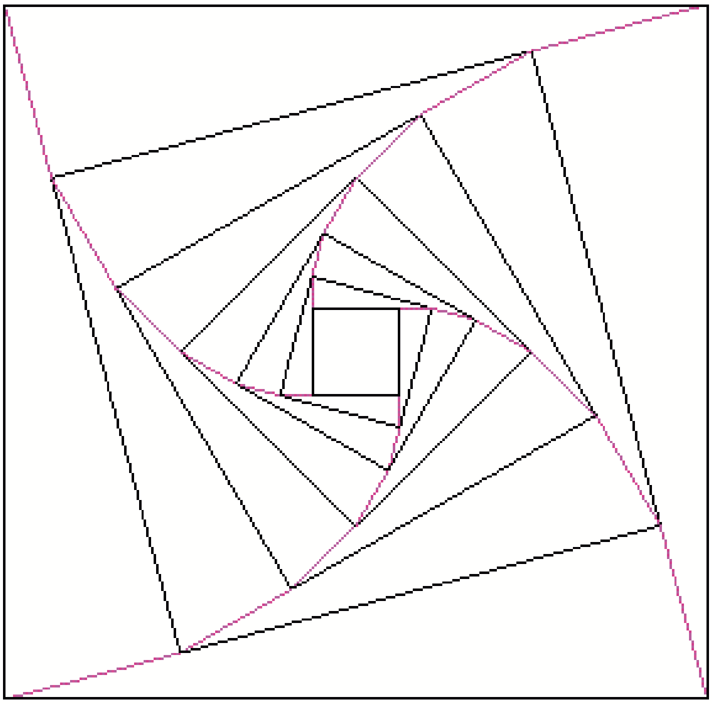
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 68
OCTUBRE DE 2004

Número especial dedicado a la profesora María Paz Bujanda

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:

JOSÉ MARÍA SORDO JUANEDA

Vicesecretaria:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

MARTÍN GARBAYO MORENO

Adjunta a la presidencia (mantenimiento página web):

MARÍA JOSÉ MORENO SÁNCHEZ DE LA SERRANA

XXII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Por vigésimo segunda vez se ha celebrado el Concurso de Resolución de Problemas que organizan nuestra Sociedad y el Colegio de Doctores y Licenciados desde 1983.

El Concurso del año 2004 se desarrolló durante la mañana del sábado 5 de junio, como de costumbre en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense. La innovación de esta edición fue que la entrega de premios también se realizó en la propia Facultad, la tarde del mismo sábado.

Hay que señalar como motivo de preocupación la escasa participación, lo que naturalmente nos debe llevar a extremar nuestro agradecimiento a todos los que nos acompañaron en ese día, muy en especial a los que vinieron de lejos. De todos modos algo indica de malo el hecho de que la participación en esta, como en otras organizaciones similares, vaya disminuyendo.

Pero, naturalmente, prestemos atención a los que conservan el ánimo para dedicar sus ratos a pensar. Como de costumbre el Concurso se celebró en tres niveles, correspondientes respectivamente a 3º y 4º de ESO, y a 1º de Bachillerato. A los alumnos de cada nivel se les proponen cuatro problemas, para resolver en dos tandas de hora y media.

Los participantes que recibieron sus premios en el acto vespertino fueron:

Nivel 1

1. *Alvaro Mateos González*, del Liceo Francés.
2. *Teresa Rodrigo Rey*, del I.E.S. Cardenal Herrera Oria.
3. *Fernando Palacio Ruiz*, del Colegio Ntra. Sra. Del Pilar.
4. *Pablo Portilla Cuadrado*, del Colegio San Viator.
5. *Daniel Martínez Tarriño*, del Colegio San Viator.

Nivel 2

1. *Hugo Fernández Hervás*, del I.E.S. San Juan Bautista.
2. *Ding Ru*, del I.E.S. Ramiro de Maeztu.
3. *Javier Torres Niño*, del Colegio San Viator..
4. *Oscar Rosario Sanz*, del I.E.S. San Juan Bautista.
5. *Carlos Ramírez Carrillo*, del Colegio San Viator.

Nivel 3

1. *Elisa Lorenzo García,* del I.E.S. Fortuny.
2. *José Carpio Pinedo*, del I.E.S. San Juan Bautista.
3. *Carlos Herrero Sáez*, del I.E.S. Oleana de Requena..
4. *David Fernández Sánchez*, del I.E.S. José Hierro y
   José Ignacio Tena Orcajo, del I.E.S. San Juan Bautista.

Se observa, como todos los años, que algunos alumnos repiten participación y premio. Así los dos primeros clasificados del nivel 3, Elisa Lorenzo y José Carpio, obtuvieron premios en el nivel 2 el año 2003, y en el nivel 1 en 2002; también David Fernández fue premiado en el año 2003. Del mismo modo el ganador del nivel 2, Hugo Fernández Hervás, lo fue del nivel 1 el año pasado.

Nuestra enhorabuena a los premiados, y a todos los participantes, así como a sus padres y profesores.

Problemas propuestos en el XXII Concurso de Resolución de Problemas

1er. nivel

1. La planta de un castillo tiene la forma de un cuadrilátero, PQRS, donde PQ = 40m, QR = 45m, SP = SR = 20m, y el ángulo PSR = 90 . Un vigilante debe dar un paseo alrededor del castillo, manteniéndose siempre a 2m de la pared, es decir, del punto más cercano de la pared. El vigilante empieza su paseo en un punto de esas características, da la vuelta en sentido antihorario y llega a ese punto. ¿Cuántos metros recorre durante ese paseo?

2. Deducir para qué valores de X el trinomio $2X^2$-$3X$-5 es el cuadrado de un número primo.

3. Sean tres círculos tangentes uno a otro, y también tangentes a dos rectas. Si el radio del pequeño es 32m, y el del mayor 72m, obtener el radio del mediano.

4. Los naturales a y b son menores que 2000 y la fracción $(a+2004b)/(b+2004a)$ es simplificable. Hallar el mayor número primo que es factor común del numerador y del denominador.

2º. nivel

1. Un triángulo, ABC, tiene de área 48. Sea P el punto medio de la mediana AM y N el punto medio del lado AB. Si los segmentos MN y PB se cortan en T, calcula el área del triángulo MTB.

2. Los números naturales del 1 al 27 se escriben formando una retícula espacial en forma de cubo de tres números en cada arista, de modo que la suma de cualesquiera tres números alineados sea la misma. Se pide:

a) ¿Qué número es esa suma?
b) ¿Qué número ocupa la posición central?

3. Prueba que la suma de las alturas de un triángulo es como mínimo $9r$ siendo r el círculo del radio inscrito.

4. Probar que $S_n = n^3 + 5n$ es siempre múltiplo de 6, para cualquier valor de n natural.

3^er^. nivel

1. De entre todos los números reales x, y, que verifican que

$$x^2+y^2-4x-4y+7=0,$$

encuentra el mayor cociente y/x.

2. En el conjunto de los números naturales y 0 se permite hacer estas dos operaciones:

Operación A: multiplicar por 2;
Operación B: restar 3 (con minuendos mayores que 2).

¿Se puede alcanzar cualquier natural, n, a partir de cualquier otro, m?
Estudiar qué números son alcanzables a partir de uno dado, n.
Ensayar: de 21 a 36; de 9 a 31; de 7 a 31; de 8 a 34; de 10 a 22.

3. Demostrar que el radio del círculo inscrito a un triángulo pitagórico (triángulo rectángulo de catetos e hipotenusa enteros) viene dado por un número entero.

4. El natural n es mayor que 3 y no múltiplo de 3. Buscar si existe un n de ese tipo tal que la fracción $(2n-3)/n(n-3)$ sea irreducible. Buscar un n para que la fracción sea decimal.

Número especial dedicado al Profesor Miguel de Guzmán

La Junta Directiva propone dedicar un número del Boletín en homenaje al Profesor Miguel de Guzmán, recientemente fallecido.

En principio, dicho número será el 70, correspondiente a junio de 2005.

Invitación a presentar artículos para ese número especial

Se invita a presentar artículos a cuantos compañeros, alumnos y amigos del Profesor Miguel de Guzmán lo deseen.

Por tratarse de número especial en homenaje al Profesor Guzmán, se espera que, en principio, dichos artículos sean relativos a Educación Matemática en sus diversas facetas, aunque no se descarta incluir breves artículos de divulgación en otros campos, rogando que no sean excesivamente especializados.

Las normas de presentación serán las habituales del Boletín, que aparecen al final de este número. Los artículos serán revisados, como es norma en este Boletín. La fecha límite de envío de trabajos es el 5 de abril de 2005.

La Junta Directiva

Dedicatoria de este número del Boletín

El curso 2003-2004 se ha jubilado la profesora Mª Paz Bujanda Jáuregui, durante muchos años Profesora Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense. Su preocupación han sido siempre los temas de la enseñanza de las matemáticas. En la última Asamblea de nuestra Sociedad se acordó dedicar un número del Boletín en homenaje a la profesora Bujanda, como agradecimiento al trabajo que durante tanto tiempo realizó.

Este momento, que era de júbilo, se ha visto empañado en el verano de 2004 por el fallecimiento del esposo de la profesora Bujanda. Hemos entendido, no obstante, que este hecho luctuoso no debía ocultar el aprecio que sus compañeros sienten por ella, antes al contrario, y que seguía teniendo todo el sentido el acuerdo que adoptó la Asamblea de la Sociedad.

Por ello, en este y en el próximo número –las colaboraciones recibidas exceden la capacidad de un solo Boletín– se encontrarán los trabajos que hemos recibido, como muestra de cariño a Mari Paz y de la cercanía de sus compañeros en los momentos duros.

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 68 (Octubre 2004)

Vertere Seria Ludo

José Javier Etayo Miqueo

Abstract

In this short note we consider problems like Flavio Josefo's; that is to say, the question to select a subset by counting several times among an ordered set following a given pattern.

A Mari Paz Bujanda:
"Que aquellos tiempos recios
se le tornen ahora deleitosos"

En el caudal de noticias, comentarios e interpretaciones que a diario nos suministra la prensa, oral o escrita, siempre puede uno encontrar motivos de inspiración. Fijémonos en esto que leí hace unos días: "La organización militar quedó diezmada en más de un tercio de sus efectivos, que se habían calculado en unos 3000 combatientes". No es que esté mal del todo, ciertamente, puesto que "diezmar" significa también, por extensión, causar una gran mortandad; pero, ya que usamos esa palabra, podíamos ceñirla a su acepción original, a que esa mortandad alcance a un "diezmo", a una décima parte de esos efectivos. Es lo que se entiende como castigar a uno de cada diez posibles culpables cuando no se sabe quiénes lo son de un grupo numeroso de sospechosos. Hasta solíamos pensar que la operación se hacía poniéndolos en fila y numerándolos reiteradamente de diez en diez: los estigmatizados con el número diez son los que van a purgar por todos y, una vez separados del grupo, los que quedan, las nueve décimas partes o un poco más del total, nos dan el grupo ya diezmado. Una técnica análoga a la del "pito, pito, gorgorito" que emplean los críos para seleccionar a sus compañeros de juego. Sólo que ellos la repiten una y otra vez, lo que equivaldría a diezmar de nuevo al grupo antes diezmado, es decir, al "rediezmo" (que se llama así, que no es una palabrota; aunque bien inocente sería para lo que hoy se lleva).

En la nota del periódico parece que han "terciado" a un contingente de soldados; claro que no creo que lo hicieran ordenándolos y contándolos de tres en tres. Pero, miren qué coincidencia, esto sí que parece que se ha dado alguna vez. Lo narra de primera mano Flavio Josefo en *La guerra judía*, historia de aquella rebelión contra el imperio romano iniciada en el año 66 de nuestra era, y en la que él participó. Con cuarenta hombres a su mando se ve cercado en una cueva por los romanos, sin más recurso que rendirse o perecer. Eligen esto último y él les propone que se inmolen como acabo de decir: puestos en círculo se van matando sucesivamente los señalados de tres en tres a partir de uno de ellos. Así hasta terminar con todos. Bueno…, hasta que quedaron sólo dos, que se rindieron: uno de ellos era él, naturalmente. Se sospecha que hizo antes los cálculos, quizá valiéndose de 41 piedras, y se colocó en el sitio conveniente: "providencialmente", como dice, estaba en el puesto 31. Si ustedes repiten el juego verán que quedan son el 16 y el 31; pero si siguen todavía hasta que sólo sobreviva uno, ése es precisamente el 31. ¡No era cuco ni nada el tal Josefo!

He aquí un ejemplo, parece que histórico, de cómo una cosa muy seria, jugarse la vida, puede convertirse en un juego (que a eso se refiere mi título, nada que ver con esas cosas tan manidas de la "enseñanza lúdica de las matemáticas" o de lo que sea). Juego y problema, porque buenos son los matemáticos para que en cuanto ven una cosa no busquen sacarle todo el partido posible. Uno de ellos, D. Woodhouse, de la Universidad de Navarra, escribía hace tiempo un artículo en el que desarrollaba una generalización de ése que llama "problema de Flavio Josefo". Si alguien quiere verlo lo encontrará en el volumen 33 (1973) de aquella esforzada *Revista Matemática Hispano-Americana* en la que dimos los primeros vagidos los más viejos del lugar.

Este tipo de juegos en que desembocan las cosas serias ha tenido en algunos tiempos cierta aceptación. Nuestro bachiller Juan Pérez de Moya lo traduce en caballos, para quitarle dramatismo, y así en su *Diálogo de Aritmética práctica y especulativa*, de 1562, plantea el problema de eliminar la mitad de los caballos que porta una nave sobrecargada de peso. El procedimiento es el mismo: contarlos esta vez de nueve en nueve y arrojarlos al mar hasta quedarse con la mitad. La cuestión añadida es que los caballos son 30, 15 de un capitán moro y los otros 15 de un cristiano que, muy suyo el hombre, quiere saber cómo disponerlos para que los eliminados sean precisamente los del moro. Todavía menos grave es otro problemilla del mismo libro: 10 huéspedes de una posada disponen sólo de nueve camas y las echan a suerte contándose entre ellos de siete en siete, de modo que el último que quede dormirá en el suelo. Esta vez, al contrario que en los casos anteriores, los gananciosos son los favorecidos en ese recuento.

Deliciosa obrita la de Pérez de Moya que la Universidad de Zaragoza tuvo el acierto de publicar en 1987 y de la que hice una pequeña reseña en este mismo *Boletín* (en su número 15). Aquella edición había estado al cuidado y con anotaciones de un querido compañero, Rafael Rodríguez Vidal, cuya memoria no puedo por menos que evocar. El me obsequió con un ejemplar y una amistosa dedicatoria: "Espero que este librito te distraiga unos minutos del largo y cálido verano".

Ojalá pudiera yo decir lo mismo, en este verano de hoy, al dedicar a Mari Paz este mezquino escrito. Voy a valerme en él de ese proceso de seleccionar una cosa entre unas cuantas contándolas reiteradamente hasta llegar a un número determinado; eso es lo que, en distintas variantes, hacíamos en los ejemplos anteriores. El de ahora, un poco diferente, me hace retroceder a tiempos infantiles –que es un achaque de viejos- cuando jugábamos a sorprender a nuestros compañeros. Quizá conozcan ustedes el juego pero el que tenía que ignorarlo era nuestro "partenaire". Cogíamos 21 cartas de una baraja y las íbamos repartiendo en tres montones de siete cartas cada uno. Pedíamos a nuestro contrincante que se fijase en una de ellas, la que quisiera, y nos dijera únicamente en qué montón estaba; reuníamos entonces los tres montones colocando en el medio el montón señalado. Ordenadas así las cartas volvíamos a desplegarlas en tres montones iguales para que de nuevo nos indicase aquél que contenía la carta elegida; montón que colocábamos otra vez entre los otros dos. Todavía repetíamos una vez más la jugada, et voilà: del mazo así formado sacábamos una a una las cartas, poniendo cara de concentración pero contándolas mentalmente; al llegar a la número 11 se nos iluminaban los ojos y la mostrábamos con gesto triunfante a nuestro pasmado amigo que tenía que reconocer que efectivamente era la que él había secretamente elegido.

¿La explicación? Para él, que éramos unos águilas con unas dotes de observación y de memoria visual capaces de entresacar la carta, quizá la única, que estaba en uno y otro montón. Para nosotros una más sencilla: la carta era la que ocupaba el undécimo lugar. ¿Por qué? Porque siempre salía así, cuantas veces repitiéramos el juego. O sea, una ley experimental, como en los albores de la matemática, cuando no se había inventado la demostración. ¿Y si lo intentásemos, aunque sea un problema tan bobo? Daríamos un giro a nuestra primera propuesta: ya no sería una cosa seria que derivaba en un juego sino un juego sobre el que montar una cosa más seria; o más aburrida, si lo prefieren.

Para que no lo sea tanto, vamos a discurrir sobre un caso concreto que en seguida se ve que no quita generalidad. Voy a representar las cartas por números sucesivos, para entendernos, y las distribuyo ordenadamente en tres montones, (A), (B) y (C):

(A)	(B)	(C)
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21

(Paso 1º)

Nuestro interlocutor elige para sí la número 4, por ejemplo, y sólo nos dice que está en el montón (A). Dejando este montón en medio, le ponemos delante el (A) y detrás el (C) y volvemos a distribuir las cartas en los montones (A'), (B'), (C'), así:

(A')	(B')	(C')
2	5	8
11	14	17
20	**1**	**4**
7	**10**	**13**
16	**19**	3
6	9	12
15	18	21

(Paso 2º)

Por el proceso seguido, las cartas del antiguo montón (A) en el que está la que buscamos, las escritas en negrita, ocupan la banda central de los tres montones. En particular, en el (C') en el que se nos dice que está la nuestra, las tres centrales son 4, 13 y 3. Y puesto este (C’) entre (A’) y (B’), y formando nuevos montones (A”), (B”), (C”), esas cartas quedarían exactamente en la línea media:

(A”)	(B”)	(C”)
2	11	20
7	16	6
15	8	17
4	*13*	*3*
12	21	5
14	1	10
19	9	18

(Paso 3º)

Al poner ahora (A”), montón en que dice que está la carta, entre (A”) y (C”), esa carta 4 ocuparía exactamente el lugar central del bloque, es decir, el undécimo, indicado en cursiva.

Se ve, pues, que el juego sale porque en el paso 3º la carta ocupa la línea central (la cuarta), lo que ocurre por estar en el paso 2º en la banda central de tres líneas, tercera, cuarta y quinta, a lo que pertenecen las siete cartas del primer montón (A). Pero además de ellas están también la 20 y la 3 que gozarían de igual suerte. Es decir, si hiciéramos la misma construcción con 27 cartas, los mismos tres pasos –llamando “paso” a distribuirlas en tres montones, ahora de 9 cartas, y juntar los montones en el orden debido– nos llevaría a una solución análoga: descubriendo las cartas una a una tras el paso 3º, la que ocupa el lugar medio, que ya no sería el 11º sino el 14º, es la pensada por nuestro amigo. Al cual pueden sorprenderle ahora con el nuevo modelo si él conocía el antiguo.

Si los montones son de más de nueve cartas, en el paso 2º nos rebasarían la zona central de tres líneas, pero aumentando el número de pasos podríamos, por el mismo razonamiento, reducirlo a los casos anteriores generalizando así nuestro juego. Ya sé que nos van a decir que no podrá haber más cartas que las que tiene una baraja pero podríamos sustituirlas por cromos, postales, sellos, en número suficientemente grande para no preocuparnos por ello; aunque seguiremos, por comodidad, llamándoles “cartas”. Pues bien, a lo que hay que llegar, cualquiera que sea el número de ellas, es a que en el paso penúltimo nuestra carta esté en las tres filas intermedias; como éstas proceden de una columna del paso anterior, la tal carta pertenecerá a una de las nueve filas centrales de dicho antepenúltimo paso; a su vez, en el paso anterior, estaría en una de las veintisiete filas centrales, etc. Vayan ustedes haciéndolo, si no tienen otra cosa mejor, porque es más fácil discurrirlo uno mismo que atender la descripción hecha por otro. El resultado a que quería llegar es que en cada paso se divide por 3 el número de filas centrales en que se encuentra la maldita carta.

Pues ya tenemos la cosa a punto. Supongamos que cada uno de los tres montones que vamos a formar consta de $2k+1$ cartas (tienen que tener un número impar para que haya una carta central). Ya hemos visto que si ese número no es mayor que 9, con tres pasos resolvemos la cuestión. Si está comprendido entre 9 y 27, incluido este último, hará falta un paso más; hasta 81, otro paso, etc. En definitiva, si

$$\tfrac{1}{3} \cdot 3^n < 2k+1 \leq 3^n,$$

al cabo de $n+1$ pasos tendremos ordenadas las $3(2k+1)$ cartas de tal modo que la situada en el centro, la que ocupa el lugar $3k+2$, es la que buscamos.

No se me oculta que para llegar a ese final de viaje he ido saltando los pueblos de dos en dos, pero es que detallarlo más resultaría ahora tan enfadoso como para ponerles en ganas de dispararme a bocajarro. Además, ¡hace tanto calor! Háganme el obsequio de pensar que, tal vez, incluso yo mismo sabría explicarlo mejor. Y ahora a presumir con sus amigos, pues a mayor número de cartas más brillarán sus presuntas dotes adivinatorias. ¿Y si todavía se atrevieran a nuevas generalizaciones? Por ejemplo, a que en vez de ser tres los montones sean cinco o más. Ahí se lo dejo.

En cuanto a Mari Paz, y aunque no lo parezca después de haberle dedicado este bodrio, bien sabe que le deseo afectuosamente lo mejor. Y si allá en Oricáin cae en su mano una baraja, que seguro que le cae, no se mortifique haciendo estas cosas que he dicho. Mejor se lo pasará jugando unas partidas de mus, aunque sea perdiendo por echar unos envidos o querer algún “revido”. O un órdago, si a mano viene. Muchas felicidades.

Sobre la descripción de un sólido convexo mediante su planta, alzado y vista lateral

Julio Fernández Biarge
Profesor emérito de la
Universidad Politécnica de Madrid
jfbiarge@telefonica.net

Abstract

It is known that a convex solid is not defined by its three projections on the faces of a orthogonal trihedron. The problem of determining the convex solids with the maximum and with the minimum volumes that have those same projections is studied in several cases with didactic interest.

En homenaje a nuestra compañera Mª Paz Bujanda, en su jubilación.

Para describir una pieza de un mecanismo, los delineantes suelen dibujar los contornos de sus proyecciones sobre las caras de un triedro trirrectángulo, a los que se les da los nombres de planta, alzado y vista lateral. No obstante, cualquier delineante sabe que una figura del espacio no queda definida por completo por estos contornos. El añadir la condición de que el sólido sea convexo limita mucho esta indefinición, pero no la elimina, por lo que muchas veces es necesario añadir otra proyección, por ejemplo axonométrica, en la que se representan además todas las aristas, distinguiendo entre las visibles y las ocultas.

Surge así una familia de problemas muy instructivos para los estudiantes de los sistemas de representación, que pueden adoptar la forma siguiente:

Se dan los contornos de la planta, del alzado y de la vista lateral de un sólido convexo y se pide encontrar los sólidos de volúmenes máximo y mínimo que dan lugar a esas mismas proyecciones. Representar sus proyecciones axonométricas y calcular esos volúmenes máximo y mínimo.

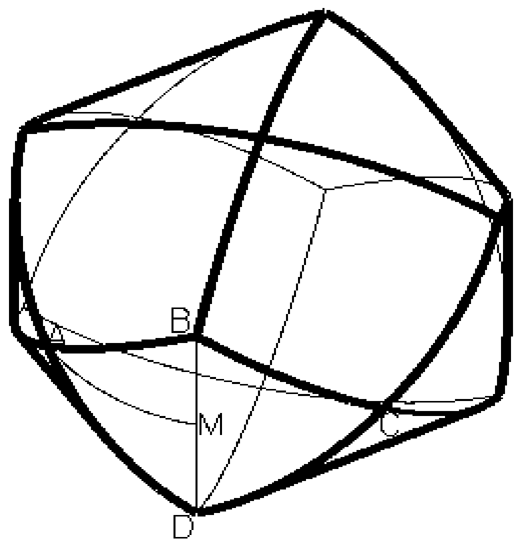
La solución de este problema da a veces resultados curiosos y sorprendentes que pueden tener interés didáctico para contrarrestar la tendencia de los talleres a suponer que las "piezas" quedan definidas por las antedichas proyecciones, salvo en sus oquedades u orificios.

La determinación del sólido de volumen máximo es muy sencilla: Es evidentemente la intersección de los tres cilindros con sección normal en las tres proyecciones dadas y generatrices perpendiculares a los planos en que se hallan.

La determinación del sólido de volumen mínimo suele ser más complicada, constituyendo a veces un desafío a la intuición, y exige razonamientos adaptados a cada caso. Además es frecuente que se obtengan distintos sólidos con el mismo volumen mínimo.

Podemos comenzar por las tres vistas de una esfera de radio r, que son tres círculos de ese radio. El volumen de esa esfera es $4\pi r^3/3$, o sea $V_0 = 4{,}1888...r^3$. ¿Cuál es el sólido convexo de máximo volumen que tiene exactamente esas mismas vistas?

La intersección de los tres cilindros antedichos, que en este caso son de revolución y del mismo radio, es un sólido convexo, cuya perspectiva damos en la figura, que tiene 12 caras formadas por porciones de superficies cilíndricas (por ejemplo, la ABCD es una porción de superficie cilíndrica de generatrices paralelas a la BD),. Observemos que sus 24 aristas son arcos iguales de elipses obtenidas cortando los mencionados cilindros por planos que forman ángulos de 45º con sus ejes.



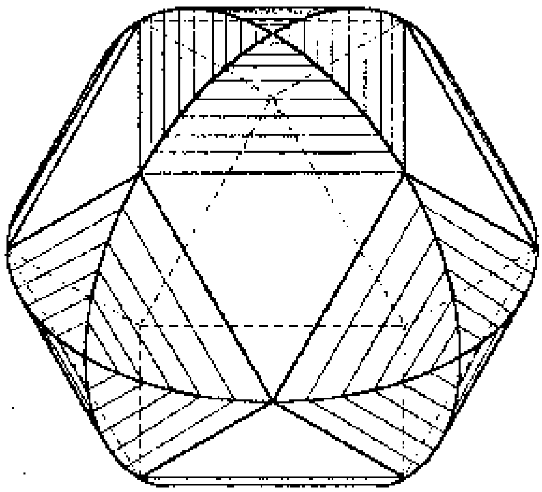
El volumen V_1 de ese sólido es fácil de calcular, si se tiene en cuenta que los planos tangentes en cualquier punto de la superficie (excluidos los de las aristas), están todos a distancia r del centro de simetría, por lo que $V_1 = S_1 r/3$, donde S_1 es la superficie del sólido. Llamando T al área del triángulo cilíndrico AMB (siendo M el punto medio de BD), es $S_1 = 48$ T. Tomando el plano del arco AM como $z = 0$ y OA como eje OX, el arco AB está en el plano $z = y$, y sus ecuaciones paramétricas son

$$\{ x = r \cos t,\ y = r \operatorname{sen} t,\ z = r \operatorname{sen} t,\ \text{ con } 0 \le t \le \pi/4\},$$

por lo que el desarrollo sobre un plano de AMB, será un triángulo curvilíneo limitado por la curva $y = r \operatorname{sen} (x/r)$ entre las abscisas 0 y $\pi r/4$, de donde resulta, integrando, que $T = (1-\sqrt{2}/2)\, r^2$ y por tanto, $S_1 = 24(2-\sqrt{2})\, r^2$ y

$$V_1 = 8(2-\sqrt{2})\, r^3 = 4{,}6863...\, r^3 .$$

La determinación del sólido convexo de volumen mínimo con las proyecciones dadas, exige un cierto esfuerzo a la intuición y es difícil probar rigurosamente que efectivamente da el mínimo buscado. Lo intentaremos construyendo los tres círculos máximos de la esfera inicial situados en planos paralelos a las caras del triedro empleado para las vistas y definiendo el sólido como envuelto por los planos que se apoyan sobre el conjunto de esas tres circunferencias (generalmente tangentes a dos de ellas, aunque ocho de ellos son tangentes a las tres). Resulta así el sólido representado en la figura, que tiene ocho caras planas triangulares y 24 caras triangulares cilíndricas iguales.



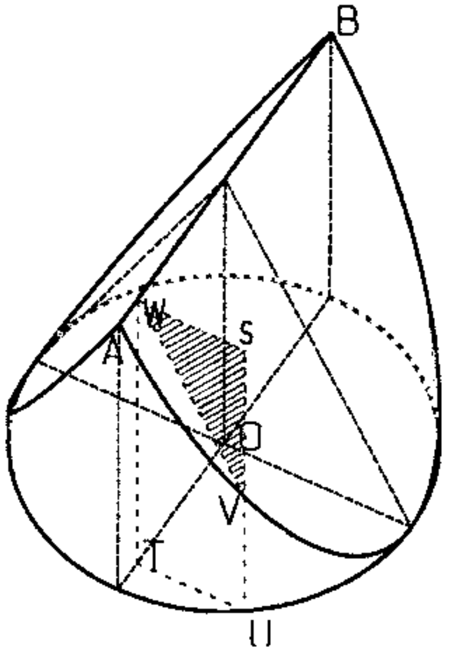
Este sólido se puede descomponer en un poliedro (cubo truncado), de 14 caras (seis cuadradas y ocho triangulares), 12 vértices y 24 aristas de la misma longitud, y seis "cúpulas" levantadas sobre las seis caras cuadradas y cada una limitada por cuatro de los triángulos cilíndricos citados. Su volumen V_2 se puede calcular como $V_2 = V_p + 6\ V_c$, donde V_p es el volumen del poliedro y V_c el de una de las citadas "cúpulas". La distancia entre dos vértices opuestos del poliedro es $2r$, por lo que la arista del cubo del que se obtiene el poliedro por truncamiento es de longitud $r\sqrt{2}$, y por tanto, las 24 aristas del poliedro son de longitud igual a r . Las caras cuadradas son de área r^2 y las triangulares, de área $r^2\sqrt{3}/4$. Es fácil ver que la distancia del centro a las caras cuadradas es $r\sqrt{2}/2$ y a las caras triangulares es $r\sqrt{2}/\sqrt{3}$, con lo que el volumen del poliedro es $(6.r^3\sqrt{2}/2+8.r^3\sqrt{2}/4)/3$, o sea $V_p = (5\sqrt{2}/3)\ r^3$.

El volumen de cada una de sus "cúpulas" se puede calcular teniendo en cuenta que las secciones con planos paralelos a su base a distancia x del centro del sólido (con $r\sqrt{2}/2 \le x \le r$) son cuadrados en los que el cuadrado de su semidiagonal es $r^2 - x^2$, y por tanto, su área es $2(r^2 - x^2)$. Como esta expresión es de grado 2 , el volumen de una "cúpula" se puede calcular exactamente con la fórmula del prismatoide (o de Simpson); el área de la sección media, que es el cuadrado con $x = (r + r\sqrt{2}/2)/2 = r(1 + \sqrt{2})/(2\sqrt{2})$, resulta así $r^2(5 - 2\sqrt{2})/4$ y en consecuencia, $V_c = r^3\ (8 - 5\sqrt{2})/6$. En definitiva el volumen mínimo buscado será

$$V_2 = V_p + 6\ V_c = (24 - 10\sqrt{2})\ r^3/3 = 3{,}2860\ldots r^3\ .$$

Otro problema curioso de esta índole es el siguiente:

¿Existen sólidos convexos cuya planta sea un círculo de diámetro a *, cuyo alzado sea un cuadrado de lado* a *y cuya vista lateral sea un triángulo isósceles de base* a *y altura* a *? En caso afirmativo, describir los de volúmenes máximo y mínimo y calcular estos volúmenes.*



Existen tales sólidos. El de volumen máximo es la intersección del prisma recto que tiene como base el triángulo isósceles mencionado y el cilindro de revolución levantado sobre el círculo que constituye su planta. Este sólido puede verse en la figura adjunta.

Su volumen V_M es igual a $\pi a^3/4 - V'$, siendo V' el del sólido que ha de añadirse para completar un cilindro de altura a. El valor de $V'/2$ se calcula con facilidad cortándolo con planos paralelos a la sección triangular.

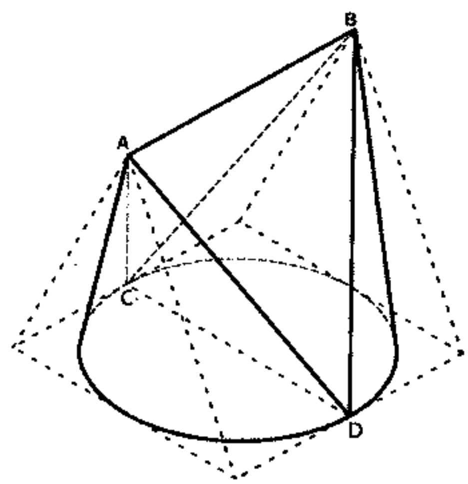
Sea $OT = x$ y VWS la sección producida. Como $VS = 2.WS$ y $WS = TU$, el área de la sección VWS es

$$A_x = WS.VS/2 = TU^2 = a^2/4 - x^2 \ .$$

Al ser esta expresión de grado 2 en x , el volumen $V'/2$ se puede calcular exactamente con la fórmula del prismatoide o de Simpson, resultando $V'/2=(0+4.a^2/4+0)a/6=a^3/6$ y por tanto, el volumen máximo pedido es

$$V_M = (\pi/4 - 1/3)\, a^3 = (3\pi - 4)a^3/12 = 0{,}45206\ldots\, a^3 \ .$$

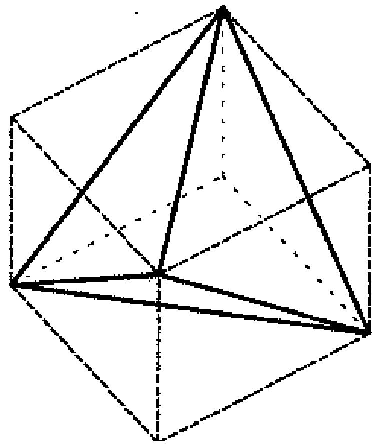
El sólido convexo de volumen mínimo con las mismas tres vistas es fácil de determinar y en este caso es posible probar su condición de mínimo, ya que cualquier sólido con esas proyecciones ha de contener (en su superficie) la recta AB y la circunferencia de la base. El sólido resulta así como envuelto por todos los planos que se apoyan en esa circunferencia y uno de los extremos de AB o en ambos. Este sólido tiene su base circular, dos caras planas triangulares, ABC



y ABD y dos formadas por superficies cónicas con vértices en A y B. Puede verse en la figura.

Su volumen es fácil determinar en la forma $V_m = V_t + 2V_n$, siendo V_t el volumen del tetraedro ABCD, para el que la fórmula del prismatoide da $V_t=(0+4.a^2/4+0)a/6 = a^3/6$ y V_n el volumen de uno de los conos (oblicuos) de base semicircular, para los que $V_n = (\pi a^2/8)(a/3) = \pi a^3/24$. De ahí que

$$V_m = a^3/6 + \pi a^3/12 = a^3.(\pi + 2)/12 = 0{,}42847\ldots\, a^3 \;.$$



Menos sorprendente resulta el problema análogo con las tres vistas de un cubo de arista a con planos de referencia paralelos a sus caras. Evidentemente el cubo de partida es el sólido de volumen máximo, y su volumen es a^3 . El sólido de volumen mínimo no está determinado en posición; es un tetraedro con aristas opuestas coincidentes con diagonales no paralelas de dos caras opuestas del cubo. Su volumen, sin duda mínimo, es $a^3/3$. Las aristas mencionadas pueden elegirse de dos maneras diferentes.

Bradwardine y Oresme: dos grandes matemáticos europeos de finales de la Edad Media

Concepción Romo Santos
Departamento de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid
romosan@mat.ucm.es

Abstract

Tomas Bradwardine and Nicole Oresme were two university professors of the Middle Ages. Bradwardine studied a general theory of proportions. Oresme introduced the concept of the irrational powers.

A María Paz Bujanda con motivo de su jubilación académica

Dedico este pequeño trabajo en sentido homenaje a quien considero la más preciada de mis amigas, con quien he compartido tantas y tantas tareas de docencia a lo largo de mi vida. Conocí a Mari Paz dando clases de Matemáticas II a los estudiantes de 2º curso de Físicas a principios de los años 70 y desde entonces nos ha unido una estrecha y cordial amistad. Ella llevaba a sus clases una bocanada de aire fresco con su buen hacer, su calidad humana y sobre todo, su enorme entrega a la docencia. Mari Paz se ha ido en silencio, discretamente, diciéndonos que lo que importa en la vida es el trabajo bien hecho y realizado con sencillez y humildad pero con un entusiasmo contagioso.

Introducción

Tomás Bradwardine y Nicole Oresme fueron dos profesores universitarios de finales de la Edad Media. Bradwardine fue el autor de una teoría de proporciones generalizada, estudió también otros temas como el ángulo de contingencia y los polígonos estrellados. Oresme tuvo la brillante idea de introducir el concepto de las potencias irracionales y la representación gráfica de funciones, estudió además con gran rigor las series numéricas.

En este trabajo estudiaremos las aportaciones a la Matemática de estos dos grandes sabios.

1. Thomas Bradwardine

Entre los físicos de finales de la Edad Media se encontraba un numeroso grupo de profesores universitarios y de eclesiásticos, pero nos vamos a referir solamente a dos de ellos que fueron también matemáticos importantes. El primero es Thomas Bradwardine (1.290-1.349), filósofo, teólogo y matemático que llegó a ser arzobispo de Canterbury

Y el segundo Nicole Oresme (1.323-1.382), universitario parisino que más tarde llegaría a ser, a su vez, obispo de Lisieux. A estos dos hombres se debe una concepción muy amplia y general de la proporcionalidad.

Thomas Bradwardine (1.290-1.349), máximo exponente del Merton College de la Universidad de Oxford, maestro de Willian de Heytesbury (1.330-1.371) y Richard Swineshead (segunda mitad del siglo XIV), recibió la influencia de la interpretación, crítica y desarrollos de la Física aristotélica de sus antecesores oxonianos, Robert Grosseteste (1.175-1.253) y Roger Bacon (1.214-1.294). Propiamente filósofo y teólogo interesado por temas científicos, confesor del rey Eduardo III y nombrado por el Papa arzobispo de Canterbury en 1.349, aportará una cinemática de relaciones de cantidades homólogas de espacio, tiempo y velocidad, en un intento de matematización de las relaciones físicas cualitativas. Entre los manuscritos de Física de la Biblioteca Histórica Complutense se encuentra uno de Bradwardine: "Liber de geometría in quatur tractatus divisus".

Analizaremos las obras de este sabio, en los Elementos de Euclides se incluía ya una teoría de proporcionalidad o de igualdad de razones fundamentada rigurosamente, teoría que los sabios antiguos y medievales aplicaron a diversas cuestiones científicas. Así, por ejemplo, para un intervalo de tiempo, la distancia recorrida en un movimiento uniforme es directamente proporcional a la velocidad. Aristóteles creía, no muy acertadamente, que la velocidad de un objeto sobre el que actúa una fuerza motriz, dentro de un medio resistente, era directamente proporcional a la fuerza motriz e inversamente proporcional a la resistencia. Esta formulación cualitativa le pareció a los físicos posteriores que contradecía el sentido común de alguna manera, puesto que, cuando la fuerza F sea igual o menor que la resistencia R, debería resultar una velocidad v de acuerdo con la ley $V = K\frac{F}{R}$, donde K es una cierta constante de proporcionalidad no nula, pero lo cierto es que cuando la resistencia equilibra o excede a la fuerza motriz, uno no espera que se mueva el cuerpo con velocidad alguna. Para evitar este absurdo Bradwardine utilizó una teoría de proporciones generalizada. En su libro “Tractatus de proportionibus” del año 1.328, desarrolla la teoría de Boecio de las proporciones doble, triple o de una manera más general, lo que nosotros llamaríamos una proporción n-tupla. Sus razonamientos están expresados en palabras usuales, pero en notación moderna nosotros diríamos en estos casos que las cantidades varían como la segunda, tercera, o en general, la n-ésima potencia. Y análogamente, la teoría de proporciones incluía también proporciones subdobles, subtriples y sub-n-triples, en las que las cantidades variaban como la raíz cuadrada, cúbica o la raíz n-ésima respectivamente. Con este aparato conceptual Bradwardine se encontraba ya preparado para proponer una alternativa a la ley aristotélica del movimiento. Para doblar la velocidad que se produce como consecuencia de una cierta razón o proporción $\frac{F}{R}$, afirmaba, es necesario elevar al cuadrado la razón $\frac{F}{R}$; para triplicar la velocidad se debe elevar al cubo la razón $\frac{F}{R}$; y para multiplicar, en general, por n la velocidad, debe conseguirse la n-ésima potencia de la razón $\frac{F}{R}$. Todo esto es equivalente a afirmar que la velocidad viene dada, en nuestra notación funcional moderna, por la relación $v = K \log \frac{F}{R}$, puesto que $\log (\frac{F}{R})^n = n \log \frac{F}{R}$ Es decir, que si $v_o = k \log \frac{Fo}{Ro}$ entonces $v_n = k \log (\frac{Fo}{Ro})^n = n.k.\log \frac{Fo}{Ro}. = n.v_o$

Bradwardine no intentó buscar una confirmación experimental de esta ley, debido a lo cual no logró una aceptación general.

Bradwardine escribió además otras obras matemáticas, y todas ellas reflejan fielmente el espíritu de la época. Tanto su Aritmética como su Geometría muestran la influencia de Boecio, Aristóteles, Euclides y Campano. Bradwardine que fue conocido en su época por el calificativo de “Doctor profundus“, se vio atraido también por temas tales como el ángulo de contingencia y los polígonos estrellados, aunque ambos se encuentran ya en Campano y en obras anteriores. Los polígonos estrellados, que incluyen a los polígonos regulares como casos particulares, se remontan a los tiempos antiguos.Un polígono estrellado se forma al conectar por medio de rectas cada m-ésimo punto, a partir de uno dado, de los n puntos que dividen a una circunferencia en n partes iguales, siendo n mayor que dos y m primo con n. La tendencia filosófica de toda la obra de Bradwardine puede verse más claramente en su “Geométrica speculativa” y en el “Tractatus de continuo”, en los que afirma que las magnitudes continuas, aunque incluyen una cantidad infinita de indivisibles, no están formadas por tales átomos matemáticos, sino que están compuestas por una cantidad infinita de continuos del mismo tipo. Se ha dicho a veces que los puntos de vista de Bradwardine recuerdan los de los intuicionistas modernos; en cualquier caso, las especulaciones medievales sobre el continuo, que fueron tan populares entre los pensadores escolásticos como Santo Tomás de Aquino, influyeron más tarde de una manera decisiva en la concepción cantoriana del infinito a finales del siglo XIX.

2. Nicole Oresme

Nicole Oresme (c. 1.323-1.382), miembro de la Universidad de París, en la que Alberto Magno (c. 1.200-1.280) y Tomás de Aquino (c. 1.225-1.274) introdujeron la Física de cualidades de Aristóteles, manteniéndola al margen de las matematizaciones arquimedianas. Continuó las nuevas visiones iniciadas por la escuela parisina de Jean Buridan (c. 1.300-1.385) en la elaboración y desarrollo del concepto de ímpetus. En ese marco, su sistematización en la representación matemática de las intensidades de las cualidades sería integrada por Galileo para el estudio del movimiento uniformemente acelerado en sus Discorsi, y lo configura como un precursor tanto de la Geometría Analítica como del Cálculo Infinitesimal.

Nicole Oresme es posterior a Bradwardine en unos treinta años, y en su obra podemos ver la continuación de las ideas de éste. En el De Proportionibus proportionum, que fue escrito hacia el 1.360, generaliza Oresme la teoría de proporciones de Bradwardine para incluir cualquier potencia racional y dar al mismo tiempo reglas para combinar proporciones, que vienen a ser equivalentes a nuestras leyes para operar con exponentes, las cuales expresamos en nuestra notación por la fórmula $x^m . x^n = x^{m+n}$ y $(x^m)^n = x^{m.n}$. Para cada una de las reglas se dan ejemplos concretos y en la última parte de otra de sus obras, el “Algorismus proportionum”, se aplican dichas reglas a problemas geométricos y físicos. Oresme sugirió también el uso de un tipo de notación especial para las potencias de exponentes fraccionarios, y así en el “Algorismus proportionum” aparecen expresiones como la siguiente:

P	1
1	2

para representar la proporción uno y medio, es decir el cubo de la raíz cuadrada, y fórmulas tales como

$$\frac{1.p.1}{4.2.2}$$

para $\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}$. Nosotros vemos ahora como lo más natural del mundo nuestra notación simbólica para las potencias y raíces, sin pararnos a pensar en la sorprendente lentitud con que se desarrolló esta notación a lo largo de la historia de la matemática. Más imaginativa aún que la notación de Oresme era su sugerencia de que son posibles incluso proporciones irracionales. Aquí vemos a Oresme anticipando en cierto sentido lo que nosotros escribiríamos como $x^{\sqrt{2}}$, por ejemplo , en lo que es quizá la primera sugerencia de una función trascendente de orden superior en toda la historia de la matemática,

3. La Latitud de las Formas

En esta obra de Oresme se hacen dibujos de las magnitudes que varían y hay un germen de análisis infinitesimal. Es un claro antecedente del uso de coordenadas y de la consideración de funciones como trayectorias.

El concepto de las potencias irracionales puede haber sido la idea más brillante de Oresme, pero no fue en esa dirección en la que tuvo una mayor influencia su obra. Desde casi un siglo antes de su época llevaban discutiendo ya los filósofos escolásticos la cuantificación de las formas variables, un concepto de Aristóteles más ó menos equivalente al de cualidades . Entre estas formas se encontraban cosas tales como la velocidad de un cuerpo móvil y la variación de la temperatura de un punto a otro en un cuerpo con temperatura no uniforme. Las discusiones fueron interminablemente prolijas, debido a que los instrumentos de análisis disponibles no eran los adecuados según nuestra concepción actual. A Oresme se le ocurrió una idea brillante: ¿ por qué no hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían ¿. Aquí vemos, desde luego, una sugerencia primitiva de lo que ahora llamamos la representación gráfica de funciones.

Oresme se dio cuenta del principio esencial de que una función de una variable se puede representar por una curva, pero no fue capaz de hacer un uso efectivo de esta observación salvo en el caso de la función lineal. Por otra parte, Oresme estaba interesado principalmente en el área comprendida bajo la curva, y por lo tanto no era probable que se diera cuenta de la otra mitad del principio fundamental de la geometría analítica: la de que toda curva plana puede ser representada, con respecto a un sistema de coordenadas concreto, como una función de una variable.

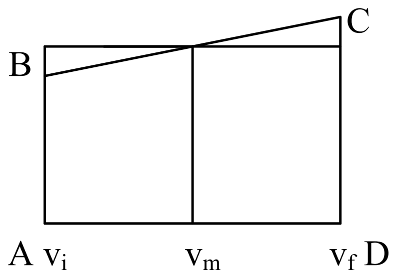
Es decir, que Oresme estaba especialmente interesado en los aspectos de la situación que tienen más que ver, diríamos, con el cálculo infinitesimal: 1) la manera en que varía la función (es decir, la ecuación diferencial de la curva), 2) la manera en que varía el área bajo la curva (es decir, la integral de la función).

Esta representación gráfica de funciones, que se conocía entonces como la latitud de las formas, se convirtió en un tema muy popular desde la época de Oresme a la de Galileo. El "Tractatus de latitudinibus formarum" escrito, si no por Oresme mismo, quizá por alguno de sus alumnos , apareció en numerosas copias manuscritas y se imprimió al menos cuatro veces entre 1.482 y 1.515, pero esto sólo era un resumen de una obra más larga de Oresme titulada "Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum". En esta obra Oresme va tan lejos como para sugerir una extensión a tres dimensiones de su latitud de las formas, en la que se representaba una función de dos variables independientes como un volumen formado por todas las ordenadas levantadas de acuerdo con una regla dada sobre los puntos de una región del plano de referencia.

De esta manera nos encontramos con un atisbo de lo que sería una geometría en cuatro dimensiones cuando Oresme habla de representar la intensidad de una forma que depende de cada punto de un cuerpo sólido o volumen de referencia. Lo que necesitaba aquí Oresme era, naturalmente una geometría de tipo algebraico en vez de una representación gráfica tal como la que tenía en la mente, pero las imperfecciones y dificultades técnicas de diversos tipos obstaculizaron el desarrollo europeo de esta teoría a lo largo de todo el periodo medieval.

Explicaremos brevemente como demostró Oresme mediante un diagrama la llamada ley de Merton.

Si BC es la gráfica de un movimiento uniformemente acelerado, el trapecio ABCD representa el espacio recorrido en el t=AD, durante el cual la velocidad pasa de ser v_i a ser v_f.



Como dicho trapecio es equivalente a un rectángulo de la misma base y altura igual a las medias de las alturas (y por lo tanto a la velocidad media), tenemos que:

$$S = v_m t = ((v_i + v_f) / 2)\, t = ((2v_i + at) / 2)\, t = v_i t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

También asegura Oresme que dadas dos proporciones, lo más probable es que fueran inconmensurables. Con esto pretendía rechazar las pretensiones de los astrólogos de hacer predicciones a partir de datos exactos: es más fácil que dos proporciones de espacio, velocidad y tiempo sean inconmensurables que lo contrario.

4. Las Series Numéricas

Los matemáticos del Occidente europeo mostraron durante el siglo XIV imaginación y notable claridad de ideas pero lo que les faltaba era habilidad tanto algebraica como geométrica, y así sus contribuciones no consistieron en una extensión de la obra de los clásicos, sino en la exploración de nuevos puntos de vista. Entre estos nuevos puntos de vista tenemos que destacar por su importancia el tratamiento de las series infinitas, un tema esencialmente original y nuevo, anticipado solamente, en cierto sentido, por algunos algoritmos iterados de la antigüedad y por la suma de una progresión geométrica indefinida por Arquímedes. Mientras que los griegos habían mostrado casi siempre un horror al infinito , los filósofos escolásticos de la baja Edad Media recurrían frecuentemente al infinito, tanto en su sentido potencial como actual (es decir, como algo completo). En el siglo XIV vivió en Inglaterra un lógico llamado Richard Suiseth, más conocido por Calculator, que resolvió el siguiente problema planteado en la teoría de la latitud de las formas:

Si, a lo largo de la primera mitad de un intervalo de tiempo dado, una forma se mantiene con una cierta intensidad; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo al doble de dicha intensidad, y así ad infinitum, entonces la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la forma durante el segundo subintervalo (es decir, el doble de la intensidad inicial).

Esta afirmación formulada retóricamente es equivalente a decir que la suma de la serie numérica infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$$

es igual a 2. Calculator dio una larga y confusa demostración verbal, puesto que no conocía la representación gráfica, pero Oresme utilizó su método gráfico para demostrar este teorema de una manera mucho más fácil y elegante. Oresme consiguió resolver también por el mismo método otros casos más complicados tales como la suma de la serie

$$\frac{1.3}{4}+\frac{2.3}{16}+\frac{3.3}{64}+\ldots+\frac{n.3}{4^n}+\ldots$$

cuyo resultado es $4/3$. Problemas análogos a éstos continuaron ocupando a los filósofos durante el siguiente siglo y medio al menos.

Entre otras contribuciones de Oresme al estudio de las series numéricas infinitas está su bella demostración, y la primera de este tipo evidentemente en toda la historia de la matemática, de que la serie armónica es divergente. Oresme agrupó los sucesivos términos de la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

colocando el primer término en el primer grupo, los dos términos siguientes en el segundo grupo, los cuatro términos que le siguen en el tercer grupo, y así sucesivamente, de manera que el grupo m-ésimo incluye 2^{m-1} términos de la serie. Entonces es obvio que tenemos infinitos grupos de términos y que la suma de los términos dentro de cada grupo es mayor o igual que ½ , y, por lo tanto, sumando una cantidad suficiente de términos, en su orden, podemos superar cualquier número dado.

5. El ocaso del Saber Medieval

A partir de la obra de Bradwardine y Oresme se produjo un declinar de la matemática. El año 1.349 murió Thomas Bradwardine a causa de la peste negra, la más terrible plaga que jamás sacudió a Europa. Se calcula que el número de los que murieron debido a la peste en el corto intervalo de un año o dos osciló, según los lugares, entre un tercio y la mitad de la población europea. Esta catástrofe tuvo que producir inevitablemente, entre otras consecuencias, graves dislocaciones sociales y una desmoralización general. Si tenemos en cuenta además que tanto Francia como Inglaterra, las naciones líderes en Matemáticas durante el siglo XIV, se vieron más tarde devastadas por las guerras de los cien años y de las dos rosas durante el siglo XV, entonces la decadencia del saber nos resulta comprensible. Las universidades italianas, alemanas y polacas serán las que tomarán durante el siglo XV el relevo, en lo que a la matemática se refiere, del ocaso del escolasticismo en Oxford y París.

Bibliografía

[1] Boyer, C. (1.986). "Historia de las Matemáticas". Alianza Editorial. Madrid.

[2] Katz.- (1.998). "A history of mathematics". Addison-Wesley..

[3] Libros antiguos de Física en la Biblioteca histórica de la Universidad Complutense. Catálogo de la exposición. Febrero 2.003.

[4] Paradís, J. Y Malet, A. (1.989). "Los orígenes del álgebra : de los árabes al Renacimiento". Promociones y Publicaciones Universitarias. S.A. Barcelona.

[5] Sarton, G. (1.934) "Oriente y Occidente en la historia de la ciencia" en Al-Andalus, vol. II, pág. 261-297.

Una visión de los recursos tecnológicos para la clase de Matemáticas

Eugenio Roanes Lozano[a], Justo Cabezas Corchero[b], Eugenio Roanes Macías[a]

[a]Secc. Deptal. de Algebra, Fac. de Educación, Univ. Complutense de Madrid
{eroanes,roanes}@mat.ucm.es

[b]I.E.S. Sierra de San Pedro, La Roca de la Sierra (Badajoz)
justocabezas@terra.es

Abstract

The authors represent three different generations of teachers involved in the use of technology in the Mathematics class. They were among the pioneers that introduced in Spain: calculators in teacher training in the seventies, the Logo language in secondary education in the eighties and Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems at secondary and university levels in the nineties. An overview of technological resources for the Mathematics class, with an emphasis on the possibilities of calculators and computers, that reflects the personal experience and opinions of the authors, is presented. Notes about usual and other possible uses of the technological resources and about the situation in different countries, although not exhaustive, are included throughout the article.

Dedicado con todo nuestro cariño y agradecimiento a María Paz Bujanda, amiga y compañera de Eugenio (padre) en el Instituto "Jorge Juan" del CSIC y en la Sección de Metodología de la Facultad de Matemáticas de la UCM e inolvidable profesora y, después, compañera y amiga de Justo y Eugenio (hijo).

Introducción

Los matemáticos siempre han usado medios auxiliares para sus trabajos e investigaciones. Desde la antigua regla egipcia para formar un ángulo recto mediante una cuerda con nudos equidistantes tomando lados de longitud 3-4-5 a las aplicaciones informáticas de hoy han pasado muchos siglos, pero la necesidad o conveniencia de su uso sigue presente.

Algunos de estos recursos auxiliares tienen también una utilidad didáctica. La realidad de la escuela es virtual: los objetos, ideas, procesos,... que se estudian, con frecuencia no están presentes y se describen con palabras y dibujos y su estudio se lleva a cabo mediante recursos didácticos con los que el estudiante interactúa para alcanzar sus objetivos (Escudero, 1983).

Existen muchas referencias sobre recursos y materiales con aplicación en la clase de Matemáticas (Puig Adam, 1958) (Biguenet, 1959) (Puig Adam, 1960) (Roanes Macías, 1969) que, a veces, pueden referirse a una parte de la Matemática como la Geometría (Alsina, Burgués, & Fortuny, 1988).

Hay también vastos estudios generales sobre la clasificación de medios como (Cabero, 1990). Mencionemos, por ejemplo, las bien conocidas taxonomías de Dale, Cloutier, Schramm y Ducan. La taxonomía de la UNESCO (Anónimo, 1984) fija seis clases: manuales y libros, medios para la enseñanza científica –matraces, tubos de ensayo,...–, recursos para la educación física, medios para la formación profesional, multimedia y medios informáticos.

Trataremos de organizarlos atendiendo tanto a la tecnología usada como al modo en que se aplican en la clase de Matemáticas. Como se menciona en (Hillel, 1991), la forma en que se usa un recurso puede depender de la asignatura y del estilo de enseñar.

El primer paso consistirá en clasificar los recursos tecnológicos en “recursos electrónicos” y “no-electrónicos”. En el presente artículo trataremos especialmente sobre los recursos electrónicos.

Notemos que este primer paso es una “clasificación” en el sentido matemático del término (las clases recubren y son disjuntas), pero los pasos siguientes no lo son (habrá conexiones e incluso solapamientos entre clases). Cada ítem se ha colocado en la clase en que, entendemos, encaja mejor.

Subrayaremos, por último, que este artículo tiene su origen en unas conferencias impartidas por el primer autor, durante los últimos cursos, en el marco del CAP de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense, organizadas por la profesora María Paz Bujanda Jáuregui.

1 Recursos no-electrónicos

Podríamos destacar los siguientes (todos bien conocidos excepto el *Bobcat* quizás):

- regletas: introducidas en 1952 por George Cuisenare (1891-1976). Como ocurrre con la mayor parte de los recursos, se adaptan muy bien a unas tareas (adición) pero son sólo “usables” en otras (multiplicación). Se pueden encontrar aplicaciones, por ejemplo, en (Puig Adam, 1960) y en diversas páginas Web
- los contadores o tableros de bolas, que se usaban en Francia desde 1812 o las máquinas de contar (Compayré, edición sin fecha)
- ábacos: usados hasta no hace mucho para realizar cálculos (por ejemplo en bancos de Europa del Este), fue también usado como herramienta pedagógica. En cualquier caso nosotros consideramos que son herramientas para realizar una tarea concreta mientras no esté disponible otra mejor (calculadora, ordenador) mas que medios didácticos (lo mismo que ocurre con las tablas de logaritmos o la regla de cálculo)
- el *Bobcat*: una curiosa calculadora digital mecánica, comercializada a principio de la década de los 70. Se dejaban caer bolas de acero por una superficie de plástico inclinada con varios “cambios de vía”. La posición de las “agujas” de los cambios de vía era programada de acuerdo con la operación a realizar. Había diversas ranuras de salida, cada una de las cuales estaba asociada a un número (resultado). Aunque fue un interesante intento de ilustrar el funcionamiento de los cálculos numéricos en los entonces emergentes sistemas digitales, tuvo muy poco impacto
- dominós matemáticos: frecuentemente usados para transformar el proceso de aprendizaje en un juego, proporcionando por tanto un aumento en la motivación del alumno. Un ejemplo interesante se puede ver en (Bujanda & de la Fuente, 1989)
- máquina de Galton: permite reproducir experimentos estadísticos. Está comercializada por empresas dedicadas al material didáctico y también puede simularse por ordenador con facilidad
- otros materiales para el cálculo de probabilidades: dados, dardos, monedas, mosaicos, puzzles, cartas,... (Fraenkel, 1998) (Puig Adam, 1960)
- espejos, caleidoscopios: para simular reflexiones (y su composición), figuras geométricas planas y en el espacio

- el *geoplano*: una tabla cuadrada con clavos en los vértices de una red, en los que se enganchan gomas elásticas con diferentes propósitos. Fue creado por Caleb Gattegno (1911-1988). Una colección de aplicaciones se puede encontrar en (Puig Adam, 1960)
- pizarras esféricas
- bloques lógicos: para los que se desarrollaron diversas aplicaciones por distintos autores durante los años 60 y 70 (Diennes & Golding, 1966)
- bloques multibase: usados para introducir el cómputo numérico en varias bases de sistemas de numeración
- regla y compás
- ...

2 Recursos electrónicos

Distinguiremos: medios audiovisuales, juguetes, calculadoras y ordenadores.

2.1 Medios audiovisuales

Han sido estudiados en profundidad desde hace tiempo. Por ejemplo la Ley General de Educación de 1970 indicaba que “se utilizarán ampliamente las técnicas audiovisuales” (Artículo 18).

Los precedentes son la radio y los primitivos reproductores de sonido de comienzos del siglo XX. Tenían dos usos posibles: como ayuda en el proceso de comunicación y como ayuda en la enseñanza programada (de Pablos, 1995).

Es obvio que los aparatos de cine o vídeo, los reproductores de vídeo discos y de DVD son una interesante ayuda en cualquier aula. Pero una desventaja común a todos ellos es que no son realmente interactivos: son simplemente “transmisores de conocimiento”. Consideramos un medio como interactivo, en el sentido de (Salinas Ibáñez, 1992-1993), cuando tiene capacidad de implicar al estudiante activamente en el programa de instrucción. La interactividad es la relación subjetiva que se establece entre una persona y el producto que le es presentado a través de un proceso de diálogo. El cine y los aparatos de vídeo son los menos flexibles, pues tienen un acceso secuencial, lo que hace muy incómodo seleccionar sólo algunas partes de la cinta o presentar escenas en distinto orden. Esta desventaja no la presentan los reproductores de vídeo discos y de DVD, donde el acceso aleatorio es posible.

Además en todos estos sistemas la velocidad de la presentación no se puede ajustar al nivel específico de los alumnos y no se puede llamar a ayudas o explicaciones (el profesor puede por supuesto parar la reproducción y hacer comentarios adicionales).

Por ello todos parecen más interesantes para otras materias como Química (donde hay experimentos casi imposibles de reproducir en el laboratorio, por ser peligrosos, costosos, lentos,...); Biología (donde, por ejemplo, los alumnos no pueden ser llevados fácilmente a África para presenciar las costumbres de los grandes felinos),... Pero en materias con una necesidad de flexibilidad mayor (como enseñanza de idiomas extranjeros o Matemáticas) es ventajoso utilizar los multimedia de los ordenadores. Volveremos sobre esto más tarde.

2.2 Juguetes

Podríamos distinguir tres clases de juguetes especialmente interesantes desde el punto de vista matemático: vehículos programables, interfaces de ordenador para control de juguetes y trenes miniatura.

2.2.1 Vehículos programables

Los juguetes han evolucionado a la par que la tecnología. Curiosamente, y seguramente por la inexistencia de los gastos de certificación y validación de la tecnología del mundo real, algunos juguetes incluyen tecnologías de última generación.

En la década de los 70, cuando los programas para ordenador se solían escribir en tarjetas perforadas, estaba a la venta un cierto "coche programable" (en España lo fabricaba la empresa *Nacoral*). De escala aproximada 1:24, tenía un único motor eléctrico que propulsaba el eje trasero y tiraba de la tarjeta. Los dos lados de la tarjeta podían ser cortados a tres niveles (que significaban, respectivamente, adelante/parada/marcha atrás e izquierda/recto/derecha) y eran "leídos" por palpadores mecánicos.

Los años 80 fueron los años de expansión del magnífico lenguaje *Logo*[1] y sus *gráficos de tortuga* (Abelson & diSessa, 1981). Sorprendentemente, este lenguaje declinó durante los años 90 (posiblemente un cambio de actitud debido a las excesivas esperanzas puestas en él). De cualquier modo es un excelente lenguaje, desde nuestro punto de vista, tanto para enseñar a programar como para tratar ciertas

[1] `http://el.www.media.mit.edu/groups/logo-foundation/products/robotics.html`

cuestiones geométricas. Pero no es tan bueno o incluso es inadecuado para ciertas tareas en las que algunos intentaban aplicarlo.

Cuando los precios de los microprocesadores bajaron, algunos juguetes incluyeron órdenes similares a las de la *tortuga*. Un buen ejemplo es el *Big Trak*, comercializado en España a final de los 80. Con el aspecto de un vehículo terrestre de ciencia-ficción, incorporaba un teclado en su parte superior que permitía al usuario programar recorridos al estilo de la *tortuga*. No tuvo demasiado éxito, y fue adquirido casi exclusivamente por algunos centros educativos. Un producto similar, una tortuga mecánica denominada *Roamer*, está disponible en la actualidad[2].

2.2.2 *Interfaces* de ordenador para control de juguetes

Un área de gran interés es la aplicación de *interfaces* al control de juguetes. Algunas empresas que fabrican "construcciones" como *Lego* o *Fischer Technik*[3] venden sofisticados *interfaces* para el control de juguetes desde un ordenador (*Lego Technik Center, Fischer Technik Computing*). Otras compañías que ofrecen sólo *interfaces*, pero no bloques de construcciones son la alemana *Cosmos* y la española *Enconor*[4].

Para hacernos una idea de lo calidad de estos "juguetes", una "caja" estándar de *Fischer Technik* proporciona el material necesario para construir, por ejemplo, un *plotter* DIN A-4 o un robot que resuelve el problema de las torres de Hanoi (moviendo monedas ferromagnéticas). Es interesante subrayar que un niño puede tener así las herramientas para construir, por ejemplo, un ascensor mucho más sofisticado que el del bloque de viviendas donde vive.

Estas *interfaces* tienen un amplio campo de aplicación en la enseñanza de Informática y de Matemáticas. Ofrecen una interesante alternativa a los problemas estándar de programación y son una fuente de problemas geométricos (como los que se presentan en grúas, funiculares,...), normalmente mucho más atractivos para el alumno que los problemas abstractos usuales.

[2] `http://el.www.media.mit.edu/groups/logo-foundation/`

[3] `http://www.fischerwerke.de`

[4] `http://www.enconor.com/`

2.2.3 Trenes miniatura

Los trenes miniatura son casi tan antiguos como los trenes reales. Por ejemplo la compañía alemana *Märklin*[5] ha fabricado trenes miniatura durante más de siglo y medio. Y su tecnología ha evolucionado a la vez que la del mundo real. Ahora existen sorprendentes posibilidades, como vídeo-cámaras en miniatura que permiten simular la visión que tiene el "maquinista a escala" desde la cabina de la locomotora. Además, las compañías líderes como *Märklin*, *Fleischmann*,... ofrecen la posibilidad de controlar el tráfico ferroviario (miniatura) desde un ordenador. Como curiosidad, esto estaba disponible antes de que *Renfe* instalara sus primeros enclavamientos por ordenador (estación de Francia en Barcelona y línea del AVE).

Alemania tiene una larga tradición en trenes miniatura. En algunos centros de secundaria se usan para estudiar problemas matemáticos y computacionales. En los EEUU hay una impresionante instalación miniatura artesanal, controlada por ordenador y dirigida a la docencia, en la universidad SUNY en Plattsburgh (NY).

2.3 Calculadoras

Entre las calculadoras distinguiremos: clásicas (elementales, programables y científicas), gráficas y simbólicas.

Las calculadoras no son tan populares en Europa como en EEUU. Pensamos que la razón principal es que los estados europeos apoyan económicamente los estudios desde el *kindergarten* hasta la universidad, considerando la sociedad que el estado tiene que proporcionar a los centros el equipamiento necesario, lo que incluye laboratorios de ciencias y aulas informáticas. Así, las calculadoras no son tan necesarias.

De cualquier modo, los profesores europeos están reconsiderando el uso de las calculadoras debido a la saturación de las aulas informáticas, aunque hay experiencias como la llevada a cabo en todos los centros de secundaria de Extremadura, donde la totalidad de las aulas son realmente aulas informáticas.

Una interesante posibilidad de las modernas calculadoras es la capacidad de interactuar con sistemas de adquisición de datos (como el CBL de *Texas Instruments*), que pueden usarse en los laboratorios de Física, de Química,... Este es un gran avance en la presentación de los aspectos matemáticos de las ciencias a los alumnos (Keunecke, 2000). Un informe sobre la experiencia austríaca en el tema puede encontrarse en (Aspetsberger & Aspetsberger 2001).

---

[5] `http://www.maerklin.de`

2.3.1 Calculadoras clásicas

Incluimos en esta categoría las calculadoras que sólo pueden manejar y presentar datos en formato numérico, generalmente en una pantalla de una línea. Actualmente es una herramienta indispensable en la clase de ciencias, aunque se usa más como una ayuda que como una herramienta integrada en los *curricula*.

Creemos importante subrayar como esta es posiblemente la primera vez que una herramienta realmente cambia la actitud de los profesores de Matemáticas: en algunos casos especiales está permitido usar la calculadora como una "caja negra" (black-box), que nunca se transformará en una "caja blanca" (black-box) (Buchberger, 1989a) (Drijvers, 1995). Un ejemplo es el uso de la calculadora para aproximar el lado de un cubo de volumen $10m^3$. De los pasos habituales que permiten alcanzar la solución de un problema real:

Problema del mundo real → matematización del problema → algoritmo que resuelve el problema → cálculo de la(s) solución(es) → interpretación de la(s) solución(es)

el cálculo de las soluciones se considera en este caso particular como trivializable (una situación extremadamente infrecuente en Matemáticas, aunque no en Ingeniería, pero que probablemente se hará más y más común por el rápido aumento de la potencia de los ordenadores). Por ejemplo pocos estudiantes conocen actualmente el algoritmo de la raíz cuadrada y posiblemente ninguno conoce el de la raíz cúbica, a diferencia de lo que ocurría en el pasado (Aguilar, 1994). Un estudio de como las tecnologías pueden producir, y de hecho han producido, cambios curriculares puede encontrarse en (Cabezas & Roanes Lozano, 2002).

2.3.2 Calculadoras gráficas

Estas calculadoras añaden capacidades gráficas a las posibilidades de una calculadora clásica. Es pues posible representar gráficas 2D y 3D, campos de fuerzas, etc.

Posiblemente sea en los EEUU donde han sido adoptadas más ampliamente a nivel de secundaria. En España la región de Valencia ha realizado recientemente una compra masiva de TI-83 para los centros de secundaria dependientes del gobierno regional, pero no hay otras experiencias generalizadas que conozcamos (Burrel, Cabezas, Roanes Lozano & Roanes Macías, 1997).

2.3.3 Calculadoras simbólicas

Texas Instruments introdujo una revolución a principios de los 90 con la calculadora TI-92 (Anónimo, 1995) (Kutzler, 1996a). Esta calculadora incluía las posibilidades de una calculadora gráfica, además de un Sistema de Cómputo Algebraico (una versión adaptada de *Derive*) y un Sistema de Geometría Dinámica (una versión adaptada de *Cabri Geometry II* y, más recientemente, tambíen de *The Geometer's Sketchpad*). ¡Por fin un Sistema de Cómputo Algebraico (CAS) había sido llevado a una calculadora comercial!. La TI-92 es mayor que una calculadora estándar e incluye un teclado "qwerty". Fue seguida de la TI-89, de tamaño y formato estándar pero sin un Sistema de Geometría Dinámica (DGS). *Hewlett-Packard* lanzó su similar HP-49G en 1999 y *Casio* posee también un modelo similar en su catálogo. La reciente Voyage-200 de *Texas Instruments* ha aumentado las posibilidades ofreciendo conexión a la Web y la posibilidad de producir documentos electrónicos (*StudyCards*).

Para aquellos que no estén habituados a la terminología usada en el párrafo anterior, digamos que un CAS presenta dos diferencias fundamentales respecto de una calculadora programable tradicional o un lenguaje estándar de ordenador:

i) usa "aritmética exacta" en lugar de "aritmética de coma flotante" (Pavelle, Rothstein & Fitch, 1982) (Roanes Lozano & Roanes Macías, 1992):

- los números muy grandes no se escriben redondeados en "notación científica", se almacenan y manejan con todas sus cifras exactas
- las fracciones y los irracionales no se escriben como un entero seguido de un punto o coma y una parte decimal, sino que se mantienen como expresiones en las que aparecen fracciones, radicales y símbolos (por ejemplo: e, π,...), y donde se llevan a cabo las simplificaciones pertinentes
- se dispone de aritmética compleja

ii) puede manejar variables "sin asignación". Quiere decir que, aunque cualquier lenguaje de ordenador puede calcular, por ejemplo, $(a + b)^2$ para cualesquiera valores de a y b, un CAS puede, además, simplificar una expresión como, por ejemplo, $(a + b)^2 - (a - b)^2$ reduciéndola a $4ab$, sin tener que asignar ningún valor a a o b, lo que es una tarea que supone un salto cualitativo con respecto a la realización de cómputos numéricos.

La obtención de derivadas simbólicas, cálculos matriciales y vectoriales, la resolución de ecuaciones y sistemas lineales, realización de cálculos estadísticos, etcétera, son desarrollos naturales de ii). Además, proporcionan otras posibilidades más complejas como integración simbólica y resolución de sistemas no-lineales.

Un DGS es un paquete de dibujo similar a un paquete de diseño asistido por ordenador (CAD), que permite cambiar (arrastrando con el ratón) un objeto, cambiándose subsecuentemente todos los objetos que dependen de él, y por ende la construcción completa. Por tanto permite explorar rápida y cómodamente conjeturas geométricas, lo que constituye una auténtica revolución en la enseñanza de la Geometría.

2.3.4 ¿Calculadoras u ordenadores?

Puede no ser tan fácil distinguir una calculadora de un *palmtop*. Si consideramos las capacidades gráficas, el procesador y la cantidad de memoria disponible, son similares. Algo parecido ha ocurrido con los ordenadores personales y los mini-ordenadores: un moderno ordenador personal de gama alta es más rápido y potente que un mini-ordenador con algunos años de edad.

Quizás el mejor modo de distinguirlos sea considerar la calculadora como un producto más o menos terminado (el software viene incluido y es más o menos fijo) mientras que el *palmtop* tiene que ser “rellenado” con un sistema operativo y software.

A principio de los años 90 *Hewlett-Packard* introdujo un *palmtop* que diseñado para MS-DOS, podía cargar *software* en formato de tarjeta de crédito, para el que se preparó una versión de *Derive*. Se culpa habitualmente a su precio relativamente alto y a su pequeño teclado de su falta de éxito.

Pensamos que la mayoría de los *palmtops* son diseñados ahora para ser usados como agendas, escribir pequeños documentos y, como mucho, usar una hoja de cálculo. Sin embargo hubo excepciones, como el atractivo *Casio Casiopea*, que podía correr eficientemente, por ejemplo, el CAS *Maple* sobre su sistema operativo *Windows CE*.

2.4 Ordenadores

Una desventaja obvia de la incorporación de calculadoras y ordenadores a la vida diaria es la falta de entrenamiento en cálculo mental. Pero nadie pensaría en prohibir el uso de los coches para que los conductores hagan ejercicio. Lo que tiene que conseguirse es un sentimiento positivo hacia el deporte y el ejercicio físico, de modo que el coche no se use para ir a un lugar próximo. De modo similar, una calculadora o un ordenador no deben ser usados para resolver un problema sencillo. Se pueden (y deben) usar cuando el problema es laborioso o cuando el algoritmo que resuelve un paso de importancia secundaria no es conocido, como se comentó más arriba (Kutzler, 1999). Esta posición es también la expresada por ejemplo en (Stewart Townend & Watkins, 1994) y es analizada en (Herget, Heugl, Kutzler & Lehmann, 2000).

Unos excelentes artículos, pioneros en tratar los riesgos del uso del ordenador en la enseñanza de la Matemática, son (Atiyah, 1986) y (de Guzmán, 1991).

Un reciente informe (Davis & Barnard, 2000) encontró que, sorprendentemente, el ordenador es usado por los alumnos sobre todo para tareas de tipo rutinario, y prácticamente no es usado para explorar. Así que los ordenadores no siempre se usan en educación con todas sus posibilidades.

Para profundizar en la clasificación, consideraremos ahora el modo en que se usa el ordenador. Distinguiremos: Enseñanza Asistida por Ordenador (EAO), aprendizaje a través de la programación, uso de paquetes y lenguajes matemáticos.

2.4.1 Enseñanza asistida por ordenador

Muchos pensaron en los 80 que los ordenadores iban a cambiar rápidamente muchos campos, entre ellos la enseñanza y todos los relacionados con la Inteligencia Artificial. Aunque los Sistemas Expertos y las aplicaciones inteligentes se han hecho más y más frecuentes, hemos sido testigos de como no es tan fácil proporcionar al ordenador inteligencia "real".

Probablemente el error de los estadios iniciales de la EAO fue tratar de sustituir al profesor con un programa, pero es prácticamente imposible prever todas las posibles preguntas o errores que pueden aparecer durante el proceso de aprendizaje. Es pues esta una aproximación realmente laboriosa de implementar y no muy satisfactoria en asignaturas como Matemáticas, aunque existen defensores de su uso (Hervás, Lorente & Villanueva, 1995). Se usa frecuentemente en la enseñanza de idiomas extranjeros.

Además, estos programas solían ser meros "transmisores de conocimiento". Este método funciona bien por ejemplo en academias de conducir para preparar los "tests teóricos", pero no se adecuan bien a procesos más complejos como la enseñanza de la Matemática.

Un objetivo totalmente diferente sería tratar de hacer evolucionar al clásico libro de texto hacia el "libro electrónico", con marcadores e *hyperlinks*, generación automática de ejemplos y ejercicios (lo que hace al "libro" prácticamente algo nuevo cada vez que se "abre", y hace posible por ejemplo que el alumno menos dotado vea más ejemplos o resuelva más ejemplos o disponga de más ayudas), con corrección de ejercicios y ejemplos (incluso de los de carácter similar propuestos por el propio alumno).

Y lo mejor de todo es que todas estas posibilidades están disponibles por ejemplo en ciertas aplicaciones desarrolladas *ad-hoc* que pueden llamar al "núcleo" del CAS *Maple* (Llovet, Martínez, Jaen & Fabre, 1991) (McCabe & Watson, 1997) y en las "hojas de trabajo" de la mayor parte de los CAS.

2.4.2 Aprendizaje a través de la programación

En casi todas las actividades humanas existen modas, tendencias más o menos seguidas por la mayor parte de la población. Hace algunos años el sentimiento general era que programar era algo importante para todo el mundo (quizás porque poco más se podía hacer con las calculadoras y los pequeños ordenadores de principio de los 80). Después parecía que todo el mundo necesitaba saber como usar un procesador de texto, una base de datos y una hoja de cálculo. Ahora parece que todo el objetivo es que todo el mundo pueda navegar por Internet.

Probablemente programar es importante para un estudiante de ciencias. Ser capaz de manejar un procesador de textos es una necesidad general, pero, posiblemente, trabajar con bases de datos y hojas de cálculo no lo es. Y poder navegar por Internet o ser capaz de construir una sencilla página Web es ahora muy importante, pero ser un maestro del diseño de páginas Web no lo es (Roanes Lozano, 2001).

Una posición extrema de la moda mencionada en primer lugar es el "aprendizaje a través de la programación". Su nombre refleja la idea clave: los alumnos tienen que programar todo lo que se les enseña. Se puede usar para ello cualquier lenguaje (*C*, *Pascal*, *Basic*, *Logo*,...). Tiene la ventaja de la excelencia alcanzada por los alumnos en el dominio de los diferentes temas, y la desventaja de la enorme cantidad de tiempo necesaria para completar los diferentes objetivos. Por tanto, implementar un *curriculum* a desarrollar de esta forma implica acortar el número de temas tratados. Una experiencia muy interesante que usaba el lenguaje *Pascal* tuvo lugar en Francia, en la Facultad de Matemáticas (un lugar propicio para llevar a cabo una experiencia como esta) de la Universidad París-Sud XI, y fue llevada a cabo por François Cottet-Emard *et al*. (Cottet-Emard, 1989) (Goetgheluck, 1990).

2.4.3 Uso de paquetes y lenguajes matemáticos

La cantidad de software educativo ya era impresionante hace años (Anónimo, 1991), y está creciendo muy rápidamente, por lo que es impensable proporcionar aquí una lista exhaustiva. Pretendemos simplemente dar una visión general organizada de los recursos.

2.4.3.1 Lenguajes y paquetes de propósito específico

Muchos profesores y muchas empresas han desarrollado programas de propósito específico para ilustrar una cierta cuestión. Son muy buenos en algo muy concreto, pero no pueden generalmente realizar nada más. No están restringidos a la Matemática, y se pueden encontrar interesantes ejemplos para Astronomía, Física y Economía, entre otras materias.
Por ejemplo en el caso de la Geometría, podríamos mencionar:

- *Tesselmania!*[6] (Edwards & Lee, 1999): para el dibujo de mosaicos periódicos
- *ProGeo* (Schupp & Berg, 1990): para estudiar curvas, movimientos en el plano Euclídeo (esto es, transformaciones que conservan la forma), etc.
- *NTG* (Roanes Macías & Roanes Lozano, 1994): que incluye explicaciones paso a paso del problema del círculo de Apolonio, del problema de Steiner, inversiones,...
- ...

2.4.3.2 Lenguajes y paquetes de propósito general

Hay dos clases de *software* especialmente adecuados para enseñar Matemáticas: los CAS y los DGS (que fueron mencionados más arriba). Estos, junto con los paquetes estadísticos, resultan muy importantes para las clases de Matemáticas y de Física. Más aún, se considera ("principio del andamio" de Kutzler) que, por ejemplo los CAS no sólo amplían las posibilidades de los mejores alumnos, sino que ayudan a los menos dotados (Kutzler, 1996b).

2.4.3.2.a Paquetes Estadísticos

Esta es la rama de la computación matemática mejor conocida por los no-matemáticos, porque estos paquetes tienen un amplio espectro de usuarios. Simplemente consideremos el significado de los acrónimos de los populares *BMDP*: *Bio Medical Data Package* y *SPSS*: *Statistical Package for the Social Sciences*.

Muchas veces son usados como cajas negras (black-boxes) por usuarios tan alejados de la Matemática que ni siquiera tienen una ligera idea de la teoría es-

[6] `http://www.keypress.com`

tadística subyacente, pero que quieren comprobar una hipótesis de un modo estadístico.

En general estos paquetes simplemente devuelven resultados. No proporcionan un entorno creativo para realizar investigaciones (queremos decir en Estadística, no "usando la Estadística"), ni permiten programar extensiones (pues no proporcionan un lenguaje de programación). El entorno es completamente diferente del proporcionado por los CAS y los DGS. Una excepción muy interesante es *Fathom! A Dynamic Statistics Software*, de *Key Curriculum Press*, diseñado para enseñar Estadística[7]. También se pueden desarrollar entornos que permitan y favorezcan las investigaciones en Estadística de los alumnos usando CAS (Cabezas & Roanes Lozano, 2001).

2.4.3.2.b Sistemas de Cómputo Algebraico

Constituyen, posiblemente, el *software* más flexible para la educación matemática. Una visión de diferentes aplicaciones se puede encontrar en (Koepf, 2000).

Los CAS permiten presentar la información en diversos lenguajes simultáneamente. Por ejemplo una expresión algebraica en la "ventana de Álgebra", la correspondiente gráfica 3D y su sección 2D por el plano $z=3$, pueden ser visibles a la vez.

Los CAS más conocidos son *Derive* (comprado hace unos años a *Software House* por *Texas Instruments*), *Maple* y *Mathematica*[8]. Sin embargo existen muchos otros (*MuPad*[9], *Axiom*, *Reduce*, *Macsyma, Maxima*[10]*,...*) e incluso algunos de propósito específico. Por ejemplo *CoCoA*[11] está especializado en calcular bases de Gröbner cuando el cuerpo base es de característica finita. Si el objetivo es exclusivamente representar curvas y superficies en implícitas, existe un software específico denominado *DPGraph*[12]. Digamos que *Maxima y CoCoA* son gratuitos y que existen versiones gratuitas de *MuPad.*

Axiom era particularmente potente, permitiendo definir lo que llamaba "categorías", esto es, la estructura algebraica en la que se van a realizar los cálculos

[7] `http://www.keypress.com`

[8] `http://www.ti.com/calc/docs/derive5.htm`
`http://www.maplesoft.com`
`http://www.wolfram.com`

[9] `http://www.mupad.com`

[10] `http://maxima.sourceforge.net`

[11] `http://cocoa.dima.unige.it`

[12] `http://www.dpgraph.com`

(por ejemplo, un anillo de polinomios sobre un cuerpo base no-conmutativo). Dejó de comercializarse 2001, y ahora parece que se comercializará como *software* libre.

Los pioneros fueron, al final de los 60 (!), *Macsyma* y *Reduce*, pudiéndose correr en aquel entonces sólo en super-ordenadores. Curiosamente, fueron diseñados para satisfacer las necesidades de la Astronomía y la Física de Altas Energías.

Su popularidad actual está relacionada con la difusión de implementaciones para los más simples ordenadores personales (especialmente gracias a *Derive*) y los excelentes gráficos (especialmente de *Mathematica*) a finales de los años 80 y principios de los 90.

Los CAS más antiguos se implementaron en lenguaje *Lisp* (porque un buen modo de implementar la aritmética exacta es mediante el uso de listas), mientras que los más modernos están implementados en *C* (por cuestiones de velocidad y portabilidad).

Austria fue pionera del uso de los CAS en la enseñanza de la Matemática, allá por 1991, con la compra de una licencia de *Derive* para todos sus centros de secundaria. Otros países como Portugal (1994), Eslovenia (1997) y Emiratos Árabes (1997) siguieron su ejemplo. Francia decidió recientemente comprar *Maple.* Otros países como Holanda están llevando a cabo amplias experiencias. Otras veces la experimentación es local, como en el caso de Hamburgo, donde todos los institutos usan *Derive* desde 1995 y, muy recientemente, en la Comunidad de Madrid. Informes sobre la impresionante experiencia austríaca y sobre la situación en distintos países pueden encontrarse, respectivamente, en (–, 1996) y (–, 1997).

Muchas universidades de todo el mundo están adquiriendo "licencias de campus" de CAS, como la Universidad Complutense de Madrid, Universidad Politécnica de Madrid, Rensselaer Polytechnic Institute (Troy, NY),...

2.4.3.2.c Sistemas de Geometría Dinámica

Los DGS permiten también presentar la información en diferentes lenguajes matemáticos simultáneamente: como un dibujo geométrico "dinámico" y como un "algoritmo geométrico" (este último denominado *macro*, *script, construction text*,..., según de qué DGS se trate).

Como se dijo más arriba, estos programas son similares a los de CAD, pero están orientados a la "Geometría de regla y compás"[13]. Cuando se usan en la enseñanza de la matemática de cualquier nivel, los resultados son excelentes (Artigue, 1996):

[13] `http://forum.swarthmore.edu/dynamic.html`

- son altamente motivadores en comparación con los métodos tradicionales
- la calidad de las figuras generadas es muy alta
- es posible realizar cambios de los datos iniciales después de terminar el dibujo (muchas veces el dibujo es poco claro por una desafortunada selección de los puntos iniciales, y, aún más importante, estos cambios permiten "explorar en Geometría")
- es posible usar animaciones para generar lugares geométricos
- ...

Son DGS bien conocidos *Cabri Geometry II* (ahora también un producto de *Texas Instruments*), *The Geometer's Sketchpad* (de *Key Curriculum Press*) y *Cinderella* (comercializado por *Springer-Verlag*). Se pueden encontrar información y versiones demo de ellos en la Web[14]. Otro similar es *The Geometric Supposer* (del *Center for Educational Technology*, Israel)[15].

El primero y posiblemente el mejor conocido es *Cabri Geometry*, pero, desde nuestro punto de vista, el más amigable para el usuario es *The Geometer's Sketchpad*. Por ejemplo, el modo de tratar los algoritmos geométricos de la versión 3 (*scripts*) era realmente intuitivo.

El más moderno *Cinderella* tiene dos ventajas respecto de los anteriores:

- permite tratar Geometrías no-Euclídeas
- aunque representa puntos del plano real, los cálculos se realizan con complejos, con lo que se evitan los problemas en casos especiales, en los que desaparece parte o toda la figura por la aparición en algún paso de los cálculos de un complejo no real.

Hay DGS comerciales en otros idiomas, como *Euklid DynaGeo*[16] (alemán), *GeomW*[17] (francés), *GEUP*[18] (español),... También existen otros gratuitos, como *GeoGebra*[19], *Dr. Geo*[20] y *Wingeom*[21].

---

14 http://www.ti.com/calc/docs/cabri.htm
http://www.keypress.com/sketchpad/index.html
http://www.cinderella.de

15 http://www.cet.ac.il/math-international/first.htm

16 http://www.dynageo.de/

17 http://www2.cnam.fr/creem/

18 http://www.geup.net/index_esp.htm

19 http://www.geogebra.at

20 http://www.gnu.org/software/dr_geo

21 http://math.exeter.edu/rparris/

Una interesante posibilidad es unir las prestaciones de los DGS con las de los CAS. Por ejemplo sería muy interesante explorar una conjetura con el ratón, al estilo de lo que se hace con los DGS tradicionales, obtener automáticamente las correspondientes ecuaciones, y tratarlas al modo de lo que hacen los CAS, para, por ejemplo, aplicar un método de demostración automática como el de Wu o el de las bases de Gröbner (Roanes Macías & Roanes Lozano, 1994) (Buchberger, 1989b) (Chou, 1988).

Obsérvese que el usuario puede preguntar a *Cabri Geometry* por la validez de una conjetura geométrica sobre una construcción ya terminada, y *Cabri Geometry* responde si esta es cierta o falsa, pero lo que realmente hace es una búsqueda heurística de contraejemplos. Si no consigue encontrar un contraejemplo, considera que el resultado es cierto (lo que no es una "demostración" válida desde el punto de vista matemático).

The Algebraic Geometer[22] es un DGS que ha sido anunciado durante bastante tiempo como capaz de rellenar ese hueco ese los DGS y los CAS, ofreciendo "salida algebraica" para los objetos geométricos del dibujo. Desafortunadamente, parece no estar a la venta todavía.

En (Roanes Lozano, 2002) propusimos como solución para reunir las posibilidades de los DGS con las de los CAS que un "traductor" externo tomara la salida del DGS y la hiciera entendible para el CAS (reutilizándose el *software*). En nuestro sistema *ParamGeo* (Roanes Lozano, Roanes Macías & Villar Mena, 2003) se conectan de este modo *The Geometer's Sketchpad v.3* y *v.4* con *Derive* y *Maple*.

Otros autores han optado por escribir nuevos DGS, que se comunican con CAS ya existentes. Por ejemplo, *Lugares* y *GDI* (Botana & Valcarce, 2001) son unos DGS desarrollados en la Universidad de Vigo[23] que son capaces de llamar a *CoCoA* o a *Mathematica* y producir auténticas demostraciones de teoremas, así como determinar lugares geométricos. Además es capaz de completar hipótesis para que se verifiquen teoremas geométricos, siguiendo las ideas de Tomás Recio y otros (Recio, 1998) (Recio & Vélez, 1999).

Existe una tercera vía en que el DGS, de nuevo diseño, incluye posibilidades algebraicas (como el chino *Geometry Expert*) o que incluye posibilidades algebraicas y lógicas (como *MathXP*[24], desarrollado en Taiwan).

---

[22] `http://www.saltire.com/paraprts.html`

[23] `http://rosalia.uvigo.es/fbotana/`

[24] `http://www.acailab.com/english/mathxp.htm`

Finalmente, se están desarrollando los primeros DGS 3D. Un ejemplo es *Calques 3D*[25].

En entornos donde la economía es el objetivo primordial, la evolución es a veces más rápida. Por ejemplo, los delineantes ya no usan los utensilios de dibujo en los estudios de arquitectura clásicos, sino programas de CAD. En las empresas, una buena secretaria ya no es la que tiene más "pulsaciones" escribiendo a máquina, sino la que es capaz de sacar el mejor partido del procesador de texto. Del mismo modo que las calculadoras jubilaron a las reglas de cálculo, los contables de "anotar en el libro de cuentas" han sido sustituidos por contables que usan hojas de cálculo, que generan los libros de cuentas. Mientras, muchos profesores de Matemáticas siguen reacios a usar otra cosa que no sea la tiza y la pizarra.

2.4.4 Sobre Internet como medio didáctico

La conectividad proporcionada por la Web y el eficiente acceso a la información (la Web es ya posiblemente la mejor fuente de información) produce grandes cambios en el modelo de enseñanza y es analizada en detalle en (Grigoriadou & Papanokolau, 2000). Por ejemplo:

- el acceso por *e-mail* permite consultar dudas al profesor fácilmente
- el uso de *e-mail* facilita la cooperación entre alumnos (Hydorn, 2001)
- el que los profesores tengan sus propias páginas Web permite ofrecer información (como ejemplos, notas, antiguos exámenes,...)
- la vídeo-conferencia permite mantener el carácter bidireccional de la relación alumno-profesor en la enseñanza a distancia. Incluso se podría pensar en "lecciones magistrales globales" en la "aldea global". En España se han desarrollado algunas experiencias por parte de la *Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)* y la *Universitat Oberta de Catalunya (UOC)*[26]. Es obviamente muy difícil sustituir la eficiencia de la clase tradicional, pero hay situaciones en las que una clase tradicional no es posible (enfermedad del alumno, áreas con una extremadamente baja densidad de población, incompatibilidad de horarios,...) y en las que esta sea la única posibilidad razonable
- algunas páginas Web (European Mathematical Society-The European Mathematical Information Service[27], American Mathematical Society[28], NA-

[25] `http://www.psyc.nott.ac.uk/staff/nvl/Calques3D/`

[26] `http://www.uoc.es`

[27] `http://www.emis.de`

[28] `http://www.ams.org`

SA[29], Instituto Astronómico de Canarias[30]...) ofrecen un amplio espectro de posibilidades para la clase de Matemáticas. Hay páginas con un alto grado de especialización, como la de John Scholes[31], en que se incluyen todos los problemas de las Olimpiadas Matemáticas Internacionales[32], o el servidor WWW Turnbull en la University St. Andrews[33], especializado en Historia de las Matemáticas y de matemáticos famosos. Otras están dedicadas a problemas matemáticos en general, como Crux Mathematicorum[34]

- también es posible obtener de la Web cantidades masivas de datos para estudios estadísticos basados en datos reales
- existen páginas en la Web dedicadas al software científico[35]
- la Web puede ser una buena herramienta para mantener a los profesores en contacto con las autoridades y con los nuevos desarrollos en sus campos (se trata de una audiencia curiosa, pues es dispersa por definición, pues tiene que recubrir todo el país). Este es el caso del Ministerio de Educación y Ciencia español[36].

A pesar de que puede ser una ayuda muy interesante para el proceso de enseñanza-apendizaje, claramente, como las otras herramientas citadas más arriba, no es una herramienta matemática específica, completa en sí misma, sino una herramienta para la comunicación.

No obstante, algunas páginas están comenzando a ofrecer posibilidades interactivas, como *applets* o sesiones remotas (Colvin, Coyle, Hartig & Moore, 1998). Este es el caso, en CAS, del abandonado *Maple Explorer* o de *LiveMath*[37].

---

29 `http://www.nasa.gov`

30 `http://www.iac.es`

31 `http://www.kalva.demon.co.uk`

32 `http://www.kalva.demon.co.uk/imo.html`

33 `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk`

34 `http://www.journals.cms.math.ca/CRUX/`

35 `http://www.downloadsafari.com`
`http://dir.yahoo.com/Science/Mathematics/Software/`

36 `http://www.pntic.mec.es`

37 `http://www.LiveMath.com`

Conclusiones

Los recursos tecnológicos hace tiempo que llamaron a las puertas de nuestras aulas, ofreciendo todo un mundo de posibilidades. Creemos que ya es tiempo de darles la bienvenida. Este artículo ha tratado de dar una visión general, pero cuál de estas tecnologías elegir y cómo usarla en cada caso específico es todavía un problema abierto, que escapa a los objetivos de este trabajo. Además, pensamos que hay todavía una fuerte necesidad de diseñar, implementar y divulgar experiencias de aula reales.

Bibliografía

Abelson, H., & diSessa, A. (1981). *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics.* Cambridge, MA: MIT Press.

Aguilar, J.B. (1994). En recuerdo... *Suma,* 19, 88-93.

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J.M. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Ed. Síntesis.

Anónimo (1984). *Glossary of Educational Technology Terms*. Paris: UNESCO.

Anónimo (1991). *Maths&Stats. Guide to Software for Teaching*. Birmingham: CTI Centre for Mathematics and Statistics, Univ. of Birmingham.

Anónimo (1995). *TI-92 Guidebook*. Utrecht: Texas Instruments Incorporated.

Artigue, M. (1996). Computer Environments and Learning Theories in Mathematics Education. *Procs. of Teaching Mathematics with Derive and the TI-92*. Münster: ZKL-Texte Nr. 2, Univ. Münster.

Aspetsberger, B., & Aspetsberger, K. (2001). Experiences with CBL and the TI-92 in Austrian High School classes integrating Math, Physics and Chemistry. *T^3 Europe 2001 CD-ROM.*

Atiyah, M.F. (1986). Mathematics and the Computer Revolution. In: R.F. Churchhouse et al.: *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching.* Cambridge: ICMI Study Series, Cambridge Univ. Press, 43-51.

Biguenet, A. (1959). *El material para la enseñanza de las matemáticas*. Barcelona: Aguilar.

Botana, F., & Valcarce, J.L. (2001). *Lugares. Un programa gráfico para la obtención de lugares geométricos*. Vigo: Univ. de Vigo.

Buchberger, B. (1989a). *Should student learn integration rules?* Linz: RISC-Linz Preprint.

Buchberger, B. (1989b). Applications of Gröbner Bases in Non-Linear Computational Geometry. In J.R. Rice: *Mathematical Aspects of Scientific Software*. New York: Springer-Verlag, IMA Vol. 14.

Bujanda, M.P., & de la Fuente, A.M. (1989). *Juego y aprendo Matemáticas*. Madrid: (published by the authors).

Burrel, F., Cabezas, J., Roanes Lozano, E., & Roanes Macías, E. (1997). A Survey on the Use of Computer Algebra in Spain in Relationship to Its Secondary School System, *ZDM*, 97(5), 149-154.

Cabero, J. (1990). *Análisis de medios de enseñanza*. Sevilla: Alfar.

Cabezas, J., & Roanes Lozano, E. (2001). Towards the Abandonment of Statistical Tables. *Pro Dialog (J. of the Polish Information Processing Society)*, 12, 67-76.

Cabezas, J., & Roanes Lozano, E. (2002). A Proposal of Organisation of Curricular Changes in Mathematics Propitiated by the Use of Computers. *Proceedings of 13th ICTCM Conference*. Boston: Pearson Education, 40-44.

Chou, S.C. (1988). *Mechanical Geometry Theorem Proving.* Dordrecht: Reidel.

Colvin, M.R., Coyle, L.N., Hartig, D., & Moore, L.C. (1998). Web-based learning materials: Design, usage and resources. *Procs. of Int. Conf. on the Teaching of Math*. New York: John Wiley, 71-73.

Compayré, G. (edition not dated). *Curso de Pedagogía*. Paris: Ch. Bouret.

Cottet-Emard, F. (1989). *Mathematique sur Ordinateur*. Paris: Service de Publications Orsay Plus, Université Paris-Sud.

Davis, E.J., & Barnard, J.T. (2000). What seems to be Happening in Mathematics Lessons? Findings from one School System and Five Student Teachers. *The Mathematics Educator*, 10(1), 11-18.

de Guzmán, M. (1991). Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática. *Actas de las jornadas sobre experimentalidad de la Matemática en la universidad*. Madrid: UPM, 9-27.

de Pablos, J. (1995). *Tecnología y Educación.* Barcelona: Ed. Cedecs.

Diennes, Z.P., & Golding, E. (1966). *Logic and logical Games*. Paris: OCDL.

Drijvers, P. (1995). White-Box/Black-Box revisited. *The Int. Derive Journal,* 2(1), 3-14.

Edwards, L., & Lee, K.D. (1999). *KaleidoMania!. Interactive Symmetry*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Escudero, J.M. (1983). La investigación sobre medios de enseñanza: revisión y perspectivas actuales. *Enseñanza*, 1, 87-120.

Fraenkel, A. (1998). Mathematical Games an Puzzles. In C. Alsina et al., *Procs. of the 8th ICME*, 365-370.

Goetgheluck, P. (1990). *Documents de travail sur ordinateur*. Paris: Service de Publications Orsay Plus, Université Paris-Sud.

Grigoriadou, M., & Papanokolau, K.A. (2000). Learning Environments on the Web: The Pedagogical Role of the Educational Material. *Themes in Education*, 1(2), 145-161.

Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B., & Lehmann, E. (2000). *Indispensable Manual Calculations Skills in a CAS Environment*. Preprint. Available from: `http://b.kutzler.com/article/art-indi/indisp.htm`

Hervás, A., Lorente, J.J., & Villanueva, R.J. (1995). Un curso de teoría de grafos mediante enseñanza asistida por ordenador. *Actas del TEMU 95*. Barcelona: Univ. Politècnica de Catalunya, 215-226.

Hillel, J. (1991). Computer algebra systems as learning tools. *ZDM*, 23(5), 184-191.

Hydorn, D.L. (2001): Communication in Statistics: using e-mail for writing and peer review. *Procs. of 12th ICTCM*. Boston: Addison-Wesley, 180-184.

Keunecke, K.H. (2000). Differential equations as teaching topic in schools. *Bol. Soc. "Puig Adam"*, 54, 18-28.

Koepf, W. (2000). Derive as a Didactical Tool. *The Bul. of the Derive User Group*, 38, 23-35.

Kutzler, B. (1996a) (traducida al español por M.D. Rodríguez). *El Taller de la TI-92*. Madrid: Texas Instruments.

Kutzler, B. (1996b). *Improving Mathematics Teaching with Derive.* Bromley: Chartwell-Bratt.

Kutzler, B. (1999). *The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics*. Preprint. vailable from: `http://b.kutzler.com/art_paed/ped_tool.html`

Llovet, J., Martínez, R., Jaen, J.A., & Fabre, P. (1991). XCourse: un sistema de enseñanza de Álgebra asistida con ordenador. *Actas de las jornadas sobre experimentalidad de la Matemática en la universidad*. Madrid: UPM, 75-87.

McCabe, M., & Watson, J. (1997). From MathEdge to Mathwise: The Cutting Edge of Interactive Learning and Assessment in Mathematics. *Procs. of ICTCM-3* (CD-ROM), Koblenz: Univ. Koblenz.

Pavelle, R., Rothstein, M., & Fitch, J. (1982). Álgebra por ordenador. *Investigación y Ciencia*, Febrero 1982, 82-91.

Puig Adam, P. (1958). *El material didáctico matemático actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

Puig Adam, P. (1960). *La matemática y su didáctica actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

Recio, T. (1998). *Cálculo simbólico y geométrico*. Madrid: Ed. Síntesis.

Recio, T., & Vélez, M.P. (1999). Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry. *Journal of Automated Reasoning*, 23, 63-82.

Roanes Lozano, E. (2001). Integración de las nuevas tecnologías en la clase de Matemáticas. *Bol. Soc. "Puig Adam"*, 59, 17-31.

Roanes Lozano, E. (2002). Boosting the Geometrical Possibilities of Dynamic Geometry Systems and Computer Algebra Systems through Cooperation. *Techniques in Mathematics Teaching*. *ICTMT-5 Proceedings* (Conferencia Invitada). Wien: öbv&hpt, 335-348.

Roanes Lozano, E., & Roanes Macías, E. (1992). Precisión indefinida y Matemática Elemental. *Bol. Soc. "Puig Adam"*, 31, 33-52.

Roanes Lozano, E., Roanes Macías, E. & Villar Mena, M. (2003). A Bridge Between Dynamic Geometry and Computer Algebra. *Mathematical and Computer Modelling*, 37 (9-10), 1005-1028.

Roanes Macías, E. (1969). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Ed. Anaya.

Roanes Macías, E., & Roanes Lozano, E. (1994). *Nuevas Tecnologías en Geometría*. Madrid: Editorial Complutense.

Salinas Ibañez, J. (1992-1993). Interacción, medios interactivos y video interactivo. *Enseñanza*, 10-11, 137-148.

Schupp, H., & Berg, G. (1990). *PROgramme für den GEOmetrie-Unterricht*. Bonn: Ümmler.

Stewart Townend, M., & Watkins, A.J.P. (1994). Students should earn the right to use Derive and its utilities. *The Int. Derive Journal*, 1(3), 102-104.

--- (1996). *The International Derive Journal*, 3(1).

--- (1997). *ZDM*, 97(5).

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 68 (Octubre 2004)

El primer matemático

Javier Peralta
I Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Instituto Universitario de Ciencias de la Educación
Universidad Autónoma de Madrid
javier.peralta@uam.es

Abstract

In the present paper, a biographical study of Thales of Miletus is carried out. Without forgetting his undeniable importance as a philosopher or other facets of his life, we shall especially emphasize in his work those geometric theorems which constitute the starting point in the process of Mathematics rational organization.

Dedicado a Mary Paz Bujanda. Con mis sentimientos de admiración a su obra y de gratitud y afecto a su persona.

Introducción

Si bien el nombre de Thales de Mileto es bastante conocido –debido sin duda a su célebre teorema, posiblemente el más famoso después del de Pitágoras-; en cambio, se sabe muy poco de su vida e incluso de su obra. Hasta tal punto es eso cierto, que el que suele ser llamado *teorema de Thales* –los segmentos determinados por dos rectas concurrentes cortadas por paralelas son proporcionales- no parece que haya sido de su paternidad (yo al menos no he encontrado fuente alguna que se lo atribuya). Pero, incluso en el improbable supuesto de que fuera Thales su descubridor, es prácticamente seguro que no lo habría probado, pues su demostración, nada fácil, aparece por vez primera ([17], p. 42) en el Libro VI de los *Elementos* de Euclides (téngase en cuenta al respecto la "boutade" de Klein cuando recordaba que si un teorema lleva el nombre de un matemático, es seguro que ese matemático no es su inventor).

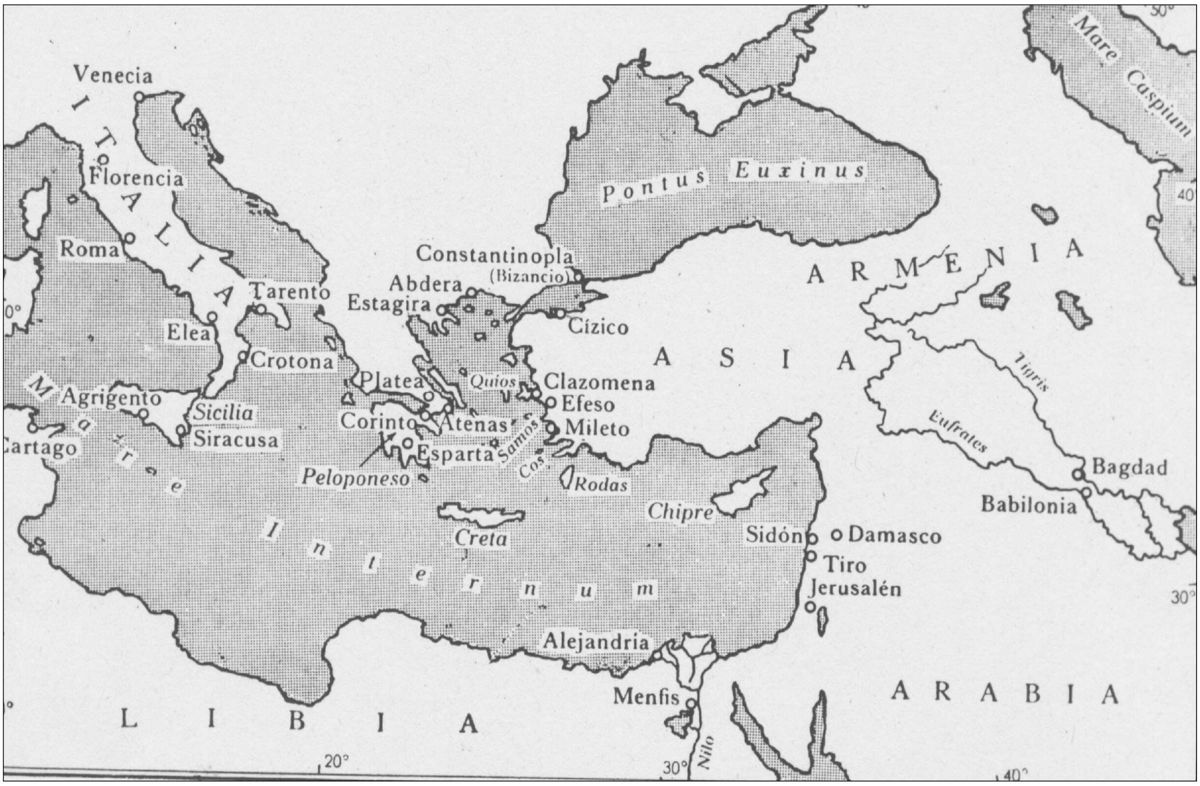
Para saber algo más de Thales y tratar de aclarar algunas dudas, he estudiado la figura de este ilustre personaje, sobre el que existe abundante literatura de su vertiente como filósofo, aunque es muy escasa la disponible de su faceta matemática. En las siguientes páginas se expondrá un resumen de la investigación realizada, incidiendo en especial, lógicamente, en su contribución a nuestra ciencia, lo que le ha supuesto ser reconocido por numerosos autores como *el primer matemático*. Además, también hablaré, en segundo término, de su pensamiento filosófico y de sus descubrimientos y aportaciones en otras áreas; asimismo, me ha parecido oportuno incluir algunas curiosidades, leyendas y anécdotas relativas a su persona, para que la lectura del artículo, dentro de lo posible, resulte más amena.

1. El inicio de la ciencia griega

La Ciencia nace en Oriente, pero no adquiere características racionales hasta que en el siglo VI antes de nuestra era Grecia comienza a organizar los conocimientos empíricos de las antiguas civilizaciones. Esto no quiere decir exactamente, sin embargo, que el pensamiento científico se inicie en ese siglo, pues ¿qué son sino las observaciones astronómicas de los caldeos, los cálculos babilónicos o la geometría egipcia?, por citar algunas de las contribuciones de las culturas precedentes: pretende significar, más bien, que son los griegos los que estructuran los conocimientos e impregnan sus razonamientos del rigor lógico adecuado para dotar a los conceptos y argumentos de una validez universal. Si para ellos "lo que se enseña o lo que se aprende" es precisamente la matemática, no ha de extrañarnos que esa transformación cualitativa repercuta muy especialmente en el nacimiento de esta disciplina como ciencia teórica o que en buena parte de la terminología matemática actual –paralelogramo, aritmética, hipérbola ...– esté presente su origen griego.

Para el estudio de la ciencia griega, que abarca casi un milenio, desde el siglo VI a. C. hasta el siglo IV d. C., suelen establecerse los mismos tres períodos, de algo más de trescientos años cada uno, en que se divide la filosofía griega: *helénico* (hasta la muerte de Alejandro Magno y de Aristóteles), *helenístico* (hasta los orígenes de la era cristiana) y *greco-romano*.

En referencia al inicio del primer período, conviene tener en cuenta que en el año 600 a.C. los griegos estaban dispersos en ciudades-estado independientes ubicadas a lo largo del Mediterráneo y de las costas de Asia Menor (la actual Turquía). En Jonia, situada en la costa egea de Anatolia, se encuentra la próspera ciudad de Mileto, cruce de civilizaciones de tres continentes y capital de gran número de colonias distribuidas en torno al mar Negro (hoy conserva aún restos de las antiguas construcciones y monumentos, como el santuario de Apolo, el templo de Atenea y unas termas romanas). En ella surge la denominada *Escuela de Mileto*, donde nacen la filosofía y la matemática griegas, y cuyos personajes más ilustres son Thales, y sus sucesores Anaximandro y Anaxímenes.



El Mundo Antiguo ([12], p. 14)

2. Fuentes bibliográficas originales sobre Thales

Las referencias disponibles sobre los inicios de la geometría griega son, paradójicamente, menos fiables que las relativas a las matemáticas babilónica y egipcia, ya que no existe manuscrito original alguno de la matemática helena de aquella época. La mayoría de las informaciones que se poseen son muy posteriores, pues provienen de los códices bizantinos y de las traducciones al árabe de algunas versiones latinas. De Thales, concretamente, se sabe muy poco de su vida y de su obra, que es conocida únicamente por testimonios de escritores muy posteriores, quienes en no pocas ocasiones presentan versiones no coincidentes.

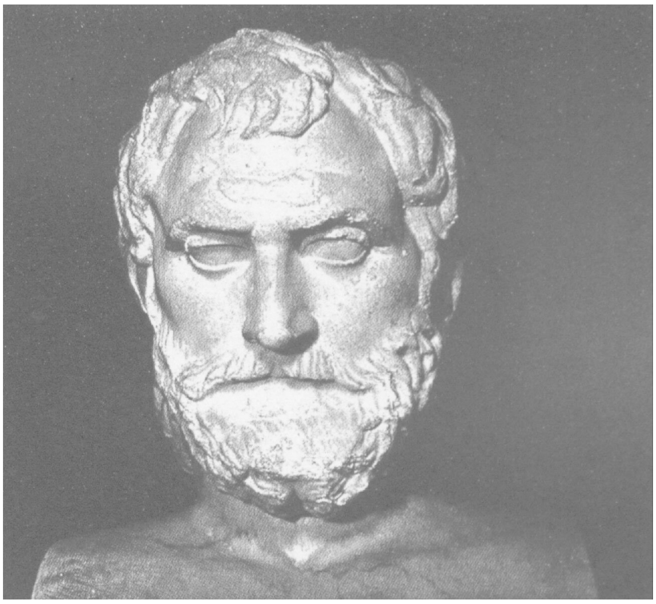
Una de las más importantes fuentes de procedencia sería una *Historia de la Geometría*, de cuatro tomos, escrita por Eudemo de Rodas (s. IV a. C.), discípulo de Aristóteles, que se habría perdido; aunque afortunadamente antes de su desaparición alguien pudo hacer un resumen de parte de la misma. Sin embargo, el original de este resumen parece ser que asimismo se extravió, salvo algunos fragmentos.

Los dos comentaristas más sobresalientes de la matemática griega son Pappus de Alejandría (ss. III-IV), quien escribió una voluminosa obra: *La colección matemática*, conservada casi totalmente en una copia del siglo XII, y el filósofo neoplatónico Proclo de Bizancio (410-485), cuyo texto más importante, el *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*, incluye parte de la información transmitida por Eudemo, por lo que a veces es llamado *Sumario de Eudemo*. En esta última documentación, de tercera mano, se apoya en buena medida lo que se conoce sobre la figura de Thales como matemático. Así, por ejemplo, se dice de él que estuvo en Egipto (lo que no es de extrañar, pues en el delta del Nilo había entonces numerosas colonias griegas y tropas auxiliares helénicas al servicio de los faraones), y en qué consistió en términos generales su labor: "... fue en primer lugar a Egipto, y de allí introdujo este estudio en Grecia. Descubrió por sí mismo muchas proposiciones, e instruyó a sus sucesores en los principios en que se basan muchas otras ..." ([2], p. 76).

Existen también otras fuentes más dispersas sobre Thales en relación con sus actividades matemáticas y otras aportaciones técnicas, que provienen de Plinio (23-79), Plutarco de Queronea (c 46-125) y Diógenes Laercio (200-250). A ellas hay que añadir las referencias suyas en campos diferentes, fundamentalmente filosofía, que están basadas sobre todo en escritos de Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.), unos doscientos cincuenta años después de Thales; aunque también se encuentran en otros autores, como Herodoto (c 484 a.C.–c 420 a.C.) –que asimismo proporciona alguna información sobre las aportaciones de Thales a la astronomía-, Aristófanes (445 a.C.–385 a.C.), Platón (427 a.C.–347 a.C.), Demetrio Falereo (s. IV a.C.) –discípulo de Teofrasto-, Aecio y Cicerón (ambos del s. I), Simplicio (s. VI) –el más erudito de los comentadores de Aristóteles-, etc. ([1], pp. 333-335), ([5], p. 71), ([8], pp. 34-38), ([10], pp. 153-155). Por último, J. Voilquin ([22], pp. 47-48) presenta un extracto de diferentes opiniones expresadas por Thales según sus doxógrafos, tomadas de una recopilación de testimonios y fragmentos de los presocráticos realizada por el insigne helenista H. Diels en 1893.

3. Thales, uno de los “siete sabios” de Grecia

Thales nació en Mileto, y según Herodoto y Demócrito tenía ascendencia fenicia; su padre se llamaba Examio y su madre Cleobulina ([7], p. 1). Aunque ni siquiera hay unanimidad sobre las fechas exactas de su existencia, las que parecen más probables son las que, siguiendo a Proclo, se le atribuyen, por ejemplo en ([1], p. 333), ([9], p. 128) y ([11], p. 46); conforme a lo cual habría nacido en el año 624 a.C. y fallecido en el 547 a.C. Diógenes Laercio, en referencia a las *Crónicas* de Apolodoro (finales del siglo V a.C.), afirma sin embargo que nació en el primer año de la Olimpiada 35 (640 a.C.) o de la 39 (624 a.C.), mientras que, según Herodoto, fue durante la Olimpiada 35, esto es, entre el 640 y el 637 a.C. (como es sabido, las Olimpiadas –llamadas así por celebrarse en la antigua ciudad de Olimpia- tenían lugar cada cuatro años; la primera de ellas se realizó en el 776 a.C., en el 393 fueron suspendidas y hasta 1896 no volvieron a conmemorarse las nuevas Olimpiadas o Juegos Olímpicos). Respecto de la fecha de su muerte –parece ser que en elmomento en que iba a fallecer pronunció las siguientes palabras: “Te alabo, ¡oh Zeus!, porque me acercas a ti. Por haber envejecido, no podía ver las estrellas desde la Tierra”- también hay opiniones distintas a la más probable, citada más arriba, pues Diógenes Laercio dice que fue a los 78 años y Sosícrates a los 90.



Busto de Thales. Museo del Vaticano ([3], p. 67)

Para tratar ahora de aproximarnos a la figura de Thales, hay que empezar diciendo que en los años en que transcurre su vida aparecen diversos personajes que ocupan puestos de superioridad con respecto a sus conciudadanos en los diferentes estados, que entonces se constituyen libremente de acuerdo con normas e instituciones legales. A esa categoría de hombres pertenecen los llamados “siete sabios” de Grecia, que emiten sentencias, máximas y preceptos morales que muestran el inicio del pensamiento griego cuando se aplican a conductas de la vida; y el primero a quien se le da ese tratamiento es precisamente Thales. Los nombres de los siete sabios varían según diferentes autores ([10], p. 145), ([22], p. 23), pero en todas las clasificaciones figuran estos cuatro: Thales de Mileto, Pítaco de Mitiline, Brías de Priene y Solón de Atenas; a los que generalmente se añaden, además, Periandro de Corinto, Cleóbulo de Rodas y Quilón de Lacedemonia. Diógenes Laercio atestigua que, conforme a otras fuentes, la lista de los cuatro citados inicialmente se completaría hasta diez o incluso diecisiete.

La fama de la sabiduría de esos hombres es debida a que eran capaces de comprender la conciencia de la moralidad general, proclamándola en forma de sentencias para conducirse por la vida o de leyes civiles, aunque a veces también sean formuladas sin esa intencionalidad, sino simplemente como pensamientos filosóficos y especulativos. De Thales, en concreto, se cuentan algunas anécdotas a este respecto, como la que relata D. Laercio ([10], p. 159), de acuerdo con el cual se quería dar el premio de un trípode de oro al más sabio de los hombres, que recayó en Thales (o Bías), pero aquél se lo cedió a otro, y así sucesivamente, por lo que el trípode fue dando la vuelta hasta que llegó de nuevo a Thales, y éste (o Solón) emitió el juicio de que el más sabio de todos era Apolo, y el trofeo fue enviado al templo de este dios, de Dídimo o de Delfos.

Son sabidas, asimismo, la máxima atribuida a nuestro personaje: “Conócete a ti mismo”, como su respuesta a la pregunta sobre cuál debe ser la conducta de una vida justa y nueva: “Abstenerse de hacer lo que criticamos en los demás”. Menos conocidos son, sin embargo, los apotegmas que se le imputan; algunos de los cuales, según Demetrio Falereo, son los siguientes ([22], p. 27): “Acuérdate de tus amigos, estén ausentes o presentes”, “No te embellezcas por el exterior; es por tu género de vida por lo que has de embellecerte”, “No te enriquezcas con desvergüenza”, “Los buenos oficios que hayas concedido a tus padres, espera recibirlos en tu vejez de tus hijos”, “Es difícil conocer el bien”, “La ociosidad es penosa”, “El exceso es un mal”, “La ignorancia es una pesada carga”, “Rechaza la ociosidad, incluso si eres rico”, etc. También son famosas distintas sentencias atribuidas a Thales por autores diferentes al anterior, como ésta que sigue: “La abundancia de palabras no prueba la justeza de las opiniones”, y algunas otras que aparecerán a lo largo del texto.

Por otra parte, como ha podido deducirse de lo expuesto más arriba, los siete sabios gozaban de una cierta consideración como hombres de estado. De Thales, en particular, se tienen referencias de que, efectivamente, actuó con esa condición, aconsejando a sus paisanos sobre diversas cuestiones, tanto de política interior como exterior; recomendaciones que, en cambio, no siempre fueron puestas en práctica. Un ejemplo de esto último, según nos relata Herodoto ([10], p. 146), es que antes de la sumisión de los jonios Thales les había advertido que debían crear una suprema asamblea consultiva en Teos, centro territorial de Jonia, constituyendo así una especie de estado federal sin perder la independencia de las demás ciudades, que pasarían a considerarse distritos; no obstante, su sugerencia no fue atendida, y el aislamiento de los distintos pueblos, con su carácter individualista, les llevó a la derrota. Igualmente queda patente este aspecto de estadista cuando convenció a los milesios de que no se unieran a Creso en el momento que se puso en guerra con Ciro; en esta ocasión sí fue escuchado y, a consecuencia de la derrota de Creso, todas las ciudades de Jonia fueron sojuzgadas por los persas, a excepción de Mileto, tal como señala D. Laercio ([10], p. 158).

4. Su obra matemática

El interés de Thales por la ciencia posiblemente se originara en sus contactos comerciales con Egipto y Mesopotamia, fruto de los cuales llegó a conocer en buena medida la matemática y la astronomía babilónicas. Además, como ya se ha dicho, resulta probado que viajó a Egipto y permaneció allí algún tiempo, en el que se inició en los misterios de su religión y aprendió lo que pudo de su geometría, cuyos contenidos trasladaría luego a Grecia.

En el campo de las matemáticas se le atribuyen a Thales cinco teoremas geométricos y la resolución de dos problemas prácticos. Se enuncian y comentan a continuación.

i) *Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por su diámetro*.

Este teorema, junto a los tres siguientes, aparece en el *Comentario* de Proclo. Si bien parece ser que Thales fue el primero en demostrarlo, la palabra "demostrar" no debe ser tomada en su acepción actual. Como dijo Cantor ([20], p. 164), lo que probablemente haría para llegar a esta conclusión fuera dibujar figuras de círculos y observar que quedan divididos en sectores circulares iguales por 2, 4, 6, ... diámetros convenientemente trazados (perpendiculares, formando 45º, etc.); figuras que le resultarían familiares al encontrarse frecuentemente en monumentos y vasos egipcios. Con todo, hay que hacer constar que ni siquiera Euclides probaría más tarde este teorema, sino que lo enunciaría en el Libro I de los *Elementos* como una definición; concretamente la XVII: "Un diámetro de un círculo es una recta cualquiera que pasa por el centro y que acaba en ambas direcciones en la circunferencia del círculo; esta línea recta divide al círculo en dos partes iguales" ([16], p. 124).

ii) *Los ángulos de la base de todo triángulo isósceles son iguales.*

Respecto de este enunciado, hay que decir que Thales, en realidad, usó el término "semejantes" en vez de "iguales"; lo que parece indicar que no concebía la amplitud del ángulo como una magnitud, sino más bien como una figura que tiene una determinada forma. El teorema, que corresponde al famoso *pons asinorus* ([20], p. 165), figurará después como la Proposición V del Libro I de los *Elementos* de Euclides: "En triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales y, si los lados iguales se prolongan, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí" ([16], p. 190).

iii) *Los ángulos opuestos por el vértice que forman al cortarse dos rectas son iguales.*

Aunque Thales, en efecto, descubriera el teorema, seguramente no lo probó de manera rigurosa. Fue Euclides quien lo hizo en su proposición XV del Libro I de sus *Elementos*: "Dos líneas rectas que se cortan determinan ángulos opuestos iguales" ([16], p. 233).

iv) *Si dos triángulos tienen un lado y los dos ángulos adyacentes respectivamente iguales, entonces los triángulos son iguales*.

Eudemo en su *Historia de la Geometría* afirma que este teorema era conocido por Thales, y de nuevo figura en los *Elementos* de Euclides, concretamente en la Proposición XXVI del Libro I: "Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, y también uno de los lados, el que une los dos ángulos iguales o el opuesto a uno de los ángulos iguales, entonces los lados que quedan son iguales y el ángulo restante es igual" ([16], p. 271), donde está correctamente demostrado. Para determinar la distancia de una nave a la costa, es posible que Thales se basara en este teorema.

v) *Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto*.

A este teorema, que según parece ya sabían los geómetras de Babilonia y acaso Thales con ocasión de sus viajes a esas tierras, algunos autores ([2], p. 76) denominan *teorema de Thales*. Su resultado, como es conocido, tendría posteriormente una relativa importancia, y aparecerá en lugares tan dispares como la *Divina Comedia* de Dante ([21], p. 15), cuando se pregunta si en el semicírculo no cabría un triángulo rectángulo:

O se del mezzo cerchio far si puote
Triangol si ch'un retto non avesse

Sorprende, desde luego, que Thales supiera este teorema, esto es, la existencia de infinitos triángulos rectángulos con una hipotenusa (diámetro del círculo circunscrito) común y no se planteara en cambio qué relación guardan los catetos con dicha hipotenusa –o sea, el teorema de Pitágoras-; máxime cuando es probable que hubiera oído hablar en Egipto del triángulo rectángulo de lados 3, 4, 5 ([4], p. 13).

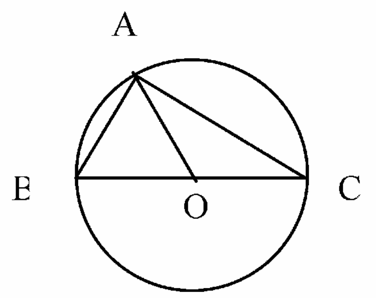
Además de estos argumentos, existen otras opiniones sobre la hipotética atribución a Thales del descubrimiento de este teorema, alguna de las cuales expongo a continuación.

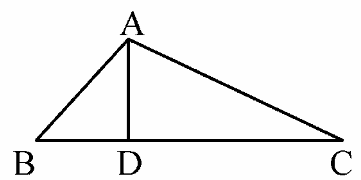
La más importante, posiblemente, sea la de Diógenes Laercio, quien duda si fue Thales o Pitágoras el primero en inscribir un triángulo rectángulo en un círculo; conclusión a la que llega al considerar la siguiente fuente ([9], p. 131): "Pánfila afirma que Thales, quien aprendió geometría de los egipcios, fue el primero en inscribir en un círculo un triángulo rectángulo, y sacrificó un buey (por la importancia del descubrimiento). Otros, sin embargo, incluido Apolodoro el calculador, dicen que fue Pitágoras".

En relación con la segunda hipótesis, Apolodoro en sus *Crónicas* afirmaría que el sacrificio del buey lo realizó Pitágoras, aunque duda si fue al dibujar una figura que representa su teorema o bien otra que resuelve un problema de aplicación de áreas, según recoge Plutarco en su *Vida de Epicuro*. También hay constancia de ello en el siguiente dístico atribuido a Apolodoro ([20], p. 177):

As when Pythagoras the famous figure found
For which the noble sacrifice he brought

En cualquier caso, el teorema aparece de nuevo en los *Elementos* de Euclides, concretamente en la Proposición XXXI del Libro III: "En un círculo, el ángulo colocado en el semicírculo es recto; el que está en el segmento mayor es menor que el recto; el que está en el segmento menor es mayor que el recto; el del segmento mayor es mayor que el recto, y el del segmento menor, menor que el recto ([21], p. 767), y su demostración está basada en la Proposición XXXII del Libro I:" En cualquier triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo exterior es igual a los dos internos y opuestos, juntos, y los tres internos del triángulo son iguales a dos rectos" ([16], p. 296). Eudemo atribuye el descubrimiento del teorema enteramente a los pitagóricos y, además, da a entender que Thales no lo conocía, pues no cree que pudiera llegar a él sin saber previamente que los ángulos de cualquier triángulo suman dos rectos.





A la vista de lo anterior, aceptar la opinión de Pánfila que otorga a Thales su paternidad, ofrece algunas dificultades, pues también, ciertamente, de este teorema podría haber deducido enseguida que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es dos rectos (lo que, sin embargo, no es seguro que conociera Thales). En efecto, si el triángulo ABC es rectángulo, al trazar el radio OA se descompone en dos triángulos isósceles ABO y AOC, y por el teorema ii, $O\hat{B}A = B\hat{A}O$ y $O\hat{C}A = O\hat{A}C$; ahora bien, como 1 recto=$B\hat{A}C$= =$B\hat{A}O$+$O\hat{A}C$, también $O\hat{B}A + O\hat{C}A = 1$ recto, y los tres ángulos del triángulo suman dos rectos. Y la demostración puede extenderse a cualquier triángulo ABC sin más que trazar una altura AD y aplicar la propiedad a cada uno de los dos triángulos rectángulos en que queda dividido.

Cantor en cambio presume que Thales no sólo tenía conocimiento de este último teorema, sino que además lo probó, y posteriormente dedujo el teorema v a partir de aquél. Y basa su argumentación en un *Comentario sobre las Cónicas de Apolonio* debido a Eutocio (s. VI), -acaso el último comentarista de las matemáticas de la antigüedad-, en donde se atribuyen a Gémino (s. I a.C., posiblemente), filósofo estoico e historiador de las matemáticas, las siguientes palabras: “los *antiguos* investigaron el teorema de los dos ángulos rectos en cada caso particular de un triángulo, primero en el triángulo equilátero, luego en el isósceles y después en el escaleno; aunque más tarde los geómetras demostraron el teorema general: que en cualquier triángulo, los tres ángulos interiores suman dos rectos” ([9], p. 135). Esta suposición de Cantor descansa, pues, en la consideración, de acuerdo con los pitagóricos y otros geómetras griegos posteriores, de que los *antiguos* en esa cita serían Thales y sus coetáneos.

Como ya ha sido dicho, ha de entenderse de cualquier modo que cuando me he referido en el caso de Thales al proceso de demostración, no significa que se tratase de una demostración formal –como sucede por ejemplo en los *Elementos* de Euclides-, sino, con toda probabilidad, a la observación de aparentes relaciones en determinadas figuras, que se asumen como ciertas a partir de la visualización y medición en situaciones particulares. De esto se hablará después más ampliamente.

vi) *Determinación de la altura de la pirámide de Keops.*

Como es sabido, Thales calculó la altura de la Gran pirámide de Gizeh a partir de la longitud de la sombra que proyectaba. Hay no obstante varias versiones sobre este hecho, que básicamente se reducen a las tres siguientes ([9], p. 129):

. La más antigua y también la más sencilla es la debida a Jerónimo, discípulo de Aristóteles, recogida por Diógenes Laercio: "Jerónimo dice que [Thales] midió la altura de la pirámide observando la longitud de su sombra en el momento en que su sombra era igual a su altura".

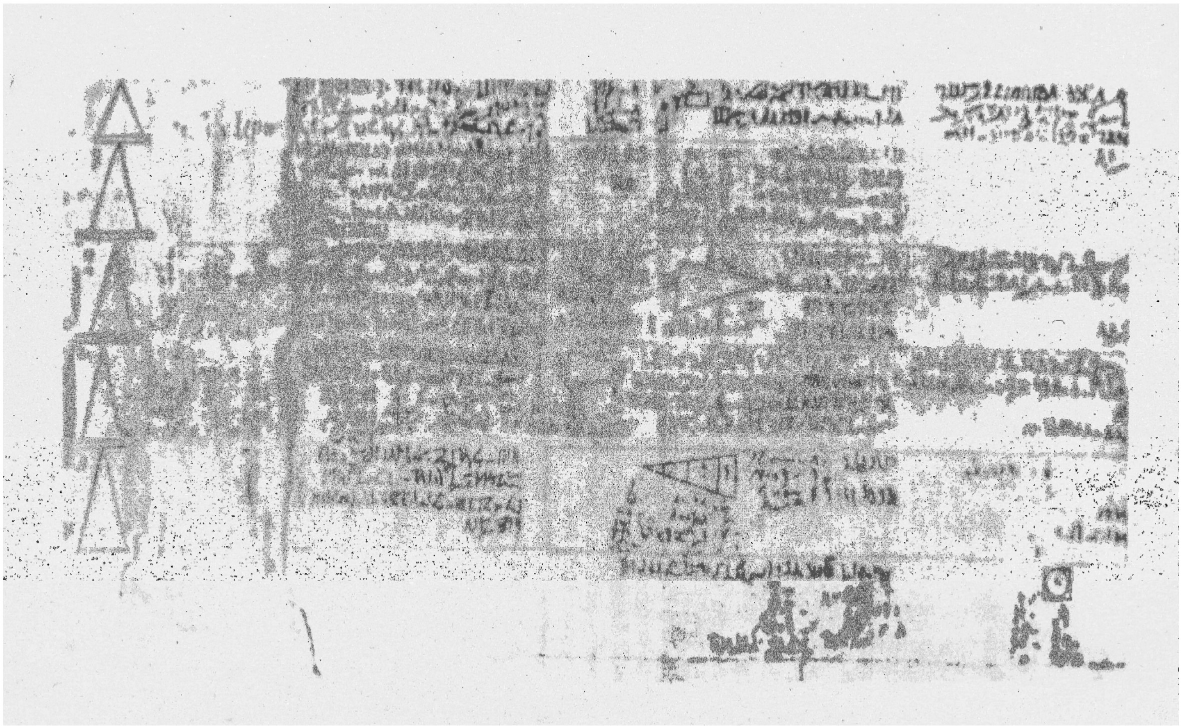
. Plinio, en su *Historia Natural*, expresa casi lo mismo: "Thales descubrió cómo hallar la altura de las pirámides y de otros objetos similares midiendo la sombra del objeto en el instante en que el cuerpo y su sombra tienen igual longitud".

. Plutarco hace referencia a lo que Niloxeno (s. VI a. C.), embajador del rey de Egipto, dice de Thales y de Amasis (faraón de Egipto que gobernó entre el 569 y el 525 a. C.): "Entre otros hechos, él [Amasis] quedó especialmente satisfecho cuando, sin dificultad alguna ni ayuda de instrumentos, [Thales] colocó verticalmente un bastón en el extremo de la sombra proyectada por la pirámide y teniendo así dos triángulos originados por los rayos del sol, mostró que la altura de la pirámide guardaba con relación al bastón la misma proporción que la sombra de la primera con la sombra del segundo".

Según parece, la primera de las versiones –que poco difiere de la segunda- es la más probable, y el método seguido es más elemental que el mencionado por Plutarco. Posiblemente Thales observara que en el instante en que la longitud de la sombra de un objeto es igual a su altura, eso mismo sucedería para cualquier otro; conclusión a la que acaso llegara inductivamente, después de haber hecho las mediciones correspondientes. Con respecto a la narración de Plutarco, significaría el establecimiento de la proporcionalidad de los lados homólogos de dos triángulos rectángulos semejantes; lo que no querría decir necesariamente que construyera una teoría general de la semejanza y la proporcionalidad, ni tan siquiera que enunciara el que hoy en día suele denominarse teorema de Thales.

En cualquier caso, en las tablillas babilónicas y papiros egipcios ya aparece el germen de esas ideas; así, en las paredes de la habitación donde se encuentra la tumba del faraón de la XIX^{a} dinastía –unos 1300 años a.C.-, por ejemplo, hay dibujadas figuras semejantes de dimensiones proporcionales, y también los arquitectos babilónicos parece ser que aplicaban para la construcción ciertas normas en las que estaba implícita la proporcionalidad entre los lados homólogos de figuras semejantes. Con todo, en los egipcios y babilonios la geometría no constituía un cuerpo de doctrina formal, sino que consistía en una colección de reglas prácticas de medida que se utilizaban fundamentalmente en agrimensura y en construcción (más adelante, sin embargo, se matizarán estas afirmaciones)

Sí parece conveniente incidir en el hecho de que, aun dando crédito a la tesis de Plutarco sobre la aportación de Thales, esencialmente, ésta no va mucho más allá de las técnicas egipcias.



Papiro de Rhind ([18], p. 23)

En efecto; en los problemas del papiro de Rhind relativos al cálculo de magnitudes de las pirámides, se distinguen los segmentos: *ukha-thebt* (lado de la base) y *piremus* (altura de la pirámide). A partir de ellos obtienen una razón, que denominan *se-qet* ([9], pp. 127-128) o *seqt* ([5], pp. 59-60), que determina la pendiente de la pirámide:

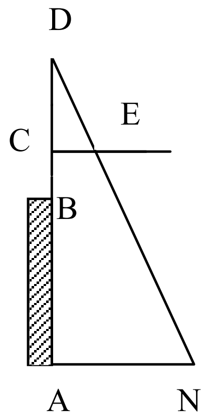
$$se-qet=\frac{\frac{1}{2}\, ukha-thebt}{piremus};$$

esto es, lo que hoy sería la cotangente del ángulo diedro formado por una cara lateral y la base. Y este valor de la *se-qet* era importante para los constructores de pirámides, pues debía permanecer constante al ir añadiendo sucesivos bloques de piedra (en el problema 56 del citado papiro resulta ser 18/25, en los problemas 57 a 59, 3/4, y en el 60, 1/4, que corresponden, respectivamente, a los ángulos 54º14'16'', 53º7'48'' y 75º57'50'', de una pirámide de Dakshur, de la segunda de Gizeh-Kefrén- y de Medum).

Por tanto, en esas mediciones se partía de la base (*ukha-thebt*) y de la pendiente (*se-qet*) y se obtenía la altura; mientras que Thales, según la versión de Plutarco, a partir de la longitud del bastón y de su sombra y de la longitud de la sombra de la pirámide calcularía su altura, lo que evidentemente resulta equivalente a imponer que los triángulos correspondientes tengan una misma pendiente.

vii) *Cálculo de la distancia de una nave a la costa.*

Hay que decir en primer lugar que este problema pasaría a denominarse veintitrés siglos después *problema de la carta*, atribuido por los ingleses a J. Collins (s. XVII) y por los franceses a L. Pothénot (ss. XVII-XVIII).



La suposición más probable es que Thales observara la nave desde lo alto de una torre y se basara en la proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos rectángulos semejantes. Según esa hipótesis, si la nave se encuentra en el lugar N, Thales se habría subido a la torre AB en la costa, a la orilla del mar, con un aparato formado por dos listones en ángulo recto. Colocado uno de ellos, CD, vertical, en línea recta con AB, y el otro horizontal hacia el mar, lanzaría una visual desde D hacia el barco, que determinaría un punto E en su intersección con el listón horizontal.

Conocidas las longitudes de AC, CD y CE, por la semejanza de los triángulos CDE y ADN, se tendría:

$$AN = (AC+CD)\cdot \frac{CE}{CD},$$

que proporciona la distancia buscada.

Hay también otras posibles explicaciones sobre el procedimiento llevado a cabo en la resolución del problema, como una que estaría en la línea seguida siglos después por Marco Junio Nipso en su *fluminis varatio* y otros agrimensores para hallar la distancia de un punto a otro punto inaccesible, y que se apoya en el teorema iv ([9], p. 132).

5. Thales y el inicio de la matemática deductiva

Una vez que se han visto las aportaciones matemáticas concretas de Thales, quisiera reflexionar sobre su significado global; esto es, sobre su repercusión en la evolución de esta ciencia. Pero he de hacer antes unas consideraciones de tipo general.

La matemática griega de la que se tiene noticias comienza precisamente en la época de Thales, mucho después, por ejemplo, que la literatura griega (baste con recordar, entre otras, las figuras de Homero o de Hesíodo, de los siglos IX y VIII a.C., respectivamente). En su origen, la geometría griega aparece como tributaria de la egipcia, y en menor grado de la babilónica, aunque con Thales empieza a pasarse de lo meramente empírico a lo teórico, a la vez que se inicia la idea de demostración. En un principio se trata de una "demostración" empírica o experimental, basada fundamentalmente en la simetría, la visualización o la superposición de figuras planas: es una "demostración" ([12], p. 32) más convincente que rigurosa (hoy en día diríamos que corresponde al segundo o, a lo sumo, al tercer nivel de razonamiento de Van Hiele). Se está, por tanto, en el origen de la transformación de la geometría en una disciplina puramente teórica, y se emprende la investigación de los teoremas enunciados de manera inmaterial y abstracta. La geometría de Thales es, en consecuencia, el punto de partida del *milagro griego* en matemáticas: el gran salto cualitativo que supone el paso de la matemática inductiva y empírica de las civilizaciones anteriores a su nacimiento como ciencia deductiva y especulativa (como se ha dicho, a Thales de Mileto, el principal artífice de este proceso, se le denominará *el primer matemático*).

Ahora bien, a pesar de los comentarios hechos sobre la matemática prehelénica, convendría no obstante hacer ciertas matizaciones al respecto, a tenor de lo que se conoce de los antiguos papiros egipcios y tablillas babilónicas. Las observaciones se reducen básicamente a dos, que se expresan a continuación ([2], p. 66-67).

En primer lugar hay que precisar que, si bien en los documentos mencionados se encuentran tan solo problemas concretos y casos especiales sin planteamiento general alguno, no es menos cierto que en las tablillas cuneiformes se observan numerosos ejercicios de tipos muy similares –acaso dirigidos a escolares- que se resuelven siguiendo unos mismos procedimientos. Por ello, aunque no se ha conservado ninguna formulación de tales reglas, no parece aventurado presumir que acaso hubieran existido (de no ser así, resultaría difícil explicar la aparición de colecciones tan extensas de problemas semejantes).

Grabado de Thales, 1616.
Biblioteca Nac. de París ([19], p. 98)

La segunda aclaración se refiere a la pretendida falta de abstracción en las matemáticas mesopotámica y egipcia; tesis que en líneas generales estimo correcta, en especial si se circunscribe a la geometría. En lo que podría considerarse los albores del álgebra, sin embargo, no me parece que sea exactamente así; pues, por ejemplo, para representar una cantidad desconocida, ya en Egipto se utilizó una palabra especial: *aha* o montón ([15], p. 144), y en Babilonia, *longitud, anchura, área* o *volumen* (aunque no tuviera nada que ver con problemas de medida); y se planteaban problemas –similares a nuestras ecuaciones- en los que habría que determinar tales cantidades. ¿No habría que interpretar estos signos como el inicio de un proceso de abstracción similar al que supone la introducción de incógnitas y a la resolución de ecuaciones?

En cualquier caso, frente a esa matemática, ¿qué significado tiene la irrupción de la geometría de Thales? Siguiendo fundamental- mente a M. Martínez ([14], pp. 191-193), del análisis de los teoremas de Thales puede inferirse lo siguiente:

- Suponen auténticos teoremas, esto es, afirmaciones exactas sobre objetos matemáticos, específicamente sobre figuras geométricas "en sí"; mientras que la geometría prehelénica se limita a estudiar propiedades numéricas particulares de figuras concretas.

- En las proposiciones de Thales se enuncian propiedades sumamente sencillas y completamente inútiles para las necesidades prácticas; su sentido es pues muy diferente que el de la matemática babilónica y egipcia, esencialmente aplicada y de un buen nivel técnico (una muestra del carácter teórico de la matemática griega es que ni siquiera se preocupa en adoptar un sistema de numeración posicional –como la babilónica-, de grandes ventajas prácticas).

- Aunque según el *Comentario* de Proclo Thales vino a demostrar, en algún sentido, la validez universal de sus asertos, con toda seguridad no se trataba de demostraciones estrictamente formales, pues no enunció –ni entonces existía- un sistema de axiomas o principios básicos, absolutamente necesario como cuerpo de doctrina donde poder construir una ciencia axiomático-deductiva.

Dando entonces por hecho que la matemática griega, de la cual Thales con su geometría es su iniciador, introdujo un cambio cualitativo fundamental, debemos preguntarnos ahora sobre las razones de esa transformación que permitió pasar gradualmente de la matemática instrumental a la matemática pura.

Las causas de esa nueva concepción de la matemática ([14], pp. 193-197), probablemente haya que buscarlas en el proceso de las migraciones y colonizaciones que tuvieron su origen en la crisis social griega de los siglos IX al VII a.C. y que dieron lugar a importantes cambios en sus creencias. Los primeros grandes viajeros griegos tuvieron entonces ocasión de conocer los mitos y convicciones de las distintas civilizaciones, y advertirían notables contradicciones entre tales ideas, como también con las propias del mundo griego; episodio que acaso constituya la más significativa *pérdida de creencias* de la historia (así lo denomina, entre otros, Ortega y Gasset).

Es de presumir, en consecuencia, que en esa crisis intelectual se encuentre precisamente el origen de la filosofía griega y, en lo concerniente al análisis de nuestra ciencia, se buscara denodadamente verdades inmutables y razonamientos indiscutibles, independientes de toda contingencia. Con esa perspectiva han de explicarse como auténticos logros los teoremas de Thales, que si bien son elementales y meramente teóricos, constituyen sin embargo verdades universales, de validez absoluta. Por consiguiente, las carencias formales de sus demostraciones deberían quedar en un segundo plano al lado del significado global de sus proposiciones: ser el punto de partida de la estructuración de la matemática como ciencia teórica, tal como hoy es concebida.

6. Astrónomo e ingeniero

Además de matemático, filósofo y estadista, en Thales se distinguen asimismo otras diferentes facetas, como las de astrónomo, físico y lo que podríamos llamar ingeniero e, incluso, en algún momento, la de comerciante u hombre de negocios.

Es sabido que Thales predijo un eclipse solar producido durante el reinado de Aliates, coincidiendo con una batalla entre medos y lidios, que finalmente detuvo el fenómeno celeste y condujo a la paz, según cuenta el historiador Herodoto. De acuerdo con los astrónomos modernos habría ocurrido el 28 de mayo de 585 a.C. ([20], p. 146), aunque se manejan también otras posibles fechas del mismo, como el 30 de septiembre de 610 o el 21 de julio de 597 ([21], p. 15), ([23], p. 60). En todo caso, Thales ignoraba la causa de los eclipses, debido a una particular concepción del sistema solar y a su falta de conocimientos técnicos y de una base sólida de observaciones; por ello, su predicción tuvo que realizarse con ayuda de tablas empíricas de los astrónomos de Babilonia ([9], pp. 137-138) obtenidas a lo largo de siglos (habían descubierto un periodo de 233 lunaciones entre dos eclipses consecutivos), que Thales posiblemente trajera de Egipto.

Entre otras aportaciones suyas a la astronomía, Eudemo le asigna el descubrimiento de que "el periodo del Sol con respecto a los solsticios no es siempre el mismo"; lo que se supone quiere significar que advirtió la desigualdad de la duración de las cuatro estaciones astronómicas, o sea, de las cuatro partes del año trópico, dividido por los equinoccios y los solsticios (parece ser que Eudemo basa sus argumentos en los escritos *Sobre los solsticios* y *Sobre los equinoccios* del propio Thales, según Diógenes Laercio). Asimismo se sabe que observó la existencia de dos Hiadas, que conocía la división del año solar en 365 días y que consideraba que la Luna era 700 veces menor que el Sol; incluso Calímaco le reconoce como el descubridor de la Osa Menor.

Sello griego dedicado a Thales
([13], p. 48)

Hay que mencionar de igual modo diversas aportaciones suyas a la navegación, que posiblemente estuvieran recogidas en el manual *Astronomía naútica*, atribuido por algunos a Thales y por otros a Foco de Samos. Entre ellas se encuentra la propuesta de la navegación por la Osa Menor, como método para llegar al polo, al estilo de los fenicios, en vez de la costumbre griega de hacerlo por la Osa Mayor.

Existen, por otra parte, afirmaciones sobre astronomía de diferentes doxógrafos referentes a la figura de Thales, como la siguiente, debida a Aecio: "Los astros son de una naturaleza terrosa, pero ardiente. El Sol es de naturaleza terrosa. Thales es el primero que ha dicho que hay un eclipse cuando la Luna, que es de naturaleza terrosa, se pone en línea recta por debajo de él; entonces la imagen aparece sobre el disco como sobre un espejo" ([22], pp. 47-48).

Aunque también, se sabe actualmente que diversos descubrimientos astronómicos atribuidos a Thales juntamente con otros astrónomos por distintos doxógrafos, no fueron realizados hasta después de la muerte del sabio de Mileto. Algunos de ellos son los siguientes (se señala entre paréntesis quienes fueron posiblemente los autores respectivos): el hecho de que la Luna reciba la luz del Sol (Anaxágoras y posiblemente Parménides) y la división de la esfera celeste en cinco zonas (Pitágoras y Parménides)- mientras que Aecio concede el primero de ellos a Thales en solitario y el segundo a Thales y a Pitágoras-; la esfericidad de la Tierra (Pitágoras); la oblicuidad de la eclíptica (Enópides de Quíos); etc. ([9], p. 138), ([22], pp. 47-48).

Respecto de otras facetas de Thales, conviene mencionar el hecho de que, así como Aristóteles en diversos escritos (*Metafísica*, *Del Cielo*, *Ética* ...) le considera básicamente un filósofo, cien años antes, Herodoto en *Historias* le había conceptuado como un "activista", tanto en táctica militar y política como en ingeniería ([1], p. 37).

De su habilidad como ingeniero puede decirse que dirigió una escuela de naútica en Mileto y, según Herodoto, que fue reconocido por su competencia en las obras hidraúlicas. Un ejemplo de ello es que cuando Creso se puso en guerra contra Ciro y llegó al río Hallis, tuvo dificultades para que su ejército lo cruzara, por lo que Thales, que se encontraba presente, hizo que el río, que corría a la izquierda del ejército, fluyera también a su derecha; para lo cual mandó cavar una zanja profunda desde la parte alta del campamento en forma de media luna, de modo que el río fluyera por detrás de aquél, desviando mediante esta zanja el antiguo curso y precipitándolo en su anterior cauce una vez hubiera pasado el campamento. De esa manera, en cuanto el río quedó dividido se hizo fácilmente vadeable por ambas partes ([10], p. 158).

Por otro lado, la historia imputa a Thales el descubrimiento del poder de atracción de los imanes y de la electricidad estática. Así, según relata Proclo, observó que el ámbar frotado con un paño atraía pequeños objetos, fenómeno que no volvió a ser analizado en profundidad hasta finales del siglo XVI por W. Gilbert ([12], p. 325), quien repitió los experimentos atribuidos a Thales (y publicaría al respecto la obra *De magnete*, en 1600, sobre electricidad y magnetismo).

A pesar de todo lo anterior, Thales era para muchos esencialmente un pensador, un filósofo. En relación con ello, Aristóteles en su *Política* relata que cuando varios hombres de negocios le reprocharon su pobreza y la inutilidad de su filosofía, Thales les dio una lección práctica con la operación financiera que se menciona a continuación.

Por medio de la astrología sospechó que la siguiente cosecha de aceitunas habría de ser muy abundante, por lo que se procuró en invierno algún dinero para hacerse con el control de las prensas de aceite de Mileto y de Quíos; y de este modo pudo imponer meses después el precio que quiso a quienes requirieron su utilización, con lo que consiguió cierta fortuna ([5], pp. 71-72), ([6], p. 2). En otra leyenda sobre su espíritu comercial se le pinta igualmente como mercader de sal; y hay, en fin, otras muchas que rodean su vida ([5], p. 71).

7. Filósofo

Posiblemente la anécdota más conocida sea la que cuenta Diógenes Laercio: "Dícese que un día, por estar mirando las estrellas y observándolas, cayó en un pozo y que la gente se burlaba de él diciendo que mal podía conocer las cosas del cielo quien no acertaba a ver siquiera dónde pisaba" ([10], p. 159). Sobre ello también habla Platón, quien completa el relato asegurando que una bonita muchacha tracia le rescató riéndose de él por haber caído de una forma poco ortodoxa.

Esta historia, sin embargo, más que desear presentarnos a Thales como un observador de estrellas, lo que querría indicarnos –al igual que otro hecho ya mencionado– es el carácter despistado y poco práctico de un filósofo. En efecto, para muchos, Thales fue un hombre dedicado esencialmente a la filosofía, disciplina a la que se consagró en la última etapa de su vida como fundador de una nueva corriente filosófica; es más, algunos, como Aristóteles, le consideran *el padre de la filosofía.*

Aristóteles en su *Metafísica* ([7], pp. 2-3), ([11], p. 46) relata que "los más de los que se dedicaron en su comienzo a la filosofía, buscaron los primeros principios en el reino material. Pues aquello a partir de lo cual existen todas las cosas, y lo primero a partir de lo cual se generan y el término en que se corrompen, permaneciendo la sustancia pero cambiando en los accidentes, dicen que es el elemento y el principio de las cosas que existen; por esto creen que nada se genera ni se corrompe, pues tal naturaleza se conserva siempre ... Pues ha de haber alguna naturaleza, ya sea única o múltiple, de la cual se generan las demás cosas, conservándose ella. En cuanto al número y la especie de tal principio no todos dicen lo mismo, sino que Thales, iniciador de tal filosofía, dice que es el agua ...". Así pues, para Thales, el agua es el principio, sustancia y fundamento de todas las cosas.

Respecto de las razones por las cuales debió llegar a esta conclusión, Aristóteles conjetura lo siguiente ([10], pp. 161-162): "*Probablemente*, juzgaba así viendo que lo que nutre a todas las cosas es húmedo, hasta el punto de que el calor mismo nace de la humedad y vive de ella, y que aquello de que todas las cosas nacen es el principio de todas las cosas. Juzgaba, pues, así, por esta razón y porque los gérmenes de todos los seres tienen la naturaleza húmeda y el agua es el principio de la naturaleza de las cosas húmedas". En cambio, Plutarco hace caso omiso del *probablemente* y le atribuye estas palabras ([10], p. 162): "Thales supone que todo nace del agua y se disuelve en ella, porque, del mismo modo que las simientes de todo lo vivo, como principio de esto, son húmedas, del mismo modo todo lo demás tiene su principio en la humedad; puesto que todas las plantas sacan su alimento del agua y dan frutos gracias a ello, secándose cuando carecen de agua, y puesto que incluso el fuego del sol y de las estrellas y el mismo universo son alimentados por las evaporaciones del agua"; y también Simplicio, que extiende a los *físicos* la paternidad de consideraciones similares ([22], p. 47): "Los que admiten un único principio móvil y que Aristóteles llama propiamente físicos, unos lo consideran limitado; así, Thales de Mileto ... han dicho que el agua era el principio. Las apariencias sensibles les condujeron a esta conclusión; pues, lo que está caliente tiene necesidad de la humedad para vivir, lo que está muerto se seca, todos los gérmenes son húmedos, y todo alimento está lleno de jugo; luego, es natural que cada cosa se nutra de lo que proviene; pero el agua es el principio de la naturaleza húmeda y es lo que mantiene todas las cosas; por consiguiente, ellos han concluido que el agua es el principio de todo y han declarado que la tierra reposa sobre el agua".

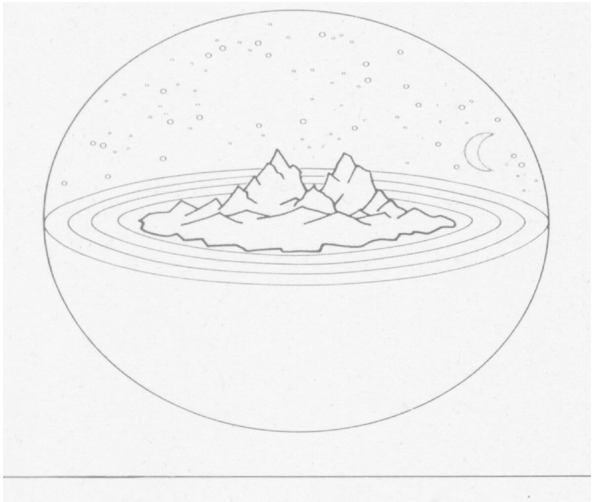
Thales, con esas ideas, aspiraba a dar una interpretación racional del mundo, frente a las explicaciones mitológicas anteriores a él; es, por tanto, el primero de los *filósofos de la naturaleza*: el fundador de la *filosofía natural*, de orientación materialista, o *filosofía física*, que busca el principio o realidad última (*arkhê*: sustancia, fundamento, causa original) independientemente de las explicaciones míticas tradicionales, Aunque, posiblemente, en vez de decir filosofía de la naturaleza sería más correcto hablar de metafísica, pues el tema de los primeros principios o elementos roza los fundamentos del ser en general, ya que se trata de aclarar cuál es la esencia del ser como tal, y no de una simple comprobación de los últimos materiales constitutivos de los cuerpos.

Sea cual sea la denominación más acertada de la filosofía jónica, es innegable que de algún modo introduce en el mundo griego un nuevo saber, más racional, que en sus orígenes trata de explicar los fenómenos naturales sin acudir a causas divinas, y que también tendría su traducción en la matemática con el comienzo de las demostraciones y de su estructuración formal; es más, esta corriente marcará el nacimiento del pensamiento científico, que trasciende de los hechos concretos y de los métodos empíricos para establecer leyes generales.

Por otro lado, esa filosofía que busca un elemento fundamental –el agua- para la composición de todas las sustancias, participa del principio general de la física y la química modernas. De nuevo, muchos siglos después, el químico Van Helmont (1577-1644) retomaría la idea de que toda cosa es en última instancia agua ([12],p. 300).

El papel que Thales concede al agua como principio y sustancia de todas las cosas, se extiende incluso a una concepción cosmológica del mundo (que sería perfeccionada poco después por Anaximandro). Así, Aristóteles en su *Metafísica*

([10], p. 161), le atribuye la siguiente afirmación: "La Tierra flota sobre el agua"; que completa en la obra *Del Cielo*: "Thales decía que la Tierra se mantiene en reposo porque flota como si fuera un madero o algo semejante, pues ninguna de estas cosas se mantiene en el aire por su propia naturaleza, pero sí en el agua". De igual modo, Séneca en su obra científica *Cuestiones naturales* reconoce que "Thales entendía que toda la tierra se hallaba sustentada sobre el agua como su base (*subiecto humore*) y flotaba sobre ella". B. Farrington ([6], p. 33), en fin, establece que, según Thales, "la Tierra era un disco plano que flotaba en el agua; había aguas encima y a nuestro alrededor (¿de dónde, si no, vendría la lluvia?). El Sol, la Luna y las estrellas eran vapor en estado de incandescencia, y navegaban por el firma- mento gaseoso encima de nosotros ...".



El mundo según Thales ([3], p. 67)

En otro orden de ideas, a la primera afirmación de Thales, que todo procede del agua, hay que añadir una segunda proposición ([11], pp. 46-47): que todo está lleno de dioses; aunque no ha de entenderse tal aseveración como una profesión formal de panteísmo o monoísmo –Teofrasto (sucesor de Aristóteles al frente del Liceo), por ejemplo, manifiesta que "Thales parece haber sido ateo" ([23], p.236)-; sino más bien la tendencia en el primitivo filosofar a estructurar el mundo según categorías familiares desde la óptica humana. Los dioses de Thales no son más que seres suprahumanos, demonios o *démones*, como él mismo los llama; y, sostiene, según Aecio, que "el universo está animado y lleno de *démones*, y a través de la humedad elemental penetra una fuerza divina que la mueve" ([7], p. 3). Se comprenderá esta manera de pensar si se tiene en cuenta lo que Aristóteles relata en *Del Alma*: " Parece que también Thales, según comentan, supuso que el alma era algo que mueve, si realmente dijo que la piedra (magnética) tiene alma porque mueve al hierro"; en lo que también abunda Diógenes Laercio: "Aristóteles e Hipias dicen que [Thales] hizo partícipes de alma a cosas inanimadas, demostrándolo a partir de la piedra del imán y del ámbar" ([7], p. 3). La teoría de Thales, y de los antiguos jonios, que establece que la materia vive y que las cosas inanimadas tienen alma, se llama *hilozoísmo*.

De cualquier modo, es muy probable que las concepciones hilozoístas de Thales fueran todavía parcialmente míticas y nebulosas, pero tendrían una influencia decisiva en la orientación del pensamiento heleno. Así, sin duda, fue el primero en trasladar la cualidad divina de sus viejos soportes antropomórficos a la inteligencia creadora que él incorpora a la sustancia universal. Esta "humedad elemental penetrada de potencia divina" rompe por vez primera el mito creador tradicional ([23], pp. 235-236).

8. Sus sucesores

La cuna de la filosofía griega es la ciudad de Mileto, en donde nacen Thales y sus sucesores: Anaximandro (c 610 a.C. – 545 a.C.) y Anaxímenes (c 585 a.C. – 528 a.C.). Son los tres primeros presocráticos, todos ellos filósofos naturales y que constituyen, como se ha dicho, la denominada *Escuela de Mileto*.

Para Anaximandro, unos quince años más joven que Thales, el *arkhê*, principio y sustancia fundamental de todas las cosas, es el *apeiron*: algo indeterminado e infinito, que los mejores intérpretes antiguos entienden como el fondo infinito, inagotable, del que todo se nutre y, al mismo tiempo, como algo divino, inmortal e imperecedero ([11], p. 48).

La especulación naturalista –iniciada por Thales- de Anaximandro logra una concepción del universo mucho más elaborada. Para él ([6], pp. 33-34), en un principio existían los cuatro elementos, que estaban dispuestos en forma estratificada: la tierra, que es el más pesado, en el centro; el agua, cubriéndola; la niebla, sobre el agua; y el fuego, envolviéndolo todo. El fuego, al calentar el agua la evaporó y así apareció la tierra seca; aumentó el volumen de la niebla y la presión creció tanto que las ardientes capas del universo estallaron y tomaron la forma de ruedas ígneas, que envueltas en tubos de niebla giraron alrededor de la tierra y el mar; de este modo, los cuerpos celestes que vemos son agujeros en los tubos, a través de los cuales brilla el fuego encerrado. En esta fascinante cosmología, la Tierra es para él un cilindro cuyo diámetro de la base es triple que la altura; en torno a ella y a una distancia nueve veces el radio de la Tierra, gira la esfera de las estrellas; a una distancia de dieciocho veces el radio, la esfera de la Luna y a una distancia de veintisiete veces el radio, la esfera del Sol ([11], p. 48).

Entre otras contribuciones diversas de Anaximandro, cabe decir que parece ser que descubrió la oblicuidad de la elíptica, introdujo en Grecia el *gnomon* (reloj de sol con una varilla vertical), dibujó un *mapa mundi*, etc. ([1], p. 285). Asimismo, merecen reseñarse que de él proviene el primer escrito filosófico de Occidente:

Sobre la naturaleza, y que igualmente fue el primero en sugerir una idea evolucionista de los animales, según la cual, el hombre procedería del pez, quien inicialmente viviría en el agua, pero luego se adaptaría al medio terrestre ([6], p. 34).

Para Anaxímenes, algo posterior que Anaximandro y discípulo suyo, y probablemente el último de los grandes pensadores que precedió a Pitágoras, el *arkhê* era el aire (*aer*, *pneuma*), sustancia unitaria, infinita e indestructible. Incluso, para él, el alma del mundo era ese aire (idea no muy sorprendente, pues la conciencia humana muere cuando se deja de respirar); esto es, lo concebía como algo vivo y divino ([12], p. 34). Las cosas, entonces, surgían del aire por condensación o *rarefacción* ([1], p.286): "El aire enrarecido se torna fuego; condensado, viento; después, nubes; luego, aún más condensado, agua, tierra y piedra, y de ahí todo lo demás", como indica el helenista H. Diels ([11], p. 49); y la Tierra era para él "como una gran hoja que flota en el aire" ([12], p. 35).

No se encuentran sin embargo aportaciones matemáticas –se descartan las contribuciones a la astronomía o a la cartografía- de Anaximandro y Anaxímenes, si se excluye la posible influencia del concepto de infinitud del primero de ellos en la muy posterior construcción por Cantor de la noción de transfinito ([1], p. 286). Por tanto, se considera que ninguno de los dos continuó la labor matemática de Thales; pero es más, se desconoce a ciencia cierta cómo progresó la geometría entre Thales y Pitágoras. Sólo se tiene al respecto el siguiente testimonio de Proclo: "Después de Thales, Ameristo ...se encargó del estudio de la geometría ...", pero no se sabe nada del pretendido geómetra, del que incluso su nombre –Mamerco, según otros- ofrece dudas ([9], p. 140).

La caída de Mileto, en fin, provocó el éxodo de los intelectuales hacia el occidente: la Magna Grecia; allí aparece Pitágoras de Samos, nacido hacia el año 570 a.C., quien prosigue y engrandece la obra de Thales, supuesto maestro suyo (también lo fue Anaximandro). Sobre ellos dice Proclo: "Después de éstos [Thales y Mamerco], Pitágoras transformó el estudio de tal disciplina [las matemáticas] en una verdadera ciencia, considerando sus fundamentos desde un punto de vista más elevado e investigando sus teoremas bajo un enfoque más abstracto e intelectual ..." ([4], pp. 15-16).

A Thales y a Pitágoras, a la cabeza de los matemáticos jónicos y pitagóricos, respectivamente, les cabe el inmenso mérito de haber jugado un papel iniciático en la construcción de la matemática -y en particular de la geometría –como una disciplina formal. Con justicia, son designados uno y otro *el primer matemático* y *el padre de la matemática* ([8], p. 23).

Bibliografía

[1] Bochner, S. (1991). *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*. Madrid: Alianza.
[2] Boyer, C. (1968). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.
[3] Cid, F. (1997). *Historia de la Ciencia*, Vol. 1. Barcelona: Planeta.
[4] Colerus, E (1972). *Breve historia de las matemáticas*, Vol. 1. Madrid: Doncel.
[5] Colette, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas*, Vol. I. Madrid: Siglo XXI.
[6] Farrington, B. (1979). *Ciencia griega*. Barcelona: Icaria.
[7] Fragmentos y testimonios de Tales. http://www.filosofia.org/cur/pre/talesfyt.htm
[8] González, P. M. (2001). *Pitágoras. El filósofo del número*. Madrid: Nivola.
[9] Heath, T. (1981). *A history of greek mathematics*, Vol. I. New York: Dover.
[10] Hegel, G.W. F. (1955). *Lecciones sobre la historia de la filosofía*, Vol. I. México: Fondo de Cultura Económica.
[11] Hirschberger, J. (1981). *Historia de la filosofía*, Tomo I. Barcelona: Herder.
[12] Hull, L. W. H. (1978). *Historia y filosofía de la ciencia*. Barcelona: Ariel.
[13] Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics*. New York: Addison-Wesley.
[14] Martínez, M. (1991). "Los orígenes del método axiomático-deductivo en la matemática griega", en *Seminario de historia de la matemática*, Vol. I. Madrid: Fac. de Ciencias Matemáticas, UCM, pp. 187-210.
[15] Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*. Madrid: Huerga y Fierro.
[16] Proclo; trad. Morrow, G. R. (1970). *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton: Princeton Univ.
[17] Rey, J. y Babini, J. (1986). *Historia de la Matemática*, Vol. I. Barcelona: Gedisa.
[18] Ríbnikov, K. (1991). *Historia de las matemáticas*. Moscú: Mir.
[19] Serres, M. (1989). "Gnomon: les débuts de la géométrie en Grèce", en *Éléments d'histoire des Sciences*. Paris: Bordas.
[20] Thomas, I. (1967). *Greek Mathematics*, Vol. I. London: W. Heinemann and Harvard Univ.
[21] Vera, F. (1970). *Científicos griegos*. Madrid: Aguilar.
[22] Voilquin, J. (1964). *Les penseurs grecs avant Socrate. De Thalès de Milet à Prodicos.* Paris: Garnier-Flammarion.
[23] Zafiropulo, J. (1948). *Anaxagore de Clazomène*. Paris: Les belles lettres.

Pensamiento simbólico y Matemática en el Paleolítico Superior

Francisco A. González Redondo
Dpto. Álgebra. UCM
faglezr@edu.ucm.es

Enrique Silván Pobes
Dpto. Didáctica CC Experimentales. UCM
esilpob@edu.ucm.es

Abstract

In this paper the standard approach to the roots of mathematical thinking during human Prehistory is analyzed, from Neanderthal Mousterian times to the Anatomically Modern Humans of the Upper Magdalenian. Besides some generally accepted conclusions which are taken into account, several other statements are criticized for their lack of foundations. Finally, the study is also presented of those archaeological pieces which seem to us of an undisputed implicit mathematical content but still are absent from the literature.

[Artículo dedicado a la Profesora Mª Paz Bujanda Jáuregui con motivo de su jubilación]

1. A modo de Introducción

La práctica totalidad de los manuales de Historia de la Matemática escritos en las últimas décadas, antes de adentrarse en desarrollos iniciales de la disciplina en las antiguas civilizaciones, comienzan con un capítulo en el que se plantea, a modo de conjetura plausible, la presencia de pre-concepciones matemáticas en el Paleolítico. Para fundamentar sus consideraciones, cada autor recurre a alguna de las piezas arqueológicas que considera especialmente significativa de entre las muchas existentes en los diferentes museos. En ellas sitúan los historiadores unos orígenes del pensamiento matemático que, aunque sean indemostrables, sí parecen manifestarse, desde entonces, en numerosas tradiciones presentes hasta la actualidad en culturas muy diferentes de distintos continentes.

Recientemente escribían d'Errico *et al.* (2003, p. 31): "el punto de inflexión fundamental en la evolución de las actividades cognitivas y la transmisión cultural humanas tuvo lugar cuando los hombres fueron capaces, por primera vez, de almacenar conceptos con la ayuda de símbolos materiales y anclar o incluso situar memoria fuera del cerebro individual". El pensamiento de los humanos que nos precedieron a lo largo de lo que se ha venido en llamar, en sentido general, Prehistoria, no ha dejado registro fósil. El conocimiento que de ello se tiene ha habido que buscarlo, enunciando hipótesis razonables, en dos fuentes arqueológicas englobadas en lo que se conoce como "arte prehistórico": las pinturas y grabados parietales (en las paredes de las cuevas y los abrigos rocosos) y las marcas en el material mobiliar (hueso, marfil, asta, madera o piedra). En la búsqueda de evidencias acerca del registro de ese pensamiento en estos últimos objetos el principal problema que surge es el de discernir entre las representaciones simbólicas realizadas sobre material manufacturado deliberadamente por los humanos y las marcas originadas en los procesos naturales o en actividades meramente funcionales.

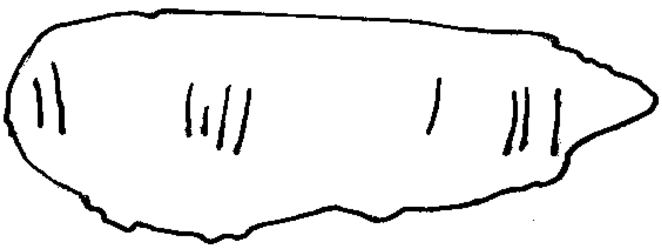


Figura 1. "Placa de Kozarnika" (Bulgaria).

Algunos hallazgos recientes en la cueva de Kozarnika (Bulgaria), con una antigüedad de algo más de 1 millón de años, están llevando a los investigadores a interpretar como símbolos ciertas marcas paralelas encontradas en un hueso de 8 cm de longitud (Figura 1)[1], trabajado por homínidos pre-*sapiens*. Hasta hace poco tiempo, a los objetos encontrados correspondientes al mundo de Neandertal (*Homo sapiens neanderthalensis*), especialmente los huesos grabados y las losas relacionadas con enterramientos descubiertos en Hungría, se les había atribuido

[1] De momento solamente puede consultarse al respecto el artículo de Paul Rincón, "Early human marks are 'symbols'", en http://news.bbc.co.uk. A lo largo del artículo se harán constar a pie de página las referencias consultadas de índole no bibliográfica.

alguna función decorativa más que simbólica [Scarre (1993), p. 48]. Sin embargo, algunos hallazgos recientes en cuevas de nuestra región cantábrica, datados hace unos 50.000 años, están obligando a replantearse muchas conclusiones En cualquier caso, nadie se ha atrevido todavía a buscar en ellos alguna consideración implícita de índole matemática.

Es verdad que tanto los últimos homínidos como las primeras poblaciones *Homo* utilizaron y dieron forma a herramientas de madera, piedra y hueso. También parece demostrado que tanto los neandertales de hace unos 90.000 años como los “humanos anatómicamente modernos”[2] del Levante elaboraron los mismos tipos de herramientas de piedra. En Europa se comenzaron a realizar grabados sobre huesos y maderas hace por lo menos 50.000 años. De ellos, uno de los más antiguos (Figura 2) es el hallado en Bacho Kiro (Bulgaria), un hueso con más de diez marcas en zigzag o en cuñas de diferentes tamaños, dispuestas desordenadamente y acompañadas de algunos trazos aislados [Scarre (1993), p. 47]. Aunque las marcas son indudablemente intencionadas, no accidentales, atribuirle algún significado simbólico (mucho menos matemático) sería muy aventurado.

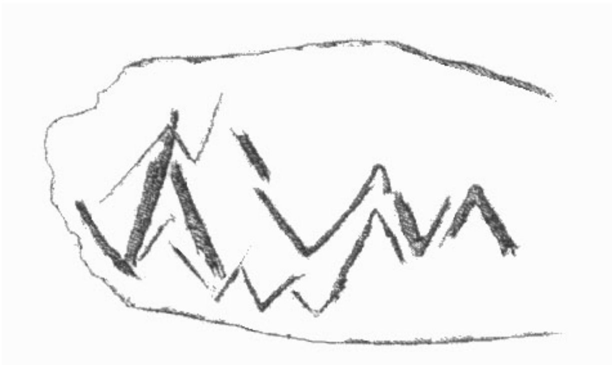


Figura 2. “Placa de Bacho Kiro” (Bulgaria).

En los últimos tiempos se ha llegado a conjeturar una posible “tarea docente” de los neandertales, adaptados desde hacía miles de años a las condiciones de vida de la región franco-cantábrica, hacia las poblaciones de esos nuevos humanos modernos llegados a nuestro continente desde África, por la coexistencia de

[2] Esta denominación de “humanos anatómicamente modernos”, abreviada en la literatura con las iniciales inglesas AMH, pretende evitar toda referencia al problema de determinar el origen de nuestra especie. A principios del siglo XXI, con tantos recursos destinados a la investigación genética, llama la atención la generalización de taxonomías anatómicas habituales en el siglo XIX.

restos significativos en niveles arqueológicos comunes de casi 40.000 años de antigüedad[3]. Sin embargo, aquéllos y estos descubrimientos aislados, en todo caso, apenas resisten comparación con la ingente cantidad de materiales decorados correspondientes ya a nuestros predecesores Cro-Magnon, de los que conocemos su existencia en Europa, desde esos momentos, a lo largo del período que se denomina Paleolítico Superior.

2. La visión standard de la prehistoria de la Matemática

La primera pieza a la que se han venido refiriendo los historiadores de la matemática [Boyer (1968), p. 22; Bunt *et al.* (1976), pp. 2-3; Struick (1987), p. 11; etc.] es un hueso de lobo de unos 35.000 años, encontrado por Karl Absolom en Vestonice (Moravia, República Checa) en unas excavaciones en las que también se descubrió una cabeza de mujer esculpida en marfil. En el hueso, de unos 18 centímetros de largo (Figura 3), se encuentran 55 muescas. Los especialistas, siguiendo la primera descripción presentada por Absolom el 2 de octubre de 1937 en *London Illustrated* [se recoge también en *Isis* 28, pp. 462-463; Flegg (1989), pp. 37-38; etc.], consideran que las marcas están agrupadas de cinco en cinco y separadas por los trazos intermedios más largos en dos series, una de 30 ($=6\times5$) muescas, y otra de 25 ($=5\times5$).

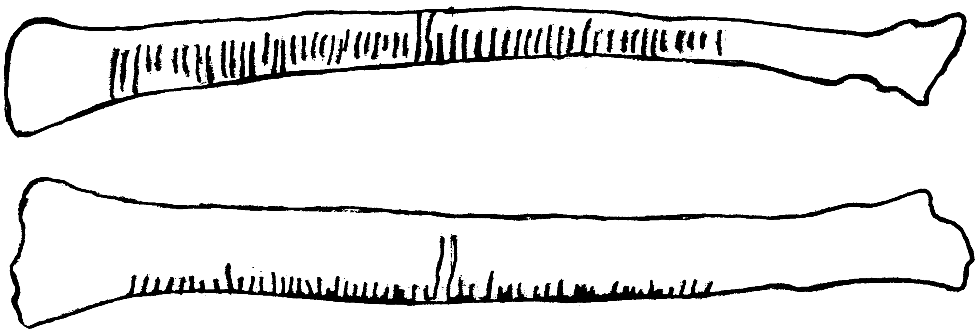


Figura 3. "Hueso de Vestonice" (República Checa).

Indudablemente, las muescas parecen sugerir el registro contable de una colección con el mismo número de objetos. Sin embargo, analizando detalladamente

[3] Puede verse el divulgativo número monográfico de *National Geographic*, "Del origen de la vida a Atapuerca", 2004.

las fotos disponibles, no se detecta de ninguna manera el supuesto agrupamiento de cinco en cinco que, efectivamente, sugeriría en el autor una posible correspondencia de las marcas de cada grupo con los dedos de la mano. En este sentido, y siguiendo sin contrastar esa tentadora pero infundada hipótesis, en las primeras ediciones de su libro Ifrah (1987) supuso que las incisiones no sólo estaban agrupadas, sino que también estaban dispuestas en dos series a lo largo de dos caras del hueso. Como es natural, en la siguiente edición Ifrah (1997) hizo desparecer todas las referencias al respecto, a la vez que, basándose en otras fuentes menos optimistas, situaba la antigüedad del hueso todo lo más en 20.000 años.

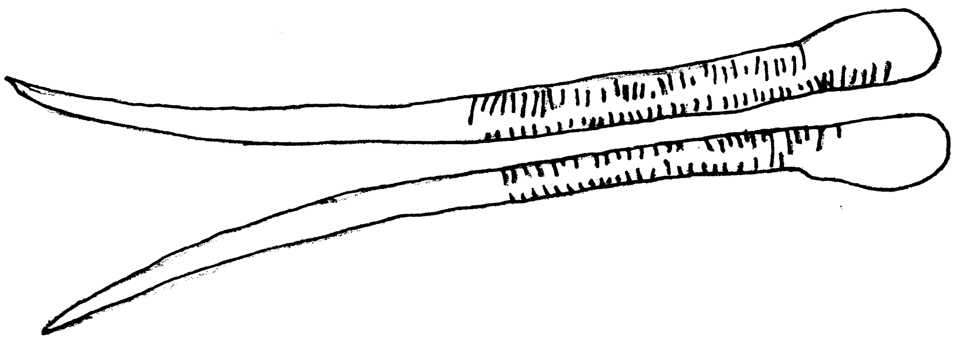


Figura 4. "Varilla de Enfer" (Francia).

Los vestigios descubiertos de este tipo comienzan a ser abundantes, aunque la mayor parte siguen sin tenerse en cuenta en la literatura. Así, en el *British Museum* de Londres[4] se conserva una varilla (¿alfiler?) de hueso, de hace unos 34.000 años, procedente de la cueva de Enfer (Abri Lartet, Dordogne, Francia), con incisiones análogas a las del hueso precedente [Sieveking (1987)]. Tiene una longitud de 20 centímetros, y en ella se realizaron muescas agrupadas en tres columnas (Figura 4), una frontal y dos laterales, una a cada lado. Contienen, respectivamente (y atendiendo a la separación que puede comprobarse entre las marcas de cada serie), 31 $(=8+8+10+5)$ en la cara central, 37 $(=9+2+8+3+4+5+8)$ en la columna de la derecha y 33 $(=3+8+5+2+10+5)$ en la de la izquierda, aunque quizá se haya perdido por abrasión alguna muesca en la cabeza de la pieza correspondiente a la serie central, como también cabe pensar que no terminase de marcarse esa parte.

---

[4] Una descripción de esta pieza puede verse en www.thebritishmuseum.ac.uk.

Igual que en el caso anterior, podrían aventurarse diferentes hipótesis acerca de los posibles contenidos matemáticos de la varilla (y la finalidad para la que fue trabajada) más allá de las pretensiones meramente decorativas del autor. Pero para ello sería necesario estudiar la pieza con un detalle que no se ha emprendido hasta el momento y que nosotros sí nos proponemos realizar próximamente.

Realmente, el tipo y número de materiales en los que indagar posibles manifestaciones simbólicas relacionadas con el registro de algunas cantidades empieza a ser notable. En los libros [Ifrah (1997), pp. 170-171] sí se suele dar entrada a un asta de reno (Figura 5), fechado hace unos 15.000 años, hallado en Brassempouy (Las Landas, Francia), y conservado en el Museo de Aquitania de Burdeos. En él se encuentran marcados 1, 3, 5, 7 y 9 trazos rectilíneos, en una disposición que ha dado lugar a no pocas conjeturas en lo que se refiere a las pretensiones matemáticas de su autor.

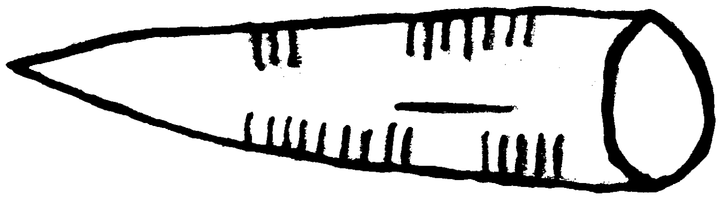


Figura 5. "Asta de Brassempouy" (Francia).

Así Ifrah, ni más ni menos que ha venido a considerarlo (quizá exageradamente) "una especie de 'herramienta aritmética' que contiene una representación gráfica de los primeros números impares, así como una disposición que permite hallar rápidamente algunas propiedades elementales". Estas "propiedades elementales", partiendo de la situación 2×2 de las marcas,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

serían, entre otras posibles, las siguientes:

$$9-7=5-3=2\,; \quad 3+9=5+7=12\,; \quad 7-3=9-5=(9+5)-(7+3)=4\,.$$

Parece claro que se deben relativizar las pretensiones adelantadas por Ifrah. De hecho, se han encontrado otras piezas análogas, con marcas en otras disposiciones, en las que resulta más complicado detectar intenciones parecidas a las del asta precedente.

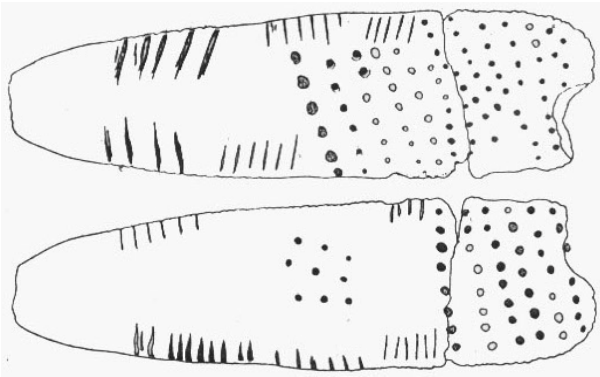


Figura 6. "Placa de Enfer" (Francia).

Por ejemplo, en la placa de hueso de datación auriñaciense (Figura 6) encontrada en la ya citada anteriormente cueva de Enfer, también se observan muescas en dos series transversales [Guedj (1998), p. 16; Marshack (1972a), pp. 50-55, (1972b), pp. 448-449]. En la primera hilera aparecen separadas 5, 6 y 5 marcas; en la otra, 4 y 6. Por tanto, y en la misma línea, habría que buscar correlaciones entre los números:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & \end{pmatrix}.$$

Si añadimos que, análogamente, en la otra cara de la placa aparecen las marcas 4 y 6; 3, 8, 6 y 6, las correlaciones habría que buscarlas en

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & \\ 4 & 6 & & \\ 6 & 4 & & \\ 3 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pero no parece que esa tarea, presumiblemente de índole matemática, vaya a ser muy fructífera.

3. Hacia el registro del tiempo: el recuento de días y meses lunares

Ciertamente, los diferentes grupos humanos del Paleolítico Superior pudieron sentir la necesidad de realizar registros contables de diferentes colecciones de objetos o sucesos. De entre estos últimos, uno debió ser, sin duda, el transcurrir del tiempo tomando como unidad el día, agrupándolos según meses lunares (que tienen una duración de 29,5 días) o, incluso, contemplando series temporales mucho más largas. Por supuesto, la certeza en la repetición constante en el tiempo de estos procesos pudo constituir una de las primeras motivaciones contables de nuestros antepasados [Nilsson (1920)].

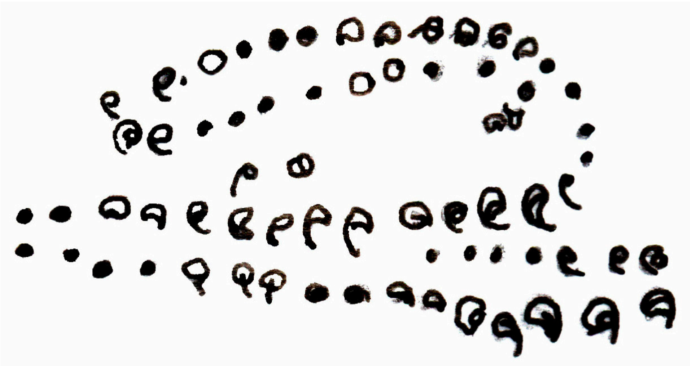


Figura 7. Marcas en la "Placa de Blanchard" (Francia).

Una pieza a la que se está dando en los últimos tiempos cierta importancia es la "Placa de Blanchard" (Figura 7), encontrada en Abri Blanchard (Francia). Está datada hace más de 25.000 años (auriñaciense), y en ella se encuentran 69 marcas que han sido analizadas al microscopio, en sus formas, profundidades y tamaños, por Alexander Marshack[5]. Grattan-Guinness (2000, p. 24) asume la interpretación de Marshack, (1972a, pp. 48-49; 1972b, pp. 445-448), según la cual las incisiones en el hueso corresponderían al paso de la luna, día a día, por sus diferentes fases: llena, media, creciente y nueva.

---

[5] Acerca de este hueso puede verse www.simonsingh.net. Una revisión muy crítica sobre de las opiniones de Marshack puede verse en el trabajo de Richard Flavio "Straight Lines: Selected Reviews", en www.flavinscorner.com/reviews.htm.

Por otro lado, el hallazgo en la cueva de Tai (Francia) de otra placa de hueso, de unos 9 cm de longitud y datada hace unos 12.000 años, con más de 1.000 incisiones en su superficie agrupadas en diferentes filas (algunas incompletas por estar dañada la pieza), ha llevado a conjeturar (pensamos que algo "alegremente") que podría tratarse del registro de los días de diferentes años sucesivos. Se trataría, por tanto, del "calendario solar conocido más antiguo" [Marshack (1991); Scarre (1993), p. 65]. Aunque el realizar todas estas marcas resulta tedioso y será difícil descubrir realmente por qué su autor las realizó, no parece más sólida la hipótesis calendárica que la de la posible finalidad meramente decorativa de la misma.

4. Etnomatemática: manifestaciones contables en el Paleolítico africano

Pero nuestros antepasados no desarrollaron estas habilidades solamente en Europa, y los pre-historiadores, aunque sigan imbuidos del usual etnocentrismo cultural occidental, ya no pueden dedicarse únicamente a las manifestaciones simbólicas presentes en las piezas descubiertas en los yacimientos situados entre los Urales y la Cornisa Cantábrica.

Los numerosos hallazgos de piezas de ocre en la Cueva de Blombos (oeste de la Provincia de El Cabo, República Sudafricana), con una antigüedad de unos 77.000 años, han llevado a autores como d'Errico *et al*. (2003, pp. 15-19) a concluir que "las habilidades cognitivas modernas surgieron gradualmente en África en conjunción con los cambios biológicos que marcan el origen de nuestra especie". Y, de hecho, los diseños abstractos grabados que se han descubierto en Blombos pueden considerarse entre las primeras manifestaciones de esa habilidad cognitiva que supone registrar pre-conceptos con la ayuda de elementos materiales.

Una evolución análoga se ha producido entre los estudiosos de la Historia de la Matemática. Así, la comunidad científica internacional tiene asumido hoy que en África comenzaron a utilizarse instrumentos para contar desde hace 37.000 años, también sobre huesos y maderas[6]. De entre todos los restos encontrados destaca el más antiguo, el "Hueso de Lebombo" (Figura 8); un peroné de babuino con 29 incisiones paralelas hallado, junto con otros trozos de madera y hueso grabados, en la Cueva de Border, en las montañas Lebombo entre Sudáfrica y Swazilandia [Bogoshi *et al*. (1987), Scarre (1993), p. 47]. Complementa-

[6] Pueden verse los *Newsletter* de la Comission on the History of Mathematics in Africa, de la African Mathematical Union (AMUCHMA), en www.math.buffalo.edu.

riamente debe apuntarse que, de acuerdo con algunos investigadores [Brooks *et al*. (1995)], la antigüedad de la pieza sería realmente de 43.000 años.

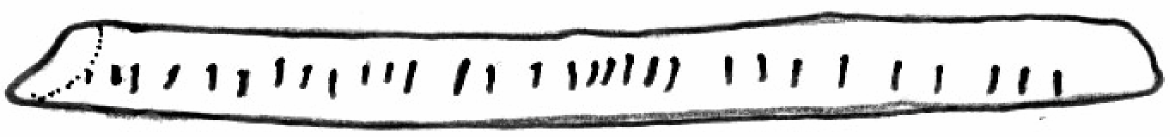


Figura 8. "Hueso de Lebombo" (República Sudafricana).

En todo caso, el hueso está fracturado, por lo que no puede saberse si en su estado original completo realmente tenía 29 o 30 muescas, pues así sería plausible que tuviera relación con el cómputo de días del mes lunar. Pero tampoco podemos saber si hubo más incisiones en la parte perdida, con lo que la correspondencia uno a uno de las muescas no se referiría, en su caso, a los días de la lunación, sino a una colección de objetos hoy indeterminados.

En África Central ecuatorial, en la frontera de la actual República Democrática del Congo con Uganda, a las orillas del Lago Edward (una de las fuentes del Nilo), hace más de 8.500 años vivió durante unos pocos siglos una comunidad de pescadores y recolectores, posteriormente enterrada por una erupción volcánica [De Heinzelin (1962)]. Aunque por las fechas correspondería ya al período Mesolítico, igual que en el caso del "Hueso de Lebombo" Brooks *et al*. (1995) retrasan su antigüedad hasta hace 25.000 años, ya sí propiamente Paleolítico Superior.

Entre los restos que se han encontrado de este grupo, destaca un hueso, de 10,2 cm de largo (Figura 9), con una pieza de cuarzo insertada en uno de los extremos (quizá para poder dibujar marcas sobre piedra con ella), depositada en el Institut Royal de Sciences Naturelles de Bruselas (Bélgica), conocido como "Hueso de Ishango".

Tiene 168 incisiones transversales dispuestas en diferentes agrupaciones, separadas entre sí, a lo largo de tres columnas. Desarrollando en el plano la superficie cilíndrica del hueso, el número de marcas en la primera columna de la izquierda es de 11, 13, 17 y 19 muescas. En la columna central los grupos que aparecen son de: 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5 y 7 muescas. Finalmente, en la columna de la derecha aparecen 11, 21, 19 y 9 muescas.

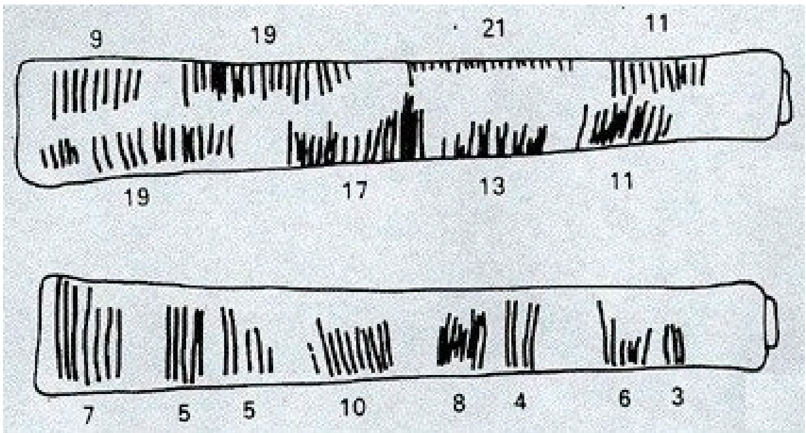


Figura 9. "Hueso de Ishango" (República Democrática del Congo).

Esta última, de acuerdo con De Heinzelin (1962, p. 110) [Fauvel y Grey (1987), pp. 5-6], proporcionaría indicios del primer uso de un sistema de numeración de base diez, pues las agrupaciones son de 11 (=10+1), 21 (=20+1), 19 (=20-1), y 9 (=10-1). Además, en total las marcas de la tercera columna suman 60, igual que todas las de la columna de la izquierda, en la que encontramos los cuatro números primos entre 10 y 20 (11, 13, 17 y 19). Por último, incluso se ha querido encontrar en la columna central una posible ilustración del método de duplicación (estadio primitivo de multiplicación, usual en la Matemática egipcia miles de años más tarde), pues junto a las 3 primeras muescas aparecen 6 ($=3\times 2$); a continuación de las siguientes 4 se encuentran 8 ($=4\times 2$); y tras las 10 ($=5+5$) que siguen aparecen 5, 5 y 7.

Junto a la evidencia de que la suma de las marcas de las tres columnas (respectivamente, 60, 48 y 60) son las tres múltiplos de 12, Marshack aventuraba en un primer trabajo de 1962 que podría contener la tabla de números primos más antigua que se conserva. Este mismo autor, incluso consideró posteriormente [Marshack (1972a), p. 31; Fauvel y Grey (1987), pp. 6-7] que quien marcó el hueso pretendía representar ni más ni menos que un calendario lunar de seis meses. Hasta ha habido autoras [Zaslavsky (1991), pp. 17-19] que han llegado a conjeturar que podría tratarse de un recuento de ciclos menstruales, por lo que el hueso sería obra de una mujer, y puede plantearse la pregunta de si no serían mujeres las primeras matemáticas de la Historia.

En cualquier caso, junto con el éxito socio-científico que supone la disposición expositiva en el Museo de Bruselas donde se conserva la pieza, y las numerosas páginas web que se le dedican[7], también debe destacarse su presencia, para ilustrar los posibles primeros estadios matemáticos de la humanidad, en un número creciente de manuales de Historia de la disciplina [Flegg (1989), pp. 38-39; Eves (1992), p. 10; etc.].

5. Matemática implícita en una pieza infravalorada

La cuestión acerca del propósito o finalidad matemática de los autores de cada una de las piezas que hemos ido destacando y analizando a lo largo del artículo permanecerá siempre en el ámbito de la conjetura plausible. Sin embargo, ante el hecho de que las personas que marcaron esos objetos pertenecían a nuestra misma especie y demostraron a lo largo de los años, con sus pinturas parietales y sus grabados mobiliares, una gran capacidad de simbolización, no podemos terminar este trabajo sin aportar alguna "prueba", indudable e indiscutible, de la mente matemática de nuestros antepasados paleolíticos fuera del ámbito de lo opinable; "prueba" que, además de ser prácticamente la única de su género que se conserva, aún no ha sido tenido en cuenta por los historiadores de la Matemática.

Esto lo encontramos en la placa ovoide de hueso de unos 15 centímetros de largo (Figura 10), catalogada como "rombo, bramadera o churinga", que se encontró en la Cueva de la Roche (Lalinde, Francia)[8]. Pertenece al Magdaleniense Superior (hace 13.500-12.000 años), y está depositada en el Musée des Antiquités Nationales de Saint-Germain-en-Laye de París (Francia).

Sin entrar a discutir si el autor pretendió fabricar realmente un instrumento musical destinado a "bramar" (zumbar al girar atado a una cuerda), sí podemos analizar la disposición que hizo de las muescas.

Para empezar, la pieza se fabricó mediante pulido buscando una completa simetría básica, que se concretará después en la decoración de la superficie según dos ejes, uno longitudinal y otro transversal, de acuerdo con un sistema de notación mixto basado en agrupaciones de muescas de 5 en 5 y de 10 en 10 que, en líneas generales y dada su uniforme distribución, debía tener pre-decidida mentalmente nuestro antepasado antes de empezar la tarea.

---

[7] En la página web www.naturalsciences.be existe disponible mucha información acerca de esta pieza, incluyendo, junto a las clásicas fotografías, una animación en 3D que permite ir girándola para contemplar toda la superficie. También pueden consultarse www.lucpire.be y www.math.buffalo.edu.

[8] Existe una réplica en el Museo de Altamira (Santillana del Mar, Cantabria).

Aunque es imposible precisar el orden en el que se fueron realizando las marcas, la primera serie de dibujos que observamos son nueve grupos de 5 trazos (5 horizontales y 4 verticales intercalados entre los anteriores), alternativamente ortogonales entre sí, situados a lo largo del eje longitudinal. Quedarían determinados en éste, por tanto, cinco rectángulos de base casi tres veces la altura, separados entre sí por otros tres trazos verticales paralelos. En un extremo del eje encontramos el agujero para colgar la pieza, quedando completado, en el extremo opuesto, por 4 nuevas marcas verticales.

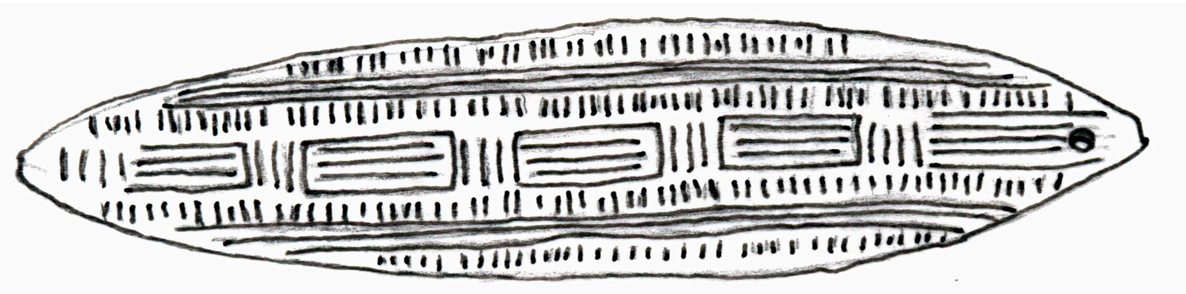


Figura 10. "Bramadera de Lalinde" (Francia).

Seguidamente, y simétricas con respecto a ese mismo eje, encontramos dos series, ambas de ≈ 62 trazos más pequeños cada una, distribuidos a ambos lados del diseño longitudinal, cada una de las cuales puede pensarse que reúne grupos de 10+3+10+3+10+3+10+3+10 coordinadamente con el diseño inicial, 10 a lo largo de las "bases" de cada rectángulo y 3 como continuación de los 3 trazos verticales intercalados entre cada dos de ellos.

Para completar la decoración se incluyeron seguidamente, a cada lado del eje, tres líneas paralelas a éste y otra serie de pequeños trazos, alineados también en paralelo con los grupos análogos de 62 marcas anteriores, hasta completar los límites de la pieza.

Verdaderamente, la persona que realizó esta bramadera, además de tener una notable percepción espacial, sabía contar. Presumiblemente lo hacía con una idea primitiva de lo que hoy consideraríamos un sistema decimal que utiliza el 5 como base auxiliar, motivado, sin duda, por el que Aristóteles consideraba el "accidente anatómico" de tener cinco dedos en cada mano.

Este sistema, que es el usualmente adoptado a lo largo y ancho del planeta a medida que los diferentes pueblos fueron alcanzando sus respectivos niveles de civilización, es el que, con la notación conveniente y la concepción posicional introducida en Occidente por los árabes desde la India, se utiliza hoy en día.

6. Consideraciones finales

En este trabajo hemos estudiado diferentes manifestaciones simbólicas del hombre primitivo que algunos profesionales de la Prehistoria han considerado que contenían Matemática implícita y los historiadores de la Matemática han ido aceptando e incorporando con mayor o menor acierto en los primeros capítulos de sus manuales.

También hemos destacado algunas piezas que hasta ahora no se habían estudiado desde esta perspectiva y que nos han parecido especialmente relevantes. Quedan, sin embargo, numerosas cuestiones que presentaremos en próximos trabajos y que, en síntesis apretada, pueden ser las siguientes:

1) La presencia, en su caso, de este pensamiento simbólico en el Paleolítico de la Cornisa Cantábrica, tan rico como es en arte rupestre y del que no existe hasta ahora ninguna pieza destacada "en sentido matemático" en la historiografía internacional.

2) El paralelismo, si existiera, entre el simbolismo mobiliar no figurativo y su análogo parietal, tema que no ha sido suficientemente estudiado ante las dificultades que tiene la interpretación de colecciones de puntos y figuras "geométricas" comparado con la belleza inmediata de dibujos y grabados de ciervos, bisontes o caballos.

3) La continuidad de estas manifestaciones simbólicas a lo largo del Mesolítico y del Neolítico hasta enlazar con el megalitismo astrológico tan abundante en la Europa Occidental.

Todo ello lo iremos presentando en breve en próximos artículos.

Referencias

[1] Bogoshi, J., Naidoo, K. y Webb, J. (1987): "The oldest mathematical artefact". *Mathematical Gazette* 71 (458), 294.

[2] Boyer, C. B. (1986): *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza. [Ed. Inglesa original, 1968].

[3] Brooks, A. *et al*. (1995): "Dating and Context of three Middle Stone Age Sites with Bone Points in the Upper Semliki Valley, Zaire". *Science* 268, 548-553.

[4] Bunt, L. N. H., Jones, P. S. y Bedient, J. D. (1976): *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall.

[5] De Heinzelin, J. (1962): “Ishango”. *Scientific American* 206 (6), 105-116.

[6] D’Errico, F. *et al.* (2003): “Archaelogical Evidence for the Emergence of Language, Symbolism and Music. An Alternative Multidisciplinary Perspective”. *Journal of World Prehistory* 17, 1-70.

[7] Damerow, P. (1996): *Prehistory and Cognitive Development*. Max-Planck Institut for the History of Science. Preprint 30.

[8] Eves, H. (1992): *An Introduction to the History of Mathematics*. Orlando (Florida): Saunders College Publishing.

[9] Fauvel, J. y Grey, J. (eds.): (1987): *The History of Mathematics. A Reader*. London: MacMillan.

[10] Flegg, G. (ed.) (1989): *Numbers Through the Ages*. London: MacMillan Education Ltd.

[11] Gerdes, P. (1994): “On mathematics in the history of sub-Saharan Africa”. *Historia Mathematica* 21, 345-376.

[12] Grattan-Guinness, I. (2000): *The Rainbow of Mathematics. A History of the Mathematical Sciences*. New York: Norton.

[13] Guedj, D. (1998): *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Ediciones B.

[14] Ifrah, G. (1987): *Las cifras. Historia de una gran inv*ención. Madrid: Alianza.

[15] Ifrah, G. (1997): *Historia Universal de las cifras*. Madrid: Espasa.

[16] Marshack, A. (1964): “Lunar Notation on Upper Paleolithic Remains”. *Science* 146, 743-745.

[17] Marshack, A. (1972a): *The Roots of Civilization*. New York: MacGraw-Hill. (2ª ed., 1991).

[18] Marshack, A. (1972b): “Cognitive Aspects of Upper Paleolithic Engravings”. *Current Anthropology* 13, 445-477.

[19] Marshack, (1972c): “Upper Paleolithic notation and symbol”. *Science* 178, 817-828.

[20] Marshack, A. (1991): “The Tai Plaque and calendrical notation in Upper Palaeolithic”. *Cambridge Archaeological Journal* 1, 25-61.

[21] Nilsson, M. P. (1920): *Primitive Time Reckoning*. Oxford University Press.

[22] Scarre, C. (1993): *Timelines of the Ancient World*. London: Dorling Kinderley.

[23] Seidenberg, A. (1962): “The Ritual Origin of Counting”. *Archive for History of Exact Sciences* 2, 1-40.

[23] Sieveking, A. (1987): *A catalogue of Paleolithic Art in the British Museum*. London: The British Museum Press, nº 151.

[24] Struick, D. J. (1948): “Stone Age mathematics”. *Scientific American* 179, 44-49.

[25] Struick, D. J. (1987): *A Concise History of Mathematics*. New York: Dover.

[26] Zaslavksy, C. (1973): *Africa Counts: Number and Pattern in African Culture*. Boston: Prindle, Schmidt and Weber.

[27] Zaslavsky, C. (1992): “Women as the First Mathematicians”. *Women in Mathematics Education Newsletter* 7 (nº 1).

[28] Zaslavsky, C. (1994): “Mathematics in Africa: Explicit and implicit”. En I. Grattan-Guinness (ed.): *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, pp. 85-92. London: Routledge.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,
52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65,66, 67 y 68.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

– la dirección a donde se han de enviar
– el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.