo que quiero evocar, sino los problemas educativos que encontré en aquel tiempo y compararlos con la visión que hoy tengo de los problemas que encuentra un Profesor de E.G.B.,recién salido de nuestros Centros, al llegar a su primer Colegio.

Yo creo que, bien mirado, los problemas no han cambiado desde entonces y aún en aquel tiempo eran los mismos que en otro más anterior. Con intención de señalarlo así o sin ella, es reconocido implícitamente en ocasiones. Por ejemplo: en estos últimos meses en que, como todos vosotros, he tenido oportunidad de leer memorias presentadas a los concursos de plazas de Matemáticas, he visto que, con mucha frecuencia,eran citados básicamente y no de modo marginal, los comentarios, los consejos y las opiniones sobre la enseñanza de las Matemáticas, del profesor Puig Adam. Citas, ciertamente, oportunas, merecidas, adecuadas a lo que se trataba, cargadas de actualidad. Talmente como si estuvieran acabadas de escribir. Pero D. Pedro Puig falleció, desgraciadamente, hace más de veinticinco años y por tanto sus trabajos son anteriores a ese tiempo, lo que prueba que, en esencia, los problemas de hoy son los mismos de entonces. Por eso digo al principio:"qué distinto panorama parece verse"; realmente, el panorama es, básicamente, el mismo, pero los ojos que ven, el punto desde el que miran, las sombras que subrayan o los rincones a los que atienden con preferencia, son otros. A fin de cuentas, cuarenta años de enseñanza vivida con dedicación, hacen aprender algo también al Profesor.

¿Que cuáles son esos problemas? Pues ... mi opinión es ésta: (Si esto fuera una película de cine, ahora se produciría un fundido. Después aparecería aquella Escuela, se me vería entrando por la única puerta existente y se oiría una voz en off que transmitiría al espectador mis pensamientos. Diría cosas como éstas: "Yo he sido en la Escuela Normal eso que se llama un alumno aprovechado; en todas las asignaturas me han dado la nota de sobresaliente. He realizado prácticas con un gran maestro, he estudiado libros. Se me han proporcionado, o yo mismo he visto o leído, ciertas técnicas de enseñanza. Técnicas de enseñar a leer, otras para enseñar a escribir, otras para enseñar el cálculo... Conozco, al menos por preferencia de estudio en la Normal, distintos métodos. La enseñanza activa, la enseñanza individual, las experiencias de Wasburne en Winnetka, el método Decroly, el de la doctora Montessori, el método heurístico, el que llaman experimental o de laboratorio, el método de Proyectos, el de Centros de interés, el Plan Dalton, lo que se llama la Escuela Nueva... etc. Conozco, incluso, lo que se ha publicado sobre las que se llaman Escuelas Populares de estudios superiores, tan distintas en su organización en USA, o en Sudamérica, en Dinamarca, en Rusia o en Alemania, pero siempre con el slogan, la bandera tipo, de "quien tiene a la juventud tiene el futuro". En fin, la Normal me ha dado técnica y métodos y yo tengo ganas de trabajar. Esto no puede fallar".)

Imaginemos que ahora se produce otro fundido, que la pantalla queda a oscuras y que de nuevo estoy aquí en persona. Y digo:

Pues no. Estaba totalmente equivocado. Aquello no funcionaba, por lo menos no funcionaba como yo creí que iba a funcionar. En apariencia, los resultados no dependían ni de la técnica, ni del método ni de mi entusiasmo. Podía pensarse que eran totalmente aleatorios.

Así que muy pronto pude percatarme de varias cosas que nunca he olvidado en mi posterior trabajo como Profesor en esta casa. Por ejemplo, de la diferencia que existe entre la información y el conocimiento; creo que nunca subrayaremos ésto suficientemente en nuestras clases. Estaba informado de lo que era Escuela unitaria (lo que después, cambiando el sesgo de la significación, se llamó "de maestro único"), pero una cosa es leer un examen sobre el mismo, y otra distinta vivirla como Maestro cinco horas diarias durante todo el curso. Y esto que ahora digo con relación a una escuela unitaria puede aplicarse a cualquier detalle de la docencia. Sobre todo, de la docencia en EGB. ¿Pensamos suficientemente en ello cuando trabajamos con nuestros alumnos? Me parece que se puede trasponer a la Didáctica el símil de Poincaré sobre el jugador de ajedrez y el estudioso de la Matemática.

Otro ejemplo de algo que aprendí pronto en aquella Escuela es que hay cosas que pueden tener mucha importancia para el estudio de la Pedagogía y casi ninguna para la práctica diaria en la clase, así como pueden encontrarse cuestiones, y muchas, de gran importancia para la docencia efectiva y ninguna para un estudio serio de la Pedagogía. Creo que todo Profesor de Escuela del Profesorado debe tener eso presente siempre y hacérselo llegar claramente a sus alumnos. He aquí, pues, un punto de estudio para nosostros mismos: ¿qué cosas, de las que trabajamos en nuestras clases, son importantes para el conocimiento de la Pedagogía de las Matemáticas? ¿Qué otras lo son para la práctica del trabajo de nuestro alumno en su futuro Colegio?. Aclarar eso, exige, sin duda, investigación cuidadosa y experimentación repetida. Estudio de la Matemática misma, estudio de la Pedagogía, estudio del aprendizaje del niño, estudio de las modalidades del trabajo escolar. Para un matemático está muy claro, en cambio, qué cosas son importantes para la formación matemática global de nuestro alumno y cuáles lo son para dominar los contenidos que ha de impartir.

Así que en aquella escuela unitaria no tuve éxito a mis ojos, especialmente en la enseñanza de las Matemáticas, como hoy les ocurre a muchos de nuestros alumnos y por las mismas razones. Y reaccioné como se hace hoy, dando el nuevo paso en mi concepto de la Didáctica en la misma dirección que hoy se da. Pensé que todo se debía a dificultades organizativas, a la dispersión de la edad de los niños, a la masificación, a la falta de buenas condiciones materiales, a la extracción social de los niños,a la indiferencia familiar por los estudios... a una infinidad de cosas más. Menos a mi propio trabajo, claro.

Como digo: lo mismo que hoy.

Pensaba que en una escuela graduada, con alumnos uniformes en edad, de características intelectuales comunes y conocidas, la aplicación de buenas técnicas y buenos métodos, que podrían aplicarse simultáneamente a toda la clase, han de dar resultado. Es una creencia muy extendida, aún hoy, y la mayor parte de los alumnos que acuden a nuestros Centros esperan que transmitamos esas técnicas infalibles. Una o varias recetas para enseñar a sumar, otras para la Geometría, otras para el lenguaje conjuntista...etc. El ideal consiste en tener un buen stock de recetas y ejemplos, las suficientes para que si falla una, la aplicación de la siguiente o la siguiente, o la siguiente..... acabe por dar resultados. Algo así como ocurre a algunos estudiantes de Matemáticas con el capítulo de la convergencia de series de términos positivos: esperan recolectar criterios de convergencia cada vez más potentes y más numerosos, de modo que ante una serie problema, baste someterla a la acción de la larga lista de criterios, previamente ordenada en sentido de potencia creciente: llegará un momento en que uno de ellos revelará el secreto: convergente o no. En resumen, y volviendo a la enseñanza, se confía en que, en Matemáticas, la aplicación de una técnica adecuada lleve a la adquisición del concepto. Según eso, cada nueva receta que se aprenda aumenta la preparación. El Profesor mejor preparado sería el que conociera todas las recetas que se han inventado. De ahí que baste leer libros y revistas abundantes para aumentar cada día los ejemplos. Con este bagaje, con el conocimiento de la Psicología evolutiva y el de los distintos métodos, alternativos o confluyentes, que se han ensayado, al niño no le queda más opción que aprender cuanto le queramos enseñar.

Pues bien, no es así,como bien sabeis, y tuve ocasión de comprobarlo porque después de terminar la Licenciatura en Matemáticas volví a la Escuela y esta vez a una graduada. Una escuela situada en un chalet, en el campo, en la falda del Tibidabo, con amplios ventanales, hermoso jardín con árboles frutales que daban cerezas o melocotones.....Cuatro secciones y en cada aula veinte niños. ¿Qué más se puede pedir?.

Mis alumnos tenían todos siete años hacia ocho y con ellos pude ver que, efectivamente, había cuestiones para las que las técnicas educativas se mostraban eficaces. Por ejemplo, la lectura y la escritura eran aprendidas o mejoradas con mayor o menor rapidez y seguridad según fuera mi propio trabajo. En cambio, justamente en Matemáticas, allí donde yo creía estar mejor preparado, las cosas ocurrían como si mi presencia y mi trabajo fueran superfluos. Me parecía que los niños aprendían en Matemáticas, cuando lo hacían, por sí solos, sin necesidad de mi intervención. El núcleo del curso era, como hoy para esa edad, el aprendizaje de la sustracción y el comienzo de la multiplicación. Se añadía una consolidación de la adición sumando números de más de dos cifras. Y todos acababan sabiendo restar, pero en Febrero o Marzo, sin ninguna dependencia aparente de la mayor o menor dedicación que hubiera tenido con uno u otro alumno. Había quien solamente acudía por las tardes por motivos familiares, en la sesión donde no se hablaba de cálculo y también conseguía saber restar en la misma época que los demás.

Es decir, que no parecía descartada la intuición de los seguidores de Decroly: hay muchas cosas que los niños pueden aprender sin ayuda de Profesor alguno y entre ellas están, precisamente, las cuatro operaciones elementales. Sólo que no todos lo hacen al mismo ritmo ni por los mismos caminos, por lo que se explica la propuesta de "la escuela a la medida", que ya había sido hecha por Claparède. Como se ve, los mismos problemas, las

mismas sugerencias, con ligeras variantes, hoy que ayer. Quizá no existan soluciones generales y cada uno debe encontrar la suya personal ante su propia situación.

Aquellas experiencias directas me llevaron a incorporar dos temas de estudio sobre los que me hubiera gustado trabajar más de lo que lo he podido hacer hasta hoy y que me parecen de suficiente entidad e interés para ofrecerlos como líneas de investigación sistemática en nuestros estrenados Departamentos.

1°: parece que muchas de las aplicaciones de las técnicas de enseñanza que se derivan de la Didáctica general no dan en Matemáticas los mismos buenos resultados que en los demás campos de la EGB. ¿Es, efectivamente, así?. En caso de poder probarlo, ¿significa eso que la didáctica de la Matemática es un estudio autónomo de la Didáctica general?. ¿Que para trabajar la Matemática en la EGB no sirven, sin más las conclusiones de la Didáctica General?. Entonces habrá que construir una Didáctica de la Matemática, si eso existe, desde el principio.

2°: Volviendo a tomar las sugerencias de algunos discípulos de Decroly, ¿qué cosas pueden aprender los niños por sí solos y qué otras exigen la intervención directa y especializada de un Profesor?. Los resultados de algunas experiencias directas parecen indicar que para aprender los contenidos del Programa de Matemáticas de los cuatro primeros cursos de EGB necesita el niño muy poca ayuda del Profesor, si se mira más allá del vocabulario, que es convencional. Claro que esta afirmación necesita algunas matizaciones y creo que lo mejor que puedo hacer es poner un ejemplo de a qué clase de ayudas me estoy refiriendo.

Porque cuando se habla de Matemáticas, esta palabra, "ayuda." es peligrosa y equívoca. Para el profano, el Profesor ayuda cuando explica las cosas y cuanto más exhaustivamente lo haga, mejor. Muchos de nuestros propios alumnos, lo que esperan en la clase de Matemáticas es una explicación. Y muchos Profesores, sobre todo en el inicio de su docencia, creen también que su tarea consiste en "explicar" e intentan hacerlo lo mejor posible, es decir, lo mas eruditamente posible. A todos nos ha ocurrido, faltos del apoyo institucionalizado de algún experto que nos dijera sobre el terreno al menos lo que no se debe hacer. Por eso, los resultados que se obtienen no responden a los esfuerzos hechos. Y es que en el nivel de conocimientos en que nos movemos en nuestros Centros y tratando con el cuestionario de Matemáticas, en general, lo que explica el Profesor, sobre todo el profesor novel, está siempre escrito en alguna parte, por lo común en algún libro. Al sustituir el libro por el Profesor, lo que hace éste no es ayudar al alumno, sino evitarle la obligación, que debe ser un placer intelectual, de leer atentamente, de reflexionar, de ampliar sus lecturas, de hacer eso que se llama estudiar; en lugar de cultivar el hábito del trabajo personal, único que puede llevar a alguna parte, se despierta en el alumno la sospecha de que está incapacitado para comprender por sí sólo los fundamentos de lo que ha de ser su propio trabajo. Y bien pensado, eso desmoraliza a cualquiera.

Pero estaba diciendo que iba a ejemplificar en un caso concreto lo que puede entenderse con la palabra "ayuda" en EGB. He aquí un ejemplo:

Se presenta un folio donde está escrito lo que se ve. No hay explicación oral alguna. ¿Podemos llamar a esto un problema?. ¿Un ejercicio?¿una cuestión?; ¿una investigación escolar?. Es un ejemplo de lo que estoy llamando ayuda. No consiste en dar una explicación sobre algo sino en proponer un trabajo. Hay que observar, hay que expresar por escrito lo que se observa, hay que simbolizar esa misma observación, hay que conjeturar, hay que comprobar, hay que resumir lo que se ha encontrado.

EJEMPLO:

Completa la cadena. Si lo necesitas, prolóngala.

$\boxed{1} \xrightarrow{\times 2} \boxed{2} — \boxed{4} — \boxed{8}$

2^0

Observa la cifra de las unidades de cada número.
Haz un comentario:

Haz un esquema de flechas que ilustre tu observación.

Busca una relación entre la cifra de las unidades del número y el exponente de 2.
Después completa la tabla.

Exponente de 2	El número termina en
12	
18	
22	
61	
83	
101	

Explica por escrito como hallas la cifra de las unidades de una potencia de 2.

Pondré otro ejemplo. Muy conocido, para no tener que emplear aquí un tiempo en su enunciado detallado. En una cuadrícula en la que se traza una diagonal.¿En cuántos puntos corta esa recta a la cuadrícula?. Se trata de encontrar una ley que dé el número de puntos en función del número de filas y de columnas de la cuadrícula. Puesto que no se conoce la respuesta de antemano, eso es un problema. Pero, ¿es un problema "de la vida real"?.¿Es un problema "de matemáticas"?.

Estos dos ejemplos de lo que estoy llamando ayudas lo son también de lo que otras veces se llaman "situaciones didácticas". Entendiendo por situación didáctica todo planteamiento escolar susceptible de un desarrollo ulterior que permita abordar parcelas del conocimiento todavía no exploradas por el alumno. Así que no todo planteamiento escolar es una situación didáctica. Ningún ejercicio de control de conocimientos lo es. Hallar el m.c.d. de dos números dados, resolver una ecuación, calcular la longitud de una hipotenusa conocidos los catetos, averiguar si tal conjunto con tal operación es un grupo, etc. etc., no son situaciones didácticas si se proponen <u>después</u> de haber tratado ya esos temas. Esos son ejercicios que terminan en si mismos y que suelen ser propuestos precisamente porque se supone que el alumno conoce ya el proceso de la respuesta; es una simple ejercitación de fórmulas o frases que se espera recordar.

Pero volviendo a nuestra situación didáctica, ya veis (lo sabeís de sobra) lo que obliga a hacer: dibujar varias cuadrículas; plantear la cuestión para cada una; observar; comparar; hacer una hipótesis; comprobarla en otros casos distintos a los que se tengan....

Cualquiera puede observar que estas situaciones, en general son más apropiadas para promover hábitos intelectuales de reflexión que para adquirir dominio sobre

distintos algoritmos de cálculo. El examen y desarrollo de situaciones de este tipo ejercita ciertas destrezas; hay que saber observar, experimentar, simbolizar, comparar, hacer hipótesis, comprobarlas,... Puede pensarse que la adquisición de estas destrezas es una finalidad educativa general, que trasciende lo que habitualmente se llama Matemáticas en EGB. Y puede pensarse que la posesión de esas destrezas es indispensable para el maestro es decir, para nuestro alumno. Y que debe tener otras más amplias, como son sentido crítico suficientemente desarrollado; distinguir sin dificultades lo que es una opinión de lo que es un argumento o una demostración, lo que es una definición de lo que es un convenio; saber redactar comentarios sobre un tema de matemáticas; saber presentar coherentemente escrita la resolución de un problema de Matemáticas; saber leer, por sí mismo, un libro de Matemáticas... Cierto es que todo ello pertenece al terreno de la formación global y que además existen otras que pertenecen al terreno de la profesionalidad. He ahí un campo de investigación del que siempre se habla: el de la formación del Profesorado. Nuestras Escuelas tienen asignada nominalmente esa función. Pero, hasta el momento, no han podido investigar oficialmente sobre su propia función y sobre los métodos para optimizarla. Esperemos que ahora se encarguen de ello los Departamentos creados.

Pero dejo esas consideraciones, que retomaré más tarde y vuelvo a las situaciones didácticas que he llamado ayudas que pueden llevarnos a discernir qué es lo que puede aprender por sí solo el alumno de EGB, si es que a eso se le puede llamar aprender por sí solo. Aunque nunca se me ha presentado el caso, me gustaría pensar que al comentar eso en mi clase algún alumno avisado me dijera: ¡No estoy conforme¡. ¡No me convence¡. Usted se contradice porque eso no es Matemática. Lo que hace ese presunto niño es conjeturar, lo que obtiene co mo resultados son conjeturas, aunque, eso sí, conjeturas que son ciertas. Y aún eso porque su Profesor no le admite como conclusión otras conjeturas, que él sabe que son falsas.

Yo creo que esa observación no puede eludirse ni debe pasarse por alto. Cierto es que nuestro alumno genérico no resulta tan avisado, pero entonces le tenemos que avisar nosotros: eso que enunciamos en EGB y que estudias en la asignatura de Didáctica de la Matemática no es Matemática. Le falta, justamente, algo esencial, que diferencia las Matemáticas de las demás Ciencias: la consideración del caso general, el razonamiento con un número no precisado, aquello de "sea n un número cualquiera" en resumen, el saludo al infinito.

Podemos plantearnos, entonces, otra cuestión. Una cuestión que al alumno que llega a nuestras clases le parece disparatada y hasta contradictoria en sí misma, pero que el maestro la vive en su experiencia docente, la siente surgir espontáneamente. ¿Es que realmente, un Profesor de Matemáticas de EGB enseña Matemáticas?. Y otra: ¿es que en la EGB se puede enseñar Matemática?. Si la pregunta se le hace a un profano le parece tan inaudita que lo más probable es que se ponga en guardia esperando un juego de palabras y que por eso mismo conteste algo así como "bueno... depende de lo que Vd. entienda por Matemática". Una respuesta razonable, suficiente para justificar que hay que plantear la cuestión en nuestras clases. ¿Qué es lo que distingue la Matemática de las demás ciencias?. ¿Qué es la Matemática?. ¿Cuál es su objeto, si es que se puede señalar claramente?. Todo eso lo tiene que saber nuestro alumno, futuro Profesor.

No voy a hacer sobre esas preguntas ninguna consideración, que todos conocéis bien y que expondríais mejor que yo. Lo que quiero significar es que esas preguntas últimas, que no primeras, preguntas sobre el objeto, sobre el significado de la Matemática, aparecen al Profesor en ejercicio, como me aparecieron a mí en el trabajo escolar, ineludiblemente, cuando reflexiona sobre su didáctica. Y ocurre porque observa que las técnicas explicativas, único bagaje que suele tener y que al principio le parecía maravilloso, no le bastan; sospecha que no le dan resultado no porque sean poco potentes, sino porque son malas traductoras de las ideas que pretendía mostrar. Por tanto esas preguntas deberían ser tratadas en nuestras clases seriamente y no de pasada como una curiosidad. Son, a mi juicio, uno de los puntos fuertes de la formación.

La respuesta a la cuestión de si lo que se enseña en EGB como Matemática es tal se elude y esa elusión se hace por ampliación de objetivos. Se manifiesta entonces que el cuestionario de Matemática tiene por objeto proporcionar cierto conocimiento del cálculo elemental como técnicas instrumentales, pero que tiene además un objetivo ulterior y superior: enseñar a razonar. Como una disgresión aparte, como una nota a pie de página, podría hacerse notar ahora que si se examinan los estudios sobre Didáctica de la Matemática entendida como enseñanza, esta variante de pensar la Matemática como un campo donde abundan los ejemplos que pueden usarse como situaciones para entrenar el hábito de observar, experimentar, comparar, razonar, comprobar, etc., es posterior a la idea de que lo que se enseñaba era Matemática. Parece un acercamiento a los objetivos últimos de la educación intelectual, puesto que ninguno de esos verbos es privativo de la Matemática. Son la esencia de cualquier actividad intelectual.

La verdad es que todos hemos leído multitud de veces que el estudio de la Matemática enseña a razonar y que se debe enseñar a razonar para poder comprender. Y no es sólo una idea actual, sino que es una idea de las que pueden llamarse "de siempre". A fin de cuentas, no puede negarse que la Matemática es una ciencia lógico-deductiva. Pero ¿qué entendemos por razonar cuando hablamos de un alumno de la EGB?. ¿Qué entendemos por comprender cuando hablamos de Matemáticas?. Sobre lo segundo no voy a decir nada; Poincaré y no sólo él, ha escrito páginas enteras, de gran precisión, que todos conoceís. Pero sobre lo de razonar referido al alumno de EGB quiero decir algo y es que, para empezar, el pensamiento del niño está cargado de afectividad y esta afectividad es, en muchos casos, una dificultad a salvar en la enseñanza de la Matemática. Voy a poner un ejemplo vivido muchas veces:

con los anteriores Cuestionarios oficiales, que contenían la idea de número entero definido a partir de una relación de equivalencia, yo usaba a veces para su introducción en 7°curso de EGB un material sensorial consistente en cuatro dados numerados de modo particular. A partir de ellos se conseguían escrituras del tipo (a,b) con a y b naturales; ese par era el símbolo de una jugada en la que se ganaban a puntos y se perdían b puntos. Así, el par (5,2) producía ganar 3 puntos, mientras que el par (1,8) hacía perder 7. Pues bien, para introducir la suma de pares hacía actuar a dos alumnos como componentes de un equipo. El primer jugador del equipo obtenía con los dados el par (5,2) y el segundo obtenía el par (1,8). ¿Qué jugada era razonable presentar como obtenida por el equipo, por ejemplo si tenía que competir con otro?. La respuesta muy repetida era la de proponer el par (5,2) "porque esa jugada gana". ¿Es eso un razonamiento?. El Profesor lo toma como anécdota y no le hace aprecio alguno. Si es algo más experimentado procura eludir esa respuesta, presentando la cuestión de otro modo. Por ejemplo, aludiendo a las eliminatorias en el campeonato de fútbol. Pero en ese caso, ¿cómo atreverse a decir que el niño descubre?.

Es muy posible que cuando decimos que tratamos de dar oportunidades para que el niño razone, se deja implícito, consciente o inconscientemente, que su razonamiento lo daremos por bueno con la condición de que coincida con el que hace el adulto, que muchas veces es mas convencional que lógico. Ahondando un poco más en esta cuestión, podría ocurrir que un pensamiento del niño que esté alejado del que tiene el adulto corre el peligro de ser considerado como incomprensible o al menos como anómalo. Así, puede resultar que la auténtica creatividad del niño se convierta en una dificultad, no pequeña, para el docente.

¿Cómo preparar a nuestros alumnos ante este problema?. No, ciertamente, limitando nuestro trabajo a dar técnicas, procedimientos particulares para cada punto del programa que, por otra parte, es cambiante. Los estudios que conozco sobre Matemáticas y afectividad están referidos a alumnos de 15 a 17 años y son descriptivos. Nuestros Departamentos podrían investigar sobre esos problemas referidos a la EGB y reflejar los resultados en la formación del Profesorado.

Recapitulando un poco, he querido venir diciendo que las creencias del Profesor de EGB sobre la Matemática y su enseñanza van evolucionando a lo largo de su docencia, mientras va aumentando su práctica y su experiencia con el ejercicio. Comienza teniendo fe ciega en la colección de procedimientos que conoce; como no le proporcionan el éxito esperado, su mirada se vuelve hacia otros lados: su propia asignatura, la organización escolar, el material adecuado, el conocimiento del niño.... Llega un momento en que, al menos en apariencia, todas las reflexiones llevan a la conclusión de que hay que conocer al niño tanto, al menos, como a la Matemática. Si también nosotros, profesores de Didáctica de la Matemática, aceptamos esa conclusión, ¿quién debe ser el encargado de informar a nuestro alumno sobre la psicolo gía del niño en cuanto pueda influir sobre la enseñanza de la Matemática?. ¿Es que el profesor de Didáctica de la Matemática debe convertirse en psicólogo?. Seguramente que no es necesario tanto, pero sin duda habrá de conocer las tesis existentes sobre la cuestión. Por el momento, cada uno se afilia a la que cree más generalmente aceptada y puede pensarse que de ese modo el riesgo de error es menor que de cualquier otro.

Pues bien, cuando yo llegué a las Escuelas Normales entraban con fuerza en el país, en los círculos generales de la enseñanza, la teoría genética de Piaget y el material de números en color. Dado que la primera acentúa la importancia de la acción para la adquisición de conceptos, ese par, teoría-material, abrió a muchos la esperanza de encontrar la solución a las dificultades. No hay duda alguna de que, hasta ahora, la teoría psicológica más aceptada y apoyada por los didactas de la Matemática ha sido la teoría genética de Piaget, hasta el punto de que para defender un procedimiento o una técnica cualesquiera, el argumento que parece decisivo es el decir que se amolda a las tesis de Piaget. El mismo profesor Gategno, en sus cursos con el material, lo hacía.

Con todo, es posible que se haya leído más a los divulgadores o a los comentaristas de Piaget (de una parte, solamente, de la obra de Piaget) que al propio autor. Creo que esto es una costumbre extendida; parece que lo deseable debe ser leer directamente la obra de los innovadores, de los creadores. Sin embargo, con demasiada frecuencia se elige una síntesis, unos comentarios a veces superficiales, en lugar de la obra original. De nuevo la sustitución del conocimiento auténtico por una formación parcial sobre las cosas.

Me parece que éste es un punto importante para ser tratado constantemente con nuestros alumnos; un punto que afecta a su formación como Profesores mucho más que una

colección de teoremas, de demostraciones o de procedimientos didácticos. Conseguir que prefieran conocer a fondo los fundamentos de su profesión mediante el esfuerzo personal, el estudio directo cuidadoso, moroso, crítico, de los creadores, a la aceptación, sin más, de cualquier comentario ajeno. Que prefieran la autenticidad a la falsificación.

Volviendo a la teoría genética de Piaget, que es en lo que estaba, yo creo que puede citarse como caso paradigmático de algo que es importante, puede decirse de conocimiento indispensable, para todo estudioso de la Pedagogía y que, sin embargo, tiene poca aplicación didáctica en el trabajo escolar. Cierto es que en ninguna parte enuncia Piaget normas de comportamiento didáctico, ni tampoco pretendió realizar un estudio del niño, al menos en el sentido psicológico que tiene la exigencia de conocer al niño para hacer una enseñanza adecuada. Si se lee con detenimiento su obra eso aparece bastante claro. La alusión que Piaget hace a las estructuras matemáticas, que asocia,dentro de ciertos límites, a las estructuras de la inteligencia y que lo hiciera en un momento en que la exposición formalista de Bourbaki entraba en la enseñanza secundaria francesa, favoreció la creencia de los profesores de Matemáticas en que allí estaba la unión, el puente, la comunicación, que hasta entonces se había escapado, entre los conceptos matemáticos y la inteligencia del alumno. (porque siempre se ha dado por sentado que la Matemática se relaciona con la inteligencia y no con otra facultad del alma).

Por otro lado, la brillante descripción que la teoría hace de las etapas que recorre el progreso intelectual se malinterpretó, tomándola por enunciado de realidades comprobadas. Por ello el tiempo de escolaridad se subdividió en tantos intervalos como etapas de la teoría y en consecuencia a cada intervalo se le podía asignar una lista de conceptos matemáticos que el niño debía poseer o que podía adquirir. Eso llevaba consigo la fijación automática de los objetivos, de los contenidos y hasta de una fácil evaluación de los resultados. Y no sólo eso. Además, quedaba fijado prácticamente el programa de cuanto necesitaba saber el propio Profesor de EGB. Pero la ansiedad por encontrar soluciones mecánicas al problema de la educación no puede sustituir a la realidad. Por ahora, el proceso del aprendizaje de las Matemáticas es tan misterioso como la misma existencia del número, y no hay razones para creer que un esquema como el anterior pueda descubrirse alguna vez.

No es mi intención hacer más consideraciones sobre ésto. Ni puedo, dados mis pocos conocimientos en ese campo. Si lo he citado ha sido porque, como antes decía, la teoría genética de Piaget era la que se introducía como de afiliación general de los Profesores de Matemáticas de EGB cuando llegué a las Escuelas Normales. Y lo ha seguido siendo.

Como ocurría con el material de los números en color. Porque inventar un material estructurado, con la polivalencia adecuada para que sea suficiente durante toda la escolaridad, es otra ilusión que periódicamente aparece. Además no se busca solamente un material suficiente sino un material de funcionamiento automático. Es decir, un material de tales características que su utilización por el alumno le lleve con toda seguridad al conocimiento. Yo creo que a esta ilusión contribuye la aceptación de algunos tópicos que no se examinan suficientemente y que se reiteran con cierta frivolidad. Por ejemplo, decir que el material ayuda a pasar "de lo concreto a lo abstracto". entendiendo ésto, muchas veces, como un axioma de la enseñanza. Pero ¿qué significa eso si hablamos de Matemáticas?. Puede que en otros campos tenga sentido, pero en Matemáticas no lo tiene. ¿Es, entonces, un ejemplo de algo que resulta válido en la Didáctica general y no en la de la Matemática?. ¿Cuántos otros ejemplos

y cuáles pueden encontrarse?. He aquí otro trabajo que me hubiera gustado hacer con calma y que brindo a quien le pueda resultar atractivo. Completa el que antes señalaba sobre las técnicas generales.

Pues bien, todos hemos visto de qué modo ha sido utilizado, a veces, un material tan polivalente, de tantas posibilidades como ése. Y es que no hay material milagroso que supla las carencias del profesor. De nuevo se comprobó que el conocimiento verdadero no puede sustituirse por ningún sucedáneo. En manos de un profesor que supiera Matemáticas el material resultaba útil y sumamente aprovechable; en otro caso apenas servía para nada.

He ahí otra etapa por la que pasa todo Profesor de EGB en algún momento de su docencia: la de la confianza en el material y en los modelos sensoriales. Y creo que aquí se presenta uno de los problemas esenciales de la Didáctica de las Matemáticas, sobre todo cuando se examina con el fondo de lo que se llama pedagogía del descubrimiento. El Profesor posee el concepto que desea poner en juego y ese conocimiento lo proyecta sobre un material, convirtiéndolo en un modelo sensorial de aquel concepto, pero en un modelo personal suyo, no universal. Invertir el proceso supone hacer una interpretación, pero en un lenguaje desconocido. Ese proceso, ¿es posible?; ¿es fácil?; ¿depende del concepto?; ¿del modelo elegido?. Que yo sepa, no hay estudios sistemáticos sobre ello. Es seguro que llevarían a conclusiones interesantes sobre las estrategias para abordar conceptos por ese camino y nuestras Escuelas podrían emprenderlos.

....

....

Todas estas consideraciones han querido esbozar algunas de las dudas, problemas y dificultades importantes que se presentan a un Profesor de Matemáticas de EGB interesado en su tarea, es decir, a un Profesor genérico.- A partir de ellas puede construirse una línea argumental que lleva a defender como deseables ciertos aspectos de la formación que a mí me parecen importantes. Dejando a un lado esa justificación, permitidme que pase a un enunciado final.

Pienso que, ante todo, hay que conseguir de nuestro alumno el gusto por su profesión. Esto que digo quizá parezca extraño pero no se puede afirmar que todo el que viene a nuestro Centro lo hace por afición. Tampoco que lo hace como último recurso. Y la opinión que forme sobre la vitalidad, la belleza y la dificultad de su profesión depende de nosotros. Para empezar, de nuestro nivel de exigencia. No se puede confundir la Matemática con las cuentas del mercado, ni su didáctica con los trabajos manuales o los juegos de ingenio, ni nuestro alumno desea que su paso por la Escuela sea un simple trámite burocrático, ni que el Título que se le entrega no respalde una sólida formación. Pero el conocimiento exige esfuerzo, la docencia exige dedicación, la creatividad exige constancia. Por tanto, si queremos que nuestro alumno de hoy llegue a ejercer una docencia creadora, hay que hacer y exigir esfuerzo; hay que ofrecer y exigir dedicación; hay que tener y exigir constancia. Y a veces ni aún así se alcanza la meta. Por eso, la primera condición para hacer algo profesionalmente honorable es la existencia de un acuerdo tácito profesor-alumno sobre la necesidad de ese esfuerzo común. Cualquier otra cosa es más bien un engaño. Al alumno, a la Escuela, a la sociedad y a uno mismo como profesional.

Pienso también que la asignatura de Didáctica de la Matemática no puede reducirse a la exposición de procedimientos de enseñanza ya construídos. Un espíritu intelectualmente libre y creador, como debe ser el de todo Profesor, recibe las soluciones prefabricadas como resul-

tados que ha obtenido otro. Se leen, se comprenden, pero no se viven. En cambio, las sugerencias de caminos que hay que explorar y donde hay que resolver situaciones no previstas, es una invitación para muchos viajes emocionantes. Así ocurre también en la enseñanza de la Matemática misma, si se dirige a un espíritu inquieto y curioso. Una colección de problemas resueltos se lee como un futbolista entusiasta leería la crónica de un partido ajeno. Un libro de enunciados se recibe como la oportunidad de jugar uno mismo.

Y pienso que el Profesor de Matemáticas de EGB no es un ente aislado, sino que participa en la educación general. Existe un hermoso y amplio trabajo titulado "Les idéalités mathématiques" escrito por alguien que no es matemático, Jean Desanti. Tiene ya veinte años de antigüedad. Como su título sugiere, es un estudio epistemológico sobre las matemáticas, en particular sobre el desarrollo de la teoría de las funciones de varias variables reales. En un capítulo viene a decir que el matemático "fabrica teoremas" pero no tiene la impresión de hacer otra cosa. Dicho de otro modo :la Matemática puede entenderse como un fenómeno de cultura pero en el momento creativo el matemático es ajeno a la consideración justa que su producción ocupa en el pensamiento del hombre. No sé si eso es totalmente cierto o no, pero si hago la cita es para exponer la idea personal de que en el subuniverso que es el colegio de EGB y en el subuniverso que es una Escuela de formación, hay que intentar que las cosas ocurran de otro modo. Nuestro alumno, como estudiante, en el subuniverso de la Escuela de formación, debe conocer el puesto y la significación de la Matemática en la cultura actual. Entender que también el pensamiento matemático está condicionado por las características de cada época. No limitarse a pensar la Matemática como el inmenso almacén de teoremas que los matemáticos han ido fabricando desde la lejanía de los tiempos. Y como Profesor, más tarde, en el subuniverso de un Colegio de EGB, será consciente de que al enseñar matemáticas contribuye a una formación global que ha de conocer en su integridad. Su trabajo como Profesor de Matemáticas no será procurar a todo trance la fabricación de teoremas en versión de la EGB, sino (invirtiendo la idea de Desanti) conseguir que el niño-matemático sea un creador de pensamiento consciente.

Y sería bello conseguir también que este pensamiento producido fuera la expresión de un intelecto libre, tanto del alumno como del propio Profesor. Porque en nuestro país la enseñanza ha sido siempre una enseñanza dirigida. Quizá ocurra así en todas partes y la educación no sea sino una domesticación, como tantas veces se ha dicho. Pero sea como quiera, no ofrece duda que la formación del Profesorado, es decir, el trabajo en nuestras Escuelas Universitarias, estará en función del modelo de educación, el modelo de individuo, que la Sociedad desee poseer. Y en todo tiempo, cada Sociedad ha procurado formar al individuo de modo que la continúe. En todo tiempo. Y no se comprende que pueda ser de otro modo. Por eso, el ideal de la educación para la libertad sólo podrá alcanzarse, en todo caso, como una autoeducación y ese es su atractivo. El mayor logro por nuestra parte sería, a mi juicio, conseguir que el futuro Profesor decidiera pagar el alto precio que exige la libertad intelectual. Claro que, bien pensado, ¿no sería, también eso, haber hecho una enseñanza dirigida?.

En todo caso y prescindiendo de consideraciones que podrían entenderse más bien como confidencias, hay que convenir en que para que el futuro Profesor pueda realizar una tarea óptima en su día, hay que investigar sobre los métodos de formación. Ya lo he indicado antes y ahora he de añadir que, en mi opinión, esa investigación necesitará del esfuerzo de todos los Centros; es una tarea

colectiva. Pensemos solamente un detalle: ese Profesor ideal que enunciemos, ¿es ideal para la actualidad?; ¿para un cuarto de siglo próximo?; ¿para el tipo de Sociedad actual?; ¿para el país?; ¿para Europa?. Y cuántas preguntas más.... Aquí sí que hay materia de investigación para nuestros Departamentos. Porque no hay estudios continuados y suficientemente extensos sobre el camino y la técnica, si es que existen algunos, para garantizar la formación de un buen Profesor de EGB, generalista, de Matemáticas o de lo que sea. A lo más se han formado listas de las condiciones, algunas condiciones, que debería reunir. Yo mismo he contribuído alguna vez a elaborar una aproximación al perfil profesional del Profesor de EGB. Pero una cosa es todo eso y otra distinta y necesaria averiguar cómo se consigue un buen profesional. Porque un Profesor de EGB o es un profesional o tanto da que sea cualquier cosa, o casi.

Para acabar; creo que la Didáctica de la Matemática no se puede adquirir de oído. No consiste en trasladar técnicas, aunque hayan sido probadas con éxito por alguien, desde un libro de consulta hasta los apuntes del alumno, en contra de lo que éste opina a veces. El contacto directo con los niños enseña y sugiere más que cualquier discurso. Porque el contacto es vida y los discursos son comentarios. Y nunca se puede sustituir la vida por un comentario sobre ella. Es decir, que no basta estudiar o comentar la Didáctica, sino que hay que vivirla educación y vivirla en los Colegios. Difícil problema de organización pero habrá que resolverlo.

....

Y bien: Me parece que he extendido demasiado estas divagaciones por lo que no abusaré más de vuestra cortesía.

Ha pasado mucho tiempo desde aquella Escuela unitaria que he citado al comienzo y es seguro que el próximo curso alguien comience como yo y con las mismas dificultades. Le deseo que al final tenga la misma alegría que tengo yo al sentir, recibir y agradecer el afecto y la generosidad que mostraís hacia mí. Muchas gracias a todos.

....

....

¡OJO A LA PRESTIDIGITACION MATEMATICA!

Por J.J. Etayo
Catedrático de la Universidad Complutense

Ojo hay que tener siempre ante cualquier juego de ilusionismo. Justamente lo que el prestidigitador hace es atraer nuestra mirada hacia lo que está realizando con una mano mientras con la otra organiza el truco con que luego nos va a sorprender. Llevados en la dirección que él nos marca, atendemos con los cinco sentidos a las pistas falsas y nos distraemos de la verdadera preparación y montaje del engaño.

Aunque a primera vista pueda parecer raro, las matemáticas se prestan mucho a este tipo de actuación, bien que en el aspecto mental, y de hecho hay infinidad de ejemplos de ilusionismo matemático. Voy a citar uno del cual existen diversas versiones, muy conocidas, y seguro que todos los lectores podrán aportar nuevos modelos. Este lo tomo de La Codorniz: en cada uno de sus números publicaba una colaboración el notable humorista italiano Pitigrilli y en una de ellas, titulada "El vértigo matemático", incluye el siguiente cuentecillo, para él misterioso:

"En una hostería española almuerzan tres caballeros. Después del postre y del café piden la cuenta.

-Treinta pesetas[1]*- dice el camarero.*

Como habían convenido en pagar a la romana, cada uno de los tres pone diez pesetas sobre la mesa.

---

(1) ¡Eran otros tiempos!

-¿Satisfechos?- pregunta el posadero, retirando las 30 pesetas.

-Han dicho que es caro- responde el camarero.

-Devuélvales cinco pesetas- dice el patrón, entregándole un duro.

Puesto que es difícil dividir 5 entre 3, el camarero se mete en el bolsillo dos pesetas y a los tres clientes les devuelve tres. Habrán pagado entonces nueve pesetas cada uno. Ahora bien, tomen ustedes un lápiz: tres veces nueve, 27; más 2 que se ha guardado el camarero, 29. -Y la trigésima peseta, ¿dónde se fué?".

Todos sabemos que no hay tal peseta: aquellas 27 que han pagado los comensales son las 25 que ha cobrado el posadero más las 2 que el camarero sisó, y la cuenta sale justa. Pero el autor de la broma desvía nuestra atención en una dirección equivocada, nos hace una suma que nada tiene que ver con el problema y el lector poco avisado se encuentra de improviso, como la mujer de la parábola, buscando la peseta perdida. Igual que el espectador al que han hurtado una paloma en un juego de manos.

Por descontado, Pitigrilli renuncia a intentarlo siquiera: *"Yo que soy un modesto vendedor de frases, no puedo desenredarme de estos problemas matemáticos"*. Cuando se desenreda es peor. En su discurso de ingreso en la Real Academia Española[2], Rey Pastor se mete con él al hacer una exposición de la jerarquía de lenguajes de B. Russell y aplicarla, entre otros ejemplos, a las simulaciones de los delicuentes: algo así se insinuaba en la película "Sospecha", de Hitchcock, que se ha repuesto estos días en televisión. *Un médico*, cuenta Rey,

(2) "Algebra del lenguaje", Madrid, 1954.

es acusado de asesinar a su mujer con arsénico; recurrir al arsénico, tan fácil de detectar, sería propio de un delincuente ingenuo y primerizo, con lenguaje que podíamos llamar de orden 0; otro, más avezado, de orden 1, prepararía su coartada y usaría un método más seguro, menos probable de descubrir, como pretendía Gary Grant. ¿Y el médico de nuestro relato? Esa fué cabalmente su defensa: "... no cometería la insensatez de recurrir al arsénico habiendo tantos modos de matar sin rastro".

Pitigrilli no vacila: *"El razonamiento del doctor es perfecto; yo, jurado, me pronunciaría por la absolución"*. Rey Pastor opina, por el contrario, *que el médico usaba un lenguaje de orden 2: utilizó el arsénico porque, precisamente por ser médico era impensable que lo utilizara, y esa era su mejor coartada.* Es lo que nos pasaría en un examen escrito: un alumno no tonto abriría el libro encima de la mesa para copiar; otro más pillo llevaría una chuleta y la consultaría con todo disimulo, pero un tercero, un virtuoso ya de la copia, haría como el primero, aduciendo si le pescaban, que no estaba copiando, que si hubiera querido hacerlo no iba a ser tan a las claras que enseguida lo descubrieran.

Bueno, que nos hemos desviado del argumento: ni que hubiera hecho también yo de prestidigitador, atrayendo la atención hacia otro lugar. Volvamos al nuestro: precisamente trataba de ponernos en guardia, no vayamos a hacer, sin querer, ilusionismo en clase. Y no como el del problemilla anterior, que ése es bueno para despartar algún interés, sino el de que los alumnos lleguen a creer que hemos sacado de verdad un conejo de la chistera pero sin haberlo metido antes. Todos sabemos con qué facilidad puede un alumno convencerse de que ha demostrado que $a^0 = 1$, a partir de la definición de potencia como producto de factores iguales y de sus primeras propiedades. Y Y no porque hayamos querido inducirle a error, ya que, contrariamente, rebate nuestras razones cuando exigimos para ese caso una nueva definición. Alguna vez he contado[3] la práctica imposibilidad de hacer ver a un interlocutor que era falso su contraejemplo de que los números negativos no tienen logaritmo real. Puede más la "ilusión óptica" que la cuestión arrastra consigo que el razonamiento lógico, que entienden como un subterfugio para ocultarles lo que se ve tan claro.

Otras veces es al revés: piensan que hemos demostrado mal una cosa sólo porque el procedimiento, sin analizarlo, les "suena" falso. A mí me ocurre casi todos los años, y también en este último, cuando estudiamos en primer curso el espacio dual. Si $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ es una base del espacio vectorial V, finitamente engendrado por tanto, sobre K, se define la base dual, $f_1, f_2, \ldots, f_n$, formada por las aplicaciones lineales de V en K tales que $f_i(\bar{u}_j) = \delta_{ij}$, como es bien sabido. Se ve, sin dificultad para los chicos, que esas aplicaciones constituyen, en efecto, un sistema de generadores del espacio dual. Y el problema surge cuando comprobamos que son linealmente independientes. En efecto, si f_0 es aplicación cero, esto es, $f_0(\bar{x}) = 0$, para todo $\bar{x}$ de V, tendremos que demostrar que

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_n f_n = f_0 \quad \text{implica} \quad k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$$

Y lo hacemos como siempre: la hipótesis dice que, cualquiera que sea el elemento $\bar{x}$ de V

$$k_1 f_1(\bar{x}) + k_2 f_2(\bar{x}) + \ldots + k_n f_n(\bar{x}) = f_0(\bar{x}) = 0 \qquad (*)$$

entonces, si $\bar{x}$ fuese $\bar{u}_1$, operando resulta enseguida $k_1 = 0$; si $\bar{x} = u_2$, $k_2 = 0$, y así sucesivamente, hasta ver que, para $\bar{x} = u_n$, $k_n = 0$, con lo que queda probado nuestro aserto.

---

(3) "Símbolos de doble significado", Gac.Mat., XV (1963), 3-6.

Pues bien, rara es la vez que, a continuación o unos días después, cuando lo han estudiado, alguno o algunos alumnos no vengan a interpelarme: *"Usted ha demostrado eso sólo para* $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ *pero, para que sea cierto, hay que demostrarlo para todo* $\bar{x}$". Ya está funcionando la argucia, como si un prestímano dirigiese la atención por ese camino. Y hay que volver a coger todo el razonamiento: Mire Vd., yo no quiero demostrar la fórmula (*) sino que, muy al contrario, esa es mi hipótesis, parto del supuesto de que esa fórmula es cierta para toda $\bar{x}$; entonces, lo será también para cada una de las $\bar{u}$; y esto último trae como consecuencia que aquellas constantes k de la fórmula han de ser nulas, que es lo que necesitábamos probar, y no otra cosa: no es que las constantes sean nulas para las $\bar{u}$ y no para otros elementos sino que, si en una fórmula una constante es cero, es cero siempre. Pues sí, parece que se acepta, pero uno se queda siempre con el remusguillo de que acaso no han replicado porque no saben cómo pero que tampoco han quedado plenamente convencidos.

Esto no es ninguna invención: hará cosa de un mes que me ha vuelto a pasar. Y es que, lo mismo que los ojos, también la mente queda muchas veces sugestionada y dirigida erróneamente, guiada más bien por el ropaje con que se envuelve el discurso. Y eso sin proponérnoslo, sino todo lo contrario. ¡De qué cosas no podríamos convencer a muchos si nos empeñásemos! No hace falta, creo, proseguir el argumento: si esto podemos hacer con las matemáticas sin quererlo, ¿qué sería queriéndolo y en otros asuntos más opinables? Casi lo dice nuestro refranero: *Juegos de manos, juegos de villanos*. Habremos, pues, de reivindicar la figura, hoy tristemente olvidada, del caballero.

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

EL AXIOMA DE INDUCCION Y OTRAS FORMULACIONES EQUIVALENTES

Por Santiago Calviño Castelo
Profesor Agregado del I.B. "Emperatriz Mª de Austria"

Algunos enunciados matemáticos, como por ejemplo:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$(1+a)^n \geq 1+an \quad \text{con} \quad a\in\mathbb{R} \quad \text{y} \quad a>-1$$

son ciertos para todo entero positivo. Su prueba se apoya en el conocido principio de inducción o axioma de inducción: si una proposición $P(n)$, sobre los enteros positivos, es cierta para $n=1$ y si de la verdad de $P(n)$ se deduce la de $P(n+1)$, entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,\ldots\}$. El axioma de inducción fue formulado por Peano en "Los Principios de la Aritmética". Con él nos libramos de hacer infinitas verificaciones para probar la certeza de proposiciones matemáticas como las enunciadas anteriormente. Es el único axioma de la aritmética que se atreve con un conjunto infinito de enteros positivos y además su uso es antiguo, fue ya empleado por un matemático italiano llamado Maurolico (siglo XVI) antes de Pascal y Bernoulli. En manos de Peano apareció en términos de lógica de clases: Si k es una clase que contiene a 1, y si cuando x es número y pertenece a la clase k, x+1 también pertenece a k, entonces todo número es de la clase k.

Admite también expresión a modo de silogismo:

Premisa mayor: $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

Premisa menor: $P(1)$

Conclusión:

$$P(n) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+$$

o simplemente,

$$\left\{\left[P(n) \Longrightarrow P(n+1)\right] \text{ y } P(1)\right\} \Longrightarrow P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+$$

Evitemos el axioma de inducción e intentemos una demostración indirecta de alguna de las proposiciones del comienzo. Supongamos que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \neq \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$$

entonces habrá un entero positivo n que será el menor de los que incumplen la igualdad. Es evidente que no puede ser 1 porque la igualdad es cierta para $n = 1$, luego $n > 1$, además la igualdad es cierta para n-1, por tanto,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)\ n(2n-1)}{6}$$

Sumando n^2 a los dos miembros de la igualdad resulta otra igualdad

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{(n-1)\ n(2n-1)}{6} + n^2$$

pero,

$$\frac{(n-1)\ n(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$$

por esta razón la igualdad no puede ser cierta para n-1. Procediendo del mismo modo con n-2 y repitiendo el proceso concluímos que para 1 la igualdad es falsa, lo que contradice la evidencia y la suposisición de que n es el número que la incumple. Por tanto la igualdad es cierta para todo n.

La prueba anterior aunque soslaya el axioma de inducción acepta que el conjunto de enteros positivos que falsean la igualdad tiene un elemento mínimo. El que todo conjunto de enteros positivos tenga un primer elemento parece a primera vista evidente, pero se puede definir en $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}^+$ subconjuntos pintorescos, basados en algún problema abierto, de los cuales no podamos saber cual es el primer elemento. El conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}^+/n$ primo y $\sqrt{2}^{\sqrt{n}} \in \mathbb{Q}\}$ será vacío si para todo a y b irracionales a^b es irracional. De ser esta proposición cierta $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional y también $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$, pero $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$, luego $A \neq \emptyset$ aun que no podamos señalar ni un solo elemento. Además el principio del menor entero y el axioma de inducción son equivalentes.

Con el concurso del principio del menor, podemos probar el axioma de inducción:

Sean P(1), P(2), P(3),... una sucesión de proposiciones que verifican:

a) Para todo n entero positivo, la verdad de P(n+1) se sigue de la P(n).

b) P(1) es cierta.

Probaremos que P(n) es cierta para todo n.

Veremos que suponer que alguna P(i) sea falsa es absurdo.

Sea C el conjunto de enteros positivos para los que

P(i) es falsa y sea j el menor de los números de C, $j > 1$ por la hipótesis b). Además P(j) sería falsa mientras P(j-1) es verdadera, pero ésto contradice a). Por tanto no puede haber ninguna falsa.

Inversamente el axioma de inducción puede emplearse para demostrar que todo conjunto de enteros positivos tiene mínimo.

Supongamos que existe un conjunto C de elementos de $\mathbb{Z}^+$ que no tiene elemento mínimo. Es evidente que $1 \notin C$, llamemos a esta proposición P(1), también $2 \notin C$, llamemos a ésta P(2) y a que $n \notin C$, llamémosla P(n). En este estado de cosas apliquemos el axioma de inducción.

Premisa mayor: Si $n \notin C$ entonces $n+1 \notin C$, ya que de otro modo n+1 sería eliminado, es decir, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Premisa menor: $1 \notin C$, es decir, P(1) es cierta.

Conclusión.- P(n) es cierta para todo n, C es el conjunto vacío.

Luego todo conjunto de enteros positivos tiene un elemento mínimo.

Este principio sirve de base a la definición de conjunto bien ordenado (un conjunto está bien ordenado cuando toda parte no vacía tiene un primer elemento) por lo que podemos decir que $\mathbb{N}$ ó $\mathbb{Z}^+$ (y también $\mathbb{Z}$) es un conjunto bien ordenado si aceptamos el axioma de inducción. Zermelo demostró, a comienzos de siglo, que a todo conjunto se le puede dotar de una relación de orden por la que consiga estar bien ordenado. Infelizmente, sólo dió una prueba de existencia de tal relación, pero no un modo de contruirla. La prueba de existencia se basa en una de las formulaciones del axioma de la elección: Para toda familia

$(A_i)_{i\in I}$, con $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, existe una función f (función de selección) de $(A_i)_{i\in I}$ en $\bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $f(A_i) \in A_i$.

Es muy fácil demostrar la existencia de una función de selección si se acepta el principio de la buena ordenación:

Si A es un conjunto no vacío y R una relación por la cual A está bien ordenado. Definimos una función de selección de partes de A, $P(A)$, en A de modo que a cada subconjunto de A le asocie el mínimo elemento.

Más difícil resulta demostrar del axioma de la elección el principio de buena ordenación. Indicaremos brevemente la idea de la prueba sin entrar ésta:

Si A es un conjunto no vacío y f una función de selección con dominio $P(A)$ y recorrido A, tal que $f(A) = a_0$, tomamos a_0 como el primer elemento; seguidamente si $f(A - \{a_0\}) = a_1$, tomamos a_1 como segundo elemento; si $f(A - \{a_0, a_1\}) = a_2$, tomamos a_2 como el siguiente elemento. Repitiendo el proceso, el conjunto A queda como $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ donde a_0 precede a a_1; a_0 y a_1 preceden a a_2; a_0, a_1 y a_2 preceden a $a_3, \ldots$ De ésta forma A se constituye en un conjunto bien ordenado.

A su vez el axioma de la elección es equivalente a otros axiomas, como el lema de Zorn, pero ésto nos desbordaría en longitud y dificultad.

REFERENCIAS

- G. Peano.- Los Principios de la Aritmética. Pentalfa Ediciones. Oviedo, 1979.
- R. Courant y H. Robbins.- ¿Qué es la matemática?. Aguilar. Madrid, 1964).
- J. de Lorenzo.- Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos. Tecnos. Madrid, 1972.
- A. Calder.- Matemática constructiva. Investigación y Ciencia. Diciembre, 1979.

En la redacción de este Boletín, todavía no se han recibido soluciones a los siguientes problemas propuestos en números anteriores:

- Problema nº 3 del Boletín nº 6 (ver corrigenda en el nº 8).
- Problemas nº 3 y nº 4 del Boletín nº 7.
- Problema nº 3 del Boletín nº 8.
- Problemas n^{os} 1 al 8 y 10 del Boletín nº 9.
- Problemas n^{os} 1 al 9 del Boletín nº 10.
- Problemas n^{os} 3, 6 al 9, 11, 12 y 14 del Boletín nº 11.
- Problemas n^{os} 1, 4 y 6 al 10 del Boletín nº 12.

Esperamos que esta nota anime a nuestros compañeros a obtener esas soluciones y a enviárnoslas para su publicación en los próximos números.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA FASE FINAL DE LA " XXIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA" CUYA CRONICA PUBLICAMOS EN ESTE MISMO NUMERO:

PROBLEMA 1º :

Siendo a , b , c las longitudes de los lados de un triángulo no isósceles, se dan, en un plano, tres circunferencias concéntricas cuyos radios miden respectivamente a , b y c . Se pide:

1º) ¿ Cuántos triángulos equiláteros de distintas áreas se pueden construir de modo que las rectas en que están sus lados sean tangentes una a cada una de esas circunferencias ?

2º) Calcular las áreas de los triángulos anteriores.

PROBLEMA 2º :

Probar que para todo número natural n mayor que 1 es:

$$1.\sqrt{\binom{n}{1}} + 2.\sqrt{\binom{n}{2}} + 3.\sqrt{\binom{n}{3}} + \dots + n.\sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1}\,n^3}$$

PROBLEMA 3º :

Un triángulo dado se descompone en n triángulos tales que:

- Dos cualesquiera de ellos no tienen puntos interiores comunes.
- La unión de todos ellos es el triángulo dado.
- Todo segmento que es lado de uno de los n triángulos es también lado de otro de ellos o bien lado del triángulo dado.

Llamaremos s al número total de lados (contando cada uno una sola vez aunque pertenezca a dos triángulos) y v al número total de vértices (contando cada uno una sola vez aunque pertenezca a varios triángulos).

Probar que, siendo n un número impar cualquiera, hay descomposiciones del tipo descrito, de un triángulo dado, en ese número de triángulos y todas tienen el mismo número v de vértices y el mismo número s de lados. Expresar v y s en función de n . Probar que si n es par, no hay tales descomposiciones.

PROBLEMA 4° :

Siendo a y b dos números reales distintos arbitrarios, hallar la solución general de:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (ax + by)^2 \leqslant a^2x + b^2y \end{cases}$$

Problema análogo para:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (ax + by)^4 \leqslant a^4x + b^4y \end{cases}$$

PROBLEMA 5° :

En un triángulo ABC , D es un punto tomado en el lado AB y E un punto tomado en el lado AC, y se cumplen las siguientes condiciones:

$\widehat{ABE} = 30°$, $\widehat{EBC} = 50°$, $\widehat{ACD} = 20°$, $\widehat{DCB} = 60°$.

Se pide determinar el valor del ángulo $\widehat{EDC}$.

PROBLEMA 6° :

Para todo número entero positivo n se define el polinomio

$$p_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1 \quad ;$$

se pide:

a) Probar que la ecuación $p_n(x) = 0$ (para cada valor de n) tiene una raiz y solo una en el interior del intervalo (0 , 1) .

b) Llamando c_n a la raiz considerada en el apartado anterior, determinar

$$\lim_{n \to +\infty} c_n$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1ª (Boletín nª 11)

Sean m y n dos enteros positivos y distintos tales que $m^2 + n^2$ es múltiplo de $m + n$. a) Probar que m y n no pueden ser primos entre sí. b) Determinar todos los valores de m que cumplen esa condición si es $n = 35$.

Solución

a) Tenemos,

$$\frac{m^2 + n^2}{m + n} = \frac{m^2 + n^2 + 2mn - 2mn}{m + n} = m + n - \frac{2mn}{m + n}$$

Supongamos que m y n son primos entre sí. Entonces, $m + n$ y m también lo son, pues si tuvieran un factor común s distinto de la unidad, o sea, $\begin{cases} m = sp \\ m + n = sq \end{cases}$, ello implicaría $n = sq - m = sq - sp = s(q-p)$, resultando que m y n tienen el factor común s distinto de la unidad y, por consiguiente, no son primos entre sí, contra nuestra hipótesis. Así, pues, $m + n$ y mn son primos entre sí. Lo mismo ocurre con $m + n$ y n.

Por otra parte, $m + n > 2$, pues m y n son enteros positivos distintos. Todo esto nos dice que la fracción

$$\frac{2mn}{m + n}$$

que aparece en las equivalencias puestas al principio no es un número entero.

Por lo tanto, tampoco lo es $\frac{m^2+n^2}{m+n}$, cosa contraria a la hipótesis del enunciado del problema. Así, pues, la hipótesis de ser primos entre sí m y n, que ha conducido a nuestra contradicción, es falsa. O sea, m y n no son primos entre sí.

b) Podemos poner,

$$\frac{m^2+1225}{m+35} = m - 35 + \frac{2450}{m+35}$$

Y es $2450 = 2\cdot 3^2\cdot 5^3$. Además, por el apartado a), m sólo puede ser múltiplo de 7 ó de 5. Si es $m=5s$,

$$\frac{2450}{m+35} = \frac{2\cdot 3^2\cdot 5^3}{5s+5\cdot 7} = \frac{2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7+s}$$

Para que este cociente sea un número entero,

$$7 + s \in \{2\cdot 5,\ 2\cdot 5^2,\ 2\cdot 3^2,\ 2\cdot 3^2\cdot 5,\ 2\cdot 3^2\cdot 5^2,\ 3\cdot 5,\ 3\cdot 5^2,\ 3^2\cdot 5,\ 3^2\cdot 5^2\}$$

que implica

$$s \in \{3.\ 43.\ 11,\ 83,\ 443,\ 8,\ 68,\ 38,\ 218,\ 2,\ 18\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m \in \{15,\ 215,\ 55,\ 415,\ 2215,\ 40,\ 340,\ 190,\ 1090,\ 10,\ 90\}$$

Si fuera $m = 7s$, tendríamos,

$$\frac{2450}{m+35} = \frac{2\cdot 3^2\cdot 5^3}{7s+7\cdot 5} = \frac{2\cdot 3^2\cdot 5^3}{7\cdot(5+s)} \notin \mathbb{N}$$

por lo que las únicas soluciones son las de m consignadas antes.

Ramón Fraile Peláez

PROBLEMA 6º DEL BOLETIN Nº 4 :

Sean a , b , c , d , enteros impares, tales que se verifiquen:

1º. $0 < a < b < c < d$.

2º. $ad = bc$.

3º. $a + d = 2^k$ y $b + c = 2^m$, $k, m \in \mathbb{N}$.

Demostrar que $a = 1$.

- - - - - -

Solución:

De $d - a > c - b$ se deduce $(d-a)^2 > (c-b)^2$ y por la condición 2^a, $a^2+d^2 > c^2+b^2$ y $a^2+d^2+2ad > c^2+b^2+2bc$ o sea $a+d > b+c$, con lo que, por la 3^a, $k > m$. Podemos poner, por tanto $k = m + h$ con $h > 0$.

Poniendo $p = ad = bc$, la ecuación de raices a, d es

$$x^2 - 2^{m+h}x + p = 0$$

y la de raices b , c es

$$y^2 - 2^m y + p = 0 \quad ;$$

representando con D_1 , D_{2_2} los discriminantes de esas ecuaciones, será

$$\left.\begin{array}{l} D_1/4 = 2^{2(m+h-1)} - p = r^2 \\ D_2/4 = 2^{2(m-1)} - p = s^2 \end{array}\right\} \text{ con lo que } 2^{2(m+h-1)} - 2^{2(m-1)} = r^2 - s^2$$

siendo r y s números naturales. En consecuencia,

$$2^{2m-2}(2^{2h} - 1) = (r+s)(r-s) \quad .$$

Sea ahora $2^{2h} - 1 = u.v$, siendo u y v números naturales impares; por ser a , b , c , d , impares, r y s lo serán también y solo caben dos posibilidades:

a) $r + s = 2^{2m-3}u$; $r - s = 2v$ (con lo que $r = 2^{2m-4}u + v$)

b) $r + s = 2v$; $r - s = 2^{2m-3}v$ (con lo que $r = 2^{2m-4}v + u$)

(ya que, siendo r y s impares, r+s y r-s no pueden ser a la vez múltiplos de 4, pero tienen que ser pares). En el primer caso, a) , $a = 2^{m+h-1} - r = 2^{m+h-1} - 2^{2m-4}u - v$, $d = 2^{m+h-1} + 2^{2m-4}u + v$, y como ha de ser $a > 0$, $v < 2^{m+h-1} - 2^{2m-4}u$, de donde (recordando que $u.v = 2^{2h} - 1$), $2^{2h} - 1 < 2^{m+h-1}u - 2^{2m-4}u^2$, o sea

$2^{2m-4}u^2 - 2^{m+h-1}u + 2^{2h} - 1 < 0$; el valor de u deberá estar comprendido entre las dos raices del polinomio del primer miembro, o sea

$$\frac{2^h - 1}{2^{m-2}} < u < \frac{2^h + 1}{2^{m-2}}$$

pero como $u \in N$, será $u = \dfrac{2^h}{2^{m-2}}$, con $h \geqslant m-2$, y por ser u impar, será $h = m-2$, y $u = 1$.

Teniendo en cuenta que $u.v = 2^{2h} - 1$, resulta $v =$ $= 2^{2m-4} - 1$, y sustituyendo los valores de u y v en la expresión de a, resulta $a = 1$, como deseábamos probar.

El caso b) coincide formalmente con el caso a) sin más que intercambiar u y v.

Juan Lobo

- - - - -

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN DE INSCRIPCION

D. --

Dirección particular --

Código postal ---------------- Teléfono ------------------

Centro de trabajo ---

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO NUMERARIO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ---------------------------

----

para que cargue en mi cuenta numº ---------------------------

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1986-87 y siguientes.

-------------------- de ------------ de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ----------------- Banco -----------------------------

Ruego abonen con cargo a mi cuenta -------------- de número ------------------------, los recibos de mi cuota anual en la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: -------------------------------------

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SOLICITUD DE ADHESION DE CENTRO

D. --

como --------------------- del Centro ----------------------

----

domiciliado en ---

-------------------- Código postal --------- Tfno. ------------

SOLICITA LA ADHESION A LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ---------------------------

----

para que cargue en la cuenta nº -------------------------, los recibos correspondientes al curso 1986-1987 y siguientes.

----------------------------de -----------de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ----------------- Banco -----------------------------

Ruego abonen con cargo a la cuenta ------------ de número --------------------------, los recibos de la cuota anual de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: -------------------------------------

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.