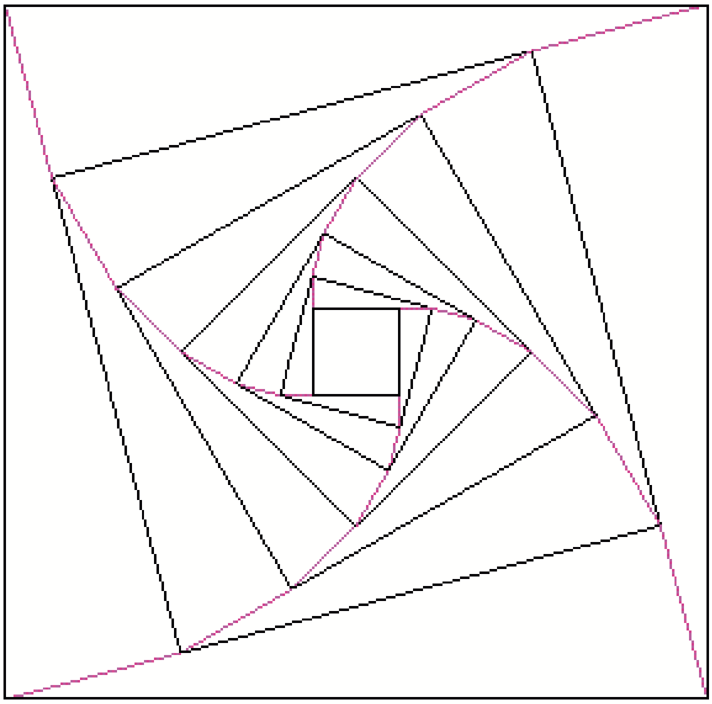
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 65
OCTUBRE DE 2003

ÍNDICE

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

XXI Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Cada año, desde 1983, nuestra Sociedad y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, han celebrado el Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas que ya se ha hecho tradicional y en 2003 ha tenido lugar por vigésimo primera vez.

En estos veintiún años, hemos tenido la satisfacción de ver cómo el ámbito de este Concurso se ha ido extendiendo a otras comunidades, a veces alejadas de la de Madrid y, sobre todo, cómo muchos de los alumnos premiados han obtenido posteriormente notables éxitos en las Olimpiadas Matemáticas, tanto nacionales como internacionales.

El Concurso de este año se celebró en la mañana del sábado 6 de Junio de 2003 en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. La entrega de premios y diplomas tuvo lugar ese mismo día por la tarde, en los locales de la E. U. de Biblioteconomía y Documentación, situada en el Edificio "Pablo Montesino" de la calle de la Santísima Trinidad, 37, amablemente cedidos por su Dirección para ese acto.

Junto con la fecha del Concurso, se adelantó la llegada del verano: el calor fue, como de costumbre, agobiante. La participación resultó bastante escasa, únicamente de 40 estudiantes que, según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles: Los del nivel I cursaban 3º de ESO; los del nivel II, 4º de ESO; y los del nivel III, 1º de Bachillerato.

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos sesiones de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 7 puntos. A continuación de esta crónica damos sus enunciados.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy entrañable. En él, nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de enhorabuena a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a todos los que han contribuido al éxito del Concurso. Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles:

NIVEL I

1. Hugo **Fernández Hervás**, *del I.E.S. San Juan Bautista de Madrid*
2. Javier de la **Nuez González***, del Liceo Italiano de Madrid*

3. Víctor **Reig Arroyo***, del Colegio San Viator de Madrid* y Miguel de la **Viuda González**, *del Centro Educativo la Merced y San Francisco Javier, de Burgos*
5. Sergio **Gómez Colmenarejo**, *del IES Carpe Diem de Madrid.*

NIVEL II

1. Elisa **Lorenzo García**, *del I.E.S. Fortuny de Madrid*
2. Ricardo **Martín Brualla***, del Colegio Alemán de Madrid*
3. José **Carpio Pinedo**, *del I.E.S. San Juan Bautista de Madrid*
4. David **Fernández Sánchez***, del I.E.S. Jorge Guillén de Alcorcón (Madrid)*
5. Carlos **Pardo Martín***, del Colegio Retamar de Madrid*

NIVEL III

1. Mohamed **Blanca Ruiz***, del IES Ausías March de Manises (Valencia)*
2. Luis **Sarabia Utrilla***, del Colegio San Viator de Madrid*
3. Aitor **García Ruiz Fuentes**, *del I.E.S. La Serna de Fuenlabrada (Madrid).*
4. Nadia **Jover Jorge***, del I.E.S nº 1 de Requena (Valencia)*
5. Vicente **García Soriano***, del I.E.S. Oleada de Requena (Valencia).*

Nos complace señalar que el alumno Mohamed **Blanca Ruiz***,* que ha recibido el primer premio del Nivel III, también obtuvo el primer premio de nivel II el año pasado. Además, participó en la XXXIX Olimpiada Matemática Española, obteniendo medalla de oro en la fase final. Asimismo, los alumnos Luis **Sarabia Utrilla** *,* 2º del Nivel III, y Vicente **García Soriano**, 5º en ese mismo nivel, obtuvieron el 5º y 4º premio respectivamente en el Nivel I en nuestro concurso de 2002. Por otra parte, los alumnos Elisa **Lorenzo García**, Ricardo **Martín Brualla** y José **Carpio Pinedo**, que han recibido primero, segundo y tercer premio en el nivel II, también se clasificaron en los tres primeros lugares del nivel I de nuestro Concurso el año pasado. Además, Elisa y Ricardo han sido los dos únicos estudiantes de 4º de ESO participantes en la Fase Nacional de la OME, celebrada en La Laguna en marzo de este año.

Nuestra enhorabuena a todos los premiados, al resto de los participantes y a los padres y profesores que los han preparado y animado a participar.

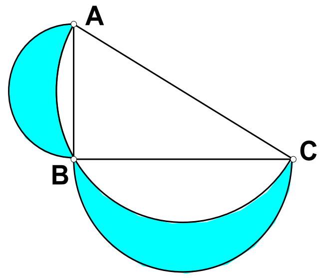
María Gaspar

Problemas propuestos en el XXI Concurso

PRIMER NIVEL

PROBLEMA 1º

En la figura, el triángulo *ABC* es rectángulo en *B*. Hemos trazado exteriormente a cada cateto una semicircunferencia que lo tiene como diámetro. El tercer arco es la semicircunferencia de diámetro *AC*. Si el área del triángulo *ABC* es *S*, ¿cuál es el área de la región sombreada?



PROBLEMA 2º

¿Cuál es el menor número mayor que 1 cuya representación decimal difiere de la representación decimal de su inverso solamente en la colocación de la coma?

PROBLEMA 3º

Se toman dos números cualesquiera que sumen 1. Se halla el cuadrado del mayor, y se le suma el menor. Por otra parte, se halla el cuadrado del menor y se le suma el mayor. ¿Cuál de los dos resultados es mayor?

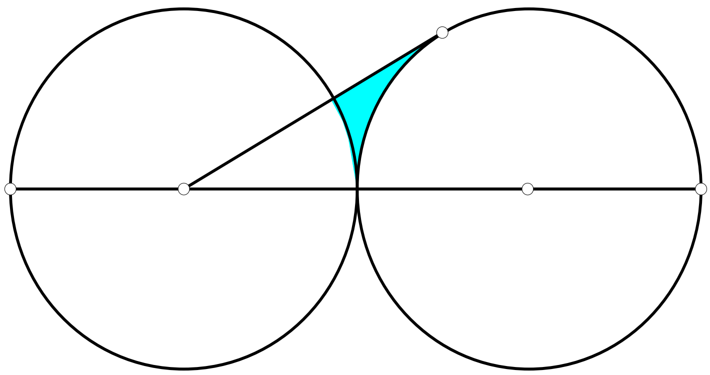
PROBLEMA 4º

En los dados, los puntos de las caras opuestas suman siempre 7. Con ocho dados iguales se puede componer un cubo de arista doble a la de cada dado. ¿Cuál es el máximo número de puntos que puede exhibir en total en sus seis caras el cubo así formado? ¿Se puede conseguir formar un cubo que exhiba en cada cara un número impar de puntos? ¿Y un cubo que exhiba en cada una de sus seis caras precisamente 14 puntos? ¿Cómo?

SEGUNDO NIVEL

PROBLEMA 1º

Se tienen dos circunferencias iguales, tangentes exteriormente como se indica en la figura. Desde el centro de una de ellas, se traza un segmento tangente a la otra. Si la longitud de este segmento es 12 cm., calcúlese el área de la región sombreada.



PROBLEMA 2º

En la pizarra se han escrito números consecutivos 1,2,3, ... , n; pero el mayor no lo vemos. Al borrar uno de ellos, resulta que la media aritmética de los restantes es 45/4. ¿Qué número se ha borrado?

PROBLEMA 3º

Sea *ABC* un triángulo rectángulo en *A*, y sean *M,N* dos puntos interiores a *ABC*. Demostrar que $CM^2 + MN^2 + NB^2 \leq CB^2$

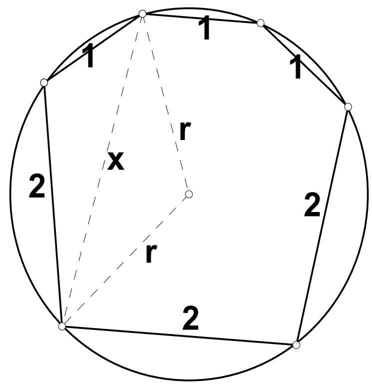
PROBLEMA 4º

Sea *a* un número natural fijado. Demostrar que para cada natural *n* existen dos potencias de *a* tales que su diferencia es un múltiplo de *n*.

TERCER NIVEL

PROBLEMA 1º

Calcular el área de un círculo en el que las longitudes de los lados consecutivos de un hexágono inscrito son 1,1,1,2,2,2.



PROBLEMA 2º

Sean la progresión geométrica de término general $a_n = 202 + 4(n\text{-}1)$ y la progresión geométrica de término general $a_n = 23^{n-1}$. Se pide:

1º. Probar que tienen infinitos términos comunes.

2º. Hallar el primer término común.

3º. Escribir la forma general de la sucesión de términos comunes.

PROBLEMA 3º

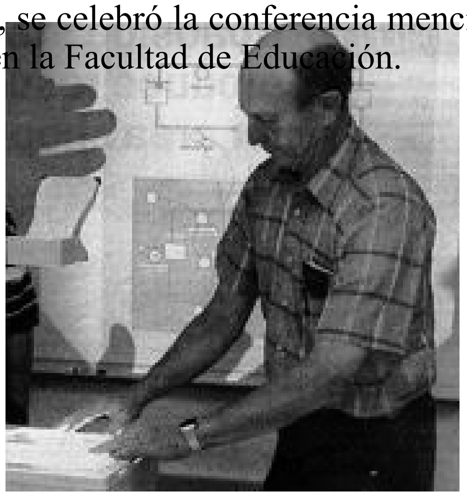
En el triángulo equilátero *ABC*, de lado *a*, se trazan las circunferencias que tienen sus centros en los vértices y son tangentes al lado opuesto. Hay tres puntos de intersección de estas circunferencias en el interior de *ABC* que son vértices de otro triángulo equilátero. Calcular la longitud del lado de este.

PROBLEMA 4º

¿Hay alguna potencia de 2 que se pueda obtener como suma de dos números naturales consecutivos?

Conferencia organizada por nuestra Sociedad

Organizada y patrocinada por la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas y por la Sección Departamental de Algebra de la Facultad de Educación de la Univ. Complutense, se celebró la conferencia mencionada a continuación, el día 23 de junio de 2003 en la Facultad de Educación.



Conferenciante: Kurt Kreith es catedrático de Matemáticas de la Universidad de California en Davis, EE.UU. Su campo de investigación se centró en el estudio de Ecuaciones Diferenciales, pero sus trabajos más recientes están enfocados en el papel de las Nuevas Tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas a nivel de Educación Secundaria. Bajo los auspicios del “American Forum for Global Education”, ha desarrollado un curriculum sobre “Las Matemáticas del Cambio Global”, que imparte a profesores y alumnos de primer año de su universidad.

Publicación: Aquellos de nuestros socios y lectores interesados en el tema y que no pudieron asistir pueden encontrar un resumen de la conferencia en el artículo del Prof. Kreith publicado en el número 64 de nuestro Boletín, págs. 24-34.

Nota: La fecha y hora de la conferencia no pudo precisarse hasta muy poco tiempo antes de celebrarse, dado que se aprovechó un día de paso por Madrid del Prof. Kreith, de vuelta del congreso conjunto RSME-AMS. Como consecuencia, sólo pudieron ser avisados aquellos socios que nos han notificado su correo electrónico. Por ello la Junta Directiva invita de nuevo a comunicarnos la dirección de correo electrónico a todos los socios que dispongan de él.

Problemas y Soluciones

Julio Fernández Biarge
Universidad Politécnica de Madrid
jfbiarge@telefonica.net

Abstract

In this paper we show how an unfortunate use of the exercises and the evaluations can affect negatively to the teaching of the Mathematics.

En el artículo de Kurt Kreith [1], publicado en este mismo Boletín, se aludía al hecho de que cuando un alumno resuelve el problema de hallar la raíz positiva de $x^2 - x - 1 = 0$, suele darlo por terminado con la "solución" $(1+\sqrt{5})/2$; pero como el evaluar $\sqrt{5}$ equivale a resolver la ecuación $x^2 - 5 = 0$, lo que simplemente ha hecho es transformar un problema en otro; éste es mas simple, tan sólo porque el alumno conoce un algoritmo capaz de abordar ese caso particular, o dispone de una calculadora que lo hace con sólo pulsar una tecla.

Son muchas las ocasiones en que se induce a los alumnos a una interpretación forzada de lo que es la solución de un problema. En diversas exposiciones orales he recurrido a este esclarecedor ejemplo:

Propóngase a un alumno el "problema" de

$$\text{evaluar:} \qquad I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \tag{1}$$

y rápidamente nos dará la "solución" $I = \log 2$. Hagámosle observar que no ha concluido con su tarea, pues $\log 2$ no es un "valor". Simplemente ha convertido el problema (1) en el de

$$\text{determinar el valor de } x \text{ que hace que} \qquad e^x = 2 \tag{2}$$

El alumno alegará que *"no ha traído la calculadora ni las tablas",* por lo que *no puede* concluirlo. Sólo dispone de un bolígrafo y de su cuaderno de papel cuadriculado. Pero si nosotros le conminamos a que se esfuerce en resolver este problema (2), aunque sea de un modo aproximado, y es ingenioso, volverá sobre sus pasos y tras dibujar una gráfica cartesiana aproximada de la función $y = 1/x$, con sólo contar cuadritos, conseguirá una evaluación aproximada de I , y así habrá resuelto el problema (2). *Es decir,* (1) *puede considerarse como la solución del problema* (2) *y no al revés*. Si el alumno conoce la fórmula de Simpson, el log 2 pude evaluarse aproximadamente mediante (1), con un simple cálculo *mental* (usando sólo las abscisas 1, 3/2 y 2), como 25/36 , que arroja el valor de 0,694… (con un error inferior al 2 por mil respecto al verdadero 0,693…).

Son muchas las ocasiones en que forzamos a los alumnos a considerar válidos unos procesos de resolución y no otros, atendiendo a una limitación, a veces artificiosa, de los medios disponibles. Lo malo es cuando esa limitación obedece no a la disponibilidad actual de medios, sino a la que existió en otros tiempos, habiéndose mantenido por la costumbre, sin que hoy conserve justificación alguna. Afortunadamente, ya no se exige en ningún sitio a los alumnos que en los problemas trigonométricos den las fórmulas finales “preparadas para el cálculo logarítmico”, como era habitual cuando los cálculos numéricos había que hacerlos mediante las tablas logarítmico-trigonométricas, que nadie utiliza ya. Pero quedan otras muchas costumbres que se mantienen aun cuando han perdido su validez.

Esto se da todavía en muchos cursos de Cálculo Infinitesimal. En ellos, la obsesión por encontrar primitivas expresables mediante complicadas combinaciones de funciones escogidas en un repertorio amplio, pero forzosamente limitado, estaba justificada cuando estas funciones eran las únicas de las que se habían confeccionado tablas (muy penosamente, por cierto) y la consulta de éstas era la única vía para la evaluación de integrales definidas.

¿Puede considerarse satisfecho un alumno al que han pedido evaluar

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x^3+2)}$$

cuando, después de gran trabajo, llega a

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12\sqrt[3]{2}}\log\frac{(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(2+\sqrt[3]{2})^2}{(4-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(1+\sqrt[3]{2})^2}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3\sqrt[3]{2}}}\left(\tan^{-1}\frac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\sqrt[3]{2}}}-\tan^{-1}\frac{4-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\sqrt[3]{2}}}\right) \quad ?$$

Los libros sobre ecuaciones diferenciales de hace pocos años estaban poseídos por la obsesión de llegar a soluciones explícitas. Cuando ello no era posible, se enseñaba al alumno que se había elegido una ecuación, se había dado nombre a la función que la resolvía, alguien se había encargado de elaborar penosamente tablas para evaluarla, y entonces, otras muchas ecuaciones podían resolverse, mediante hábiles transformaciones, utilizando esa función y esas tablas. Era lo que habían hecho famosos matemáticos al abordar los problemas clásicos de la física y su obra resultó de gran utilidad. Pero ¿debe mantenerse hoy día ese modo de proceder como el único posible?

En los cursos de Física, las costumbres suelen ser todavía más perniciosas. Los alumnos pueden llegar a pensar que los laboratorios están llenos de cilindros indefinidos, planos ilimitados o esferas perfectas, únicas figuras estudiadas en la teoría, por la obsesión de obtener soluciones expresadas explícitamente mediante una fórmula y eludir el estudio de los casos en que eso no puede hacerse. ¿Cuándo se va a convencer a los alumnos de que un problema físico está *resuelto* si se ha obtenido una solución expresada mediante una integral definida, una integral de superficie, una ecuación diferencial u otra formulación matemática precisa y clara, a la que se puedan aplicar los métodos de cálculo numérico disponibles actualmente, con el auxilio de los ordenadores? La obtención de soluciones explícitas, expresadas mediante una fórmula en la que aparezcan los datos, es un caso excepcional, que rara vez es posible en los problemas reales.

En la resolución de problemas, hay limitaciones que sólo están justificadas en las artificiales condiciones en que se realizan las evaluaciones o exámenes, pero que nada tienen que ver con la forma en que se resuelven los problemas que ofrece la vida, en la práctica. En el artículo "Evaluación" [2], que publiqué hace años en este Boletín, me referí extensamente a esa distinción y, sobre todo, a los efectos secundarios que el modo de realizar las evaluaciones produce en la enseñanza en general. En ese artículo prevenía sobre la peligrosa creencia de que la evaluación era un simple "dispositivo de medida", que actuaba sobre el proceso docente, sin afectarlo seriamente.

Señalaba en ese artículo, entre otros, dos perniciosos efectos secundarios importantes de las evaluaciones: Que *inducen a una preparación específica* para la superación de las pruebas y que *dan una falsa perspectiva* sobre la utilidad relativa de los distintos temas y métodos estudiados. Del artificioso diseño de las pruebas resulta así una desviación del esfuerzo que se trata de conseguir que realicen los alumnos para alcanzar los objetivos docentes y una apreciación errónea sobre lo que es realmente importante en la asignatura (las teorías y los medios útiles para superar las pruebas no son los mismos que los adecuados para abordar los problemas reales).

Si se quiere acercar al alumno a las aplicaciones prácticas de lo que se enseña, es indispensable hacer que se percate claramente de lo que es una solución exacta dada explícitamente, de lo que es una solución dada mediante algoritmos conocidos que permiten obtenerla con la precisión que se desee, y lo que es una solución irremediablemente aproximada, como ocurre cuando en los cálculos intermedios se han omitido términos que se estiman "despreciables".

Entre las soluciones dadas por algoritmos, incluimos las formuladas mediante expresiones, como las $(1+\sqrt{5})/2$ y $\log 2$ consideradas antes, que pueden considerarse también exactas, en el sentido de que tenemos medios para evaluarlas con la precisión que sea necesaria en cada caso.

Pero también es un vicio muy arraigado acostumbrar al alumno a dar por resuelto un problema *sólo* cuando se ha conseguido expresar su solución mediante una expresión. Debe convencerse a los alumnos de que problemas tales como la obtención del máximo común divisor de dos números naturales, la descomposición en factores primos, o la aproximación de raíces de una ecuación algebraica quedan *resueltos* en cuanto se define el algoritmo adecuado, aunque no se haya llegado a una "fórmula" que de explícitamente la solución.

Como ejemplo de los vicios inducidos por los sistemas de evaluación está el de que los alumnos suelan decir que las ecuaciones de segundo grado *se pueden* resolver, mientras que las de quinto grado *no se pueden* resolver. En una de estas últimas, con una simple calculadora, sin necesidad de saber el método de Newton, ni otro más adecuado, simplemente por tanteos de "no llego" o "me paso", se puede encontrar la raíz buscada en un intervalo (a veces tras alguna consideración gráfica), con un par de cifras exactas. Mejor aún si se usa la técnica babilónica citada por Kurt Kreith en [1], con el nombre de *divide and average"*. Puesto que ello no es usual en los exámenes, suele decirse que se trata de un problema que "no se puede resolver".

Inducidos por las evaluaciones a que son sometidos pertinazmente, los alumnos suelen menospreciar el estudio de los conceptos fundamentales y de sus definiciones, ya que rara vez les resultan útiles para resolver los ejercicios que se les proponen. En este hecho lamentable influye la permanente ocultación que suele hacerse de la estrategia que se sigue sistemáticamente en las Matemáticas para hacer frente a toda clase problemas, desde la aritmética elemental al cálculo infinitesimal. Merecería la pena que en algún momento se hiciese explícita esta estrategia, desvelando así el misterio de por qué las definiciones apenas juegan papel en la resolución de los ejercicios.

Podemos resumir la estrategia a que nos referimos en un esquema:

A
Definición de un concepto

B
A partir de la definición, deducción de **propiedades** del concepto.

C
Mediante esas propiedades, deducir **reglas** capaces de reducir la aplicación del concepto en casos complejos a sucesivas aplicaciones en casos más simples.

D
Aplicación directa del concepto a un repertorio reducido de casos particulares y formación de una **tabla** con los resultados.

E
Aplicación del concepto a casos concretos:
Para conseguirla, se intenta aplicar sucesivamente las reglas obtenidas en C, hasta conseguir reducir el problema a casos que figuran en la tabla creada en D.

Esta es la estrategia seguida en la aritmética elemental para efectuar operaciones con números naturales: Definido (A) el producto, se forma (D) la tabla de multiplicar, y deducida (B) la propiedad distributiva, se establece (C) la regla o algoritmo que utilizamos (E) para multiplicar números cualesquiera mediante numerosas consultas sucesivas a los resultados de la tabla.

Para hallar funciones derivadas, a partir de la definición (A) de derivada, deducimos propiedades (B) que nos conducen a reglas (C) que permiten expresar las derivadas de sumas, productos, cocientes y funciones compuestas, combinando las derivadas de los sumandos, factores, etc. Conocida la tabla (D) de derivadas de las funciones elementales, podemos abordar el problema de obtener la función derivada en casos más complicados (E), por aplicación sucesiva de las reglas hasta llegar a los casos considerados en la tabla.

Un proceso análogo se nos presenta para la determinación de primitivas. ¿Por qué ésta es mucho más difícil que la de derivadas? Claramente, porque las reglas obtenidas en (C) son mucho menos potentes que en el otro caso (no hay regla que permita conocer la primitiva de un producto sabiendo las de los factores), lo que obliga a hacer mucho más extensa la tabla obtenida en (D). La determinación de la continuidad de una función, la de la convergencia o divergencia de las series de términos positivos o la de las integrales impropias, y tantos otros problemas se resuelven con la misma estrategia.

Si el alumno se percata de la esencia de esa estrategia, presente en tantos momentos de sus estudios matemáticos, entenderá muy bien por qué en las operaciones que tiene que efectuar en sus ejercicios, rara vez necesita echar mano de la definición del concepto implicado en ellos, y lo único que realmente necesita son las reglas de (C) y la tabla de (D), que normalmente deberá aprender de memoria. Ya no le sorprenderá que el propio concepto utilizado y sus propiedades, tan trabajosamente demostradas, no se utilicen en la resolución de los ejercicios.

Referencias

[1] Kreith, Kurt (2003): *Algebra in the Time of Computers.* Boletín de la Sociedad “Puig Adam”, nº 64, 24-34.

[2] Fernández Biarge, Julio (1986): *Evaluación.* Boletín de la Sociedad “Puig Adam”, nº 7, 13-23.

Cálculos efectivos en lógica proposicional booleana interpretada como un anillo de clases residuales (polinomial) sobre $\mathbb{Z}_2$

E. Roanes Lozano†, Luis M. Laita‡, E. Roanes Macías†

†Dpto. de Álgebra, Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
{eroanes,roanes}@mat.ucm.es
‡Dpto. de Inteligencia Artificial, Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
laita@fi.upm.es

Abstract

The duality between Boolean algebras and Boolean rings and the properties of lattice orderings are used in this article to detail how a polynomial model for Boolean logic can be constructed. This model exactly translates the ideals of Logic into the ideals of Algebra and enables to perform effective calculations in Logic and even in Rule Based Expert Systems using the implementations of "Gröbner bases" and "normal forms" provided by Computer Algebra Systems. Moreover, the approach can also be used to construct a model for modal multivalued logics (and Rule Based Expert Systems using these logics).

Introducción

Los "Sistemas de Cálculo Simbólico" (CAS) permiten realizar muy rápidamente cálculos efectivos en anillos polinomiales. Además, las implementaciones que proporcionan para el cálculo de la "base de Gröbner" de un ideal, así como de la “forma normal” de un polinomio módulo un ideal, permiten decidir duros problemas algebraicos como la pertenencia a ideal [1, 2, 7, 13, 23].

En este artículo se describe detalladamente un modelo polinomial para la lógica booleana, que permite aplicar esta potencia de cálculo a la realización de cálculos en Lógica y a la extracción de conocimiento y verificación de sistemas expertos basados en reglas (RBES), que ya fue introducido en [14].

Comienza con un preámbulo sobre retículos, órdenes reticulares, álgebras de Boole y anillos booleanos, que puede ser saltado por el lector avezado (salvo su último punto, en que se introduce la aproximación a la modelización que se seguirá).

En los apartados 2, 3 y 4 se describe constructivamente un anillo de clases residuales polinomial que es también anillo booleano, y los correspondientes anillo booleano polinomial y orden reticular.

En la sección 5 se construye el isomorfismo de álgebras de Boole que permite pasar de la Lógica al Álgebra.

En el apartado 6 se relacionan los ideales y filtros definidos al modo de la Lógica con los ideales de anillos definidos al modo del Álgebra y se obtienen interesantes resultados.

Finalmente se muestra como se puede implementar sencillamente esta aproximación en un CAS como CoCoA[1] [5, 20]

1 Preámbulo sobre álgebras de Boole y anillos booleanos

Las demostraciones de esta sección no son complejas, pero algunas son algo enrevesadas. Como el álgebra de Boole en que estamos acostumbrados a pensar es la de partes de un conjunto, las demostraciones se ilustrarán en tal álgebra de Boole, aunque sean generales (de hecho basta en casi todas ellas cambiar los símbolos particulares: unión, intersección,... por unos generales: $\sqcup$, $\sqcap$,... para obtener la demostración general). De cualquier modo se pueden consultar, por ejemplo, [8, 9, 10, 16, 17, 21].

[1]CoCoA, un sistema para realizar cálculos en Álgebra Conmutativa. Autores: A. Capani, G. Niesi, L. Robbiano. Disponible por ftp anónimo en: `cocoa.dima.unige.it`

1.1 Retículos

1.1.1 Definición.- *Un conjunto, en el que hay definidas dos operaciones internas, diremos que es un retículo si las dos operaciones son conmutativas, asociativas y cada una es cancelativa (simplificativa) respecto de la otra.*

1.1.2 Consecuencia.- *Ambas operaciones son idempotentes (lo que se incluye a menudo como condición en la definición de retículo, pero es innecesario).*

1.1.3 Ejemplo.- $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$ *tiene estructura de retículo.*
En efecto; $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$*:*

$$\begin{array}{ccc} A \cup B = B \cup A & ; & B \cap A = A \cap B \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C & ; & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cap A) = A & ; & A \cap (B \cup A) = A \end{array}$$

Como consecuencia: $\quad A \cup A = A \quad ; \quad A \cap A = A$
Probemos, por ejemplo, una de estas últimas (la idempotencia de $\cup$*):*

$$A \cup A = A \cup (A \cap (B \cup A)) = A \cup (A \cap D) = A \cup (D \cap A) = A$$

1.2 Retículo y orden reticular

1.2.1 Definición.- *Denominaremos orden reticular a un orden parcial no estricto tal que, para dos elementos cualesquiera, siempre exista ínfimo y supremo.*

1.2.2 Proposición.- *A partir de un retículo se puede definir un orden reticular. Recíprocamente, a partir de un orden reticular, se puede definir un retículo.*

1.2.3 Ejemplo.- *Consideremos el retículo* $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$*. A partir de las operaciones del retículo se puede definir un orden reticular* $\sqsubseteq$*:*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : \quad A \sqsubseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B \quad (\Leftrightarrow\; A \cap B = A) \;.$$

Es inmediato que la relación así definida es un orden reticular (observemos que, en este caso, $\sqsubseteq$ *resulta ser* $\subseteq$*).*

1.2.4 Ejemplo.- *Recíprocamente, consideremos el conjunto de partes de E, y el orden reticular $\subseteq$, esto es, $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$. A partir del orden reticular se pueden construir las operaciones de un retículo:*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E): \quad A \sqcup B = sup_{\subseteq}(A, B) \quad ; \quad A \sqcap B = inf_{\subseteq}(A, B) \ .$$

Es sencillo probar que $(\mathcal{P}(E), \sqcup, \sqcap)$ es un retículo (observemos que, en este caso, $\sqcup$ y $\sqcap$ resultan ser, respectivamente, $\cup$ y $\cap$).

1.2.5 Observación.- *Es claro que, si se permuta el orden de las operaciones en el álgebra de Boole, se obtendrá la relación de orden formada permutando los elementos de los pares ordenados que definían la relación de orden (por ejemplo $\supseteq$ en lugar de $\subseteq$).*

1.3 Álgebras de Boole

1.3.1 Definición.- *Se dice que un retículo es distributivo si cada una de las dos operaciones es distributiva respecto de la otra.*

1.3.2 Definición.- *Se dice que un retículo es complementario cuando:*

- *existen ínfimo y supremo del retículo (para el orden reticular)*
- *hay definida una operación unaria, denominada "complemento", tal que:*
  - *al operar con la primera operación del retículo cada elemento con su complemento, se obtenga el supremo del retículo*
  - *al operar con la segunda operación del retículo cada elemento con su complemento, se obtenga el ínfimo del retículo.*

1.3.3 Definición.- *Se denomina "álgebra de Boole" a un retículo distributivo y complementario.*

1.3.4 Ejemplo.- *Veamos como $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, \ ')$, donde $'$ es el complemento usual, es un álgebra de Boole. Por una parte $\cup$ es distributiva respecto de $\cap$ y viceversa. Por otra, el ínfimo del retículo (para $\subseteq$) es $\emptyset$ y el supremo del retículo (para $\subseteq$) es E. Además, $'$ funciona como complementario: $\forall A \in \mathcal{P}(E)$: $A \cup A' = E$ y $A \cap A' = \emptyset$.*

1.3.5 Observación.- *Los caracteres "distributivo" y "complementario" de un retículo son independientes. En efecto, los siguientes ejemplos muestran dicha independencia:*

- *El retículo de las variedades lineales del plano vectorial respecto de la suma de variedades lineales y la intersección es un retículo complementario (el complemento de la variedad lineal* 0 *es todo el plano vectorial, y el complemento de una recta vectorial es cualquier otra recta vectorial), pero no distributivo (si* R, S, T *son rectas vectoriales distintas:* $R + (S \cap T) \neq (R + S) \cap (R + T)$*).*
- *El retículo* $(I\!N, mcd, mcm)$ *es distributivo, pero no complementario (el ínfimo es* 1 *y el supremo* 0*, pero p.ej.* 3 *no tiene complementario).*
- *El retículo de los convexos del plano, respecto de la unión convexa* $\overset{*}{\cup}$ *(menor convexo que contiene a la unión) y la intersección es un retículo, pero no es ni distributivo (p.ej., si* A, B, C *son tres cuadrados alineados disjuntos, el* A *en medio,* $A \cap (B \overset{*}{\cup} C) \neq (A \cap B) \overset{*}{\cup} (A \cap C)$*), ni complementario (una recta no tiene complementario).*

1.4 Álgebras de Boole y anillos booleanos

1.4.1 Definición.- *Un anillo booleano es un anillo (con unidad*[2]*) tal que la segunda operación es idempotente.*

1.4.2 Proposición.- *i) En un anillo booleano todo elemento es su propio simétrico para la primera operación.*
ii) Además todo anillo booleano es conmutativo.

Demostración.- Sean $\sqcup$ la primera operación, $\underline{0}$ el neutro, $'$ el símbolo de simétrico para $\sqcup$; $\sqcap$ la segunda operación y $\underline{1}$ la unidad.
i) Si a, b son elementos del anillo:

$$\begin{gathered} a \sqcup b = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup b) = (a \sqcap a) \sqcup (a \sqcap b) \sqcup (b \sqcap a) \sqcup (b \sqcap b) = \\ = a \sqcup (a \sqcap b) \sqcup (b \sqcap a) \sqcup b = (a \sqcup b) \sqcup ((a \sqcap b) \sqcup (b \sqcap a)) \end{gathered}$$

[2]Para poder obtener de él un algebra de Boole (puede evitarse esta condición sumergiendo a posteriori el anillo en un anillo con unidad).

pero como respecto de la operación $\sqcup$ es grupo:

$$\underline{0} = (a \sqcap b) \sqcup (b \sqcap a) \qquad (1).$$

Por tanto, si fuese $a = b$, por idempotencia (de $\sqcap$), $\underline{0} = a \sqcup a$.

ii) De (1), como respecto de la operación $\sqcup$ es grupo: $(a \sqcap b)' = (b \sqcap a)$, y, por i), todo elemento es simétrico de sí mismo para la primera operación, luego $a \sqcap b = b \sqcap a$.

1.4.3 Proposición.- *A partir de un álgebra de Boole se puede definir un anillo booleano. Recíprocamente, a partir de un anillo booleano se puede definir un álgebra de Boole.*

1.4.4 Ejemplo.- *En el álgebra de Boole $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, \ ')$ el ínfimo es $\emptyset$ y el supremo es E. Definiendo la diferencia simétrica de dos elementos de $\mathcal{P}(E)$ en la forma usual*

$$A \triangle B = (A \cap B') \cup (A' \cap B) \qquad (2)$$

tenemos que $(\mathcal{P}(E), \triangle, \cap)$ es un anillo booleano. En efecto: todas las propiedades son inmediata consecuencia de la correspondiente propiedad del álgebra de Boole o son simplemente una manipulación más o menos larga (como la conmutatividad y asociatividad de $\triangle$). En particular:

- *$\emptyset$ es el neutro de $\triangle$ (y el absorbente de $\cap$)*
- *E es el neutro de $\cap$.*

y como, $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \triangle A = \emptyset$, todo elemento de $\mathcal{P}(E)$ es también simétrico de sí mismo para $\triangle$.

1.4.5 Ejemplo.- *Partiendo ahora del anillo booleano $(\mathcal{P}(E), \triangle, \cap)$ y definiendo en este anillo la siguiente operación:*

$$A \sqcup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \qquad (3)$$

obtenemos un álgebra de Boole (véase el ejemplo 1.4.7).

1.4.6 Proposición.- *Si partimos de un álgebra de Boole y obtenemos el correspondiente anillo booleano, definido por (2), y a partir de este construimos el correspondiente álgebra de Boole, definida por (3), resulta el álgebra de Boole de partida.*

1.4.7 Ejemplo.- *Prosiguiendo con el ejemplo 1.4.5, se tiene:*

$$A \sqcup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) = ((A \triangle B) \cap (A \cap B)') \cup ((A \triangle B)' \cap (A \cap B)) =$$
$$= (A \triangle B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

1.5 Un modelo polinomial para el álgebra de Boole proposicional

Pretendemos modelizar el álgebra de Boole proposicional mediante un anillo (booleano) polinomial. Podemos llevarlo a cabo de dos formas, que se recogen en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c}\text{álgebra de Boole}\\ \text{proposicional}\end{array}} & \overset{\begin{array}{c}\text{isomorfismo de}\\ \text{álg. de Boole}\end{array}}{\longleftrightarrow} & \boxed{\begin{array}{c}\text{álgebra de Boole}\\ \text{polinomial}\end{array}} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \boxed{\begin{array}{c}\text{anillo booleano}\\ \text{proposicional}\end{array}} & \overset{\begin{array}{c}\text{isomorfismo}\\ \text{de anillos}\end{array}}{\longleftrightarrow} & \boxed{\begin{array}{c}\text{anillo (booleano)}\\ \text{polinomial}\end{array}} \end{array}$$

Como el interés de esta modelización es precisamente aprovechar la extraordinaria potencia de los CAS, es claro que interesa pasar mediante un isomorfismo de álgebras de Boole (esto es, realizar la traducción a polinomios primeramente, para realizar todos los cálculos en el lado derecho del diagrama).

2 Construyendo un anillo booleano polinomial

2.1 Primeros requisitos. El anillo $(\mathcal{A}, +, \cdot)$

Tratemos de construir un anillo de polinomios booleano $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ adecuado a nuestro propósito:

- como se ha visto en 1.4.2, todo elemento ha de ser simétrico de sí mismo para la primera operación, luego: $\forall a \in \mathcal{A}$, $a + a = 2 \cdot a = 0$, lo que sugiere tomar $\mathcal{A}$ como un anillo sobre un cuerpo de característica 2
- los elementos del anillo booleano han de ser idempotentes para la segunda operación.

Pues bien, estas dos condiciones son verificadas por el anillo de clases residuales

$$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x, y, ..., z]/\langle x^2 - x, y^2 - y, ..., z^2 - z\rangle$$

respecto de la suma y el producto usuales, como se prueba en las dos proposiciones siguientes.

2.1.1 Proposición.- *En $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ todo elemento es opuesto de él mismo.*

Demostración.- Basta tener en cuenta que el cuerpo base es $\mathbb{Z}/2ZZ$.

2.1.2 Proposición.- *En $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ todo elemento es idempotente para la operación producto.*

Demostración.- Si $a \in \mathcal{A}$, se puede escribir en la forma:

$$a = \delta_0 + \delta_x \cdot x + \delta_y \cdot y + ... + \delta_z \cdot z + \delta_{xy} \cdot x \cdot y + ... + \delta_{xyz} \cdot x \cdot y \cdot z + ...$$

donde las δ pertenecen a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y por tanto son idempotentes. Puesto que hemos pasado al cociente sobre el ideal $\langle x^2 - x, y^2 - y, ..., z^2 - z\rangle$, las variables $x, y, ..., z$ deben ser idempotentes también. Además, los dobles productos se anulan, luego

$$a^2 = (\delta_0 + \delta_x \cdot x + \delta_y \cdot y + ... + \delta_z \cdot z + \delta_{xy} \cdot x \cdot y + ... + \delta_{xyz} \cdot x \cdot y \cdot z + ...)^2 = a$$

2.2 Un resultado llamativo

2.2.1 Proposición.- *En $\mathcal{A}$ todo elemento es divisor de cero (el resultado es cierto en cualquier anillo booleano).*

Demostración.- Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces: $a \cdot (1 + a) = a + a^2 = a + a = 2 \cdot a = 0$

3 Construyendo un álgebra de Boole polinomial

3.1 El álgebra de Boole $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+)$

Probemos a definir un álgebra de Boole a partir de este anillo (booleano) en el modo usual (expuesto en 1.4).

3.1.1 Definición.- *Para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$; definimos: $a\tilde{+}b = a+b+a\cdot b$ (como la suma y el producto son operaciones internas en $\mathcal{A}$, $\tilde{+}$ también lo es).*

3.1.2 Observación.- *Por supuesto se puede obtener $+$ a partir de $\tilde{+}$ y $\cdot$:*

$$\text{si } a, b \in \mathcal{A}: \ \ a + b = (1+a) \cdot b \ \tilde{+} \ a \cdot (1+b)$$

(realmente así construimos la operación del anillo booleano a partir de las operaciones del álgebra de Boole como se hizo en 1.4).

3.1.3 Convenio.- *Consideraremos $\cdot$ prioritario frente a $\tilde{+}$.*

3.1.4 Proposición.- $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+)$ *es un algebra de Boole (el ínfimo es 0; el supremo es 1 y el complemento de $a \in \mathcal{A}$ es $1+a$). Por tanto se verifican las leyes de De Morgan.*

Demostración.-

i) Las propiedades conmutativas, asociativas, cancelativas y distributivas se prueban fácilmente.

ii) Probemos por ejemplo que en $\mathcal{A}$ todo elemento es idempotente respecto de $\tilde{+}$. En efecto: $\forall a \in \mathcal{A}$,

$$a\tilde{+}a = a + a + a \cdot a = a + a + a^2 = 0 + a = a$$

iii) El supremo del retículo es el 1 y el ínfimo el 0. En efecto: $\forall a \in \mathcal{A}$,

$$\begin{array}{lcl} a\tilde{+}0 = a + 0 + a \cdot 0 = a & ; & a \cdot 0 = 0 \\ a\tilde{+}1 = a + 1 + a \cdot 1 = 1 & ; & a \cdot 1 = a \end{array}$$

El complementario del elemento a es $1+a$. En efecto: $\forall a \in \mathcal{A}$,

$$a \tilde{+} (1+a) = a + (1+a) + a \cdot (1+a) = a + 1 + a + a + a^2 = 1$$
$$a \cdot (1+a) = a + a^2 = a + a = 2 \cdot a = 0$$

(la existencia de $1+a$ está asegurada por ser $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ anillo).

iv) Como es bien conocido, en todo álgebra de Boole se verifican las leyes de De Morgan. Probemos una de ellas:

$$1 + (a \tilde{+} b) = 1 + (a + b + a \cdot b) = 1 + a + b + a \cdot b = (1+a) \cdot (1+b)$$

4 Ordenación del álgebra de Boole polinomial

Definiremos un orden reticular en el álgebra de Boole $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+)$ como se hizo en la sección 1.2.

4.1 Definición de un orden reticular en $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+)$

4.1.1 Definición.- *Sea $\leq$ el orden reticular definido en el álgebra de Boole $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+)$ en el modo usual:*

$$\forall a, b \in \mathcal{A}: \; a \leq b \; \Leftrightarrow \; a \cdot b = a$$

4.1.2 Proposición.- *En $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+)$ son equivalentes:*

1) $a \cdot b = a$

2) $a \tilde{+} b = b$

3) $(1+a) \tilde{+} b = 1$

4) $a \cdot (1+b) = 0$.

Demostración.- La demostración es inmediata (de hecho el resultado correspondiente es cierto en cualquier álgebra de Boole). Probemos por ejemplo *1)* $\Rightarrow$ *2)*:

$$1) \;\Rightarrow\; a \tilde{+} b = a + b + a \cdot b = a + b + a = b \;.$$

4.1.3 Proposición.- *El orden así definido en $\mathcal{A}$ es, precisamente, "ser múltiplo".*

Demostración.- $\Rightarrow)$ $\quad a \leq b \;\Leftrightarrow\; a \cdot b = a \;\Rightarrow\; a$ es múltiplo de b

$\Leftarrow)$ $\; a$ es múltiplo de $b \;\Leftrightarrow\; \exists k \in A : a = b \cdot k \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; a \cdot b = (b \cdot k) \cdot b = b^2 \cdot k = b \cdot k = a \;\Leftrightarrow\; a \leq b$$

4.1.4 Consecuencia.- *Para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$:* $\; a, b|(a \cdot b) \;\;;\;\; a\tilde{+}b|a, b$

Demostración.- i) Trivial

ii) $(a\tilde{+}b) \cdot a = a$ (por la propiedad cancelativa de $\cdot$ respecto de $\tilde{+}$)

Los resultados siguientes son ciertos en general, pero los particularizaremos para este álgebra de Boole para acostumbrarnos a su extraño funcionamiento.

4.1.5 Proposición.- *Para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{A}$:*

$$b|a \;\Leftrightarrow\; (1 + a)|(1 + b)$$

(corresponde en el álgebra de Boole proposicional con: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$).

Demostración.- $\Rightarrow)$ $\; b|a \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathcal{A} : a = k \cdot b$. Por tanto, llamando, $l = 1 + k \cdot b + b$

$$l \cdot (1+a) = (1+k\cdot b+b)\cdot(1+k\cdot b) = 1+k\cdot b+b+k\cdot b+k^2\cdot b^2+k\cdot b^2 = 1+b \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (1 + a)|(1 + b)$$

$\Leftarrow)$ Es consecuencia de la implicación ya probada y de que: 1+(1+c) = c

4.1.6 Proposición.- *Para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{A}$:*

i) $\; c|a \;\Rightarrow\; c|(a \cdot b)$

ii) $\; c|a \;$ *y* $\; c|b \;\Rightarrow\; c|(a\tilde{+}b)$

Demostración: ii) $\; c|a \Leftrightarrow \exists k \in \mathcal{A} : \; a = k \cdot c$

$c|b \Leftrightarrow \exists l \in \mathcal{A} : \; b = l \cdot c$

luego: $\; a\tilde{+}b = a + b + a \cdot b = k \cdot c + l \cdot c + k \cdot l \cdot c^2 = (k + l + k \cdot l) \cdot c \;\Rightarrow\; c|(a\tilde{+}b)$

4.1.7 Proposición.- *Para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{A}$:*

i) $a|c \;\Rightarrow\; (a\tilde{+}b)|c$

ii) $a|c$ *y* $b|c \;\Rightarrow\; (a \cdot b)|c$

Demostración: Es consecuencia de las leyes de De Morgan y de las dos proposiciones anteriores.

5 Isomorfismo entre el álgebra de Boole proposicional y el álgebra de Boole polinomial

5.1 Construcción del homomorfismo de álgebras de Boole φ

Sea $(\mathcal{C}, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow)$ el álgebra de Boole de las proposiciones generadas a partir de las variables proposicionales $P, Q, ..., R$ y las operaciones $\vee, \wedge$ y $\neg$. Denotemos por $\underline{1}$ a la tautología y por $\underline{0}$ a la contradicción.

Consideremos el álgebra de Boole $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+, \text{ser múltiplo})$ donde

$$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[p, q, ..., r]/ < p^2 - p, q^2 - q, ..., r^2 - r\rangle$$

y definamos

$$\varphi\colon\; (\mathcal{C}, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow) \longrightarrow (\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+, \text{ser múltiplo})$$

del modo siguiente: para las variables proposicionales $P, Q, ..., R$

$$\begin{array}{l} P \longrightarrow p \\ Q \longrightarrow q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R \longrightarrow r \end{array}$$

y para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}$, si $a = \varphi(A)$ y $b = \varphi(B)$, entonces

$$\begin{array}{r} A \vee B \longrightarrow a\tilde{+}b \\ \neg A \longrightarrow 1 + a \end{array}$$

Como consecuencia de las leyes de De Morgan: $A \wedge B \longrightarrow a \cdot b$
y por tanto φ es un homomorfismo (más adelante se probará que está bien definido).

5.1.1 Proposición.- $\varphi(\underline{1}) = 1$, $\varphi(\underline{0}) = 0$ *y* φ *conserva la ordenación.*

Demostración: Ínfimo y supremo:

$$\underline{0} = P \wedge \neg P \;\Rightarrow\; \varphi(\underline{0}) = \varphi(P \wedge \neg P) = \varphi(P) \cdot \varphi(\neg P) = p \cdot (1 + p) = p + p^2 = 0$$

Análogamente se prueba que $\varphi(\underline{1}) = 1$
Ordenación: siendo A y B dos proposiciones cualesquiera, $a = \varphi(A)$ y $b = \varphi(B)$, se tiene

$$A \to B \;\Leftrightarrow\; A \wedge B \equiv A \;\Rightarrow\; \varphi(A \wedge B) = \varphi(A) \;\Leftrightarrow\; \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \varphi(A) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; a \cdot b = a \;\Rightarrow\; a \text{ es múltiplo de } b.$$

5.1.2 Proposición.- φ *está bien definida.*

Demostración: Es consecuencia de que se preserve la ordenación. Sean A y B dos proposiciones cualesquiera y sean $a = \varphi(A)$ y $b = \varphi(B)$:

$$A \equiv B \;\Rightarrow\; A \to B \text{ y } B \to A \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \varphi(A) \text{ es múltiplo de } \varphi(B) \text{ y } \varphi(B) \text{ es múltiplo de } \varphi(A) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; a \text{ es múltiplo de } b \text{ y } b \text{ es múltiplo de } a \;\Leftrightarrow\; a = b$$

5.2 El isomorfismo de álgebras de Boole φ

5.2.1 Proposición.- φ *es suprayectiva.*

Demostración: Todo elemento del anillo $\mathcal{A}$ (y estos elementos son los mismos que los del álgebra de Boole $\mathcal{A}$) es una combinación lineal algebraica de las variables polinomiales. Como hemos visto que φ es homomorfismo, si p y q son dos variables polinomiales cualesquiera:

$$\varphi(P \wedge Q) = p \cdot q$$
$$\varphi((\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg P)) = p + q \qquad \text{(por 3.1.2)}$$

luego φ es suprayectiva.

5.2.2 Proposición.- φ *es inyectiva.*

Demostración: Sean A y B dos proposiciones cualesquiera, $\varphi(A) = a$, $\varphi(B) = b$ y supongamos $a = b$ (de donde $a|b$ y $b|a$). Como φ preserva el orden (se corresponden $\rightarrow$ y "ser múltiplo"):

$$b|a \;\Rightarrow\; A \rightarrow B \quad ; \quad a|b \;\Rightarrow\; B \rightarrow A$$

luego $A \leftrightarrow B$.

5.2.3 Observación.- *Para ser precisos, realmente consideramos $\mathcal{C}/\equiv$ (álgebra de Lindenbaum [4]) y $\mathcal{A}/=$. Esto es, consideramos por ejemplo A y $A \wedge A$ como la misma proposición, puesto que $A \equiv A \wedge A$. Análogamente, por ejemplo, a y $a + a + a$, son dos formas de escribir el mismo polinomio.*

5.3 Ejemplos

5.3.1 Ejemplo.- *Sea $\mathcal{C} = \{\underline{0}, P, \neg P, \underline{1}\}$. Entonces $(\mathcal{C}, \rightarrow)$ es el cierre transitivo del diagrama de la izquierda:*

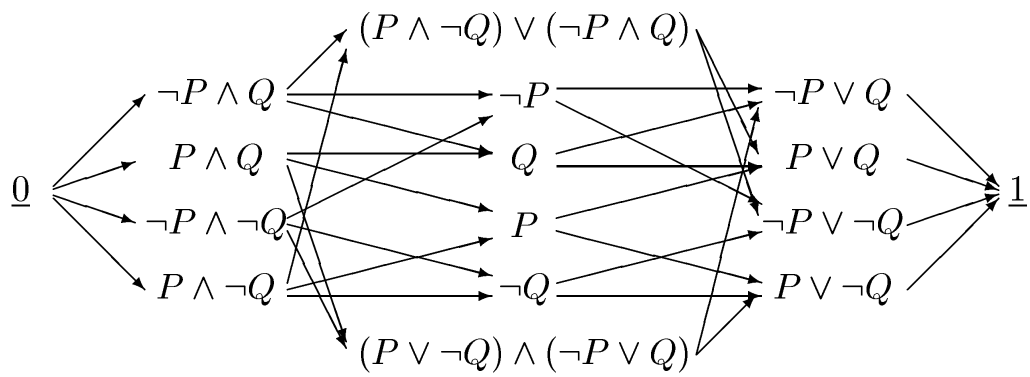
$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr] & \\ \underline{0} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \underline{1} \\ & \neg P \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & p \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 1 \\ & 1+p \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

que se corresponderá en φ con $(\mathcal{A}, \text{ser múltiplo})$, donde

$$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[p]/\langle p^2 - p\rangle \;=\; \{1, p, 1+p, 0\}$$

y "ser múltiplo" es el cierre transitivo del diagrama de la derecha.

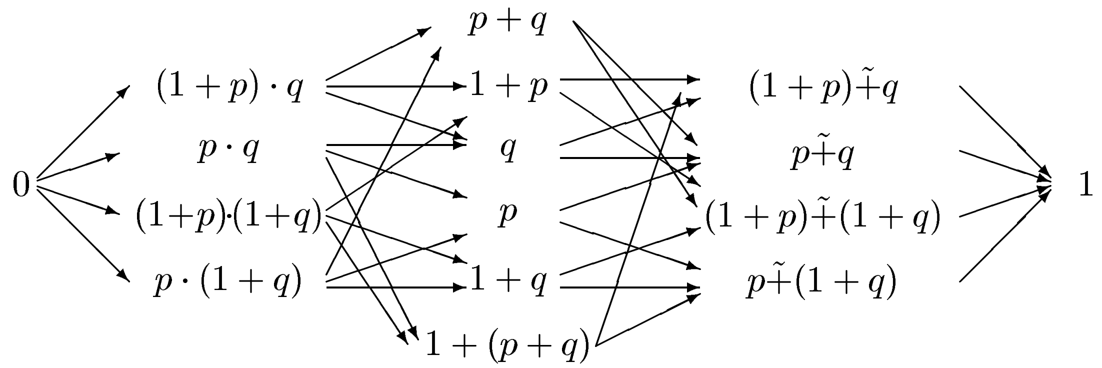
5.3.2 Ejemplo.- *Sean las variables proposicionales de $\mathcal{C}$: P y Q. Entonces $\mathcal{C}$ posee 16 elementos y $(\mathcal{C}, \rightarrow)$ será el cierre transitivo de:*



que se corresponderá en φ *con* $(\mathcal{A}, \text{ser múltiplo})$, *donde*

$$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[p,q]/\langle p^2 - p, q^2 - q\rangle$$

y "ser múltiplo" vendrá dada por el cierre transitivo de:



5.4 Átomos y co-átomos de un álgebra de Boole

5.4.1 Definición.- *Un elemento de un álgebra de Boole que sea minimal (resp. maximal) para la ordenación, se dice que es un átomo (resp. co-átomo)*[3].

5.4.2 Proposición.- *Los co-átomos de* $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+, \text{ser múltiplo})$ *son los polinomios irreducibles.*

[3] Entendemos que el ínfimo no es minimal y el supremo no es maximal, en el sentido usual de minimal y maximal.

Demostración: d es co-átomo $\Leftrightarrow$ d es maximal para "ser múltiplo" $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ el único elemento ($\neq d$) del que d es múltiplo es del supremo (1) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ d es irreducible.

5.4.3 Observación.- *Notemos que una variable proposicional no es irreducible. Por ejemplo, en el caso de que haya exactamente dos variables proposicionales, P y Q (véase 5.3.2):*

$$(p\tilde{+}q) \text{ es irreducible} \quad y \quad (p\tilde{+}(1+q)) \text{ es irreducible}$$

y además

$$(p\tilde{+}q)\cdot(p\tilde{+}(1+q)) = p\cdot(q\tilde{+}(1+q)) = p\cdot 1 = p$$

luego p no es irreducible.

5.4.4 Proposición.- *Para cualquier $B \in (\mathcal{C}, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow)$:*

$$B \text{ es átomo } \Leftrightarrow \neg B \text{ es co-átomo.}$$

Análogamente, para cualquier $b \in (\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+, \text{ser múltiplo})$

$$b \text{ es átomo } \Leftrightarrow 1+b \text{ es co-átomo}$$

Demostración: Basta considerar las definiciones de átomo y co-átomo y 4.1.5.

5.4.5 Proposición.- *Los átomos de $(\mathcal{A}, \text{ser múltiplo})$, donde $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[p,q,...,r]/\langle p^2-p, q^2-q, ..., r^2-r\rangle$ son de la forma:*

$$m = [\delta_p\cdot p+(1-\delta_p)\cdot(1+p)]\cdot[\delta_q\cdot q+(1-\delta_q)\cdot(1+q)]\cdot\ldots\cdot[\delta_r\cdot r+(1-\delta_r)\cdot(1+r)]$$

donde

$$\delta_i \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \qquad (\text{e.e.}: \delta_i = 0 \text{ o } \delta_i = 1).$$

Por tanto, los átomos son polinomios de $\mathcal{A}$ de grado total máximo (los átomos son de grado uno en cada variable y grado total el número de variables).

Demostración: i) Veamos que m es un átomo.
Sea $a \in \mathcal{A}$, $m|a \Leftrightarrow \exists k \in \mathcal{A} : a = k \cdot m$. Como $k \in \mathcal{A}$, se puede expresar en la forma:

$$k = \alpha_0 + \alpha_p \cdot p + \alpha_q \cdot q + ... + \alpha_{pq} \cdot p \cdot q + ... + \alpha_{pqr} \cdot p \cdot q \cdot r + ...$$

luego $a = k \cdot m$ será una suma de monomios como p.ej.: $(\alpha_{pq} \cdot p \cdot q) \cdot m$.

* Si $\alpha_{pq} = 0$, entonces el monomio se anula.

* Si $\alpha_{pq} = 1$:

  – Si $(1+p)$ ó $(1+q)$ dividen a m, entonces el monomio se anula.

  – En otro caso, p y q dividen a m, y el monomio queda:
  $(1 \cdot p \cdot q) \cdot m = m$.

En cualquier caso, $a = k \cdot m$ será una suma de monomios iguales a 0 ó a m, luego:

$$a = m \quad \text{o bien} \quad a = 0$$

y por tanto a es átomo.

ii) Veamos que si c es átomo de $(\mathcal{A}, \text{ser múltiplo})$ debe ser de esta forma.
Si c es átomo, y lo expresamos con las operaciones del álgebra de Boole $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+)$, no se debe poder escribir en la forma

$$c = h \tilde{+} g \ \ ; \ \ h \neq 0 \ \ y \ \ g \neq 0$$

pues en tal caso quedaría: $c \cdot h = (h \tilde{+} g) \cdot h = h$
y por tanto h y g serían múltiplos de c, luego c no sería minimal.

Por tanto, si expandimos c por distributividad de $\cdot$ respecto de $\tilde{+}$ y cancelamos, no pueden aparecer $\tilde{+}$ en tales expansiones. Luego c es de la forma

$$c = \delta_0 + [\delta_p \cdot p + \delta'_p(1+p)] \cdot [\delta_q \cdot q + \delta'_q(1+q)] \cdot ... \cdot [\delta_r \cdot r + \delta'_r(1+r)]$$

donde $\delta_0, \delta_i, \delta'_i \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ y donde no todas las variables polinomiales tienen necesariamente que aparecer (e.e., puede no aparecer p.ej. el factor $[\delta_q \cdot q + \delta'_q(1+q)]$).

Analicemos las δ:

* si algún δ y el correspondiente δ', por ejemplo δ_p y δ'_p , fueran iguales a 1, entonces $[\delta_p \cdot p + \delta'_p(1+p)] = 1$, es decir, no aparecerían ni el factor p ni el $(1+p)$ en c

* si algún δ y el correspondiente δ', por ejemplo δ_p y δ'_p , fueran iguales a 0, entonces $[\delta_p \cdot p + \delta'_p(1+p)] = 0$, y quedaría $c = \delta_0$. Entonces:
  - si $\delta_0 = 0$, c no sería minimal (sería $c = 0$, e.e., el ínfimo)
  - si $\delta_0 = 1$, c no sería minimal (sería $c = 1$, e.e., el supremo).

Por tanto

$$c = \delta_0 + [\delta_p \cdot p + (1-\delta_p)\cdot(1+p)]\cdot[\delta_q \cdot q + (1-\delta_q)\cdot(1+q)]\cdot \ldots \cdot[\delta_r \cdot r + (1-\delta_r)\cdot(1+r)]$$

donde $\delta_0, \delta_i \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ y donde no todas las variables polinomiales tienen necesariamente que aparecer.

Como, por las leyes de De Morgan, $1 + (a \cdot b) = (1+a)\tilde{+}(1+b)$, y hemos visto que c no se debe poder expresar como $\tilde{+}$ de elementos no nulos, debe ser $\delta_0 = 0$. En consecuencia:

$$c = [\delta_p \cdot p + (1-\delta_p)\cdot(1+p)]\cdot[\delta_q \cdot q + (1-\delta_q)\cdot(1+q)]\cdot \ldots \cdot[\delta_r \cdot r + (1-\delta_r)\cdot(1+r)]$$

donde $\delta_i \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ y donde no todas las variables polinomiales tienen necesariamente que aparecer.

Pero si por ejemplo ni r ni $(1+r)$ aparecieran, $c \cdot r$ sería múltiplo (propio) de c y c no sería minimal. Por tanto todas las variables polinomiales tienen necesariamente que aparecer.

5.4.6 Consecuencia.- *Si en el álgebra de Boole polinomial* $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, 1+,$ ser múltiplo) *hay* n *variables polinomiales, entonces hay* 2^n *átomos (respectivamente co-átomos). Lo mismo ocurrirá en* $(\mathcal{C}, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow)$ *si se genera a partir de* n *variables proposicionales.*

6 Ideales y filtros

6.1 Ideales de anillos conmutativos

6.1.1 Definición.- *Sea* $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ *un anillo conmutativo. Un subconjunto* $I \subseteq \mathcal{R}$ *se dice que es un ideal de* $\mathcal{R}$ *syss se verifican:*

i) $\forall i, i' \in I: \ i + i' \in I$

ii) $\forall i \in I, \forall a \in \mathcal{R}: \ a \cdot i \in I$

(e.e. I es subanillo de $\mathcal{A}$ tal que el producto de un elemento del anillo por un elemento del ideal pertenece siempre al ideal).

6.1.2 Definición.- *Sea $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ anillo conmutativo y sea $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{R}$. Se llama ideal generado por S al menor ideal que contiene a S. Si $S = \{s_1, ..., s_m\}$, el ideal generado por S se denota $\langle s_1, ..., s_m \rangle$.*

En particular, si $S = \{s\}$, el ideal generado por S, $\langle s \rangle$, se dice que es un ideal principal y resulta ser: $\langle s \rangle = \{x \in \mathcal{A} : s|x\}$.

6.2 Ideales (y filtros) de álgebras de Boole

6.2.1 Definición.- *En el álgebra de Boole proposicional $(\mathcal{C}, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow)$ se define el ideal (principal) generado por $A \in \mathcal{C}$ como*

$$E_A = \{X \in \mathcal{C} : X \rightarrow A\}$$

y el filtro (principal) generado por $B \in \mathcal{C}$ como

$$E^B = \{X \in \mathcal{C} : B \rightarrow X\}$$

6.2.2 Observación.- *Definiremos de modo análogo ideales y filtros de un álgebra de Boole general a partir del orden reticular asociado. Así por ejemplo, el ideal (principal) del álgebra de Boole $(A, \tilde{+}, \cdot, 1+, \text{ser múltiplo})$ generado por $a \in \mathcal{A}$, será:*

$$E_a = \{x \in \mathcal{A} : x \textit{ es múltiplo de } a\}$$

6.2.3 Proposición.- *Como φ preserva el orden, los ideales y filtros del álgebra de Boole $(\mathcal{C}, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow)$ se corresponden en φ con los ideales y filtros del álgebra de Boole $(A, \tilde{+}, \cdot, 1+, \text{ser múltiplo})$.*

6.3 Ideales del anillo $\mathcal{A}$ e ideales del álgebra de Boole $\mathcal{A}$

6.3.1 Proposición.- *Los ideales del álgebra de Boole* $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, \text{ser múltiplo})$ *son ideales del anillo* $(\mathcal{A}, +, \cdot, \text{ser múltiplo})$.

6.3.2 Teorema.- $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ *es un anillo en que todo ideal es principal. Es más:* $\langle s_1, s_2, ..., s_n \rangle = \langle s_1 \tilde{+} s_2 \tilde{+} ... \tilde{+} s_n \rangle$.

Demostración: i) $\tilde{+}$ es operación interna en el ideal (por serlo $+$ y $\cdot$), luego:

$$s_1 \tilde{+} s_2 \tilde{+} ... \tilde{+} s_n \in \langle s_1, s_2, ..., s_n \rangle \;\Rightarrow\; \langle s_1 \tilde{+} s_2 \tilde{+} ... \tilde{+} s_n \rangle \;\subseteq \langle s_1, s_2, ..., s_n \rangle$$

ii) Por 4.1.7 i): $s_1 \tilde{+} s_2 \tilde{+} ... \tilde{+} s_n | s_i \;\; ; \;\; i = i, ..., n \;\Rightarrow$
$\Rightarrow s_i \in \langle s_1 \tilde{+} s_2 \tilde{+} ... \tilde{+} s_n \rangle \;\; ; \;\; i = i, ..., n \;\Rightarrow$
$\Rightarrow$ el mínimo ideal que contiene a $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$, esto es,
$\langle s_1, s_2, ..., s_n \rangle \subseteq \langle s_1 \tilde{+} s_2 \tilde{+} ... \tilde{+} s_n \rangle$.

6.3.3 Observación.- *De modo similar se prueba que el menor filtro del álgebra de Boole* $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, \text{ser múltiplo})$ *al que pertenecen* $s_1, s_2, ..., s_n$ *es el generado por* $s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_n$

6.3.4 Proposición.- *Los ideales del álgebra de Boole* $(\mathcal{A}, \tilde{+}, \cdot, \text{ser múltiplo})$ *coinciden con los ideales del anillo* $(\mathcal{A}, +, \cdot, \text{ser múltiplo})$.

Demostración: i) Los ideales del álgebra de Boole $\mathcal{A}$ son ideales del anillo $\mathcal{A}$ (esta parte es 6.3.1).

ii) Los ideales del anillo $\mathcal{A}$ son ideales del álgebra de Boole $\mathcal{A}$. En efecto: por 6.3.2, los ideales del anillo son principales, luego los múltiplos del generador deben estar en el ideal, y es obvio que tal conjunto de múltiplos constituye un ideal del anillo.

6.4 Más resultados sobre ideales y filtros

6.4.1 Proposición.- *Si el ideal de* $\mathcal{A}$ *generado por* $a \in \mathcal{A}$ *corta al filtro generado por su complementario,* $1 + a$*, entonces ambos son todo el anillo, e.e.:*

$$E_a \cap E^{(1+a)} \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; E_a = E^{(1+a)} = \mathcal{A}$$

Demostración: $\Leftarrow$) Es evidente.

$\Rightarrow$) $E_a \cap E^{(1+a)} \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \exists x \in E_a \cap E^{1+a}$
y para ese x, debe verificarse (por definición de ideal):

$$a|x \ \text{ y } \ x|(1+a) \ \Rightarrow \ a|(1+a) \ \Rightarrow \ (1+a) \in \langle a \rangle \ \Rightarrow \ 1 \in \langle a \rangle \ \Rightarrow \ \langle a \rangle = \mathcal{A}$$

Para el filtro: $1 \in \langle a \rangle \ \Rightarrow \ a|1 \ \Rightarrow \ 0 = (1+1)|(1+a) \ \Rightarrow$
$\Rightarrow \ 0 \in E^{(1+a)} \ \Rightarrow \ E^{1+a} = \mathcal{A}$

6.4.2 Notación.- *Admitamos la notación siguiente: si $S \subseteq \mathcal{A}$,*

$$1 + S = \{1 + s : s \in S\}$$

6.4.3 Proposición.- *i) El ideal de $\mathcal{A}$ generado por $a \in \mathcal{A}$ coincide con el conjunto de complementarios de los elementos del filtro generado por el complementario de a, e.e.:*

$$E_a = 1 + (E^{1+a})$$

ii) En consecuencia, si $b \in \mathcal{A}$: $E^b = 1 + (E_{1+b})$

Demostración: *i)* $x \in E_a \ \Leftrightarrow \ a|x \ \Leftrightarrow \ 1+x|1+a \ \Leftrightarrow \ 1+x \in E^{1+a}$

ii) Sigue de *i)* y 4.1.5.

6.4.4 Teorema.- *Todo elemento de $\mathcal{A}$ (distinto de la unidad) es expresable de modo único como producto de irreducibles.*

Demostración: i) Todo elemento es producto de co-átomos (irreducibles). En efecto: sea $b \in \mathcal{A}$. Como todos son múltiplos de 1, pueden ocurrir dos cosas:

- b es irreducible (y hemos terminado)
- b no es irreducible. Como el anillo es finito, tiene que existir un irreducible k tal que $1|k|b$. Por tanto $\exists b' : b = k \cdot b'$. Reiterando el proceso para b' obtendremos la descomposición de b como producto de irreducibles (como $b' \cdot b = b \ \Leftrightarrow \ b' \leq b$ y $b' \neq b$, y el anillo es finito, el proceso tiene fin).

ii) La expresión de un elemento como producto de irreducibles es única.
Sea b un elemento cualquiera de $\mathcal{A}$. Consideremos el filtro E^b. Entonces b es el producto de los co-átomos (irreducibles) de E^b, $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_j$, y esa es la única forma de expresarlo como producto de elementos irreducibles.
En efecto: por 4.1.7 ii

$$\pi_i|b \ \ ; \ \ i = 1, 2, ..., j \ \Rightarrow \ \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot ... \cdot \pi_j|b$$

Además, otros irreducibles no pueden dividir a b, pues pertenecerían a E^b. Y si algún π_i apareciera más de una vez, simplificaría por idempotencia. Por tanto: $\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot ... \cdot \pi_j = b$

6.4.5 Observación.- $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ *no es un dominio de factorización única (DFU), pues en 2.2.1 se vio que todo elemento es divisor de cero, luego* $\mathcal{A}$ *no es dominio. De hecho la factorización en general no es única:*

$$p \cdot q = p \cdot (p \cdot q) \quad y: \quad q \neq p \cdot q$$

6.4.6 Proposición.- *El anillo de clases residuales* $\mathcal{A}$ *es finito y por tanto es un anillo noetheriano y artiniano (suponemos finito el número de variables).*

7 Implementación en *CoCoA*

7.1 Sobre *CoCoA*

CoCoA es un lenguaje de Algebra Computacional especializado en cálculos de GB y NF módulo un ideal en anillos de polinomios sobre cuerpos finitos.

No se puede fijar en *CoCoA* que el anillo sea de clases residuales. Lo que haremos es calcular las formas normales de todos los elementos (reducirlos) módulo el ideal generado por las diferencias de los cuadrados de las variables menos ellas mismas (lo que, desde el punto de vista del mero cálculo, viene a ser lo mismo).

La tautología y la contradicción se representarán respectivamente como T $(T = 1)$ y C $(C = 0)$.

7.2 Código en *WinCoCoA v.4.2*

Supongamos que las variables proposicionales son $P_1, P_2, ..., P_{10}$ y las variables polinomiales correspondientes $p_1, p_2, ..., p_{10}$. Consideramos entonces el anillo polinomial

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[p_1, p_2, ..., p_{10}]$$

y reducimos todos los cálculos módulo el ideal

$$I = \langle p_1^2 - p_1, p_2^2 - p_2, ..., p_{10}^2 - p_{10}\rangle$$

El código que hace esto es brevísimo:

```
A::=Z/(2)[ p[1..10] ];
USE A;
MEMORY.I:=Ideal(p[1]^2-p[1],p[2]^2-p[2],p[3]^2-p[3],
                p[4]^2-p[4],p[5]^2-p[5],p[6]^2-p[6],
                p[7]^2-p[7],p[8]^2-p[8],p[9]^2-p[9],
                p[10]^2-p[10]);
T:=1;
C:=0;
NEG(M)    := NF(1+M      , MEMORY.I);
O(M,N)    := NF(M+N+M*N  , MEMORY.I);
Y(M,N)    := NF(M*N      , MEMORY.I);
IMP(M,N)  := NF(1+M+M*N  , MEMORY.I);
```

7.3 Ejemplos de uso de la implementación en WinCoCoA

7.3.1 Ejemplo.- *Comprobar la distributividad de* $\vee$ *respecto de* $\wedge$ *viendo que:* $p_1 \vee (p_2 \wedge p_3) \equiv (p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$

```
O(p[1],Y(p[2],p[3])) - Y(O(p[1],p[2]),O(p[1],p[3]));
0
```

Como las imágenes de ambas proposiciones por φ *coinciden, son equivalentes.*

7.3.2 Ejemplo.- *Comprobar una de las leyes de De Morgan para* p_1, p_2 *y* p_3*:* $\neg(p_1 \vee p_2) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2$*:*

```
NEG(O(p[1],p[2])) - Y(NEG(p[1]),NEG(p[2]));
0
```

Observemos que lo que podemos probar con esta aproximación es si una proposición concreta es una tautología, si dos proposiciones concretas son equivalentes, etc. El demostrar una propiedad en general supondría tener que considerar expresiones generales de proposiciones, lo que es posible pero demasiado costoso cuando el número de variables proposicionales del álgebra de Boole proposicional es alto.

8 Conclusiones

Esta aproximación [14] tiene la ventaja sobre la de Kapur-Narendran [12] o Hsiang [11] de proporcionar una estructura de algebra de Boole (polinomial) isomorfa al algebra proposicional, en lugar de sólo una forma de realizar cálculos efectivos. Ello es la clave para dar un paso más y obtener un modelo para sistemas expertos basados en reglas (RBES) sobre una lógica booleana, pasando de

$$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x, y, ..., z]/\langle x^2 - x, y^2 - y, ..., z^2 - z\rangle$$

a

$$\mathcal{A}/J$$

donde J es el ideal generado por la negación de los hechos establecidos como ciertos (de entre los hechos potenciales), de las reglas y de las restricciones de integridad. Se pueden estudiar así extracción de conocimiento en RBES y verificación de RBES [18].

Todo ello se puede generalizar a lógicas modales multivalentes [4, 22], extendiendo los trabajos de Alonso-Briales [3] y Chazarain et al. [6], también con la ventaja de proporcionar un anillo de clases residuales isomorfo y de poder pasar a tratar RBES sobre lógicas modales multivalentes [15, 19].

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente subvencionado por los proyectos TIC2000-1368-C03-03 y TIC2000-1368-C03-01.

Referencias

[1] W.W. Adams, P. Loustaunau: *An Introduction to Gröbner Bases.* Graduate Studies in Mathematics 3, AMS, 1994.

[2] A.G. Akritas: *Elements of Computer Algebra with Applications.* Wiley - Interscience, 1989.

[3] J.A. Alonso, E. Briales: Lógicas Polivalentes y Bases de Gröbner, en: M. Vide ed. *Procs. of the V Congress on Natural Languages and Formal Languages*, U. Press, 1989, 307-315.

[4] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema: *Modal Logic.* Cambridge University Press, 2001.

[5] A. Capani, G. Niesi: *CoCoA User's Manual (v. 3.0b).* Dpto. de Matemáticas, Universidad de Genova, 1996.

[6] J. Chazarain, A. Riscos, J.A. Alonso, E. Briales: Many-valued Logic and Gröbner Bases with Applications to Modal Logic. *Journal of Symbolic Computation*, 11, 181-194, 1991.

[7] D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals,varieties, and algorithms.* Springer-Verlag, 1992.

[8] P.R. Halmos: *Lectures on Boolean Algebras.* Springer-Verlag, 1974.

[9] P. Halmos, S. Givant: *Logic as Algebra.* The Mathematical Asociation of America, 1998.

[10] H. Hermes: *La teoría de retículos y su aplicación a la lógica matemática.* Conf. Mat. VI. CSIC, 1963.

[11] J. Hsiang: Refutational Theorem Proving using Term-rewriting Systems. *Artificial Intelligence*, 25 (1985), 255-300.

[12] D. Kapur, P. Narendran: An Equational Approach to Theorem Proving in First-Order Predicate Calculus, 84CRD296, *General Electric Corporate Research and Development Report* (Schenectady, NY, March 1984, rev Dec 1984). También en: *Proceedings of IJCAI-85*, (1985) 1146-1153.

[13] M. Kreuzer, L. Robbiano: *Computational Commutative Algebra*. Springer-Verlag, 2000.

[14] L.M. Laita, L. de Ledesma, E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías: An interpretation of the propositional Boolean algebra as a k-algebra: effective calculus. En: J. Calmet, J.A. Campbell (editores): *Integrating Symbolic Mathematical Computation and Artificial Intelligence; Selected Papers AISMC-2*. Springer-Verlag LNCS 958, 1995, págs. 255-263.

[15] L.M. Laita, E. Roanes-Lozano, L. de Ledesma, J.A. Alonso: A Computer Approach to Verification and Deduction in Many-valued Knowledge Systems. *Soft Computing*, 3 (1), 7-19, 1999.

[16] E. Mendelson: *Theory and Problems of Boolean Algebras and Switching Circuits*. Schaum's / MacGraw-Hill, 1970.

[17] D. Monk: *Handbook of Boolean Algebras*. North-Holland, 1989.

[18] E. Roanes Lozano, L.M. Laita, E. Roanes Macías: An Inference Engine for Propositional Two-valued Logic Based in the Radical Memebership Problem. En: J. Calmet, J.A. Campbell, J. Pfalzgraf (editores): *Artificial Intelligence and Symbolic Mathematical Computation; Proceedings of AISMC-3*. Springer-Verlag LNCS 1138, 1996, págs. 71-86.

[19] E. Roanes-Lozano, L.M. Laita, E. Roanes-Macías: A Polynomial Model for Many-valued Logics with a Touch of Algebraic Geometry and Computer Algebra. *Mathematics and Computers in Simulation*, 45 (1), 83-99, 1998.

[20] L. Robbiano et al.: *CoCoA 4.2 Online Help* (electronic file companying CoCoA v.4.2), 2002.

[21] M. Stone: The Theory of Representations for Boolean Algebras. *Transactions AMS*, 40, 37-111, 1940.

[22] R. Turner: *Logics for Artificial Intelligence*. Ellis Horwood, 1984.

[23] F. Winkler: *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*. Springer-Verlag, 1996.

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 65 (Octubre 2003)

La Aritmética Árabe. Al-Kuwarizmi

Concepción Romo Santos

Departamento de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid

romosan@mat.ucm.es

Abstract

The objective of this work is to investigate the principal discoveries of Arab Mathematic, some of which main authors are: Mohammed ibn-Musa Al-Khowarizmi, Thabit ibn Qurra, Abú Kámil, Omar Khayyam, Nasir Eddinn, Al-Kashi. We are also going to study with a principal concern the work of Al-Khowarizmi "Al-jhabr wa'al mugabalah", because that book was for Algebra what "Euclid Elements" were for Geometry, that is, the best elementary exposition available till modern times.

Introducción

Durante el primer siglo del Imperio musulmán no se produjo ningún desarrollo científico, pero en la segunda mitad del siglo VIII fueron llamados a Bagdad sabios procedentes de Siria, Irán y Mesopotamia. De esta manera bajo los califatos de los tres grandes protectores abbasíes de la cultura, Al-Mansur Haroun, Al-Raschid y Al-Mamun, Bagdad se convirtió en una nueva Alejandría. Durante el reinado del segundo de estos califas, conocido sobre todo por los cuentos de "Las mil y una noches", se tradujo al árabe parte de la obra de Euclides, pero cuando los árabes dieron rienda suelta a su pasión por las traducciones fue durante el califato de Al-Mamun (809-833). Se dice que el califa tuvo un sueño en el que se le apareció Aristóteles, y en consecuencia Al-Mamun decidió hacer traducir al árabe todas las obras griegas que se tuvieran a mano, incluido el Almagesto de Ptolomeo y una versión completa de los Elementos de Euclides.

Al-Mamún fue quien fundó en Bagdad la "Casa de la sabiduría" comparable al antiguo Museo de Alejandría. Entre los miembros de esta especie de Universidad estaba un matemático y astrónomo, Mohammed ibn-Musa Al-Khowarizmi. Este matemático que debió morir algo antes del año 850, además de tablas astronómicas y tratados sobre el astrolabio y el reloj de sol, escribió dos libros sobre aritmética y álgebra. El primero de ellos nos ha llegado sólo a través de una copia única de una traducción latina con el título "Sobre el arte de calcular hindú" de la cual el original árabe se ha perdido. En esta obra que estaba basada presumiblemente en una traducción árabe de Brahmagupta, daba Al-Khowarizmi una exposición tan completa del sistema de numeración hindú, que es él probablemente el responsable de la extendida aunque falsa impresión de que nuestro sistema de numeración es de origen árabe.

Al-Khowarizmi a través de su obra "Al-Jhabr wa'al mugabalah" nos ha transmitido la palabra álgebra que se deriva de este título, cosa natural si se tiene en cuenta que fue de este libro del que aprendió más tarde Europa la rama de la matemática que lleva ese nombre. El Al-Jhabr viene a estar, más próximo al álgebra elemental moderna que las obras de Diofanto o de Brahmagupta, ya que este libro no trata de difíciles problemas de análisis indeterminado, sino de la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente de las de segundo grado. El Al-Jhabr nos ha llegado en dos versiones, la árabe y una traducción latina. La palabra árabe "al-jhabr" significa transferencia de términos al otro lado de una ecuación y "mugabalah" cancelación de términos iguales en ambos miembros. La palabra árabe "al-jhabr" se convirtió en álgebra al transcribirla al latín.

El Álgebra de Al-Khowarizmi fue para el Álgebra lo que los "Elementos de Euclides" fueron para la Geometría, es decir, la mejor exposición elemental disponible hasta los tiempos modernos.

Al-Khowarizmi es unos de los más típicos ejemplos del eclecticismo árabe. Lo más seguro es que su sistema de numeración provenga de la India, su solución algebraica sistemática de las ecuaciones de segundo grado puede haber sido un desarrollo procedente de Mesopotamia, y el marco geométrico y lógico con que justifica sus soluciones tiene su origen evidente en Grecia.

1. La Aritmética de Al-Khowarizmi

La aritmética de Al-Khowarizmi es la primera obra conocida en la que el sistema decimal y las operaciones efectuadas haciendo uso del mismo, son objeto de una atención especial. El título de la obra es "Libro de la adición y la sustracción a partir del cálculo de los hindúes". Sus primeras frases, tras las rituales alabanzas a

Dios, propias de aquellos tiempos son: "... hemos decidido exponer la forma de contar de los hindúes con la ayuda de IX caracteres y enseñar como, gracias a su simplicidad y concisión, estos caracteres permiten expresar todos los números".

Tras explicar con detalle el sistema decimal de numeración mediante las cifras usadas en la India, junto con un pequeño círculo semejante al cero, da las normas que permiten pronunciar los diferentes números y define los conceptos de unidad, decena, centena, etc.

A modo de ejemplo propone el número *1 100 703 051 492 863*, que lee: un millar de millar de millar de millar de millar (cinco veces) y cien millares de millar de millar de millar (cuatro veces) más setecientos tres millares de millar de millar (tres veces) y cincuenta y un millares de millar (dos veces) y cuatrocientos noventa y dos millares y ochocientos sesenta y tres.

Describe a continuación las operaciones de cálculo. Veamos el ejemplo que propone para la multiplicación de *2326* por *214*:

```
  2326                              2326
214       ---------------->       428000
            (2000×214=428000)    ________
                                  428326

428326                            428326
 214      ---------------->        64200
            (300×214=64200)      ________
                                  492226

492226                            492226
  214     ---------------->         4280
            (20×214=4280)        ________
                                  496486

496486                            496486
   214      -------------->         1284
            (6×214=1284)         ________
                                  497764
```

Análogamente la división de *46468* entre *324* se efectúa como sigue:

```
  1
46468                          es decir:   46468 | 324
324                                        14068   1

  1             14
14068  ----->  14068           es decir:   14068 | 324
 324            324                        1108    4

 14            143
 1108  ----->  1108            es decir:   1108 | 324
  324             324                       136   3
```

(Resultado: cociente entero 143 y resto 136)

2. El Álgebra de Al-Khowarizmi

El Álgebra de Al-Khowarizmi muestra como resolver las ecuaciones de segundo grado y las ecuaciones lineales con coeficientes numéricos. Al principio de su obra distingue seis formas canónicas de ecuaciones de primer y segundo grado e indica los métodos de resolución. En estas formas canónicas, todos los términos deben aparecer como magnitudes aditivas y, además considerar solamente las soluciones positivas de las ecuaciones. Las seis formas canónicas son:

I.- Los cuadrados son iguales a las raíces: $a \cdot x^2 = b \cdot x$

II.- Los cuadrados son iguales a un número: $a \cdot x^2 = c$

III.- Las raíces son iguales a un número: $a \cdot x = c$

IV.- Los cuadrados y las raíces son iguales a un número: $a \cdot x^2 + b \cdot x = c$

V.- Los cuadrados y los números son iguales a las raíces: $a \cdot x^2 + c = b \cdot x$

VI.- Las raíces y los números son iguales a los cuadrados: $b \cdot x + c = a \cdot x^2$

Cualquier otra ecuación sólo puede resolverse tras haber sido reducida a una de estas formas. Además, el coeficiente del término cuadrático debe ser igual a la unidad. Por ejemplo, una ecuación que se plantea como:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

se reduce al caso

$$x^2 + 21 = 10x$$

que es del tipo V.

Veamos la discusión que hace Al-Khowarizmi de esta ecuación: dividiendo por dos el número de raíces, resulta 5. Multiplicando este número por sí mismo, se obtiene 25. Resta ahora 21 de esta cantidad, el resto que queda es 4. Extrayendo la raíz cuadrada, que es igual a 2, y restando este de la mitad del número de raíces, 5, resulta 3. Esta es la raíz que se busca, y su cuadrado es 9. De forma alternativa, se puede añadir la raíz cuadrada a la mitad del número de raices, y la suma es siete. Esta es también la raíz buscada, y su cuadrado es 49.

Obsérvese que el primer procedimiento no es más que una descripción verbal de nuestra regla

$$\frac{10}{2} - \sqrt{(\frac{10}{2})^2 - 21}$$

y el segundo, describe el cálculo de

$$5 + \sqrt{5^2 - 21}$$

Este ejemplo conduce a una regla más general para la ecuación $x^2 + bx = c$, que es:

$$\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$$

3. Demostración geométrica de Alkhowarizmi para la resolución de la ecuación $x^2 + 21 = 10x$

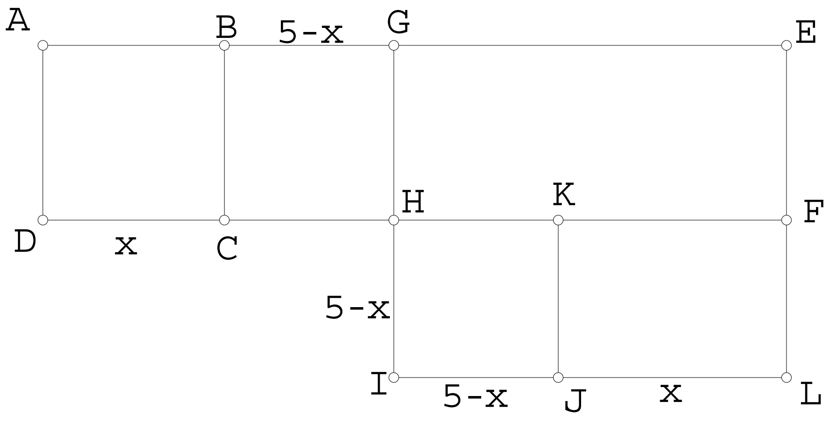


Figura 1

Área del rectángulo BEFC igual a 21 (Figura 1)

El rectángulo AEFD tiene de área 10x, luego AE = 10, AG = 5, HI = 5-x, IJ = 5-x

Área BGHC = área KFLJ

Área GELI igual a 25

Área GELJKH igual a 21

Área HKJI igual a 4 luego 5-x = 2 → x = 3

4. Un problema de Herón

Algunos de los problemas de Al-Khowarizmi evidencian con toda claridad su dependencia de la corriente matemática que proviene de los babilonios pasando por Herón. Y uno de ellos al menos fue tomado directamente de Herón con gran probabilidad, ya que tanto la figura como las dimensiones son las mismas. Se trata de inscribir un cuadrado en un triángulo isósceles de base 12 unidades (Figura 2) y lados iguales de 10 unidades, preguntando el problema la medida del lado de dicho

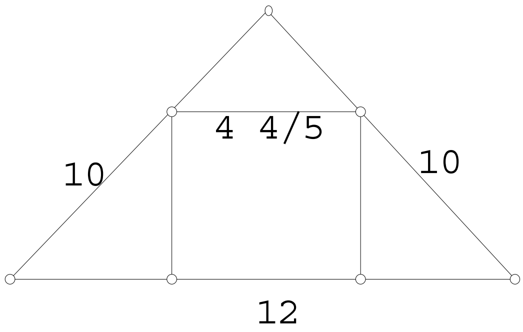


Figura 2

cuadrado. Al-Khowarizmi calcula en primer lugar, con ayuda del teorema de Pitágoras, la altura del triángulo, 8 unidades, así que el área del triángulo es 48. Llamando al lado del cuadrado “la cosa” se puede ver que se obtendrá el cuadrado de “la cosa” restándole al triángulo grande los tres triángulos pequeños que quedan fuera del cuadrado. La suma de las áreas de los dos triángulos menores es evidentemente el producto de “la cosa” por 6 menos la mitad de “la cosa” y el área del triángulo pequeño superior es el producto de ocho menos “la cosa” por la mitad de “la cosa”; de todo ello se obtiene que “la cosa” es 4 4/5. Desarrollándolo más detenidamente tendremos

$$6^2 + x^2 = 10^2,\ x^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow x = 8 \quad \text{(altura del triángulo)}$$

Área del triángulo igual a 48

(“la cosa”) $\times$ (6 – ½ “la cosa”) es el área de los triángulos menores inferiores

(8 – “la cosa”) $\times$ (½ “la cosa” es el área del triángulo superior

48 – (“la cosa”)$\times$(6– ½ “la cosa”) – (8 – “la cosa”)$\times$(½ “la cosa”) = (“la cosa”)^2

48 – 6(“la cosa”) + ½ (“la cosa”)^2 – 4 (“la cosa”) + ½ (“la cosa”)^2 = (“la cosa”)^2

48 – 10(“la cosa”) = 0

10 (“la cosa”) = 48

“la cosa” = $\dfrac{48}{10} = \dfrac{24}{5} = 4\dfrac{4}{5}$ unidades

En la teoría de resolución de ecuaciones, Al-Khowarizmi presentaba sus demostraciones en términos de casos particulares. En cambio, en sus trabajos, Thabit ibn Qurra da demostraciones del caso general. Veremos el caso $x^2+bx=c$

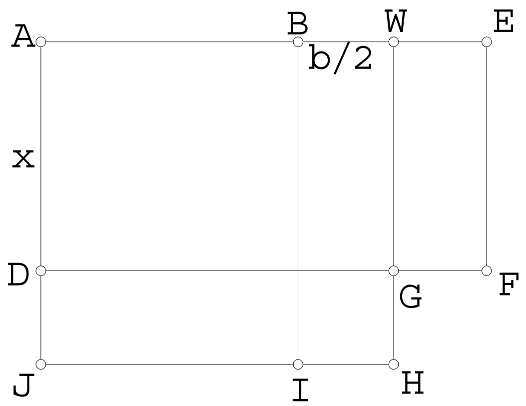


Figura 3

BE=b   área WEGF = area DCJI (Figura 3)

Luego área ABCD + área BECF + área CGHI = área AWHJ

$x^2 + bx + (b/2)^2 = (x + b/2)^2$

$x^2 + bx$ conocido pues *es c,* $(b/2)^2$ conocido, entonces $x + b/2$ conocido, luego x conocido: $x = AW - BW = x + b/2 - b/2$

Algebraicamente también sería fácil demostrarlo, se añade $(b/2)^2$ a los dos miembros:

$x^2 + bx = c$

$x^2 + bx + (b/2)^2 = c + (b/2)^2$

$(x + b/2)^2 = c + (b/2)^2$

$x + b/2 = \sqrt{c+(b/2)^2}$

$x = \sqrt{c+(b/2)^2} - b/2$

Ejemplo: Resolver $x^2 + 12x = 64$ (Figura 4)

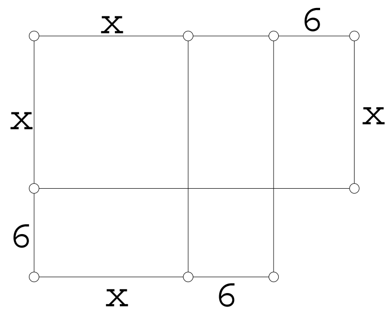


Figura 4

$(x + 6)^2 = 64 + 36 = 100$

$x + 6 = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

5. El Álgebra de Abú Kámil

Un escritor que se encontraba en plena actividad a la muerte de Thabit ibn Qurra, el año 901, es Abú Kámil, cuyo apelativo era "el calculista egipcio". Uno de los problemas que plantea es el siguiente:

Se divide 10 en tres partes de manera que si la menor de ellas se multiplica por sí misma y se suma a la intermedia multiplicada también por ella misma, el resultado es la mayor multiplicada de nuevo por ella, y cuando se multiplica la menor por la mayor se obtiene la intermedia, multiplicada por sí misma. Se tienen así tres indeterminadas x,y,z (que se suponen positivas) y verifican

$10 = x + y + z$

$z^2 = x^2 + y^2$

$x.z = y^2$

Toma primero $x = 1$, con lo que las condiciones se convierten en:

$10 = 1 + y + z$

$z^2 = 1 + y^2$

$z = y^2$

Las dos últimas inducen la igualdad

$(y^2)^2 = 1+y^2$

que resuelta da

$z = y^2 = 1/2 + \sqrt{11/4}$

es decir

$$y = \sqrt{1/2 + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$$

y, por lo tanto

$$1 + y + z = 3/2 + \sqrt{1\frac{1}{4}} + \sqrt{1/2 + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$$

Si designamos esta última cantidad por a, tendríamos $a=10$, pero es evidente que esto no es cierto , no obstante, $a \bullet (10/a) = 10$, por lo que si llamamos $b = 10/a$, tendremos $a.b = 10$, lo que puede expresarse como

$$(1 + y + z) \bullet b = 10 \quad \text{es decir} \quad y + yb + zb = 10$$

y ahora b, yb, zb resuelven el problema. Abú Kámil utiliza aquí un artificio de cálculo conocido como “regla de la falsa posición”, conocida ya en el antiguo Egipto.

Tras laboriosos cálculos, el valor de b queda determinado como una raíz de la ecuación:

$$10x = x^2 + 75 - \sqrt{3125}$$

con lo que se obtiene el menor de los tres números

$$b = 5 \approx 2,57$$

Y ahora, las condiciones restantes nos permiten calcular los dos valores restantes, que son:

$$yb \approx 3{,}26 \qquad zb \approx 4{,}17$$

Abú Kamil también demuestra las siguientes igualdades

$$(10 - x)\,.\,(10 - x) = 100 + x^2 - 20x$$

y aunque da una prueba algebraica, partiendo de la propiedad distributiva y la regla de los signos, añade la siguiente demostración geométrica (Figura 5).

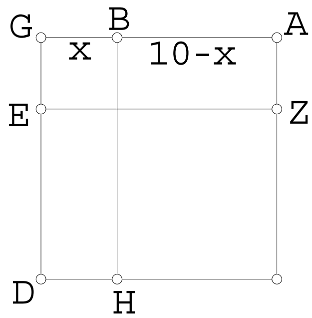


Figura 5

Supongamos que el segmento GA representa el número 10, y GB la letra x. Completemos el cuadrado (AD) como en la figura, con lo que AB=ED=*10-x*. De este modo, el cuadrado (ZH) es $(10 - x)^2$ y además, (GZ)=(GH)=*10x*, con lo que (EH) = (GH)-(EB) = $10x - x^2$

Luego (EH)+(GZ)=$20x\text{-}x^2$ y como el cuadrado mayor es igual a 100 se tiene:

$$(10\text{-}x)^2 = (ZH) = 100\text{-}(20x\text{-}x^2) = 100 + x^2\text{-}20x$$

6. Omar Khayyam

Omar Khayyam (1.050-1.123) escribió un "álgebra" que extendía la clásica de Alkhowarizmi hasta incluir las ecuaciones cúbicas. Siguiendo la tradición de sus predecesores árabes, Omar Khayyan da los dos tipos de soluciones, aritméticas y geométricas, para las ecuaciones cuadráticas; acerca de las ecuaciones cúbicas en general parece haber creído (equivocadamente, como se llegaría a demostrar más tarde, durante el siglo XVI) que era imposible dar soluciones aritméticas, y por lo tanto Omar Khayyan da únicamente soluciones geométricas en estos casos. La idea de utilizar intersecciones de cónicas para resolver ecuaciones cúbicas no era nueva, sino que había sido explotada ya por Menecmo, Arquímedes y Alhazan, pero Omar Khayyan dio el paso decisivo de generalizar el método para cubrir todas las ecuaciones cúbicas que tengan alguna raíz positiva. En una obra anterior, al llegar a una ecuación de tercer grado hacía expresamente Omar Khayyan la observación siguiente: "esto no puede resolverse por medio de la geometría plana (es decir, usando solamente regla y compás) debido a que contiene un cubo; para resolverlo necesitamos las secciones cónicas".

Los árabes se sintieron mucho más atraídos por el álgebra y la trigonometría que por la geometría pura, pero si que hubo un aspecto de la geometría que ejerció sobre ellos una fascinación especial; se trata del intento de demostrar el quinto postulado de Euclides. Ya incluso entre los griegos este intento de demostrar el postulado en cuestión se había convertido prácticamente en un "cuarto famoso problema de la geometría" y hubo varios matemáticos árabes que continuaron las investigaciones en este sentido.

Alhazen comenzó considerando un cuadrilátero trirrectángulo, cuadrilátero que suele conocerse como cuadrilátero de Lambert, en honor al matemático del siglo XVIII que lo estudió sistemáticamente y creyó haber demostrado que el cuarto ángulo debía ser también un ángulo recto; a partir de este teorema sobre el cuadrilátero trirrectángulo se puede demostrar fácilmente el quinto postulado de Euclides. En su demostración suponía Alhazen que el lugar geométrico de un punto que se mueve permaneciendo a una distancia constante de una recta dada es siempre otra recta paralela a la dada, hipótesis equivalente al postulado de Euclides, tal como se demostró en la época moderna.

Omar Kayyan criticó la demostración de Alhazen basándose en el hecho de que Aristóteles había excluido de una manera determinante el uso del movimiento en geometría. Omar Khayyan partió de un cuadrilátero con dos lados iguales y perpendiculares a su base, cuadrilátero que se suele denominar actualmente como cuadrilátero de Saccheri en honor al matemático del siglo XVIII del mismo nombre que estudió sus propiedades e investigó las posibilidades que pueden darse sobre los ángulos superiores del cuadrilátero, que deben ser necesariamente iguales como se puede ver fácilmente.

Hay, pues tres posibilidades, según que los ángulos superiores sean: 1) agudos, 2) rectos, ó 3) obtusos. Las posibilidades 1 y 3 las excluye Omar Khayyan basándose en un principio que atribuye a Aristóteles y que asegura que dos rectas convergentes deben cortarse, lo que supone de nuevo una hipótesis equivalente al postulado del paralelismo de Euclides

7. Nasir Eddinn

Cuando murió Omar Khayyan en el año 1.123, la ciencia árabe se encontraba ya iniciando un periodo de decadencia, pero las contribuciones científicas no terminaron bruscamente. Durante el siglo XIII y más tarde otra vez durante el XV nos encontramos aún con un par de matemáticos importantes. Nasir Eddin Al-Tusi (1.201-1274) que continuó los esfuerzos por demostrar el postulado de las paralelas partiendo de las conocidas tres hipótesis posibles sobre el cuadrilátero de Saccheri. Su demostración se basa en la siguiente hipótesis , que es equivalente de nuevo al axioma de Euclides:

"Si una recta u corta perpendicularmente a otra recta w en el punto A, y si la recta v corta oblicuamente a w en B, entonces las perpendiculares trazadas desde v a u son menores que AB del lado en que v forma un ángulo agudo con w, y mayores del lado en que v forma un ángulo obtuso con w".

Nassir Eddin escribió el primer tratado sistemático de trigonometría plana y esférica, en el que el material se expone ya como si se tratase de una materia independiente en sí misma y no como una simple criada de la astronomía, como había sido el caso tanto en Grecia como en la India; en esta obra se estudian las seis funciones trigonométricas usuales y se dan reglas para resolver los diversos casos de triángulos planos y esféricos.

8. Al-Kashi

La matemática árabe continuó su inevitable decadencia después de Nasir Eddin, pero nuestra exposición de la contribución de la cultura musulmana a esta ciencia no sería razonablemente completa si no hiciéramos referencia a una última figura que corresponde ya a principios del siglo XV. Se trata de Al-Kashi que fue protegido del príncipe Ulugh Beg, nieto del conquistador mongol Tamerlán. En Samarcanda, donde estableció su corte, hizo construir Ulugh Beg un observatorio, y Al-Kashi formó parte del equipo de científicos que se reunió en torno a este observatorio. Al-Kashi escribió numerosas obras, tanto en árabe como en persa, sobre matemática y astronomía. Es particularmente notable la exactitud de sus cálculos sobre todo en la resolución de ecuaciones algebraicas por el método llamado de Horner, procedente quizá de los chinos. También puede ser que Al-Kashi adoptase de China la práctica de utilizar fracciones decimales; en realidad, Al-Kashi es una figura muy importante en la historia de la difusión de las fracciones decimales, y hasta tal punto se dio cuenta de la importancia de su contribución a este respecto que se consideró a sí mismo como el verdadero inventor de las fracciones decimales.

Al-Kashi era evidentemente un virtuoso del cálculo y estaba orgulloso con toda razón de su aproximación de π, que mejoraba todos los valores aproximados dados por sus predecesores. En Al-Kashi nos encontramos también con el teorema binomial en la fórmula del "triángulo de Pascal", un siglo más o menos después de su publicación en China, y también un siglo antes aproximadamente de que apareciera impreso en libro en Europa.

Con la muerte de Al-Kashi hacia el año 1.436 podemos dar por cerrada nuestra exposición de la matemática árabe, ya que el colapso cultural del mundo musulmán fue aún más completo que la desintegración política de lo que había sido un gran imperio. Fue una afortunada coincidencia el que cuando la ciencia árabe empezaba a declinar, el clima intelectual en Europa estaba ya preparado para recibir el legado del saber heredado de la Antigüedad.

Bibliografía

[1] Amir-Moez, A.R. (1963), *A Paper of Omar Khayyam*. Scripta Matemática, 26.

[2] Boyer, Carl B. (1968), *A History of Mathematics*. John Wiley&sons.

[3] Gandz, S. (1936), *The Sources of al-Khowarizmi's Algebra*, Osiris, 1.

[4] Kakhel, Abdul-Kader (1960), *Al-Kashi on Root Extraction*, Lebanon.

[5] Kasir, D.S. (1931), *The Algebra of Omar Khayyam.*Columbia Teachers College.

[6] Karpinski, L.C. (1914), *The Algebra of Abu Kamil*. Am. Math.Monthly, 21.

[7] Karpinski, L.C. (1915), *Robet of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*, Macmillan.

[8] Sánchez Pérez, J. (1949), *La aritmética en Roma, en India y en Arabia*, Instituto Miguel Asín.

[9] Smith, D.E. (1958), *History of Mathematics*. Boston: Ginn, 1923-1925, 2 vols. paper-back reprint, New York Dover.

Aplicación de los sistemas de ecuaciones diferenciales al estudio de ecosistemas

J.C. Cortés López
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia

G. Calbo Sanjuan
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

Abstract

In this work we study through differential equations systems several models of natural behaviour between animals into a comun ecosystem. Finally, we show a wide collection of examples in order to point out the biological implications that we can deduce from the mathematical analysis.

Introducción

El objetivo de este trabajo es la realización de un estudio completo de la dinámica poblacional de dos especies S_1 y S_2 interactuantes dentro de un ecosistema.

Denotando por $x_1(t)$ y $x_2(t)$ el número de ejemplares de S_1 y S_2 en el instante t, un modelo razonable que gobierna el crecimiento relativo de ambas especies es

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a\cdot x_1(t)+b\cdot x_2(t) \\ x_2'(t) & = & c\cdot x_1(t)+d\cdot x_2(t) \end{array}\right\} \quad \text{donde} \quad \left.\begin{array}{l} x_1(t)>0 \\ x_2(t)>0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1)}$$

siendo $a,b,c,d\in \mathbb{R}$. Obsérvese que es necesario añadir a (1) la restricción $x_i(t)>0$ con $i=1,2$ porque en caso contrario alguna de las especies se habrá extinguido y entonces ya no puede interactuar con la otra por lo que el sistema (1) ya carece de sentido. Resuelto el sistema (1) tendremos las expresiones explícitas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y podremos determinar, si es el caso, el instante en que una de las especies se extingue, digamos $t = t_e$, esto nos indica que el modelo (1) tiene validez en el recinto $t \in [0, t_e]$, a partir de ese instante (supongamos sin pérdida de generalidad que la especie que se extingue es la segunda) el modelo que tiene vigencia será

$$x_1'(t) = ax_1(t)$$

con condición inicial el número de ejemplares de la primera especie en el momento de la extinción de la segunda, es decir, el valor $x_1(t_e)$. Sobre este hecho regresaremos en los ejemplos que se muestran en el trabajo.

El signo de los parámetros b y c permite clasificar el modelo desde el punto de vista biológico en

- Si $b < 0, c < 0 \Rightarrow S_1$ y S_2 están en competencia *(modelo de competencia).*
- Si $b < 0, c > 0 \Rightarrow S_1$ es la presa y S_2 es el depredador *(modelo de presa-depredador).*
- Si $b > 0, c < 0 \Rightarrow S_1$ es el depredador y S_2 es la presa *(modelo de depredador-presa).*
- Si $b > 0, c > 0 \Rightarrow S_1$ y S_2 están en simbiosis o cooperación *(modelo simbiótico).*

La justificación de esta clasificación es sencilla. Veámoslo, por ejemplo, para el caso de competencia, el resto se razona igual. Para ver cómo afecta la hipótesis $b < 0$ ($c < 0$), fijemos el número de ejemplares de S_1 (S_2), $x_1(t)$ ($x_2(t)$), y observemos que al aumentar la población de S_2 (S_1), $x_2(t)$ ($x_1(t)$), como $b < 0$ ($c < 0$), según la primera (segunda) ecuación de (1), el valor de $x_1'(t)$ ($x_2'(t)$) disminuirá, con lo cual la velocidad de crecimiento de S_1 (S_2) disminuirá cuando aumenta la población de S_2 (S_1). Si esto es así, es razonable suponer que S_1 y S_2 están en competencia: cuanto mayor es el número de ejemplares de una especie, menor es el crecimiento de la otra especie, ya que, ambas se reparten el alimento, que puede considerarse constante.

Cabe subrayar que el signo de los parámetros a y d no influye en la clasificación anterior, porque ambos representan el crecimiento relativo autónomo de cada especie, como se desprende de la interpretación de (1). En condiciones normales, a y d serán positivos, pero en caso de anomalía autónoma podrían ser negativos, por ejemplo, si la especie S_1 ha adquirido una enfermedad contagiosa endogámicamente se tendrá que $a < 0$.

Algunas de las preguntas que nos interesa responder a partir de (1), desde el punto de vista del estudio de dinámica de poblaciones son: ¿cuáles son las poblaciones S_1 y S_2 en cada momento?; ¿existirá algún instante en el cual alguna de las poblaciones se extinguirá?, en caso afirmativo, ¿en qué instante?, en caso negativo, ¿qué sucederá con ambas poblaciones a largo plazo?; ...

Para responder a estas y otras preguntas, necesitamos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (1) junto con las condiciones iniciales, conocidas las poblaciones iniciales de ambas especies: $x_1(0) = x_{10}$ y $x_2(0) = x_{20}$. Para ello escribiremos (1) en forma de ecuación diferencial matricial

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{y}'(t) & = & M \cdot \vec{y}(t) \\ \vec{y}(0) & = & \vec{y}_0 \end{array}\right\} \quad , \quad \vec{y}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \tag{2}$$

siendo

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

La solución de (2) es

$$\vec{y}(t) = e^{Mt} \cdot \vec{y}_0 \tag{4}$$

por lo que el problema se resume en saber calcular la exponencial de una matriz: e^{Mt}. La respuesta a esta cuestión es bien conocida (véase [1]), y una forma de abordarla es distinguiendo dos casos en función de si M es o no diagonalizable.

Antes de pasar al siguiente apartado, observemos que podemos suponer sin pérdida de generalidad que el coeficiente b cumple que $b \neq 0$, ya que, en caso contrario la resolución de (1) es directa, sin necesidad de calcular la exponencial de una matriz. En efecto, la primera ecuación de (1) es

$$x_1'(t) = a \cdot x_1(t) \tag{5}$$

cuya solución para $x_1(0) = x_{10}$ es

$$x_1(t) = x_{10} \cdot e^{at} \tag{6}$$

(obsérvese que en esta caso la primera especie nunca se extinguirá) sustituyendo (6) en la segunda ecuación de (1) se tiene la ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea

$$x_2'(t) - d \cdot x_2(t) = c \cdot x_{10} \cdot e^{at} \tag{7}$$

cuya solución para $x_2(0) = x_{20}$ es

$$x_2(t) = \left(x_{20} - \frac{c \cdot x_{10}}{a-d} \right) \cdot e^{dt} + \frac{c \cdot x_{10}}{a-d} \cdot e^{at} \quad \text{si} \quad a \neq d \tag{8}$$

y

$$x_2(t) = (x_{20} + c \cdot x_{10} \cdot t) \cdot e^{dt} \quad \text{si} \quad a = d \tag{9}$$

Aunque no entraremos aquí en el análisis teórico sobre las condiciones bajo las cuales se extinguirá una u otra especie (sí se hará en los ejemplos), obsérvese que en el caso $a = d$ la segunda especie se extinguirá para

$$t = -\frac{x_{20}}{c \cdot x_{10}} > 0 \Leftrightarrow c < 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} S_2 \text{ está en competencia con } S_1 \\ S_2 \text{ es presa de } S_1 \end{Bmatrix}$$

como por otra parte es esperable. Un estudio análogo puede hacerse para el caso $a \neq d$.

1. Preliminares matemáticos

Para el cálculo de la exponencial matricial e^{Mt}, necesitaremos calcular los valores propios y vectores propios de la matriz M. Aunque esto puede hacerse por el método estándar, nosotros utilizaremos un método específico muy útil para matrices 2×2, ya que, nos proporciona los resultados de forma simplificada, lo cual nos servirá para realizar el estudio general de manera más elegante.

Teorema 1 (véase [2]). *Sea* M *una matriz cuadrada de orden dos*

$$\mathrm{M}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b\neq 0$$

y sean m_1 *y* m_2 *las raíces de la ecuación*

$$bm^2+(a-d)m-c=0 \tag{10}$$

entonces el espectro de M*, está dado por*

$$\sigma(\mathrm{M})=\{\lambda_1,\lambda_2\}\,\text{con}\begin{cases} \lambda_1=a+bm_1 & \Rightarrow \quad \vec{v}_{\lambda_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ m_1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2=a+bm_2 & \Rightarrow \quad \vec{v}_{\lambda_2}=\begin{bmatrix} 1 \\ m_2 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{11}$$

siendo $\vec{v}_{\lambda_1}$ *y* $\vec{v}_{\lambda_2}$ *los vectores propios asociados a* λ_1 *y* λ_2.

Ejemplo 1. Calculemos el espectro y los valores propios de la matriz

$$\mathrm{M}=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la cual $b=-2\neq 0$. Consideremos la ecuación (10) y apliquemos el método del teorema 1

$$-2m^2+(-2-1)m+2=-2m^2-3m+2=0\Rightarrow\begin{cases} m_1=-2 & \Rightarrow \quad \lambda_1=-2-2\left(-2\right)=2 \\ m_2=\dfrac{1}{2} & \Rightarrow \quad \lambda_2=-2-2\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3 \end{cases}$$

luego el espectro de M es, $\sigma(\mathrm{M})=\{-3,2\}$ y los vectores propios asociados a estos valores propios son:

$$\lambda_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, sabemos que una caracterización para la diagonalización de una matriz es que todos sus vectores propios sean linealmente independientes. En nuestro caso, según (11),

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad b \neq 0, \text{ es diagonalizable} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 - m_1 \neq 0 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \qquad \textbf{(12)}$$

o en términos de los coeficientes de M (si Δ_m denota el discriminante de la ecuación (10))

$$M \quad \text{es diagonalizable} \Leftrightarrow \Delta_m \neq 0 \Leftrightarrow (a-d)^2 + 4bc \neq 0 \qquad \textbf{(13)}$$

Obsérvese que este caso es muy importante, ya que, comprende a los modelos de competencia (donde como $b < 0, c < 0$, entonces $(a-d)^2 + 4bc > 0$) y simbiótico (donde como $b > 0, c > 0$, entonces $(a-d)^2 + 4bc > 0$), así como todos los casos del modelo presa-depredador que satisfagan la condición (13).

2. Solución del problema cuando M es diagonalizable

Supongamos M diagonalizable, entonces sabemos que existirá una matriz P invertible (llamada matriz de paso) de modo que $M = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{m_2 - m_1} \begin{bmatrix} m_2 & -1 \\ -m_1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(14)}$$

y utilizando que

$$M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

(siendo I_n la matriz identidad de tamaño n) y el desarrollo de Taylor matricial de la exponencial se llega

$$e^{Mt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}M^n t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}PD^nP^{-1}t^n=P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(Dt)^n\right)P^{-1}=Pe^{Dt}P^{-1}$$

donde hay que subrayar que el cálculo de la exponencial e^{Dt} es muy sencillo, ya que, por ser D una matriz diagonal se tiene

$$e^{Dt}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(15)}$$

Teniendo en cuenta que $e^{Mt}=Pe^{Dt}P^{-1}$ y sustituyendo (14) y (15) en (4) obtenemos la solución del problema (2)

$$\vec{y}(t)=\frac{1}{m_2-m_1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_2 & -1 \\ -m_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20}\end{bmatrix}$$

que podemos expresar por componentes como

$$x_1(t)=\frac{1}{m_2-m_1}\left\{(x_{10}m_2-x_{20})e^{\lambda_1 t}+(x_{20}-m_1x_{10})e^{\lambda_2 t}\right\} \qquad \textbf{(16)}$$

$$x_2(t)=\frac{1}{m_2-m_1}\left\{m_1(x_{10}m_2-x_{20})e^{\lambda_1 t}+m_2(x_{20}-m_1x_{10})e^{\lambda_2 t}\right\} \qquad \textbf{(17)}$$

siendo

$$m_1=\frac{d-a+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2b},\ m_2=\frac{d-a-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2b},\ \lambda_i=a+bm_i\ \ i=1,2 \qquad \textbf{(18)}$$

3. Solución del problema cuando M no es diagonalizable

Supongamos M no es diagonalizable, en este caso utilizando la caracterización (12) se tiene que al no ser M diagonalizable que $m_1=m_2=m=\dfrac{d-a}{2b}$ ó equivalentemente aplicando (11) y (18), se satisface que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=\dfrac{a+d}{2}$, es decir, M tiene un único valor propio de multiplicidad algebraica dos. Entonces, sabemos que M es semejante a una matriz de Jordan, J, que en este caso es

$$M = PJP^{-1} \quad , \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

La matriz P no puede construirse como en el caso M diagonalizable, al no existir dos vectores propios linealmente independientes. Las columnas de P se construyen tomando el único vector propio asociado a λ, que sabemos es $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}$ y otro vector $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, llamado vector propio generalizado, que se construye de modo que cumpla $(M - \lambda I_2)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$, que determinamos a continuación resolviendo el sistema compatible indeterminado

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \Rightarrow y = \frac{1}{b}\left[1 + (\lambda - a)x\right], \quad x \in IR$$

tomando $x = 0$, construimos

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

Por todo ello

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & \frac{1}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d-a}{2b} & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(19)}$$

Por otra parte, razonando como antes si $M = PJP^{-1}$ entonces $e^{Mt} = Pe^{Jt}P^{-1}$. Ahora el cálculo de e^{Jt} es

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

ya que, es sencillo probar por inducción que las potencias de los bloques de Jordan valen

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}, \quad n \geq 0$$

y

$$e^{Jt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J^n t^n = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\lambda t)^n & t\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}(\lambda t)^{n-1} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\lambda t)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(20)}$$

Teniendo en cuenta que $e^{Mt} = Pe^{Jt}P^{-1}$ y sustituyendo (19) y (20) en (4) obtenemos también en este caso la solución de (2)

$$\vec{y}(t) = b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d-a}{2b} & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{a+d}{2}t} & te^{\frac{a+d}{2}t} \\ 0 & e^{\frac{a+d}{2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{a-d}{2b} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \quad \textbf{(21)}$$

que ahora no desarrollaremos por componentes como hicimos en (16) y (17), pero que hemos expresado completamente en términos de los coeficientes del sistema diferencial (1) y las condiciones iniciales.

Obsérvese que en la solución (21) no aparece explícitamente el parámetro c (también puede procederse de forma análoga y expresar la solución en términos únicamente de a, c y d, y para ello debe considerarse la segunda ecuación que nos permite construir el vector propio generalizado, en lugar de la primera). Este resultado es esperable porque al no ser M diagonalizable sabemos que se cumple que $(a-d)^2 + 4bc = 0$ lo que nos permite expresar c en función de b: $c = -\frac{(a-d)^2}{4b}$.

4. Ejemplos

En este apartado analizaremos algunos ejemplos particulares del modelo (1) de la introducción. Utilizaremos el asistente matemático Mathematica para la realización de cálculos y la elaboración de gráficos.

Ejemplo 2 *(Competencia/una especie es autónomamente débil).* Consideremos el modelo de competencia

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -2x_1(t)-2x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t)+x_2(t) \end{array}\right\} \tag{22}$$

(donde t está dado en años) que gobierna el progreso de dos especies que en la actualidad tienen ambas 1000 ejemplares, es decir, $x_1(0)=1000$ y $x_2(0)=1000$. Estudiemos la evolución temporal del ecosistema. En primer lugar, observemos que según el ejemplo 1, la matriz de coeficientes del sistema es diagonalizable al tener dos valores propios distintos (esto lo sabemos desde el propio modelo por ser del tipo de competencia). Luego sustituyendo $m_1=-2$, $\lambda_1=2$, $m_2=\dfrac{1}{2}$, $\lambda_2=-3$ y $x_1(0)=x_2(0)=1000$ en (16) y (17) obtenemos $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Nosotros en lugar de proceder así, lo haremos directamente mediante un comando de Mathematica

```
FullSimplify[DSolve[{x'[t]=-2*x[t]-2*y[t],y'[t]=
-2*x[t]+y[t],x[0]=1000,y[0]= =1000},{x,y},t]]
```

que nos devuelve

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & 1200e^{-3t}-200e^{2t} \\ x_2(t) & = & 600e^{-3t}+400e^{2t} \end{array}\right\}$$

Esta solución es válida mientras ambas especies interactúen, pero observemos que la especie 1 se extinguirá antes de los cinco meses. Exactamente, utilizando Mathematica

```
Solve[1200*e^-3t-200*e^2t= =0,t]
```

en $t=\dfrac{\ln 6}{5}\cong 0.358$ que corresponde a 130 días. A partir de ese instante, la única especie es la segunda, y sustituyendo en el modelo inicial $x_1(t)=0$, se tiene que a partir de ese momento la segunda especie se rige por la ecuación diferencial

$$x_2'(t) = x_2(t) \quad , \quad x_2\left(\frac{\ln 6}{5}\right) = 500\sqrt[5]{6^2} \quad \text{para } t > \frac{\ln 6}{5}$$

donde la condición inicial se ha establecido en base al número (sin redondear para no perder precisión) de ejemplares de la segunda especie que hay en el momento de la extinción de la primera especie. La solución de esta ecuación diferencial es

$$x_2(t) = 500\sqrt[5]{6}e^t \text{ si } t > \frac{\ln 6}{5}$$

Una representación gráfica nos muestra claramente el comportamiento conjunto de las dos especies. Para ello utilizamos las siguientes órdenes en Mathematica

```
f1[t_]=1200*e^-3t-200*e^2t;
f2[t_]=600*e^-3t+400*e^2t;
ls=1;
Plot[{f[t],f1[t]},{t,0,ls},
AxesOrigin->{0,0},
AxesLabel-> {"Tiempo","Población"},
PlotRange->{-10,3000},
PlotStyle->
 {{Text["especie 1",{0.07,200},{1,0}],
   RGBColor[1,0,0]},
  {Text["especie 2",{0.5,1600},{-1,0}],
   RGBColor[1,0,0]},GrayLevel[0]}];
```

que nos proporciona la gráfica (véase figura 1) donde aunque no se observa nítidamente, sabemos que en el instante de extinción de la primera especie, la gráfica de la evolución de la segunda especie tiene un punto anguloso". Mientras, la segunda especie al cabo del año habrá crecido y prácticamente se habrá duplicado, tendrá $x_2(1) = 500\sqrt[5]{6}e \cong 1945$ ejemplares. Esto es debido tanto a la competencia que ejerce S_2, como que al ser $a = -2 < 0$, el crecimiento autónomo de la especie S_1 es negativo, debido probablemente a problemas endógenos de la propia especie (epidemia hereditaria, debilidad genética, ...).

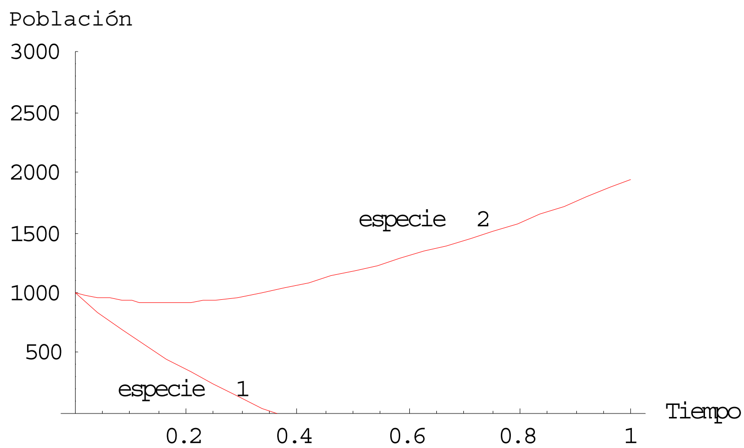


Figura 1. Modelo de competencia con una especie autónomamente débil.

Ejemplo 3 *(Competencia/ninguna especie es autónomamente débil).* Ahora consideraremos el modelo de competencia

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) + 2x_2(t) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(23)}$$

(donde t está dado en años) con $x_1(0) = 90$ y $x_2(0) = 150$. Al tratarse de un modelo de competencia sabemos que la matriz de coeficientes del sistema es diagonalizable (esto puede comprobarse también, viendo que sus dos valores propios son distintos). Aunque los cálculos pueden hacerse como en el ejemplo 2, nosotros los haremos directamente con Mathematica . El espectro de M se obtiene mediante el comando

```
M={{3,-1},{-2,2}};
Eigenvalues[M]
```

y obtenemos $\sigma(M) = \{1,4\}$. La solución del sistema de ecuaciones diferenciales (23) se calcula como antes y es

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & 80e^t + 10e^{4t} \\ x_2(t) & = & 160e^t - 10e^{4t} \end{array}\right\} \quad \forall t \in \left[0, \frac{\ln 16}{3}\right]$$

ya que la especie 2 se extinguirá exactamente al cabo de $\dfrac{\ln 16}{3} \cong 0.92$ años, es decir, en once meses aproximadamente. A partir de ese instante la única especie, la primera, se rige por el modelo

$$x_1'(t) = 3 \cdot x_1(t) \quad , \quad x_1\left(\frac{\ln 16}{3}\right) = 480\sqrt[3]{2} \quad \text{para } \; t > \frac{\ln 16}{3}$$

cuya solución es $x_1(t) = 30\sqrt[3]{2}e^{3t}$ si $t > \dfrac{\ln 16}{3}$. La gráfica (véase figura 2) nos muestra cuál es el comportamiento conjunto de las dos especies (en el punto $t_e = \dfrac{\ln 16}{3}$ la gráfica asociada a la especie 1 tiene un punto anguloso, aunque esto no se observa nítidamente en la figura 2)

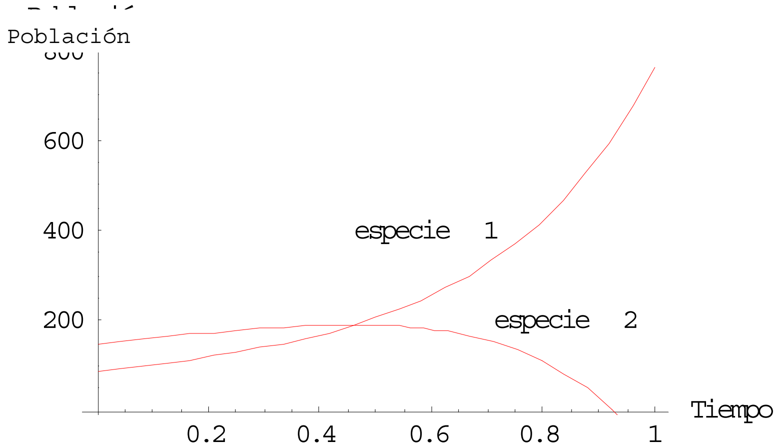


Figura 2. Modelo de competencia sin especies autónomamente débiles.

Mientras, la primera especie al cabo del año habrá crecido y prácticamente se habrá multiplicado por 9, tendrá aproximadamente 759 ejemplares. Obsérvese que en este caso como $a = 3 > 0$ y $d = 2 > 0$, el crecimiento autónomo de cada especie es positivo, es decir, ninguna especie es autónomamente débil.

También es interesante observar desde la gráfica, que al principio cada especie aumenta en número de ejemplares, debido a que su tendencia autónoma es a crecer, y de hecho en el instante $\frac{\ln 4}{3} \cong 0.46$ años, ambas especies tienen el mismo número de ejemplares. Sin embargo, justo en ese instante, debido a la competencia que ejerce una especie sobre otra, la especie más débil (la especie S_2) comienza a disminuir en número hasta su extinción. Se deja como comprobación ver que la función $x_2(t) = 160e^t - 10e^{4t}$ es decreciente para $t \geq \frac{\ln 4}{3}$.

<u>Ejemplo 4</u> *(Presa-depredador/*M *no diagonalizable).* Ahora estudiaremos el modelo presa-depredador

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) + 4x_2(t) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(24)}$$

(donde t está dado en años) que modeliza dos especies, la primera es la presa y la segunda la depredadora, que en la actualidad tienen los siguientes ejemplares, $x_1(0) = 10000$ y $x_2(0) = 100$. Como antes analizaremos la evolución temporal del ecosistema. Ahora la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

no es diagonalizable al tener un único valor propio con multiplicidad algebraica dos: $\sigma(M) = \{3\}$. La solución de (24) puede obtenerse sustituyendo $a = 2$, $b = -1$, $d = 4$, $x_{10} = 10000$ y $x_{20} = 100$ en (21). Como antes no procederemos de esta forma, sino mediante Mathematica, pero esta vez utilizando el formato exponencial de la solución de (1), dado en (4)

```
M={{2,-1},{1,4}};
b={10000,100};
MatrixExp[M*t].b//MatrixForm
```

que proporciona como solución

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & 10000e^{3t} - 10100te^{3t} \\ x_2(t) & = & 100e^{3t} + 10100te^{3t} \end{array}\right\} \quad \forall t \in \left[0, \frac{100}{101}\right]$$

a partir de $t = \dfrac{100}{101}$, la segunda especie sigue la ley

$$x_2'(t) = 4 \cdot x_2(t) \quad , \quad x_2\left(\frac{100}{101}\right) = 10100e^{\frac{300}{101}} \quad \text{para } t > \frac{100}{101}$$

cuya solución es $x_2(t) = 10100e^{4t - \frac{100}{101}}$.

A partir de la gráfica (véase figura 3) estudiamos el comportamiento conjunto de las dos especies.

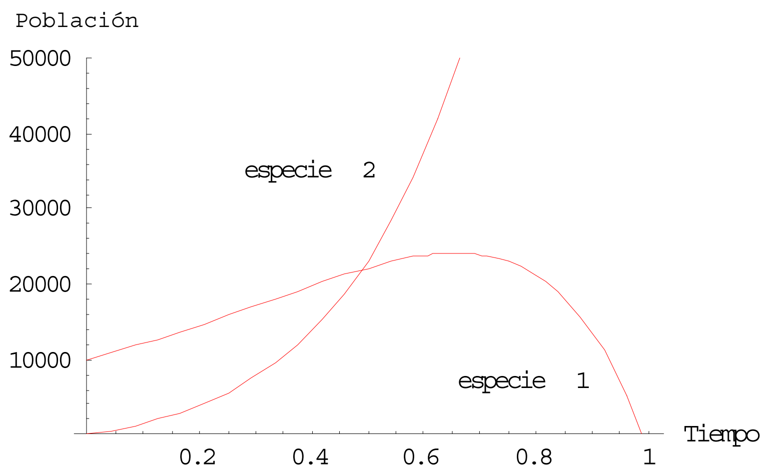


Figura 3. Modelo presa-depredador, con matriz de coeficientes no diagonalizable.

donde se observa que la especie 1 (la presa) se extinguirá antes de un año y la especie depredadora crecerá. En realidad esto sucederá sin importar lo grande que sea la ventaja/desventaja inicial entre la especie presa y la depredadora, ya que en ese caso la solución para unas condiciones iniciales $x_1(0) = r > 0$ y $x_2(0) = s > 0$ arbitrarias es, aplicando ahora (4),

$$\left.\begin{array}{lll} x_1(t) & = & re^{3t}-(r+s)te^{3t} \\ x_2(t) & = & se^{3t}+(r+s)te^{3t} \end{array}\right\} \quad \forall t\in\left[0,\frac{r}{r+s}\right]$$

y

$$x_2(t)=(r+s)e^{4t-\frac{r}{r+s}} \quad , \quad t\geq\frac{r}{r+s}$$

además

$$x_1(t)=re^{3t}-(r+s)te^{3t}=0\Leftrightarrow t=\frac{r}{r+s}\in\left]0,1\right[$$

Por ejemplo para las condiciones iniciales dadas, la extinción de la especie presa se producirá en el instante $t=\dfrac{10000}{10100}=0.990099\ldots$ años. Algunas otras cosas de interés pueden afirmarse, por ejemplo, el instante en que ambas especies coincidirán en número de individuos:

$$se^{3t}+(r+s)te^{3t}=re^{3t}-(r+s)te^{3t}\Leftrightarrow t=\frac{r-s}{2(r+s)}\in\left]0,1\right[\quad \text{si} \quad r>s$$

ya que, si $r<s$, la especie depredadora siempre tendrá más ejemplares que la presa, y nunca podrán coincidir en número.

<u>Ejemplo 5</u> *(Presa-depredador/*M *diagonalizable).* Ahora estudiaremos el modelo presa-depredador

$$\left.\begin{array}{lll} x_1'(t) & = & x_1(t)+x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -x_1(t)+x_2(t) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(25)}$$

(donde t está dado en años) que modeliza dos especies, ahora la segunda es la presa y la primera es la depredadora Supongamos $x_1(0)=1000$ y $x_2(0)=1000$. Como antes analizaremos la evolución temporal del ecosistema. Ahora la matriz

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

sí es diagonalizable al tener dos valores propios distintos. En efecto, con Mathematica obtenemos $\sigma(M) = \{1 \pm i\}$ y la solución de (25) es

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & 1000e^t(\cos t + \sin t) \\ x_2(t) & = & 1000e^t(\cos t - \sin t) \end{array}\right\} \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Para $t \geq \frac{\pi}{4}$, la expresión de $x_1(t)$ se calcula como en los ejemplos anteriores. Con la representación gráfica (véase figura 4) estudiamos el comportamiento conjunto de las dos especies: se observa que la especie 2 (la presa) se extinguirá antes de un año, exactamente en $t = \frac{\pi}{4} \cong 0.785$ años, que corresponde a 9.4 meses aproximadamente. Para ello calcular esto, debemos quedarnos con la primera solución positiva de la ecuación $\cos t = \sin t$.

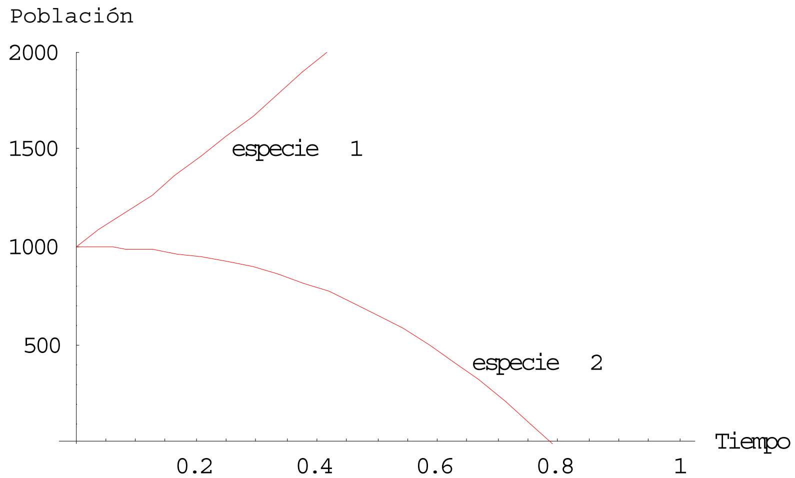


Figura 4. Modelo presa-depredador, con matriz de coeficentes diagonalizable.

Ejemplo 6 *(simbiótico/crecimiento autónomo positivo)*. Estudiamos ahora un modelo simbiótico. Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) & = & 2x_1(t) + x_2(t) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(26)}$$

(donde t está dado en años) que describe el comportamiento de dos especies cuya población en la actualidad es $x_1(0) = 200$ y $x_2(0) = 500$ ejemplares. Obsérvese que como $a = 1 > 0$ y $d = 1 > 0$, el crecimiento autónomo de ambas especies es positivo. Como es sencillo comprobar, $\sigma(M) = \{-1,3\}$, por tanto la matriz de coeficientes del sistema es diagonalizable al tener dos valores propios distintos (esto lo sabíamos inicialmente, por tratarse de un modelo simbiótico). La solución del modelo puede calcularse como en el ejemplo 2 a partir de (16) y (17)

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & -100 + 300e^{3t} \\ x_2(t) & = & 200 + 300e^{3t} \end{array}\right\}$$

Una representación gráfica (véase figura 5) nos muestra claramente el comportamiento conjunto de las dos especies. Se observa que ambas especies siguen la misma tendencia al cooperar, siendo esta tendencia a crecer. Obsérvese que como los crecimientos autónomos son iguales, $a = d = 1$, los coeficientes cooperativistas de ambas especies con iguales, $b = c = 2$, e inicialmente hay más ejemplares de la segunda especie que de la primera, con el paso del tiempo la primera especie nunca superará a la segunda.

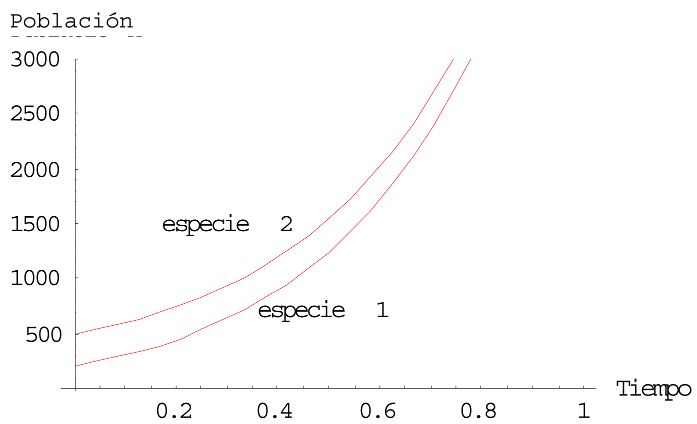


Figura 5. Modelo simbiótico con crecimiento autónomo positivo.

Ejemplo 7 *(simbiótico/crecimiento autónomo negativo)*. Acabamos estudiando el modelo simbiótico dado por el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -\frac{1}{2}x_1(t)+x_2(t) \\ x_2'(t) & = & \frac{1}{4}x_1(t)-\frac{1}{2}x_2(t) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(27)}$$

(donde t está dado en años) que describe el comportamiento de dos especies cuya población en la actualidad es $x_1(0)=200$ y $x_2(0)=500$ ejemplares. Obsérvese que como $a<0$ y $d<0$, el crecimiento autónomo de ambas especies es negativo. Es sencillo comprobar, $\sigma(M)=\{0,-1\}$, por tanto la matriz de coeficientes del sistema es diagonalizable al tener dos valores propios distintos (esto lo sabíamos inicialmente, por tratarse de un modelo simbiótico). La solución del modelo es

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & 600-400e^{-t} \\ x_2(t) & = & 300+200e^{-t} \end{array}\right\}$$

Una representación gráfica (véase figura 6) nos muestra claramente el comportamiento conjunto de las dos especies. Se observa que fruto de la cooperación entre ambas especies, éstas consiguen subsistir a largo plazo: la primera tiende a crecer y la segunda a decrecer, pero estabilizándose con el paso del tiempo (este es un ejemplo donde gracias a la formación de una cooperativa, ambas especies, cuya tendencia endógena es a extinguirse, consiguen sobrevivir).

Desde el sistema de ecuaciones diferenciales del modelo puede augurarse este comportamiento: aunque la tendencia autónoma de la especie 1 es a decrecer ($a=-\frac{1}{2}<0$), la contribución simbiótica de la especie 2 a la supervivencia de la primera especie es $b=1>0$, haciendo que el crecimiento relativo de la segunda especie sea a crecer ($|a|=\left|-\frac{1}{2}\right|<1=|b|$). La tendencia a decrecer de la segunda especie puede argumentarse igualmente: $|c|=\left|\frac{1}{4}\right|<\left|-\frac{1}{2}\right|=|d|$.

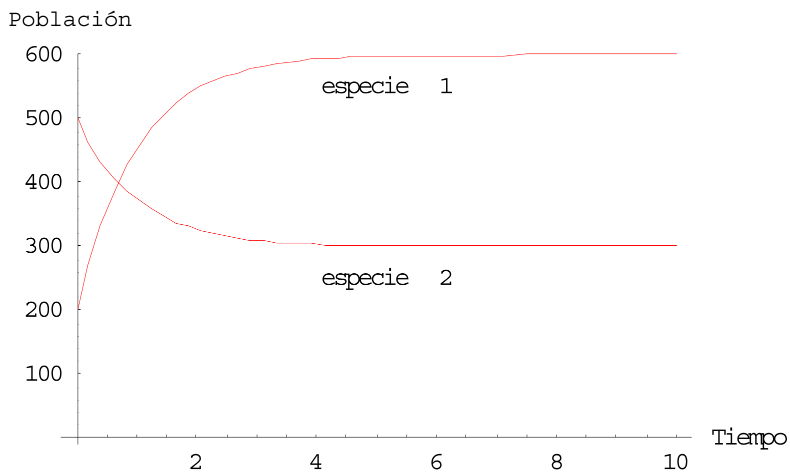


Figura 6. Modelo simbiótico con crecimiento autónomo negativo.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado diferentes tipos de ecosistemas formados por dos especies, que podemos modelizar mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes homogéneo, caracterizando en términos de los coeficientes la clasificación biológica de los mismos. Finalmente, mediante el asistente Mathematica ilustramos con un gran abanico de ejemplos las distintas situaciones que en el desarrollo abstracto hemos estudiado.

Nota: los autores desean agradecer los comentarios hechos por el referee anónimo sobre la necesidad de diferenciar la solución del sistema (1) a partir del instante en que una especie se extingue.

Bibliografía

[1] C.B. Moler, C.F. Van Loan, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix*. SIAM Review 20 (1978), 801-836.

[2] Tyre A. Newton *A simple algorithm for finding eigenvalues and eigenvectors for* 2×2 *matrices*. The American Mathematical Monthly, 97(1) (1990), 57-60.

[3] García Sestafe, J.V. *Algunas generalizaciones del modelo logístico*. Boletín Puig Adam, 35 (1993), pp. 25-33.

[4] García Sestafe, J.V. *Algunas generalizaciones del modelo logístico*. Boletín Puig Adam, 36 (1993), pp. 13-33.

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 65 (Octubre 2003)

Versatilidad instrumental del número e en la asignatura de Cálculo de los primeros cursos de Ingenierías y carreras de Ciencias.

José C. Valverde, Guillermo Manjabacas y J.Javier Orengo
Departamento de Matemáticas
Escuela Politécnica Superior de Albacete
Universidad de Castilla-La Mancha
Jose.Valverde@uclm.es, Guillermo.Manjabacas@uclm.es, Jose.Orengo@uclm.es

Abstract

In this paper we present a strategy to introduce the number e and to apply its instrumental versatility for the first standard Calculus courses in Sciences and Engineering.

Introducción

Cuando los alumnos llegan a los primeros cursos de Ingenierías o de carreras de Ciencias, es bien conocido, para la mayoría de ellos, el carácter instrumental de ciertos números "especiales" que se emplean en la Matemática, como el número π o la unidad imaginaria i. Resulta curioso por el contrario el desconocimiento que tienen los estudiantes del número e, al que tímidamente asocian con los logaritmos de los que vagamente reconocen su utilidad.

El número e juega un papel central dentro del Análisis real, así como en otras Ciencias como la Biología, la Química, la Física o las distintas Ingenierías donde diversos modelos matemáticos vienen determinados en base a la función exponencial. A este nivel nos interesa principalmente por:

- Su instrumentalidad para introducir las potencias.
- Su funcionalidad para estudiar los límites de ciertos tipos de sucesiones.
- Su utilidad en la introducción y estudio de las funciones elementales.

En este artículo se presenta una estrategia para introducir este número en los cursos mencionados y sacar de él el máximo rendimiento. Ello se plasma en un ahorro de esfuerzo y por ende de tiempo al plantear dentro del ámbito docente cuestiones de difícil comprensión a este nivel como la definición de potencias, existencia de raíces n-ésimas, estudio de límites de sucesiones de potencias y logaritmos, etc.

Por otro lado, desde el punto de vista del enseñante, este modo de proceder facilita en buena medida la siempre difícil tarea de introducción de las funciones elementales y el estudio de sus propiedades en este contexto, sin que ello conlleve falta de rigor alguna. No debemos olvidar que dicha tarea suele ser nota discordante en la mayoría de libros de texto sobre esta materia.

Con dicha estrategia se pone de manifiesto el carácter transversal que puede llegar a tener el número e dentro de una asignatura de Cálculo I, lo que da buena cuenta de su relevancia.

Asimismo, se consiguen otros objetivos didácticos que se reflejan principalmente en cómo los alumnos asimilan rápidamente de forma sólida cuestiones fundamentales como las citadas anteriormente, incentivados por la sencilla deducción que con este planteamiento puede hacerse de ellas.

El trabajo se estructura en 8 secciones. En la primera se definen el número e y sus potencias como límites de sucesiones y a partir de ello se demuestran sus principales propiedades. En la sección 2 se refleja cómo las potencias de base e y exponente real proporcionan una representación unívoca de los reales positivos. Esta posibilidad, permite definir en la sección 3 los logaritmos neperianos y establecer a su vez las potencias de base real positiva y exponente real. En la sección 4, se pone de manifiesto la utilidad de la representación mencionada para obtener el límite de ciertos tipos de sucesiones. En estas cuatro primeras secciones se sigue fundamentalmente el planteamiento realizado en [6], aunque se incorporan oportunamente cuestiones de interés como la irracionalidad del número e. En la sección 5 se establecen algunos límites notables, junto con una serie de equivalencias que serán claves para la demostración inmediata de la derivabilidad de la función exponencial y la función logarítmica en la sección 7. Las secciones 6 y 7 constituyen la parte principal del trabajo. En ellas, aprovechando los resultados planteados en las secciones anteriores, se muestra cómo pueden definirse en rigor las funciones exponencial y logarítmica y cómo se deducen de manera sencilla sus propiedades, incluidas la continuidad y la derivabilidad. En la sección octava, se ha reflejado un estudio de la mejora didáctica que produce el plantear esta estrategia.

1 Potencias de base e y exponente real. Propiedades

Cuando los alumnos son ya conocedores de las nociones más importantes asociados a sucesiones y el cálculo de límites (*Criterio de convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas, Principio de sustitución, Criterio de Stolz, de la media aritmética, de la media geométrica, de la raíz, etc.*), puede abordarse la definición del número e y la de sus potencias como límites de sucesiones y a partir de ello pueden demostrarse sus principales propiedades.

La forma de comenzar puede ser planteando la sucesión

$$(x_n) = \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right), \qquad a > 0 \tag{1}$$

para la que se demuestra que se trata de una sucesión monótona creciente y acotada superiormente y por tanto convergente. Una vez probadas estas cuestiones, al límite de dicha sucesión le llamaremos e^a y en particular cuando $a = 1$ obtendremos la definición de e. En concreto, puede formularse el siguiente resultado, cuya demostración proporciona ciertas expresiones que se irán empleando más adelante.

Teorema 1.1 *La sucesión (1) anterior es monótona creciente y acotada.*

La demostración de este Teorema puede verse en [6]. Ello da pie a introducir las siguientes definiciones:

Definición 1.1 Se denomina número e al límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

De la monotonía y de la acotación se deduce, para el caso particular de $a=1$, que el límite de dicha sucesión (1) está entre 2 y 3. En concreto, este valor es aproximadamente $e = 2.71828182$.

Asimismo, de la desigualdad que proporciona la acotación, puede concluirse de manera casi inmediata la irracionalidad de e (véase [8]).

Definición 1.2 Se denomina *potencia de base* e y *exponente* $a>0$ al límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n},$$

al que se denota por e^a.

De la igualdad dada en la prueba del Teorema 1.1, para el caso particular $0 < a \leq 1$ resulta, la siguiente acotación, fundamental en adelante:

$$1 < e^a < 1 + 2a. \tag{2}$$

Para completar la definición de las potencias de base e y exponente real, todavía quedarían por estudiar los casos de exponentes negativos y exponente nulo. Para este último se observará que si en la sucesión $(x_n) = \left((1+\frac{a}{n})^n\right)$ es $a=0$, se tiene una sucesión constante de términos iguales a 1, por lo que podemos considerar extendida la noción al cero admitiendo $e^0 = 1$. Para el caso de los exponentes negativos puede probarse, como simple aplicación del *Principio de intercalación* o *Teorema del sandwich*, que la sucesión de números reales (x_n) de término general

$$x_n = \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-n}, \qquad a>0$$

es convergente y su límite es e^a.

Enunciando de otra manera el resultado, se aclarará que hemos llegado donde pretendíamos: la sucesión de número reales (x_n) de término general

$$x_n = \left(1 + \frac{-a}{n}\right)^n, \qquad a > 0$$

es convergente y su límite es $\dfrac{1}{e^a}$, que, como es habitual, se denota por e^{-a}.

Con este último resultado se terminará por poner de manifiesto que la definición que se dio al principio de potencia de base e y exponente a tiene sentido para todo a real.

La siguiente tarea que se propone es demostrar una de las propiedades más importantes de las potencias de base e y exponente real a: la aditividad de los exponentes en la multiplicación de potencias.

Teorema 1.2 *Dados a' y a'' números reales cualesquiera, se verifica:*

$$e^{a'} \cdot e^{a''} = e^{a'+a''}.$$

La prueba resulta como una simple aplicación del *Teorema del sandwich*, teniendo en cuenta que para $a > 0$ es $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^n = 1$.

De esta propiedad y de la de acotación de e^a vista, que son las fundamentales, se deducen el resto de propiedades que enunciamos a continuación y que dejaríamos como sencillo ejercicio al estudiante:

- Si $a > 0$, es $e^a > 1$.
- Si $a < 0$, es $e^a < 1$.
- Para todo valor de a, es $e^a > 0$.
- Si $a' < a''$, es $e^{a'} < e^{a''}$.

Establecidas las potencias de base e, así como sus más importantes propiedades, llega el momento de abordar cómo se emplea el número e para introducir las potencias de base real positiva y exponente real (en particular las raíces n-ésimas).

En primer lugar se mostrará cómo las potencias de base e proporcionan una representación unívoca de los números reales positivos, lo cual es también sumamente interesante desde el punto de vista aritmético, merced a las ventajas que presenta el cálculo con estas potencias.

Esta posibilidad de representar los números positivos como potencias del número e, permite definir las potencias de base un número real positivo cualquiera. Esto será lo que se vea en segundo lugar.

2 Representación de los reales positivos mediante potencias de base e

Antes de dar el teorema fundamental de esta sección, conviene destacar que para todo $R > 1$ existe a_0 con $0 < a_0 < 1$ tal que $1 < e^{a_0} < R$, cuya demostración es inmediata a partir de la acotación dada por (2).

Teorema 2.1 *Para todo real $b > 0$, existe un real a y sólo uno, tal que*

$$b = e^a.$$

La prueba es muy sencilla a la vez que bella y los alumnos que hayan captado de manera clara el axioma del supremo deberían saber hacerla. Por ello, se darán algunas indicaciones y se invitará a que el alumno vaya rellenado las ideas principales de la demostración con una exposición rigurosa de la misma.

3 Logaritmos neperianos. Representación de potencias de base real positiva y exponente real mediante potencias de base e

El Teorema que cierra la sección anterior induce a plantear este concepto:

Definición 3.1 Se denomina *logaritmo neperiano* o *natural* de un real positivo b al (único) real a tal que $e^a = b$. Si a es el logaritmo neperiano de b se puede escribir $a = \log b$, $a = \ln b$ o $a = Lb$.

A partir de la definición anterior y las propiedades de las potencias de base e, que ya vimos en la primera sección, se deducen las correspondientes para los logaritmos, que son en realidad las de las propias potencias, expresadas en otros términos. Esto es, si b, b', b'' son reales positivos, se verifican

- $\log(b' \cdot b'') = \log b' + \log b''$.
- Si $b > 1$, es $\log b > 0$.
- Si $b = 1$, es $\log b = 0$.
- Si $b < 1$, es $\log b < 0$.
- Si $b' < b''$, es $\log b' < \log b''$.

Una vez definidos tanto las potencias de base e como los logaritmos, estudiamos la instrumentalidad de éstos para definir las potencias de un número positivo cualquiera.

Definición 3.2 Se define la potencia de base $b > 0$ y exponente a cualquiera como el número dado por

$$b^a = e^{a \log b}.$$

En este punto es importante observar que el valor de la potencia, de acuerdo con la definición, para exponentes enteros coincide con el usual, definido como el "producto repetido" de un número o de su inverso. También es interesante reconocer que al cambiar el signo del exponente en la potencia, ésta se transforma en su inversa.

Con esta definición en nuestras manos es sencillo demostrar, merced a las propiedades tanto de las potencias de base e como a las de los logaritmos, que se mantienen las propiedades que de manera tradicional se asocian a las operaciones con potencias y que enunciamos a continuación donde a, a' y a'' son reales cualesquiera y $b, b_1, b_2 > 0$:

- $b^{a'} \cdot b^{a''} = b^{a'+a''}$.
- $b_1^a \cdot b_2^a = (b_1 \cdot b_2)^a$.
- $(b^{a'})^{a''} = b^{a' \cdot a''}$.

Un caso particular de significativa importancia es el de las potencias cuyos exponentes son inversos de números enteros positivos: las *raíces n-ésimas.* En concreto, si b es un número real positivo, su potencia $b^{1/n}$ verifica

$$\left(b^{1/n}\right)^n = b.$$

En esta situación, se dice que $b^{1/n}$ es una *raíz n-ésima* de b, de las que esta propiedad asegura su existencia.

4 Límites de sucesiones de potencias y logaritmos

En esta sección, se tratará de mostrar la utilidad de la anterior representación de las potencias para obtener el límite de algunas sucesiones. Para ello estableceremos los siguientes resultados.

Proposición 4.1 *Sea (a_n) una sucesión de números reales convergente hacia el número real a. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{implica} \quad \lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^a. \tag{3}$$

Como se puede intuir existe un resultado similar para el caso de los logaritmos naturales.

Proposición 4.2 *Sea (b_n) una sucesión de números reales positivos convergente a un número real $b > 0$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \textit{implica} \quad \lim_{n\to\infty} \log b_n = \log b. \tag{4}$$

De ambas proposiciones se desprende inmediatamente el siguiente teorema, que proporciona una técnica para obtener los límites de sucesiones de potencias en las que las bases son los términos de una sucesión y los exponentes los de otra.

Teorema 4.1 *Sea (b_n) una sucesión de términos reales positivos, que converge a un número real $b > 0$, y (a_n) una sucesión de números reales (cualesquiera) que converge a un número real a. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \ \textit{y} \ \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{implican} \quad \lim_{n\to\infty} b_n^{a_n} = b^a. \tag{5}$$

Estas reglas (3), (4), (5) pueden generalizarse en alguno de los casos en que los límites son infinitos o el límite de (b_n) es cero, como ponen de manifiesto los resultados que a continuación enunciamos. La propiedad de acotación de las potencias de base e es la clave para obtenerlas.

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ implica $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = +\infty$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ implica $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = 0$.
- $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ implica $\lim_{n\to\infty} \log b_n = +\infty$.
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ implica $\lim_{n\to\infty} \log b_n = -\infty$.

Los últimos resultados proporcionan una manera de encontrar el límite de una sucesión de la forma $(b_n^{a_n})$ en ocasiones en las que alguna de las sucesiones o las dos tienen límite infinito. En efecto, para ello basta escribir

$$b_n^{a_n} = e^{a_n \log b_n}$$

y estudiar entonces el límite del producto $a_n \cdot \log b_n$.

Los casos llamados de indeterminación o indeterminados corresponden a aquellos en los que el límite del producto $a_n \cdot \log b_n$ se presenta en la forma llamada indeterminada del tipo $0 \cdot \infty$ ó $\infty \cdot 0$.

Estos casos de indeterminación de los límites de potencias de la forma $b_n^{a_n}$ se representan por los símbolos $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, 1^{∞}, ∞^0 y 0^0, que se añaden a los casos racionales de indeterminación que los alumnos ya conocen, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

5 Algunas técnicas de cálculo de límites notables

Comparando con la sucesión $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, es muy sencillo demostrar que para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} = e$ e inmediatamente después deducir que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n = e$.

Estos resultados pueden generalizarse, pues si en la fracción sustituimos 1 por a se tiene la convergencia a e^a.

De ambas afirmaciones se obtiene sin dificultad que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{implica} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e. \tag{6}$$

Ello resulta del hecho de que cada término a_n ha de estar comprendido entre dos enteros consecutivos, lo que permite acotar la sucesión $\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)$ entre dos sucesiones que tienen límite e.

En este mismo sentido, puede demostrarse (a partir de (6)) que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{implica} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \tag{7}$$

y por ende que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{implica} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \tag{8}$$

Todas estas consideraciones permiten calcular ciertos límites como por ejemplo $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e$ y $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n!}\right)^{-n!}=e$ de manera inmediata.

En otros términos ello significa que si (a_n) es una sucesión (sin infinitos términos nulos)

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0 \qquad \text{implica} \qquad \lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e. \tag{9}$$

A partir de la implicación (9), se pueden establecer las equivalencias:

Teorema 5.1 *Sea (a_n) una sucesión de números reales. Se verifica:*

- *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ *((a_n) sin infinitos términos 0), es* $\log(1+a_n)\sim a_n$
- *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n=1$ *((a_n) sin infinitos términos 1), es* $\log(a_n)\sim a_n-1$
- *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ *((a_n) sin infinitos términos 0), es* $e^{a_n}\sim 1+a_n$
- *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ *((a_n) sin infinitos términos 0), es* $e^{a_n}-1\sim a_n$

Estas equivalencias permiten obtener ciertos límites de manera inmediata, según el *Principio de Sustitución* que ya habremos planteado previamente.

Ejemplo **1** Se quiere calcular el límite $\lim_{n\to\infty}\frac{8n^6\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)\operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{n}\right)}{2n^2+5n-1}$.

Aplicando las equivalencias $\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)\sim\frac{1}{2n}$, $\operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n^3}$ y $2n^2+5n-1\sim 2n^2$ se tiene que el límite pedido es

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^6\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)\operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{n}\right)}{2n^2+5n-1}=\frac{8n^6\frac{1}{2n}\frac{1}{n^3}}{2n^2}=\frac{4}{2}=2.$$

En ocasiones, cuando las indeterminaciones asociadas a sucesiones de potencias son de la forma ∞^0 o 0^0, el cálculo se obtiene directamente de transformar la potencia en una nueva de base e y aplicar las equivalencias conocidas.

Ejemplo **2** Se pretende calcular el siguiente límite $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3n^3-1}\right)^{\frac{1}{\log(n^4-3)}}$. Aplicando las equivalencias correspondientes

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3n^3-1}\right)^{\frac{1}{\log(n^4-3)}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{n+2}{3n^3-1}}{\log(n^4-3)}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2\log n}{4\log n}} = e^{-1/2}.$$

En particular, de la última de las equivalencias del Teorema 5.1 se consigue de manera sencilla el resultado siguiente. Éste proporciona una técnica muy empleada para tratar los casos de indeterminación 1^∞, pues establece que siendo (a_n) y (b_n) sucesiones, (b_n) sin infinitos términos iguales a 1, si $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n^{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{a_n\log b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{a_n(b_n-1)}$.

Pueden entonces plantearse ejemplos mostrando la utilidad del método.

Ejemplo **3** Se desea calcular el límite $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}+1}{n-\sqrt{n}+1}\right)^{2\sqrt{n}}$.

Es inmediato comprobar que el ejemplo verifica las hipótesis de la proposición anterior y por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}+1}{n-\sqrt{n}+1}\right)^{2\sqrt{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}2\sqrt{n}\left(\frac{n+\sqrt{n}+1}{n-\sqrt{n}+1}-1\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{n-\sqrt{n}+1}\right)} = e$$

Para finalizar, diremos que conviene hacer que se conozcan los siguientes límites $\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$ y $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n} = 0$, que se obtienen inmediatamente por aplicación del *Criterio de Stolz*.

6 Definición de las funciones elementales. Estudio de su continuidad

Conocidos los aspectos más relevantes de los límites y continuidad de funciones reales de variable real, los principales teoremas de la continuidad y las propiedades más importantes de las funciones monótonas, puede plantearse la introducción de las funciones elementales, procediendo de la manera siguiente.

Como ya se ha mostrado, para cada $x \in \mathbb{R}$ podemos considerar la potencia de base e y exponente x. En este sentido definimos la función exponencial

$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \rightsquigarrow & \exp(x) = e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \end{array}$$

Se puede afirmar entonces, gracias a las propiedades establecidas en la sección 1, que para x, x', x'' reales cualesquiera, la función $\exp(x)$ así definida verifica:

- $\exp(x') \cdot \exp(x'') = \exp(x' + x'')$.
- Si $x < 0$, entonces $\exp(x) < 1$.
- Si $x = 0$, entonces $\exp(x) = 1$.
- Si $x > 0$, entonces $\exp(x) > 1$.
- Si $x' < x''$, entonces $\exp(x') < \exp(x'')$.

Merced a la posibilidad de representar de manera única cada real positivo mediante una potencia de base e, se tiene que la función exponencial es biyectiva.

Por otro lado, haciendo uso de la caracterización por sucesiones de la continuidad y la implicación (3), se deduce inmediatamente que la función $\exp(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

El que la función sea una biyección estrictamente creciente, permite también deducir (véase [4], pp. 161-166) que su inversa es una función continua, con lo que tendremos de inmediato que la función

$$\begin{array}{rccl} \log: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \log(x) = \log x \end{array}$$

es una biyección estrictamente creciente y continua. No obstante, esto podría también deducirse, como en el caso de la exponencial, de la caracterización de la continuidad por sucesiones y la implicación (4).

Además, por las propiedades vistas para el logaritmo neperiano en la sección 3, resultará que para x, x', x'' reales positivos, la función $\log(x)$ verifica:

- $\log(x') + \log(x'') = \log(x' \cdot x'')$.
- Si $x < 1$, entonces $\log(x) < 0$.
- Si $x = 1$, entonces $\log(x) = 0$.
- Si $x > 1$, entonces $\log(x) > 0$.
- Si $x' < x''$, entonces $\log(x') < \log(x'')$.

Finalmente, se puede definir prácticamente el resto de funciones que se manejan a este nivel a partir de la representación en relación a e. Y asimismo, merced a la continuidad de la composición de funciones continuas, se deducirá la continuidad de estas otras funciones.

7 Funciones elementales. Estudio de su derivabilidad

Resulta tan sencillo como la continuidad establecer la derivabilidad de la función exponencial a partir del estudio realizado anteriormente y una vez conocidos el concepto de derivabilidad de una función en un punto y la caracterización de la existencia de límite de una función en un punto. En particular, la equivalencia $e^{a_n} - 1 \sim a_n$ cuando $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, mostrada en el Teorema 5.1, determina la derivabilidad de la función exponencial en el cero y establece que la derivada en dicho punto vale 1, pues

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

A partir de aquí, la aditividad de los exponentes en la multiplicación de potencias de base e, permite demostrar de manera inmediata la derivabilidad en cualquier punto a, al tiempo que se prueba que dicha derivada vuelve a ser e^a, ya que

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x\to a} e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a.$$

Esto último permitirá concluir que la función $\exp(x)$ es infinitamente derivable y que todas sus derivadas vuelven a ser e^x.

Como consecuencia de ello y de la regla de derivación de la función inversa, resultará que la derivada de la función $\log(x)$ es precisamente $1/x$. No obstante, como en el caso de la exponencial, la equivalencia $\log(a_n) \sim a_n - 1$ cuando $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, dada en el Teorema 5.1, determina la derivabilidad de la función logaritmo en 1 y establece que la derivada en dicho punto vale 1, pues

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x - \log 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$$

De esta igualdad y las propiedades enunciadas para esta función se deduce rápidamente la derivabilidad en cualquier real positivo b, al tiempo que el citado valor de la derivada, ya que

$$\lim_{x\to b} \frac{\log x - \log b}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{1}{b} \cdot \frac{\log\left(\frac{x}{b}\right) - \log 1}{\frac{x}{b} - 1} = \frac{1}{b}.$$

Merced a estos resultados y a las reglas de derivación, que habrán sido estudiadas previamente, se establecerán las derivadas del resto de funciones elementales (y de otras construidas a partir de éstas), representando cada una de estas aplicaciones en función de la exponencial y el logaritmo.

8 Estudio del carácter didáctico

8.1 El problema

Resulta curioso comprobar el desconocimiento en los alumnos de la utilidad e importancia del número e en el Análisis. El sentir general de los estudiantes es que se trata de un número que les han dado y que sirve en el cálculo con logaritmos.

Preocupados por esta más que vaguedad, vacío, decidimos investigar cómo introducir a este nivel, del que hemos hablado, el número y cómo plasmar su potencia y versatilidad instrumental de manera coherente a la vez que productiva en pro de un mejora sustancial en el carácter didáctico de la asignatura.

8.2 Metodología

La investigación consistió en realizar una prueba al comienzo del curso, no habiendo entrado todavía en materia, donde se preguntaba acerca de aspectos estrechamente relacionados con el número e en un grupo de unos 300 alumnos. Posteriormente, y antes de la realización del examen final de junio, se volvió a realizar a los alumnos la misma encuesta.

8.3 Resultados

En la primera prueba más de un 90% de los estudiantes erraban o dejaban sin contestar por desconocimiento la mayoría de las cuestiones donde la instrumentalidad de e puede llegar a jugar un papel determinante. Era el caso de aspectos tan básicos como, por ejemplo, cómo definiría el alumno las potencias de base real positiva y exponente real en función de e. Por contra, la misma prueba, realizada posteriormente en los días previos al examen final de junio, resultó sorprendentemente muy positiva, invirtiéndose los porcentajes mencionados.

8.4 Conclusiones

- Nuestra experiencia confirma que el estudiante se muestra cuando menos hostil a incorporar en su conocimiento todo aspecto incomprensible o poco útil de las Matemáticas, por lo que es importantísimo fundamentar cada nuevo elemento que introducimos en nuestra programación, como es el caso del número e.

- El ejercicio de razonar, aunque fundamental para el alumno que desee continuar estudios técnico-científicos, ha sido prácticamente suprimido en la educación secundaria y provoca desasosiego y apatía en el estudiante que no está acostumbrado a ello. Por eso creemos indispensable sumergirlo en esta tarea de la manera más agradable posible, fomentando poco a poco su entusiasmo por la deducción y el mantenimiento de un espíritu crítico. Esta estrategia que presentamos consigue un avance sustancial en este sentido pues, como se ha indicado, con ella se demuestran resultados de gran interés a partir de la aplicación inmediata de otros que tienen un carácter fundamental dentro de la asignatura.

- Por último, con este trabajo hemos observado lo productivo que resulta acercar a los alumnos al placer que supone dominar las Matemáticas. Todo aquello que les aparece como algo accesible y sumamente útil es aprendido de manera rápida y sólida. Además, de este modo aumenta la predisposición de los alumnos para asimilar nuevas cuestiones relacionadas, con lo que se fomenta también así el gusto por comprenderlas.

Referencias

[1] Apostol, T. M.: *Análisis matemático.* Reverté, Barcelona, 2001.

[2] Apostol, T. M.: *Calculus.* Reverté, Barcelona, 1999.

[3] Burgos, J.: *Cálculo infinitesimal de una variable.* McGraw-Hill, Madrid, 1994.

[4] Fernández Viña, J.A.: *Análisis matemático I.*. Tecnos, Madrid, 1991.

[5] Kuratowski, K.: *Introducción al Cálculo.* Limusa, México, 1988.

[6] Linés, E.: *Principios de Análisis Matemático.* Reverté, Barcelona, 1988.

[7] Manjabacas, G.; Martín, I.; Orengo, J.J. y Valverde, J.C.: *Ejercicios de Cálculo I.* Popular Libros, Albacete, 2002.

[8] Rudin, W.: *Principios de Análisis Matemático (3ª edición).* McGraw-Hill, México, 1980.

[9] Spivak, M.: *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* Reverté, Barcelona, 2001.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex (en este último caso deberá usarse estilo "article" y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos (normal). Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección en minúsculas negritas y numerados, sin punto después del número ni punto final, excepto el de introducción que irá sin numerar. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de las copias en papel

Se enviarán vía postal por duplicado a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes: 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64 y 65.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

– la dirección a donde se han de enviar
– el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.