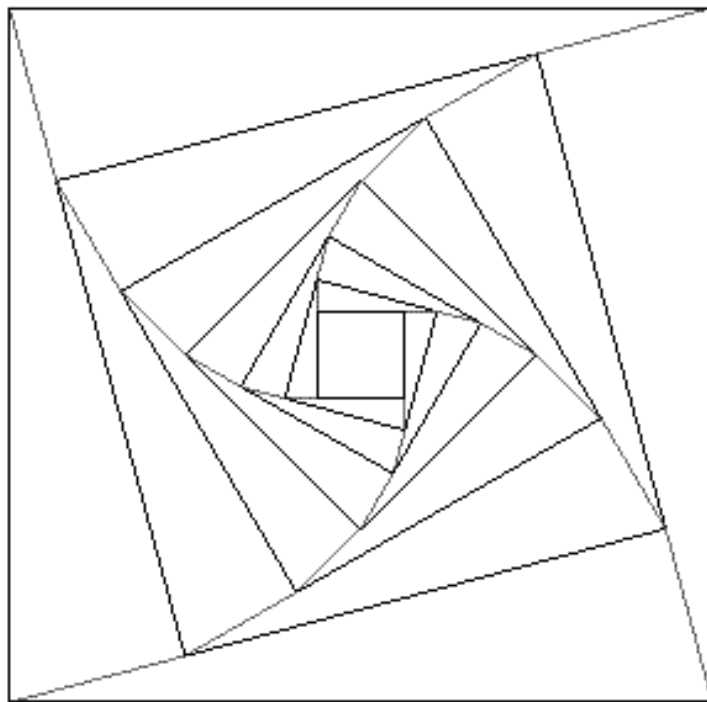


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 90
FEBRERO DE 2012**

ÍNDICE

	<u>Págs.</u>
Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2012	4
Cambio de Sede de nuestra Sociedad	4
XXX Concurso de Resolución de Problemas.....	5
XI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, por <i>Juan Jesús Donaire Moreno</i>	6
Fase Local de la de la XLVIII Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid, por <i>María Gaspar</i>	9
Sancho, palabras verdaderas por <i>Ignacio Sols</i>	12
Procedimientos trigonométricos en la resolución de problemas específicos del álgebra, por <i>Aurel Muntean</i>	16
Sobre la construcción de configuraciones del Teorema de Napoleón extendido a polígonos de más de tres lados, por <i>Eugenio Roanes Macías</i>	36
Formas canónicas de extensiones de Galois de grados 3 y 4, por <i>Arturo Rodríguez Rodríguez</i> y <i>M^a Belén Rodríguez Rodríguez</i>	70
Dos resultados del valor medio, por <i>Ángel Plaza</i> y <i>Sergio Falcón</i>	84
Reseña de software matemático	90
Petición de direcciones de correo electrónico a nuestros socios	92
Instrucciones para el envío de originales	93
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95
Boletín de inscripción	96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecían en Zentralblatt für Didaktik der
Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre, ahora “MathEduc”**

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio
Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).

Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la
Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en
portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titula-
do “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces
Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD “PUIG ADAM” DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
<http://www.sociedadpuigadam.es>

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse
a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE

(Redacción de publicaciones)

ENRIQUE RUBIALES CAMINO

(Relaciones Institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO

(Gestión de publicaciones)

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

(Actividades y concursos)

Secretario:

JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:

BEATRIZ BARRERO DÍAZ

CAROLINA BRAVO SANZ

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2012

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2012 para el *sábado día 14 de abril de 2012*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos, si procede.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

Cambio de Sede de nuestra Sociedad

Por obras en gran parte de la Facultad de Educación de la Univ. Complutense, nuestra Sede había pasado provisionalmente a ocupar otro despacho. A partir de ahora ha sido ubicada en el Despacho 3215 de la misma Facultad, como queda reflejado en la página 2 de este número del Boletín.

El teléfono sigue siendo el mismo, 91 394 6248, pero aconsejamos a nuestros socios que para comunicarse con nosotros utilicen preferentemente el correo electrónico, puigadam@mat.ucm.es, o, en su defecto, por carta a nuestra Sede:

*Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid*

XXX Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

**la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y el
Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias**

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

- a) *Primer nivel:* alumnos de 3º de E.S.O.
- b) *Segundo nivel:* alumnos de 4º de E.S.O.
- c) *Tercer nivel:* alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del *sábado 9 de junio del 2012* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 20 de Mayo del 2012, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

*Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid Fax: 91 394 4662
Correo electrónico: jetayo@mat.ucm.es*

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2011-2012.

XI Concurso “Intercentros” de Matemáticas

por Juan Jesús Donaire

Como todos los años, desde el 2000, en el penúltimo sábado de noviembre tuvo lugar el *Concurso Intercentros* de Matemáticas de la Comunidad de Madrid.

Este concurso organizado por la Sociedad Puig Adam con la inestimable colaboración de la Facultad de Matemáticas de la UCM, no es un concurso más en el que se premia a los estudiantes más brillantes en la resolución de problemas. En este concurso, además de valorar los resultados individuales de cada uno de los participantes, se valora en mayor grado el trabajo en equipo.

Todos los que conocen el formato de la prueba saben que un tercio de la puntuación total se debe a las puntuaciones que cada concursante consigue en la prueba individual, otro tercio a la prueba por equipos y el otro tercio a la prueba por relevos (también de equipo).

Sin lugar a dudas, es esta última parte del concurso la más atractiva y tal vez la más complicada. Durante esta prueba se palpa el nerviosismo de los participantes a los que no les llega el dato que necesitan para resolver su problema. También se aprecia la preocupación de aquellos que no encuentran la respuesta adecuada a su problema y tienen a su compañero de equipo esperando la cartulina con su solución.

Los enunciados y las soluciones de los problemas del XI Concurso se pueden ver en la página de nuestra Sociedad Puig Adam, pero a modo de ejemplo mostramos uno de los relevos.

2B. *¿Cuál es el valor del entero positivo n que verifica $888 \cdot 111 = 2 \cdot (2n)^2$?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)*

1B. *Sea "T" la respuesta del problema 2B. ¿Para cuántos enteros positivos n se verifica que $\frac{37}{T}n$ y $\frac{T}{37}n$ son enteros de cuatro cifras?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)*

- 3B.** Sea "T" la respuesta del problema 1B. Sea n la suma de las cifras de T. En una progresión aritmética de números reales la suma de los dos primeros términos es 7 y la suma de los seis primeros es 91. Calcula la suma de los n primeros términos de la progresión.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

Como puede apreciarse, si al segundo o al tercer componente del relevo no le llega o le llega erróneo el dato "T" que necesita para resolver su problema, el relevo no llega a feliz término.

Nuestra felicitación a todos los centros participantes y muy en especial, en esta ocasión, a aquellos que año tras año participan en la prueba a pesar de no estar entre los primeros clasificados. Manifestamos una vez más nuestro agradecimiento a los profesores que de una forma totalmente desinteresada nos prestan su ayuda y colaboración para la realización de la prueba y en la preparación de los equipos participantes.

Los resultados de la competición fueron los siguientes.

Centros ganadores

1. *IES San Juan Bautista*
2. *Colegio Alemán de Madrid A*
3. *Colegio Fray Luis de León A*

Estudiantes ganadores

NIVEL I (1º, 2º ESO)

1. *Alberto Alonso González* (Colegio SEK EL Castillo)
2. *Berta García González* (IES San Juan Bautista)
2. *Alfonso Olalla Santamaría* (Colegio SEK EL Castillo)
2. *Daniel Puignau Chacón* (IES Alameda de Osuna)

NIVEL II (3º, 4º ESO)

1. *Álvaro Robledo Vega* (Colegio Peñalar)
2. *Adrián Navarro Hernández* (Colegio SEK EL Castillo)

NIVEL III (Bachillerato)

1. *Lorenzo Esteban de la Iglesia* (Colegio Fray Luis de León)
2. *Javier Pliego García* (IES San Juan Bautista)

Relación de los 10 centros con mayor puntuación

1. <i>IES San Juan Bautista A</i>	57,8
2. <i>Colegio Alemán de Madrid A</i>	48,5
3. <i>Colegio Fray Luis de León A</i>	43,2
4. <i>Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas</i>	38,8
5. <i>IES Ramiro de Maeztu A</i>	37,7
6. <i>IES Alameda de Osuna A</i>	37,1
7. <i>Colegio Internacional SEK Ciudalcampo A</i>	34,2
8. <i>Colegio Alemán de Madrid B</i>	34,1
9. <i>Colegio Marista San José del Parque A</i>	32,5
10. <i>Colegio Peñalar A</i>	31,1

Fase Local de la XLVIII Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid

por **María Gaspar**

En el fin de semana del viernes 16 y sábado 17 de diciembre de 2011 tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la UCM la *Fase Local* de la XLVIII Olimpiada Matemática Española. En ella participaron los estudiantes previamente seleccionados en la *Fase Cero*, celebrada en pasado mes de noviembre.

Este año ha cambiado el modo de realizar la selección. En principio, ha habido 18 premiados, que una vez a la semana están teniendo una sesión de preparación. Estos 18 concursantes seleccionados han de pasar una última prueba de selección el sábado 3 de febrero.

En esta última prueba se seleccionan los nueve, que serán los que participen en la Fase Nacional, que está previsto celebrar en Santander, del 22 al 25 de marzo de 2012.

En la Primera Sesión, celebrada el viernes 16 de diciembre de 2011, se propusieron los tres primeros problemas enunciados a continuación y en la Segunda Sesión, celebrada al día siguiente, se propusieron los otros tres.

El tiempo de cada sesión fue de 3 horas y media. Cada problema puntuaba sobre un máximo de 7 puntos. No estuvo permitido el uso de calculadoras.

Problema 1

Sean a , b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

Problema 2

En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos respectivos de 30° , 60° y 90° , se eligen 25 puntos cualesquiera. Demostrar que siempre habrá 9 entre ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio $3/10$.

Problema 3

Sea P un punto interior a un triángulo ABC y sean H_A, H_B, H_C los ortocentros de los triángulos PBC, PAC y PAB respectivamente. Demostrar que los triángulos $H_A H_B H_C$ y ABC tienen igual área.

Problema 4

Dado un entero positivo n , hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a $10n$ que no son múltiplos de 2 ni de 5.

Problema 5

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y P un punto interior. Determinar qué condiciones deben cumplir el cuadrilátero y el punto P para que las áreas de los triángulos PAB, PBC, PCD y PDA sean iguales.

Problema 6

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo ABC . Si

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b(a^2 + c^2) + c^3,$$

demostrar que la medida (en radianes) de los ángulos A, B y C cumple la relación

$$\frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{A} + \sqrt{C}}.$$

Ganadores de las pruebas realizadas los días 17 y 18 de diciembre

Primer Premio

Jaime Mendizábal Roche

Xi Chen

Javier Pliego García

Miguel Barrero Santamaría

Raúl González Molina

Federico Expósito Bacigalupo

Segundo Premio

Marc Isern Hacker

Pablo Esteban de la Iglesia

Almudena Carrera Vázquez

Fabián López Lumbreras

Thomas Steimann Martínez-Mora

Ángel Prieto Naslin

Tercer Premio

Alexandro Sánchez Bach

Paula Sardinero Meirás

Jimyeong Ha

Pablo Gómez Pérez

Javier Sánchez-Blanco Boyer

Pablo Talavante Díaz

Sancho, palabras verdaderas

*Un recuerdo de alumno, en el fallecimiento de
D. Juan Bautista Sancho Guimerá. Por Ignacio Sols.*

“Ha fallecido Sancho Guimerá” ¡Sancho! ¿no más su mueca socarrona? ¿apagado para siempre el brillo de sus ojos? Aquel año, entre tantas huelgas, la universidad cerrada –habíamos defenestrado el busto de Franco, estado de excepción- y la enfermedad y operación de Sancho, habíamos tenido con él, contados, dieciséis días de clase. Geometría proyectiva, cuando decía algo de matemáticas. “La mente de tu alumno no es un vaso que deba llenarse, sino un fuego que debe encenderse” Dieciséis días. Hasta que fui a visitarle, ya anciano, a su retiro en un pueblo de Avila, no volví a verlo más. El año que siguió a aquel curso de 1969 fui a vivir a otra ciudad, luego al extranjero, dedicado a temas sin relación con la geometría, siquiera con la matemática. Pero “el toro sabe al final de la corrida...”, todos esos años, los años de mi vida que yo llamo “posteriores a los dieciséis días de clase” llevaba el toro clavada la espada que tarde o temprano, lo quiera o no (Sancho decía que la vocación no se tiene, sino que se padece), lo hará tambalearse, “cesando debilitado en la caída”: si es verdad que vivir es ir cerrando posibilidades, las cerré todas dedicándome a la geometría proyectiva, porque no podía no hacerlo, como no se le da al toro escoger después que “ha sentido en su lengua un gusto a espada”, la espada que en mi espíritu joven había clavado Juan Bautista Sancho Guimerá. Ahora, Sancho ha muerto.

Entonces, cuando veamos un corrillo en la escalera de piedra, o un remolino de gente junto a la fuente, o frente al inolvidable bar de tapas y serrín de la universidad de Barcelona, ¿no estará ya Sancho en el centro, argumentando, contradiciendo, poniendo seguridad donde hay duda, poniendo duda donde hay seguridad? ¿Nunca más me encontraré por los pasillos de aquella universidad de verdad su figura familiar, aquel hombre pequeño, cargado de hombros, de pelo undoso, negro y descuidado, a quien nadie se atrevía a sacar de su ensimismamiento, andando con sus ojos azabache fijos en alef o en un espacio de cohomología?

¿Cómo ha podido un hombre en sólo dieciséis días de clase, en los que casi no habló de matemáticas, influir en mí como ningún otro matemático ha influido? Los diez últimos minutos, poco más, los dedicaba a la “santa simplicidad” como

él llamaba a las matemáticas, no mucho más tiempo que la revelación de Diotima a Sócrates, las pocas palabras que hicieron a Sócrates, a la filosofía occidental y a Occidente. Y entonces, Antonio Machado con su chaqueta raída y su barba mal afeitada, después de habernos recitado el “Palacio, buen amigo” o el “¿no es verdad, Leonor?” ; entonces, Don Miguel de Unamuno con las puntas del cuello de la camisa asomando dobladas por el jersey cerrado, después de haber reducido todo a escombros porque no se puede edificar sobre ruinas; entonces D. Alonso Quijano el Bueno, después de haber dado sus consejos de lo divino y de lo humano al patán de Sancho Panza, desciende las gradas repletas de alumnos colgados aún de sus palabras, lo siguen con la mirada, coge un pedazo de tiza, minúsculo como la colilla que parte siempre al empezar la clase, se dirige a la pizarra y define: “Dimensión. Llamamos dimensión de un espacio vectorial a la cardinalidad de una cadena irrefinable de subespacios”. “Concepto. Llamamos concepto a un invariante por la acción de un grupo de transformaciones. Conceptos proyectivos, conceptos afines, conceptos topológicos...”

“Esfuércense en crear, siempre, en sus alumnos, una atmósfera de tensión intelectual” “La verdad les hará libres”, lo que equivocadamente atribuía a San Pablo. Pero para nosotros era lo mismo, la cosa es que lo decía Sancho. Y como todos allí éramos catalanes, había que decir algo del “seny”, la prudencia o buen sentido catalán, en que el pobre Sancho se ahogaba, sin que nadie pudiera salvar a aquel aragonés de Teruel, simpático, ocurrente, genial, de aquel naufragio entre tanto seny. “Seny, definición. Si los apóstoles, el día de Pentecostés, hubieran sido catalanes, se hubieran quitado las lenguas de fuego de encima de sus cabezas y las hubieran puesto sobre la mesa, diciendo : ¡No! ¡Ante todo, hay que tener seny! ” Pero, claro está, esto lo decía porque los que le rodeábamos entonces éramos catalanes. Si hubiéramos sido, por ejemplo, castellanos, es seguro que hubiera dicho justo lo contrario, porque Sancho siempre provocaba, y ahora nos estaríamos riéndonos a costa de los castellanos. Me contaron que en un año anterior al mío iba una monja a su clase. Sancho aprovechaba la circunstancia para demostrar matemáticamente que Dios no existe. Pero un día se ponía la monja enferma, no venía. Y entonces Sancho demostraba que Dios existe, también con fórmulas matemáticas. Sea la historia cierta o no, ése es Sancho en estado puro.

“Esfuércense siempre por crear una tensión intelectual a su alrededor” Vuelvo con la mente a aquellos años, al Mercedes de Sancho, del que se decía que lo había comprado en los años en que enseñó en Venezuela, una de las leyendas que se contaban de él. Te asomabas a aquel extraño lujo que tan poco cuadraba con la persona de su dueño, y el interior era un amasijo de libros abiertos y cerrados, de

ropa y de juguetes de niños. Ah, sí, la cosa se reconciliaba entonces, era de él. Las huelgas, las asambleas, las votaciones. “Tots junts vencerem”, “Igual que al pí a prop de la riviera”. “D’ un mon que ja es un poc nostre, de un país que ja anem fent, cantem les esperances i plorem la poca fe”. “¡No creiem en les pistoles!”. No creíamos en las pistolas. Cuando había bedeles policías por todas partes, y la policía te pedía el carnet para entrar en la universidad, y el resto del día lo pasaban de tertulia entre cazalla y cazalla en el puestecillo que tenían, entrando, a la izquierda. Y en el centro de aquellos recuerdos, del qué tiempo tan feliz que nunca olvidaré, aquel hombre vestido invariablemente de gris, invariablemente en el centro de un corrillo de estudiantes imantado con su palabra, con su mirada imantada. Aquel magnetismo de sus ojos negros, profundos, era al mismo tiempo alma, fuego, duda, verdad.

¿Cuál es la misión del profesor universitario, la misión del maestro, del intelectual? (“Maestro”, le llamaban muchos) ¿No es acaso la misión de Sócrates en la ciudad, la del tábano en el caballo, manteniéndolo despierto con sus molestas mordeduras? Recuerdo que después de la clase de Sancho, a segunda hora, ya no podía atender a las demás. Mientras explicaban el equis sub i sub jota (el infierno de los índices, como él lo llamaba), me salía al jardín de la universidad, a aquel último romántico entre peces silenciosos, empujado por la necesidad de poner orden en mis ideas. “Shall I put my lands in order?” Había comenzado para mí una lifetime enterprise, que aún no sé si ha acabado.

Luego llegó el tiempo de los exámenes. Sancho se había repuesto de su enfermedad, nos dio unas pocas clases y...los exámenes. Tres días y medio, duraba el suyo. Días de diez a dos y de cuatro a nueve, nada de bromas. Pero nadie nos imagine allí sentados redactando la intemerata, pues de la teoría no nos examinaba, porque “teoría”, decía, es “visión”, y la visión se contempla, como se contempla una puesta de sol, y a nadie se le ocurre examinar a nadie de una puesta de sol. Pero problemas, sí, porque problemas ya es otra cosa, es pensar. ¡Tres días y medio resolviendo problemas! Salíamos al patio, al bar, conversábamos, pero allí nadie decía ni mú de los problemas que Sancho nos había puesto. Porque no se nos vigilaba, y a nobleza se responde con nobleza. Toda la vida agradeceré que alguien en mi juventud, alguien en el momento preciso, haya confiado en mí.

Pero ahora aquel hombre que en mí confió ha muerto. Juan Sancho el malo, como él decía (el otro Juan Sancho era, por lo visto, el bueno) ha muerto. El que casó y volvió con hijas e hijos, “como el soldado que va a la guerra y vuelve con heridas, y no como éstos que vuelven todo peinaditos” como una vez nos dijo. El

que salió a la palestra, y en ella enseña todavía, en el espíritu de quienes, aún jóvenes, prestamos aún oído atento a su palabra. El que ahora ha comprendido por fin la revelación de Diotima: hay científicos que atisban al final de su vida que la verdad es una y hay artistas que atisban que la belleza es una. Pues bien, esa única verdad y esa única belleza son una y la misma, y adherirse a esa única Verdad y única Belleza es el único y verdadero modo de hacerse inmortal.

Éstas han sido unas palabras sobre Sancho Guimerá, el profesor, el maestro, el mortal “diamante inmortal”. Podría haber sido más académico, lo entiendo, pero he escrito las palabras que me han salido, pues he querido que fueran por una vez como las suyas, “unas pocas palabras verdaderas”, la definición que Antonio Machado daba de poesía. En otra ocasión escribí de Sancho Guimerá, el matemático, y lo llamé entonces nuestro Grothendieck particular, el Grothendieck español, demasiado tarde aprovechado. A unos entusiasmó que escribiera aquello y otros me dijeron que, simplemente, no estaban de acuerdo. Tratándose de Sancho, creo que eso significa que acerté, pues aun después de muerto Sancho ha de ser siempre blanco de contradicción. Lo que aquí he escrito parecerá a algunos estupendo, pero otros, más sensatos y prudentes, dirán: “lo que tiene que hacer un profesor en clase es enseñar matemáticas y no recitar poesía”. Yo sólo puedo responderles “lo siento, ése es el recuerdo que tengo”. Pero me parece entonces oír su voz, que ni aun muerto creo que a nada quede callado: “Pues no estoy de acuerdo con ustedes, sensatos. Pues no estoy de acuerdo con ustedes, prudentes. Porque para enseñar geometría proyectiva ya está el Semple and Kneebone” Y es que quizá en su tenso y convulso discurso Sancho tuviera razón, quizá no está el maestro para hacer lo que puede hacer un libro. Quizá su misión sea prender un fuego, el fuego que prendió en mí y en otros jóvenes, provocando un incendio que de una buena parte de las matemáticas españolas actuales es responsable.

Termino. Considero una gran suerte en mi vida haber tenido a Sancho. Yo puedo así imaginar lo que pudo ser Sócrates, o Hegel, o Unamuno, o Max Scheller, a quien por cierto Sancho se parecía, hombre pequeño, algo encorvado, de rostro avellanado y mirada absolutamente intensa, que a nadie a su alrededor dejaba indiferente. Creo que el significado de la palabra “genio” sólo lo podemos comprender quienes hemos tenido la inmensa fortuna de tropezar con un genio en nuestra vida. Quien lo ha encontrado, lo sabe.

Ignacio Sols
Profesor Emérito Complutense

Procedimientos trigonométricos en la resolución de problemas específicos del álgebra

Aurel Muntean

CEPA de Entrevías (Madrid)

Doctor en Matemáticas por la Univ. “Babes-Bolyai” de Cluj-Napoca, Rumanía
aurelmuntean@yahoo.com

Abstract

This paper aims to solve some algebraic problems (inequalities, equations, non linear system) using trigonometric techniques. Interesting non rutinary mathematics problems that use non-usual techniques are presented. Our work may be viewed as a natural continuation as the instruction of gifted students, in addition to the standard mathematics courses. The essential information in paper based of the Romanian Gazeta Matematica.

Introducción

Muchas veces para resolver problemas trigonométricos recurrimos al álgebra. Pensamos que resulta de interés unas estrategias de resolución de ciertos problemas del álgebra que involucre técnicas trigonométricas.

En este sentido el presente artículo ofrece una pequeña guía metodológica, aportando soluciones y comentarios e incluso “repensar” algunos problemas sin barreras de temas, del currículo,... Trataremos de plantear problemas del álgebra de distinta dificultad, que admiten solución trigonométrica y, además, basta con usar técnicas que estén al alcance de los estudiantes de Bachillerato.

Resulta muy importante aclarar que este artículo ha sido diseñado para el alumnado con altas capacidades intelectuales con objeto de lograr una mayor motivación hacia contenidos procedimentales más complejos, los cuales pueden no estar incluidos en el currículo y pretende aportar sugerencias para los profesores que desean

enriquecer los contenidos de algunos temas con una mayor profundidad y conexión entre ellos.

En cuanto a los problemas que resolveremos, la mayoría de ellos son problemas clásicos, aunque es de imaginar que sí estuvieron inicialmente ligados a nombres de autores. Sin embargo, se citan los autores de esos problemas extraídos de sus versiones originales. Además hemos incluido algunos problemas originales en cuanto a la modalidad de resolución con herramientas de trigonometría casi exclusivamente, así como un procedimiento para generar sistemas de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros y cuyas soluciones sean valores de funciones trigonométricas de ángulos múltiplos racionales de π radianes.

La principal novedad de nuestro trabajo consta en que englobamos todos los problemas bajo una técnica unitaria de resolución trigonométrica. Muchas ideas y problemas que aquí aparecen tienen su origen en la colección de la revista rumana *Gazeta matematică pentru Tineret (Gaceta Matemática para alumnos)*.

1 Algunas recomendaciones para el uso de técnicas trigonométricas

En ocasiones, el uso de algunas manipulaciones algebraicas supone una clara desventaja, implicando cálculos engorrosos que pueden evitarse con la utilización de otros métodos. No se pueden dar reglas para reconocer, de modo absoluto, que técnicas aplicaremos a determinados casos, pero presentaremos algunos criterios para seleccionar una estrategia que puede resultar útil. Estos criterios surgen, de algún modo, como resultado en la búsqueda de concordancia entre las condiciones de existencia de las funciones que intervienen en un cierto problema y los posibles cambios trigonométricos. Y no son más que aplicar el sentido común.

- Si el dominio de existencia de las variables que intervienen en el problema es todo el conjunto \mathbb{R} intente usar sustituciones de tipo $x = tg \alpha$.

Si el dominio de existencia de las variables que intervienen en el problema es $[0, +\infty)$ se puede poner $x = tg^2 \alpha$.

- Si el dominio de existencia de las variables que intervienen en el problema es el intervalo $[-1, 1]$ puede resultar útil un cambio mediante $x = sen \alpha$ o $x = cos \alpha$. En particular, dicha sustitución es una opción habitual cuando en las funciones intervienen expresiones de la forma $\sqrt{1 - x^2}$.

En el caso en el que $x \in [-a, a]$ con $a > 0$ tomaremos, sea $x = a \operatorname{sen} \alpha$, con $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sea $x = a \operatorname{cos} \alpha$, con $\alpha \in [0, \pi]$.

Esa idea se podría aplicar cuando en los problemas intervienen expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$.

- Si se trata de determinar los máximos y mínimos de una función o la imagen de una función inténtese hacer estimaciones formando sumas o productos a partir de las funciones de la forma $f(r \operatorname{sen} \alpha, r \operatorname{cos} \alpha, \dots)$ y considerar la acotación de $\operatorname{sen} \alpha$ o $\operatorname{cos} \alpha$.

También puede ser útil considerar los siguientes teoremas básicos bien conocidos:

Teorema 1. Si $a_k > 0$, para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tales que $\sum_{k=1}^n a_k = A$, entonces $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \max$ cuando $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Teorema 2. Si $a_k > 0$, para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tales que $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = B$, entonces $\sum_{k=1}^n a_k = \min$ cuando $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2 Uso de procedimientos trigonométricos en la demostración de identidades

Los ejemplos que ofrecemos tratan de configurar una gama de problemas apropiados para la utilización de métodos trigonométricos como alternativa a las manipulaciones algebraicas elementales.

Identidad clásica 1. Para todos los números reales a, b, c , tal que el producto de cualquiera dos de ellos sea distinto de -1 , probar que:

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ca}$$

Solución. Hay que hacer notar la similitud de las expresiones en que viene constituida la identidad propuesta con la fórmula de la tangente de una resta de ángulos. Así surge la idea clave en la concepción de la solución: para todos los números reales a, b, c , existirán $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tales que $a = \operatorname{tg} \alpha$, $b = \operatorname{tg} \beta$, $c = \operatorname{tg} \gamma$, con lo que la identidad algebraica propuesta se convierte en esta identidad trigonométrica:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg}(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{tg}(\gamma - \alpha)$$

Y ahora viene el truco: veamos que $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0$.

Gracias a la fórmula

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma} \quad (1)$$

se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{tg} [(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha)] = \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) - \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg}(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{tg}(\gamma - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg}(\beta - \gamma) - \operatorname{tg}(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) - \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

llegando así a:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) - \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg}(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = 0,$$

que es la versión trigonométrica de la identidad propuesta.

Identidad sujeta a restricciones (16 Olimpiada Internacional de Matemática, Erfurt, República Democrática Alemana, 1974; problema propuesto por Cuba). Para todos los números reales positivos x, y, z , distintos de $\frac{1}{\sqrt{3}}$, con $x + y + z = xyz$, probar que:

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

Solución. La forma de las expresiones que aparecen en la identidad a demostrar conduce a pensar que puede ser útil considerar la fórmula de la tangente del ángulo triple. Procediendo de forma exactamente igual al problema anterior, podremos poner $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{tg} \beta = y$, $\operatorname{tg} \gamma = z$, pero esta vez, atendiendo a las condiciones $x, y, z \in \mathbb{R}_+ \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$, tomaremos $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0, \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$.

Y ahora aplicando la fórmula (1) resulta inmediatamente

$$x + y + z = xyz \iff \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \iff \alpha + \beta + \gamma = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

que nos conduce a

$$\operatorname{tg}(3\alpha + 3\beta + 3\gamma) = \operatorname{tg} 3k\pi = 0 \iff \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} 3\beta + \operatorname{tg} 3\gamma = \operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} 3\beta \cdot \operatorname{tg} 3\gamma$$

que es precisamente la desigualdad propuesta en su versión trigonométrica.

3 Uso de procedimientos trigonométricos en la demostración de desigualdades

La demostración de desigualdades ofrece más retos que la demostración de identidades. Algunas desigualdades se resuelven al reconocer que se presenta alguna función trigonométrica monótona. Quizá seamos capaces de conjeturar que dicha función sería acotada y probarla.

Desigualdad clásica 1. Si $x, y \geq 1$, probar que $y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-1} \leq xy$
Solución. Llamando $\sqrt{x-1} = a$ y $\sqrt{y-1} = b$, la desigualdad propuesta lleva la forma:

$$(1 + b^2)a + (1 + a^2)b \leq (1 + a^2)(1 + b^2)$$

Como $a, b \geq 0$ existirán $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2})$, tales que $a = \operatorname{tg} \alpha$ y $b = \operatorname{tg} \beta$, con lo que la desigualdad se transforma en:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos^2 \beta} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta \cdot \cos^2 \alpha} \leq \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}$$

y de aquí, multiplicando por $\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta > 0$ pasamos a la forma:

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \beta \leq 1$$

que puede escribirse como $\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta \leq 2$, una desigualdad claramente verdadera.

Nota: Como se puede observar, los números x e y juegan el mismo papel en la desigualdad, cumpliéndose la igualdad cuando

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4} \implies a = b = 1 \implies x = y = 2.$$

Desigualdad clásica 2. Si $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, demostrar que

$$\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2} \leq \sqrt{4 - (a + b)^2}$$

Solución. De las condiciones de validez de la desigualdad vemos que:

$$|a| \leq 1, |b| \leq 1 \implies (\exists) \alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ tales que } a = \operatorname{sen} \alpha, b = \operatorname{sen} \beta$$

Entonces, $\sqrt{1-a^2} = \cos \alpha \geq 0$ y $\sqrt{1-b^2} = \cos \beta \geq 0$, de manera que la desigualdad propuesta se puede escribir sucesivamente como:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &\leq \sqrt{4 - (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)^2} \iff \\ \iff 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} &\leq \sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} \iff \\ \iff \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \left(\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \right) &\leq 1 \iff \\ \iff \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} &\leq 1, \text{ desigualdad obvia.} \end{aligned}$$

Nota: Evidentemente, la desigualdad se transforma en una igualdad cuando $\alpha - \beta = 0$, en cuyo caso $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$, y por lo tanto, $a = b$.

Desigualdad clásica 3 (Suprún [3] págs. 38-39). Si $a, b \in \mathbb{R}$, probar la desigualdad

$$|(a+b)(1-ab)| \leq \frac{1}{2} \cdot (1+a^2)(1+b^2)$$

Solución. Puesto que $a, b \in \mathbb{R}$, ponemos $a = \operatorname{tg} \alpha$ y $b = \operatorname{tg} \beta$ con $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Así se deduce sucesivamente que

$$\begin{aligned} \left| \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \right| &= \left| \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)} \right| = \\ &= |\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta)| = \frac{1}{2} \cdot |\operatorname{sen} 2(\alpha + \beta)| \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Desigualdad clásica 4. Sean $a_k > 0$, para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tales que $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Demostrar que para todo número natural $n \geq 1$ se verifica que:

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n$$

Solución. El hecho de que los números a_k que aparecen en la desigualdad son todos positivos conduce a pensar que puede ser útil considerar la sustitución $a_k = \operatorname{tg}^2 \alpha_k$, para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$).

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

La condición $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$ del enunciado se traduce en

$$\operatorname{sen} \alpha_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha_2 \cdot \dots \cdot \operatorname{sen} \alpha_n = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \dots \cdot \cos \alpha_n,$$

que nos permite transformar el primer miembro de la desigualdad que tenemos que probar del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
 (1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) &= (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2) \cdot \dots \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_n) = \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha_1 \cdot \cos^2 \alpha_2 \cdot \dots \cdot \cos^2 \alpha_n} = \\
 &= \frac{1}{(\operatorname{sen} \alpha_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha_2 \cdot \dots \cdot \operatorname{sen} \alpha_n) \cdot (\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \dots \cdot \cos \alpha_n)} = \\
 &= \frac{1}{(\operatorname{sen} \alpha_1 \cdot \operatorname{cosen} \alpha_1)(\operatorname{sen} \alpha_2 \cdot \operatorname{cosen} \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\operatorname{sen} \alpha_n \cdot \operatorname{cosen} \alpha_n)} = \\
 &= \frac{2^n}{\operatorname{sen} 2\alpha_1 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha_2 \cdot \dots \cdot \operatorname{sen} 2\alpha_n} \geq 2^n,
 \end{aligned}$$

ya que, usando

$$\alpha_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \operatorname{sen} 2\alpha_k = 2 \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{cosen} \alpha_k > 0$$

sucede que $0 < \operatorname{sen} 2\alpha_1 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha_2 \cdot \dots \cdot \operatorname{sen} 2\alpha_n \leq 1$.

Nota: Claramente se ve que la desigualdad anterior se cumple con igualdad para:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{\pi}{4} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1.$$

Desigualdad clásica 5. Sean $a_k \in [-1, 1]$, para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Demostrar que si $\sum_{k=1}^n a_k^3 = 0$, entonces se verifica que:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{n}{3}.$$

Solución. El hecho de que todos los números a_k que aparecen en la desigualdad están comprendidos entre -1 y 1 nos sugiere que hagamos una sustitución trigonométrica en senos o cosenos. Con lo cual, podemos poner: $a_k = \operatorname{cosen} \alpha_k$, para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$). Obviamente, podemos suponer que $\alpha_k \in [0, \pi]$. Una idea feliz sería emplear ahora la identidad trigonométrica

$$\operatorname{cosen} 3\alpha = 4 \operatorname{cosen}^3 \alpha - 3 \operatorname{cosen} \alpha \tag{2}$$

pues es la que nos conduce sucesivamente a:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \cos \alpha_k = \sum_{k=1}^n \frac{4\cos^3 \alpha_k - \cos 3\alpha_k}{3} = -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \cos 3\alpha_k \leq \frac{n}{3}$$

Nota: Hay que señalar que, bajo las mismas condiciones, se verifica la versión más fuerte de la desigualdad anterior,

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq \frac{n}{3},$$

para lo cual la demostración ya es obvia.

4 Uso de procedimientos trigonométricos en la resolución de ecuaciones

Al igual que las identidades y desigualdades, algunas ecuaciones y sistemas de ecuaciones se resuelven eficientemente aplicando técnicas trigonométricas, mediante una sustitución trigonométrica apropiada.

Ecuación 1 (Suprún [3] págs. 94-95). Resolver la ecuación:

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$$

Solución. Conviene observar que para esta ecuación es necesario imponer las siguientes condiciones de existencia: $|x| \leq 1 \wedge 4x^3 - 3x \geq 0$.

La parte derecha de la ecuación propuesta nos sugiere emplear la identidad trigonométrica (2). Evidentemente el cambio adecuado que elimine el radical será $x = \cos \alpha$, con $\alpha \in [0, \pi]$. En este caso, la ecuación adquiere la forma trigonométrica:

$$\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \iff |\operatorname{sen} \alpha| = \cos 3\alpha$$

Puesto que:

$$\alpha \in [0, \pi] \implies \operatorname{sen} \alpha \geq 0,$$

la ecuación trigonométrica anterior se puede transformar en

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos 3\alpha \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos 3\alpha \iff$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) \\ \alpha'' = -\frac{\pi}{4} + h\pi & (h \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Dado que $\alpha \in [0, \pi] \wedge \cos 3\alpha \geq 0$, los valores apropiados son solamente unos pocos:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{8} \\ \alpha_2 = \frac{5\pi}{8} \\ \alpha_3 = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ x_2 = \cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ x_3 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ecuación 2 (autor desconocido). Resolver la ecuación:

$$|x + \sqrt{1-x^2}| = \sqrt{2}(2x^2 - 1)$$

Solución. Como el dominio de existencia de la ecuación es el subconjunto

$$D = \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \subset [-1, 1],$$

no hay inconveniente en suponer que todas sus raíces son de la forma $x = \cos \alpha$, con $\alpha \in [0, \pi]$.

La ecuación propuesta es equivalente a

$$|\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha| = \sqrt{2} \cdot \cos 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} \cdot \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right| = \sqrt{2} \cdot \cos 2\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \cos^2 2\alpha \\ \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \right] = \frac{1}{2} (1 + \cos 4\alpha) \\ \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \cos 4\alpha \\ \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4\alpha = \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases}$$

Escribiendo ahora las soluciones sujetas a sus condiciones

$$\begin{cases} \alpha \in \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid (k \in \mathbb{Z}) \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + h\frac{\pi}{3} \mid (h \in \mathbb{Z}) \right\} \\ \alpha \in [0, \pi] \wedge \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases}$$

llegamos finalmente a las soluciones particulares apropiadas:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{3\pi}{4} \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{12} \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_2 = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Ecuación 3 (autor desconocido). Determinar todas las soluciones reales de la ecuación

$$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$$

Solución. En primer lugar por medio de la comprobación directa descartamos la posibilidad de que algún $x \in \{-1, 0, 1\}$ sea raíz de la ecuación. Y aún más:

$$|x| > 1 \implies \begin{cases} |1 - 2x^2| > 1 \\ 8x^2(x^2 - 1) + 1 > 1 \end{cases} \implies |8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1)| > 8 > 1$$

Por lo tanto, toda raíz de la ecuación se encuentra en alguno de los intervalos de la unión $(-1, 0) \cup (0, 1)$, lo que sugiere realizar una sustitución en seno o coseno. Así, por ejemplo, con el cambio $x = \cos \alpha$, siendo $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, la ecuación propuesta adopta la siguiente forma trigonométrica:

$$8 \cos \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha) (8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1) = 1 \iff$$

$$\iff -8 \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 1 \iff -8 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \sin \alpha$$

$$\iff -\sin 8\alpha = \sin \alpha \iff 2 \sin \frac{9\alpha}{2} \cdot \cos \frac{7\alpha}{2} = 0 \iff$$

$$\iff \alpha_1 = \frac{2k\pi}{9}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{7} + \frac{2h\pi}{7} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

Finalmente, puesto que $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ obtenemos

$$\alpha \in \left\{ \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7} \right\},$$

con lo que las raíces de la ecuación propuesta son las siguientes:

$$\begin{aligned} x_1 = \cos \frac{2\pi}{9}, \quad x_2 = \cos \frac{4\pi}{9}, \quad x_3 = \cos \frac{6\pi}{9}, \quad x_4 = \cos \frac{8\pi}{9}, \\ x_5 = \cos \frac{\pi}{7}, \quad x_6 = \cos \frac{3\pi}{7}, \quad x_7 = \cos \frac{5\pi}{7}. \end{aligned}$$

Nota: Obsérvese que el polinomio

$$\begin{aligned} p(x) &= 8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) - 1 = -128x^7 + 192x^5 - 80x^3 + 8x - 1 = \\ &= -(2x + 1)(64x^6 - 32x^5 - 80x^4 + 40x^3 + 20x^2 - 10x + 1) \end{aligned}$$

Como consecuencia deducimos que la ecuación con coeficientes enteros

$$64x^6 - 32x^5 - 80x^4 + 40x^3 + 20x^2 - 10x + 1 = 0 \quad (3)$$

es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ y tiene las raíces simples e irracionales, todas ellas valores de funciones trigonométricas:

$$\cos \frac{2\pi}{9}, \quad \cos \frac{4\pi}{9}, \quad \cos \frac{8\pi}{9}, \quad \cos \frac{\pi}{7}, \quad \cos \frac{3\pi}{7}, \quad \cos \frac{5\pi}{7}.$$

Un artículo publicado por Kenneth W. Wegner [5] es la referencia clásica en este tema y por ello, en [2] hemos introducido el concepto de *ecuación de tipo Wegner*, dando técnicas en general más sencillas que las exposiciones originales. Sin embargo, la ecuación (3) obtenida aquí proporciona un nuevo ejemplo, junto con un planteamiento distinto de lo que hemos publicado anteriormente.

Ecuación 4 (autor desconocido). Hallar todas las soluciones reales de la ecuación

$$4\sqrt{2} |x| \cdot (x^2 - 1)(2x^4 - 4x^2 + 1) = 1$$

Solución. Veamos en primer lugar que ni $x = 0$ ni $x = 1$ son raíces de la ecuación. Por otra parte, para $|x| \geq \sqrt{2}$ la igualdad del enunciado no puede darse nunca, puesto que en tal caso

$$\left| 4\sqrt{2} \cdot x(x^2 - 1)[(2x^2(x^2 - 2) + 1)] \right| \geq 8 > 1.$$

Es por este motivo por el que toda raíz de la ecuación se encuentra en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Como la función

$$f(x) = 4\sqrt{2} |x| \cdot (x^2 - 1)(2x^4 - 4x^2 + 1) - 1$$

que define la ecuación es par, a partir de este punto nos limitaremos a considerar el caso en el que $x \in (0, \sqrt{2})$ y tomaremos $x = \sqrt{2} \cos \alpha$, con $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Luego la ecuación propuesta se convierte en la ecuación trigonométrica:

$$8 \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) (8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1) = 1 \iff$$

$$\iff 8 \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 1 \iff 8 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \sin \alpha$$

$$\iff \sin 8\alpha = \sin \alpha \iff 2 \sin \frac{7\alpha}{2} \cdot \cos \frac{9\alpha}{2} = 0 \iff$$

$$\iff \alpha_1 = \frac{2k\pi}{7}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{2h\pi}{9} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

Supuesto que $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ las raíces de la ecuación trigonométrica solamente pueden ser $\alpha \in \{\frac{2\pi}{7}, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}\}$, con lo que las únicas soluciones positivas de la ecuación propuesta son, respectivamente:

$$x_1 = \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{7}, \quad x_2 = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{9}, \quad x_3 = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De los comentarios anteriores sobre la paridad de la función f resulta inmediatamente que las únicas soluciones negativas de la ecuación son:

$$x_4 = -\sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{7}, \quad x_5 = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{9}, \quad x_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5 Uso de procedimientos trigonométricos en la resolución de sistemas de ecuaciones

Dos desigualdades trigonométricas clásicas nos abrirán nuevas ideas para la resolución de ciertos tipos de sistemas de ecuaciones.

Teorema 3. Si A, B, C son los ángulos de un triángulo cualquiera ABC , entonces:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\operatorname{cos} A + \operatorname{cos} B + \operatorname{cos} C \leq \frac{3}{2} \quad (5)$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, ABC es en un triángulo equilátero.

5.1 Resolución de sistemas de ecuaciones empleando técnicas trigonométricas

Los ejemplos que ofrecemos van encaminados en el mismo sentido que los de ecuaciones. El análogo trigonométrico de algunos sistemas de ecuaciones puede resolverse de una manera más fácil, pero el método tiene un carácter particular en cuanto a su aplicabilidad.

5.1.1 Algunos ejemplos de sistemas simétricos

El problema que planteamos es clásico:

Halla 3 números cuya suma y producto sean iguales.

Nos vamos a situar primeramente en el contexto de los *sistemas simétricos*. Para centrar ideas basta con proporcionar unos casos particulares.

Sistema 1 (Mortici [1]). Resolver, en el conjunto de los números reales positivos, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = xyz \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Solución. Puesto que $x, y, z > 0$ deducimos que existe algún $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tales que $\operatorname{tg} \alpha = x, \operatorname{tg} \beta = y, \operatorname{tg} \gamma = z$.

Entonces la primera ecuación del sistema se puede escribir de la forma:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

Ahora, mediante la fórmula (1) obtenemos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \iff \alpha + \beta + \gamma = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

No podemos olvidar que $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, por lo que en este caso $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Como consecuencia, existe un triángulo acutángulo cuyos ángulos miden respectivamente α, β, γ .

Naturalmente, para poder usar este resultado debemos empezar por calcular

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \cos \alpha; \quad \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} = \cos \beta; \quad \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} = \cos \gamma$$

En este caso, la segunda ecuación del sistema se puede escribir de la forma:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{3}{2}$$

Basta observar que la desigualdad (5) se da en un triángulo equilátero para deducir de lo anterior que

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3} \implies x = y = z = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Sistema 2 (VII Concurso Interprovincial de Brasov (Rumanía), 1998; problema propuesto por Mihail Bencze). Resolver, en el conjunto de los números reales positivos, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = xyz \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Solución. Procediendo de forma exactamente igual al problema anterior, haciendo la misma sustitución $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{tg} \beta = y$, $\operatorname{tg} \gamma = z$, pero efectuando esta vez los cálculos:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{sen} \alpha; \quad \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \operatorname{sen} \beta; \quad \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{sen} \gamma$$

llegamos a que la segunda ecuación del sistema tomará la forma:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Por otra parte, necesariamente la desigualdad (4) se da en un triángulo equilátero lo que nos permite deducir finalmente que

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3} \implies x = y = z = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Sistema 3 (Propuesto por el autor de este artículo). Resolver en \mathbb{R}^3 el sistema de ecuaciones

$$x(x - 2y) = y(y - 2z) = z(z - 2x) = 1$$

Solución. Obsérvese que se trata de un sistema simétrico, lo que nos permite construir las soluciones del mismo por permutaciones circulares a partir de una ya obtenida. Primero escribimos el sistema de forma explícita:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{2x} \\ z = \frac{y^2 - 1}{2y} \\ x = \frac{z^2 - 1}{2z} \end{cases}$$

que nos sugiere $x = \operatorname{ctg} \alpha$, con $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Es fácil deducir de lo anterior que $y = \operatorname{ctg} 2\alpha$, $z = \operatorname{ctg} 4\alpha$, $x = \operatorname{ctg} 8\alpha$, y así llegar a:

$$x = \operatorname{ctg} 8\alpha \iff \operatorname{ctg} 8\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \iff \alpha = \frac{k\pi}{7} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Entonces, puesto que $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, finalmente tenemos que

$$(x_k, y_k, z_k) \in \left\{ \left(\operatorname{ctg} \frac{k\pi}{7}, \operatorname{ctg} \frac{2k\pi}{7}, \operatorname{ctg} \frac{4k\pi}{7} \right) \right\}, \quad k \in \{1, 2, \dots, 6\},$$

y por permutaciones circulares ya podemos escribir el conjunto de todas las soluciones del sistema propuesto:

$$S = \left\{ (x_k, y_k, z_k), (y_k, z_k, x_k), (z_k, x_k, y_k) \mid k \in \{1, 2, \dots, 6\} \right\}$$

Nota 1: Aunque el sistema anterior se podría resolver por métodos numéricos, para ser más precisos, aquí nos preocupa como procedimiento de cálculo para obtener las soluciones exactas. *Nota 1:* La particularidad de sistema anterior reside en que:

- es un sistema de ecuaciones algebraicas con todos sus coeficientes enteros
- todas sus soluciones son valores de funciones trigonométricas de ángulos múltiplos racionales de π radianes.

5.1.2 Un sistema no simétrico

Sistema 4 (Szölösy [4]). Resolver en \mathbb{R}^3 el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = xyz \\ \frac{4\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{5\sqrt{y^2+1}}{y} = \frac{6\sqrt{z^2+1}}{z} \end{cases}$$

Solución. Obsérvese que si el problema tiene solución, la segunda ecuación se verifica si y solamente si los números x, y, z tienen el mismo signo.

Considerado el caso $x, y, z > 0$ se deduce que existirán $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tales que $\operatorname{tg} \alpha = x, \operatorname{tg} \beta = y, \operatorname{tg} \gamma = z$. En consecuencia, el sistema propuesto se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \pi \\ \frac{4}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{5}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{6}{\operatorname{sen} \gamma} \end{cases}$$

Tras manipulaciones algebraicas elementales, se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{5}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{6}{\operatorname{sen} \gamma} &\iff \frac{4}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{5}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{6}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \iff \\ &\iff \frac{4 \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{5 \cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha} = \frac{6}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \iff \\ &\iff \frac{4 \cos \beta + 5 \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha} = \frac{6}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \iff 4 \cos \beta + 5 \cos \alpha = 6 \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{4}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{5}{\operatorname{sen} \beta} &\iff 5 \operatorname{sen} \alpha = 4 \operatorname{sen} \beta \iff 25(1 - \cos^2 \alpha) = 16(1 - \cos^2 \beta) \\ &\iff 25 \cos^2 \alpha - 16 \cos^2 \beta = 9 \iff (5 \cos \alpha + 4 \cos \beta)(5 \cos \alpha - 4 \cos \beta) = 9 \end{aligned}$$

$$\iff 6(5 \cos \alpha - 4 \cos \beta) = 9 \iff 5 \cos \alpha - 4 \cos \beta = \frac{3}{2}$$

Bastará ahora con resolver el sistema trigonométrico:

$$\begin{cases} 5 \cos \alpha + 4 \cos \beta = 6 \\ 5 \cos \alpha - 4 \cos \beta = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \alpha = \frac{3}{4} \\ \cos \beta = \frac{9}{16} \end{cases}$$

La solución positiva viene dada por

$$x = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}, \quad y = \operatorname{tg} \beta = \frac{5\sqrt{7}}{9}, \quad z = \operatorname{tg} \gamma = 3\sqrt{7}.$$

De acuerdo con la observación previa concluimos que las soluciones del sistema serán:

$$(x, y, z) \in \left\{ \left(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{5\sqrt{7}}{9}, 3\sqrt{7} \right); \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}, -\frac{5\sqrt{7}}{9}, -3\sqrt{7} \right) \right\}$$

6 Un procedimiento para generar sistemas de ecuaciones algebraicas con todos sus coeficientes enteros y con soluciones valores de funciones trigonométricas

Ejemplo 1 (Método propuesto por el autor de este artículo). Sea $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{4}$. Partiendo de la fórmula sobradamente conocida:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (6)$$

y denotando

$$\operatorname{tg} \alpha \stackrel{\text{not}}{=} x; \quad ; \quad \operatorname{tg} 2\alpha \stackrel{\text{not}}{=} y; \quad \operatorname{tg} 4\alpha \stackrel{\text{not}}{=} z$$

(donde $\stackrel{\text{not}}{=}$ quiere decir igualdad por designación) obtenemos sucesivamente:

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \end{cases}$$

Añadiendo la ecuación $x = \frac{2z}{1-z^2}$ a las ecuaciones anteriores conseguimos un sistema simétrico de ecuaciones algebraicas con todos sus coeficientes enteros:

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$

Es fácil deducir de lo anterior que $x = tg\ 8\alpha$, y así llegar a:

$$x = tg\ 8\alpha \iff tg\ 8\alpha = tg\ \alpha \iff \alpha = \frac{k\pi}{7} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Como $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, finalmente obtenemos:

$$(x_k, y_k, z_k) \in \left\{ \left(tg\ \frac{k\pi}{7}, tg\ \frac{2k\pi}{7}, tg\ \frac{4k\pi}{7} \right) \right\}, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}.$$

Dado que el sistema es *simétrico*, por permutaciones circulares ya podemos escribir el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones en \mathbb{R}^3 :

$$S = \left\{ (x_k, y_k, z_k), (y_k, z_k, x_k), (z_k, x_k, y_k) \mid k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\} \right\}$$

Ejemplo 2 (Método propuesto por el autor de este artículo). Sea $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Al igual que en el ejemplo anterior, esta vez a partir de la fórmula

$$ctg\ 3\alpha = \frac{ctg^3\ \alpha - 3\ ctg\ \alpha}{3\ ctg^2\ \alpha - 1} \quad (7)$$

y denotando

$$ctg\ \alpha \stackrel{\text{not}}{=} x ; \quad ctg\ 3\alpha \stackrel{\text{not}}{=} y ; \quad ctg\ 9\alpha \stackrel{\text{not}}{=} z$$

(donde $\stackrel{\text{not}}{=}$ quiere decir igualdad por designación) obtenemos sucesivamente:

$$\begin{cases} y = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1} \\ z = \frac{y^3 - 3y}{3y^2 - 1} \end{cases}$$

Para establecer un sistema simétrico, a las ecuaciones anteriores les añadimos una tercera ecuación:

$$x = \frac{z^3 - 3z}{3z^2 - 1}.$$

Y con esto llegamos ya a un sistema de ecuaciones algebraicas con todos sus coeficientes enteros:

$$\begin{cases} y + x^3 = 3x(1 + xy) \\ z + y^3 = 3y(1 + yz) \\ x + z^3 = 3z(1 + zx) \end{cases}$$

De las expresiones obtenidas anteriormente se deduce que $x = \operatorname{ctg} 27\alpha$, y en consecuencia:

$$x = \operatorname{ctg} 27\alpha \iff \operatorname{ctg} 27\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \iff \alpha = \frac{k\pi}{26} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Dado que $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, las soluciones apropiadas son

$$(x_k, y_k, z_k) \in \left\{ \left(\operatorname{ctg} \frac{k\pi}{26}, \operatorname{ctg} \frac{3k\pi}{26}, \operatorname{ctg} \frac{9k\pi}{26} \right) \right\}, \quad k \in \{1, 2, \dots, 25\},$$

y por permutaciones circulares se encuentra el conjunto de todas las soluciones del sistema planteado:

$$S = \left\{ (x_k, y_k, z_k), (y_k, z_k, x_k), (z_k, x_k, y_k) \mid k \in \{1, 2, \dots, 25\} \right\}$$

Conclusiones

En este artículo hemos reflexionado acerca del uso de algunos métodos, digamos no estándar, que constituyen una posible herramienta para acometer el planteamiento y resolución de ciertos problemas de álgebra.

No son técnicas imprescindibles, pero es bueno saber analizar un problema desde puntos de vista diferentes, ya que afortunadamente hay lugar para la sorpresa. Para resolver algunos problemas concretos la intuición y los procedimientos heurísticos son quizá más importantes que el razonamiento deductivo. Además, el lector amante de técnicas inusuales, puede ver así otro punto de unión entre el álgebra y la trigonometría.

Sin embargo, parece que tales métodos o procedimientos de la Trigonometría, tal vez por su particularidad, no se estiman hoy en día, los textos de Bachillerato limitándose a reflejar únicamente sus aplicaciones prácticas, sin adentrarse en los razonamientos más complejos. Por el contrario, nuestro propósito ha sido proporcionar a los estudiantes con necesidades continuas de ampliación y a los profesores que imparten matemáticas en el Bachillerato una alternativa metodológica y algunos procedimientos para resolver ciertos problemas del álgebra a través de la trigonometría.

Confío en que los problemas seleccionados nos hayan permitido ofrecer soluciones interesantes, que contengan ideas que se repiten en otras situaciones semejantes. De acuerdo con George Pólya (1887 - 1985): *Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento.*

Bibliografía

- [1] Mortici, Cr. (1997): Problema E 23 683. *Gazeta matematică pentru Tineret (Gaceta Matemática para alumnos)*, 102 (2).
- [2] Muntean, A. (2011): Estrategias para generar ecuaciones polinomiales con raíces valores de funciones trigonométricas, *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, 88, 14-30.
- [3] Suprún V. P. (2008): *Matemática para estudiantes preuniversitarios. Problemas de alta dificultad. 300 problemas detalladamente resueltos*, Moscú.
- [4] Szölösy, Gh. (1982): Problema E 19 334. *Gazeta matematică pentru Tineret (Gaceta Matemática para alumnos)*, 87 (7).
- [5] Wegner, K. W. (1959): Equations with trigonometric values as roots, *The Amer. Math. Monthly*, 66, 52-53.

Sobre la construcción de configuraciones del Teorema de Napoleón extendido a polígonos de más de tres lados

Eugenio Roanes Macías

Dept. de Algebra de la Univ. Complutense de Madrid
roanes@mat.ucm.es

Abstract

The extension of Napoleon's theorem to n -gons for $n > 3$ is well known. The construction of the corresponding configurations is treated in this article. The validity of these constructions is proved using mechanical theorem proving methods when the n -gons are constructible. For non-constructible n -gons, the automatic proving process is replaced by an approach that uses a dynamic geometry system to check the validity. The latter approach requires to distinguish whether n is odd or not.

Introducción

Para centrarnos en el propósito de este artículo comencemos recordando que Gauss demostró la constructibilidad del polígono regular de 17 lados, pero parece ser que fue posteriormente Johannes Erchinger quien describió la construcción de la correspondiente configuración.

El teorema de Napoleón es quizás uno de los resultados mas atractivos de la geometría elemental, según se deduce de las muchas demostraciones del mismo, aportadas por numerosos matemáticos. A partir de él, A. Barlotti [5] y otros han caracterizado extensiones del mismo a polígonos de mas de tres lados. El presente artículo se ha enfocado a describir la construcción de las configuraciones del Teorema de Napoleón extendido a n -gonos para $n > 3$.

Para n -gonos constructibles probaremos la validez de dicha construcción (detallada para $n = 4$ y $n = 6$) aplicando el método algebraico-computacional

descrito en detalle en [13] y ejecutando los cálculos sobre un Sistema de Cómputo Algebraico (SCA).

Y para n -gonos no constructibles comprobaremos experimentalmente la validez de la configuración utilizando un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), distinguiendo el caso de ser n impar (detallado para $n = 7$) del de ser n par (detallado para $n = 18$).

1 Desarrollo histórico

El clásico resultado de geometría elemental denominado habitualmente *Teorema de Napoleón* afirma: *Si sobre cada lado de un triángulo ABC se construye exteriormente un triángulo equilátero de lado igual al de ese lado de ABC , entonces los centros de esos tres triángulos equiláteros son vértices de otro triángulo equilátero (Fig. 1). Y lo mismo ocurre si los tres triángulos equiláteros se solapan con ABC (Fig. 2).*

En el primer caso se denomina *triángulo de Napoleón exterior* y en el segundo caso *triángulo de Napoleón interior*.

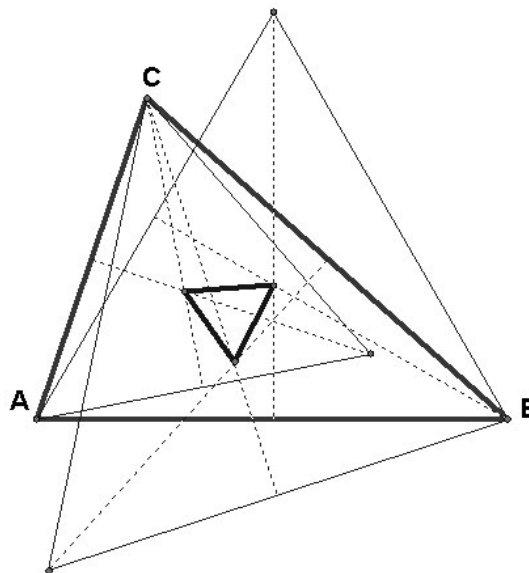
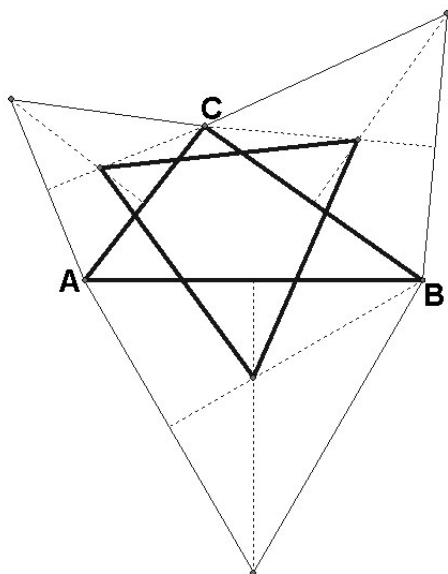


Fig. 1: *Triángulo de Napoleón exterior*

Fig. 2: *Triángulo de Napoleón interior*

Este teorema es atribuido a Napoleón, aficionado a la geometría, pero no se cree que él tuviera conocimientos geométricos suficientes para descubrir tal resultado. Mas bien parece que su descubridor fuera Mascheroni, el autor de la "Geometría del Compás" [1], gran admirador del Emperador, a quien parece dedicó este descubrimiento matemático, posiblemente en agradecimiento por su labor como mecenas de las instituciones científicas creadas durante su mandato.

Es posible que la belleza matemática del teorema y quizás también su atribución a Napoleón hayan motivado que numerosos matemáticos se hayan ocupado de idear demostraciones del teorema y de tratar de generalizarlo.

De hecho, existen numerosas y variadas demostraciones del teorema, entre las cuales, la más general [7], en cuanto a exigencia de condiciones de hipótesis, está basada precisamente en el concepto de arco capaz, tan utilizado en la Geometría del Compás.

En los dos siglos transcurridos desde el descubrimiento de este curioso resultado, han aparecido numerosas demostraciones (mas de quince), utilizando diversas técnicas de demostración (arco capaz, analíticas, trigonométricas, con complejos,...), que sólo tienen en común haber requerido una buena dosis de ingenio. A partir del teorema clásico anteriormente enunciado, se han descubierto nuevas propiedades de los triángulos de Napoleón exterior e interior, que han sido descritas en [13].

Varias generalizaciones o extensiones del teorema de Napoleón a polígonos de mas de tres lados has sido descubiertas desde comienzos del pasado siglo XX. Una primera generalización para paralelogramos, basada en la teoría de la equipolencia vectorial de A. Laisant [2], fue enunciada por V. Thébault's en 1937 y probada por Douglas [3] y Neumann [4].

La generalización a n -gonos fue descubierta en 1955 por A. Barlotti [5] y redescubierta en 1980 por L. Gerber [6].

Avances posteriores han sido realizados por Wetzel (1992) [8], D. DeTemple y M. Hudelson (2001) [11], y S. B. Gray (2003) [12].

Dichas generalizaciones o extensiones se prestan a ser redescubiertas experimentando con SGD's y a ser probadas (sin exigencia del ingenio que suelen requerir los métodos de geometría sintética.) haciendo uso de métodos algebraico-computacionales, como el descrito en [13].

2 Extensión a cuadriláteros

El teorema fue extendido a cuadriláteros por Douglas [3] y Neumann [4].

Enunciado: *Sea un cuadrilátero $ABCD$ sobre cada uno de cuyos lados se construye exteriormente un cuadrado de lado igual que ese lado del cuadrilátero $ABCD$. Si $ABCD$ tiene lados opuestos paralelos, es decir, si es paralelogramo, entonces los centros de esos cuatro cuadrados son vértices de otro cuadrado (Fig. 3). El resultado es también cierto si los cuatro cuadrados se construyen interiormente, es decir, si cada uno de ellos se solapa con $ABCD$.*

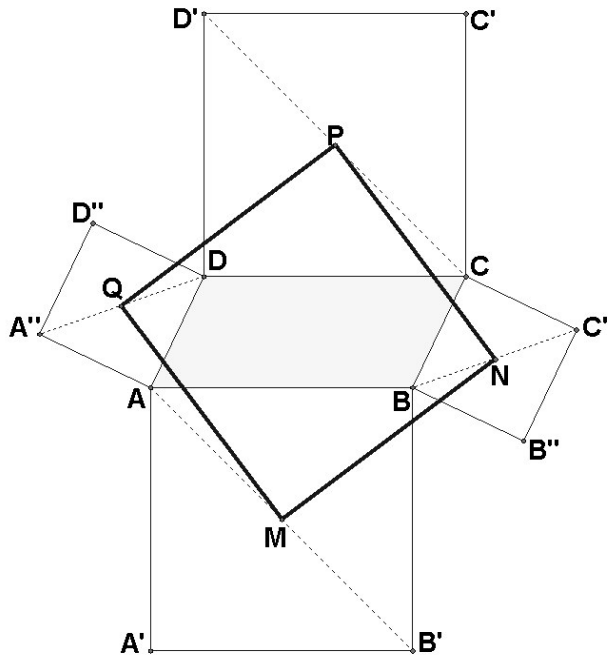


Fig. 3: *Extensión a cuadriláteros*

Vamos a aplicar el método descrito en [13] al enunciado anterior.

Coordenadas de los puntos considerados

Vértices del cuadrilátero (la elección de un vértice como origen de coordenadas y otro en el eje de abscisas no supone pérdida de generalidad):

$$A = [0, 0], \quad B = [1, 0], \quad C = [c1, c2], \quad D = [d1, d2]$$

Centros de los cuadrados construidos sobre los lados del cuadrilátero:

$$M = [m1, m2], \quad N = [n1, n2], \quad P = [p1, p2], \quad Q = [q1, q2]$$

Condiciones de hipótesis y sus correspondientes polinomios de hipótesis

Comencemos comentando el modo en que se van a determinar las condiciones de hipótesis. Los cuatro puntos M, N, P, Q quedan determinados por estar en las respectivas mediatrices de los lados del cuadrilátero $ABCD$ y por ser iguales los ángulos convexos orientados MAB, NBC, PCD y QDA . El hecho de considerar ángulos orientados asegura que los cuadrados construidos sobre los lados de $ABCD$ sean, o bien todos exteriores a $ABCD$, o bien todos solapados con él (no unos solapados y otros exteriores). Por otra parte, $ABCD$ es paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos dos a dos.

Denotaremos por H_1, H_2, H_3, \dots a las condiciones de hipótesis y por h_1, h_2, h_3, \dots a sus correspondientes polinomios de hipótesis.

Las dos condiciones siguientes, H_1 y H_2 , determinan el punto M como centro del cuadrado construido sobre el lado AB :

H_1) M está en la mediatriz del lado AB , esto es, $MB = MA$, de donde resulta: $h_1 = \overline{MB}^2 - \overline{MA}^2 = 1 - 2 \cdot m_1$.

H_2) $\text{dist}(M, \text{recta } AB) = AB/2$, lo que por ser rectángulo isósceles el triángulo MAB , implica $2 \cdot \overline{MA}^2 = \overline{AB}^2$ (teorema de Pitágoras), de donde resulta: $h_2 = 2 \cdot \overline{MA}^2 - \overline{AB}^2 = 2 \cdot m_1^2 + 2 \cdot m_2^2 - 1$.

Las dos condiciones siguientes, H_3 y H_4 , determinan el punto N como centro del cuadrado construido sobre el lado BC :

H_3) N está en la mediatriz del lado BC , esto es, $NB = NC$, luego: $h_3 = \overline{NB}^2 - \overline{NC}^2 = 1 - 2 \cdot n_1 - c_1^2 + 2 \cdot c_1 \cdot n_1 - c_2^2 + 2 \cdot c_2 \cdot n_2$.

H_4) La igualdad de ángulos convexos orientados $NBC = MAB$, esto es, $\tan(NBC) = \tan(MAB)$, implica: $h_4 = -m_2 \cdot c_1 \cdot n_1 + m_2 \cdot c_1 + m_2 \cdot n_1 - m_2 - m_2 \cdot c_2 \cdot n_2 - m_1 \cdot c_2 \cdot n_1 + m_1 \cdot c_2 + m_1 \cdot n_2 \cdot c_1 - m_1 \cdot n_2$.

Las dos condiciones siguientes, H_5 y H_6 , determinan el punto P como centro del cuadrado construido sobre el lado CD .

H_5) P está en la mediatriz de CD , luego: $h_5 = \overline{PD}^2 - \overline{PC}^2 = d_1^2 - 2 \cdot d_1 \cdot p_1 + d_2^2 - 2 \cdot d_2 \cdot p_2 - c_1^2 + 2 \cdot c_1 \cdot p_1 - c_2^2 + 2 \cdot c_2 \cdot p_2$.

H_6) La igualdad de ángulos convexos orientados $PCD = MAB$, esto es, $\tan(PCD) = \tan(MAB)$, implica: $h_6 = m_2 \cdot d_1 \cdot c_1 - m_2 \cdot d_1 \cdot p_1 - m_2 \cdot c_1^2 + m_2 \cdot c_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot d_2 - m_2 \cdot c_2^2 - m_2 \cdot d_2 \cdot p_2 + m_2 \cdot c_2 \cdot p_2 + m_1 \cdot d_2 \cdot c_1 - m_1 \cdot d_2 \cdot p_1 + m_1 \cdot c_2 \cdot p_1 - m_1 \cdot c_2 \cdot d_1 + m_1 \cdot p_2 \cdot d_1 - m_1 \cdot p_2 \cdot c_1$.

Las dos condiciones siguientes, H_7 y H_8 , determinan el punto P como

centro del cuadrado construido sobre el lado CD :

H_7) Q está en la mediatriz del lado DA , esto es, $QD = QA$, luego: $h_7 = \overline{QD}^2 - \overline{QA}^2 = d1^2 - 2 \cdot d1 \cdot q1 + d2^2 - 2 \cdot d2 \cdot q2$.

H_8) La igualdad de ángulos convexos orientados $QDA = MAB$, esto es, $\tan(QDA) = \tan(MAB)$, implica: $h_8 = -m2 \cdot d1^2 + m2 \cdot d1 \cdot q1 - m2 \cdot d2^2 + m2 \cdot d2 \cdot q2 + m1 \cdot d2 \cdot q1 - m1 \cdot d1 \cdot q2$.

Las dos condiciones siguientes, H_9 y H_{10} , aseguran el paralelismo de lados opuestos de $ABCD$:

H_9) AB y CD paralelas, luego: $h_9 = -d2 + c2$.

H_{10}) AD y BC paralelas, luego: $h_{10} = c2 \cdot d1 - d2 \cdot c1 + d2$.

La lista de polinomios de hipótesis, que denotaremos $listaH$, es pues:

$$listaH = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}]$$

Parámetros y variables

Parámetros (coordenadas libremente elegibles): $c1, c2$

Variables (coordenadas ligadas, condicionadas a los valores de los parámetros), en el orden elegido, denotando var a la sucesión de las mismas:

$$var = m1, m2, n1, n2, p1, p2, q1, q2, d1, d2$$

Por tanto, el anillo de polinomios de la configuración (definido en [13]) es:

$$\mathbf{A} = \mathbb{R}(c1, c2)[m1, m2, n1, n2, p1, p2, q1, q2, d1, d2]$$

Condiciones de tesis y sus correspondientes polinomios de tesis

Comentemos ahora el modo en que se van a determinar las condiciones de tesis. $MNPQ$ será cuadrado, si es paralelogramo equiángulo y equilátero, para lo que basta que tenga lados opuestos paralelos y dos lados contiguos perpendiculares e iguales. Denotaremos por T_1, T_2, T_3, T_4 a las condiciones de tesis y por t_1, t_2, t_3, t_4 a sus correspondientes polinomios de tesis:

T_1) MN y PQ paralelas, luego: $t_1 = q2 \cdot n1 - q2 \cdot m1 - p2 \cdot n1 + p2 \cdot m1 - q1 \cdot n2 + q1 \cdot m2 + p1 \cdot n2 - p1 \cdot m2$.

T_2) MQ y NP paralelas, luego: $t_2 = p2 \cdot q1 - p2 \cdot m1 - q1 \cdot n2 + m1 \cdot n2 - p1 \cdot q2 + p1 \cdot m2 + q2 \cdot n1 - m2 \cdot n1$.

T_3) MN y NP ortogonales, luego: $t_3 = p1 \cdot n1 - p1 \cdot m1 - n1^2 + n1 \cdot m1 + p2 \cdot n2 - p2 \cdot m2 - n2^2 + n2 \cdot m2$.

T_4) $\overline{MN} = \overline{NP}$, luego: $t_4 = \overline{MN}^2 - \overline{NP}^2 = -2 \cdot n1 \cdot m1 + m1^2 - 2 \cdot n2 \cdot m2 + m2^2 - p1^2 + 2 \cdot p1 \cdot n1 - p2^2 + 2 \cdot p2 \cdot n2$.

La lista de polinomios de hipótesis y tesis, que denotaremos $listaHT$, es pues:

$$listaHT = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, t_1, t_2, t_3, t_4]$$

Comparación de ambas Bases de Groebner

Denotaremos por $GB1$ a la Base de Groebner del ideal generado por $ListaH$ y por $GB2$ a la del ideal generado por $ListaHT$. Respecto del orden lexicográfico y el orden de variables dado por la sucesión var , resulta:

$$GB1 = [d2 - c2, -c1 + 1 + d1, 2 \cdot c1 - c1^2 - 1 + c2^2 - 4 \cdot q2 \cdot c2 + 4 \cdot q2^2, 2 \cdot c1 - c1^2 - 1 - c2^2 + (-2 + 2 \cdot c1) \cdot q1 + 2 \cdot q2 \cdot c2, -2 \cdot c2 \cdot c1 + 3 \cdot c2 + (-2 + 2 \cdot c1) \cdot p2 - 2 \cdot q2, 2 \cdot p1 - 2 \cdot c1 + 1, -c2 + q2 + n2, 1 - c1^2 + c2^2 + (-2 + 2 \cdot c1) \cdot n1 - 2 \cdot q2 \cdot c2, -c2 + (-2 + 2 \cdot c1) \cdot m2 + 2 \cdot q2, -1 + 2 \cdot m1]$$

Al calcular $GB2$ se obtiene el mismo resultado obtenido para $GB1$, lo que implica que el ideal generado por la lista de polinomios $listaHT$ sea igual al ideal generado por la lista de polinomios $listaH$.

Demostración por el método de Bases de Groebner iguales

Como consecuencia de la igualdad $GB1 = GB2$, cada una de las condiciones de tesis, $t_i = 0$, es consecuencia de las condiciones de hipótesis, $h_j = 0; j = 1, \dots, 10$ (como se indicó en la Sección 2 de [13]). Por tanto, el resultado indicado en el enunciado del comienzo de esta sección ha quedado probado por el método de las Bases de Groebner iguales.

Observemos que al ser h_2 polinomio de segundo grado, el punto M queda determinado, salvo una simetría respecto de la recta AB . En consecuencia, se han probado simultáneamente los dos resultados contenidos en el enunciado, es decir, tanto si los cuadrados construidos sobre los lados de $ABCD$ son todos exteriores a él, como si son los cuatro solapados con él, ya que el ángulo orientado MAB se ha transportado, con su misma orientación, sobre los otros tres lados de $ABCD$ (todo depende del sentido elegido para MAB).

Nota: El cálculo de las coordenadas de los centros de los cuatro cuadrados y de sus otros vértices (con un SCA) se trata en el Anexo (Sección 10).

3 Recíproco para cuadriláteros

Parece natural preguntarse si será cierto el recíproco del enunciado de la Sección 2. Para responder a esta cuestión aplicaremos el mismo método de Bases de Groebner iguales.

Enunciado: Sea un cuadrilátero $ABCD$ sobre cada uno de cuyos lados se construye exteriormente un cuadrado de lado igual que ese lado (Fig. 4). Si los centros de esos cuatro cuadrados son vértices de otro cuadrado, entonces $ABCD$ tiene lados opuestos paralelos, es decir, es paralelogramo. El resultado es también cierto si los cuatro cuadrados se construyen interiormente, es decir, si cada uno de ellos se solapa con $ABCD$.

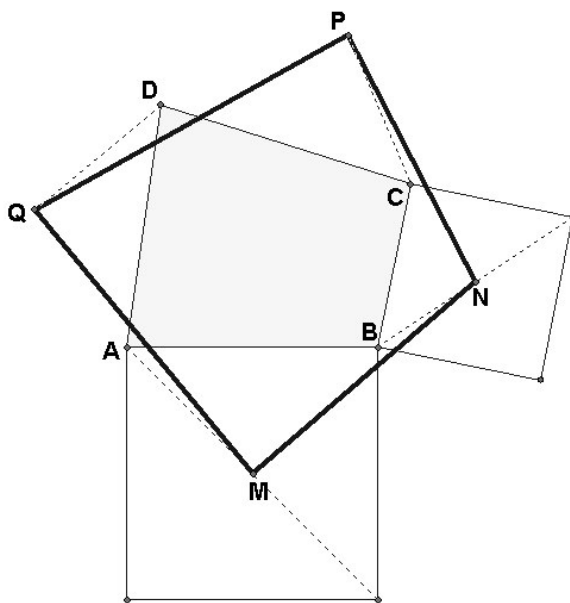


Fig. 4: Recíproco para cuadriláteros

Coordenadas de los puntos considerados

Son los mismos que en la Sección 2.

Condiciones de hipótesis y sus correspondientes polinomios de hipótesis

Las relaciones entre los cuatro centros M, N, P, Q y los vértices del cuadrilátero $ABCD$ siguen siendo las mismas que en la Sección 3, por lo que las ocho primeras condiciones de hipótesis serán las allí consideradas (con su misma notación).

Por otra parte, las cuatro condiciones de tesis consideradas en la Sección 2, pasan aquí a ser condiciones de hipótesis, que denotaremos ahora por $H'_9, H'_{10}, H'_{11}, H'_{12}$ y por $h'_9, h'_{10}, h'_{11}, h'_{12}$ a sus correspondientes polinomios de hipótesis, es decir:

- H'_9) MN y PQ paralelas
- H'_{10}) MNQ y NP paralelas
- H'_{11}) MN y NP ortogonales
- H'_{12}) $MN = NP$

La lista de polinomios de hipótesis, que denotaremos $listaH$, es pues:

$$listaH = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h'_9, h'_{10}, h'_{11}, h'_{12}]$$

Parámetros y variables

Los vértices A, B, C se puede elegir libremente, pero no el D , que está ligado por las condiciones mencionadas.

Parámetros (coordenadas libremente elegibles): $c1, c2$

Variables (coordenadas ligadas, condicionadas a los valores de los parámetros), en el orden elegido, denotando var a la sucesión de las mismas:

$$var = m1, m2, n1, n2, p1, p2, q1, q2, d1, d2$$

Por tanto, el anillo de polinomios de la configuración es:

$$\mathbf{A} = \mathbb{R}(c1, c2)[m1, m2, n1, n2, p1, p2, q1, q2, d1, d2]$$

Condiciones de tesis y sus correspondientes polinomios de tesis

Las dos condiciones de hipótesis h_9, h_{10} consideradas en la Sección 3, pasan aquí a ser condiciones de tesis, que denotaremos ahora por T'_1, T'_2 y por t'_1, t'_2 a sus correspondientes polinomios de tesis, es decir:

T'_1) AB y CD paralelas

T'_2) AD y BC paralelas

La lista de polinomios de hipótesis y tesis, que denotaremos $listaHT$, es pues:

$$listaHT = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h'_9, h'_{10}, h'_{11}, h'_{12}, t'_1, t'_2]$$

Comparación de ambas Bases de Groebner

Denotemos por $GB1$ a la Base de Groebner del ideal generado por $listaH$ y por $GB2$ a la del ideal generado por $listaHT$. Respecto del orden lexicográfico y el orden de variables dado por la sucesión var , resulta:

$$GB1 = [-c2 + d2, 1 - c1 + d1, c2^2 + 2 \cdot c1 - c1^2 - 1 - 4 \cdot q2 \cdot c2 + 4 \cdot q2^2, -c2^2 + 2 \cdot c1 - c1^2 - 1 + (-2 + 2 \cdot c1) \cdot q1 + 2 \cdot q2 \cdot c2, 3 \cdot c2 - 2 \cdot c2 \cdot c1 + (-2 + 2 \cdot c1) \cdot p2 - 2 \cdot q2, -2 \cdot c1 + 1 + 2 \cdot p1, -c2 + q2 + n2, 1 - c1^2 + c2^2 + (-2 + 2 \cdot c1) \cdot n1 - 2 \cdot q2 \cdot c2, -c2 + (-2 + 2 \cdot c1) \cdot m2 + 2 \cdot q2, -1 + 2 \cdot m1]$$

Al calcular $GB2$ se obtiene el mismo resultado obtenido para $GB1$, lo que implica la igualdad de los ideales generados por $listaHT$ y por $listaH$.

Demostración por el método de Bases de Groebner iguales

Como consecuencia de la igualdad $GB1 = GB2$, cada una de las condiciones de tesis es consecuencia de las condiciones de hipótesis. Por tanto, el resultado indicado en el enunciado del comienzo de esta sección ha quedado probado por este método.

Lo mismo que ocurría en el caso del teorema directo de la Sección 2, el punto M queda determinado, salvo una simetría respecto de la recta AB . En consecuencia, se han probado simultáneamente los dos resultados contenidos en el enunciado, es decir, tanto si los cuadrados construidos sobre los lados de $ABCD$ son todos exteriores a él, como si son los cuatro solapados con él.

El enunciado de la Sección 2 junto con el de esta Sección 3 se condensan en el siguiente:

Teorema: *Sea un cuadrilátero $ABCD$ sobre cada uno de cuyos lados se construye exteriormente un cuadrado de lado igual que ese lado y denotemos M, N, P, Q a sus respectivos centros. Entonces el cuadrilátero $MNPQ$ es un cuadrado si, y solo si, $ABCD$ es paralelogramo. El resultado es también cierto si los cuatro cuadrados se construyen interiormente, es decir, si cada uno de ellos se solapa con $ABCD$.*

4 Extensión a hexágono con centro de simetría

Explorando posibles extensiones para hexágonos del Teorema de Napoleón, hemos encontrado el siguiente resultado.

Enunciado: *Sea $ABCDEF$ un hexágono con centro de simetría, O , tal que $ABCO$ es paralelogramo. Sobre cada uno de sus lados se construye exteriormente un triángulo equilátero de lado igual a ese lado del hexágono. Entonces los terceros vértices M, N, P, Q, R, S (Fig. 5) de esos seis triángulos son vértices de otro hexágono regular. El resultado es también cierto si los seis triángulos se construyen interiormente, es decir, si cada uno de ellos se solapa con $ABCDEF$.*

Vamos a aplicar el método descrito en [13] al enunciado anterior.

Coordenadas de los puntos considerados

Vértices y centro del hexágono $ABCDEF$ (la elección del vértice A como origen y del del vértice B en el eje de abscisas no supone pérdida de genera-

lidad): $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [c1, c2]$, $D = [d1, d2]$, $E = [e1, e2]$, $F = [f1, f2]$, $O = [o1, o2]$

Terceros vértices de los triángulos construidos sobre sus lados: $M = [m1, m2]$, $N = [n1, n2]$, $P = [p1, p2]$, $Q = [q1, q2]$, $R = [r1, r2]$, $S = [s1, s2]$

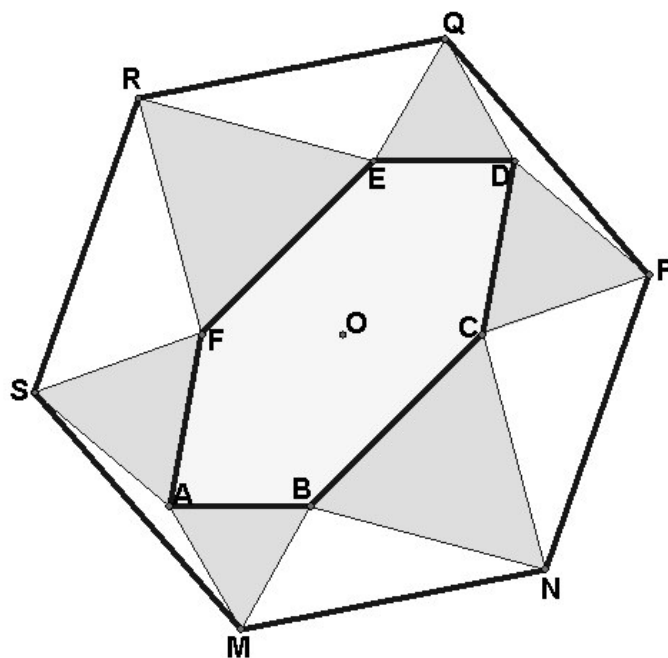


Fig. 5: Extensión a hexágono con centro de simetría

Condiciones de hipótesis y sus correspondientes polinomios de hipótesis

Como en las secciones anteriores, denotaremos por H_1, H_2, H_3, \dots a las condiciones de hipótesis y por h_1, h_2, h_3, \dots a los polinomios de hipótesis.

Los vértices A, B, C se eligen libremente y el centro de simetría, O , se elige de modo que $ABCO$ sea paralelogramo. De este modo, las dos condiciones siguientes determinan O :

$$H_1) OC \text{ y } AB \text{ paralelas} \longrightarrow h_1 = -c2 + o2$$

$$H_2) BC \text{ y } AO \text{ paralelas} \longrightarrow h_2 = o2 \cdot c1 - o2 - o1 \cdot c2$$

Al ser D simétrico de A respecto de O , el cuadrilátero $OBCD$ es paralelogramo, luego D queda determinado por las dos condiciones siguientes:

$$H_3) OD \text{ y } BC \text{ paralelas} \longrightarrow h_3 = c2 \cdot d1 - o1 \cdot c2 - c1 \cdot d2 + o2 \cdot c1 + d2 - o2$$

$$H_4) CD \text{ y } OB \text{ paralelas} \longrightarrow h_4 = -o2 \cdot d1 + o2 \cdot c1 - d2 + c2 + o1 \cdot d2 - o1 \cdot c2$$

Al ser E es simétrico de B respecto de O , el cuadrilátero $OCDE$ es paralelogramo, luego E queda determinado por las dos condiciones siguientes:

$$H_5) OE \text{ y } CD \text{ paralelas} \longrightarrow h_5 = d2 \cdot e1 - o1 \cdot d2 - c2 \cdot e1 + o1 \cdot c2 - d1 \cdot e2 + o2 \cdot d1 + c1 \cdot e2 - o2 \cdot c1$$

$$H_6) DE \text{ y } OC \text{ paralelas} \longrightarrow h_6 = c2 \cdot e1 - c2 \cdot d1 - o2 \cdot e1 + o2 \cdot d1 - c1 \cdot e2 + c1 \cdot d2 + o1 \cdot e2 - o1 \cdot d2$$

Al ser F es simétrico de C respecto de O , el cuadrilátero $ODEF$ es paralelogramo, luego F queda determinado por las dos condiciones siguientes:

$$H_7) OF \text{ y } DE \text{ paralelas} \longrightarrow h_7 = d2 \cdot e2 \cdot f1 - o1 \cdot e2 - d2 \cdot f1 + o1 \cdot d2 - e1 \cdot f2 + o2 \cdot e1 + d1 \cdot f2 - o2 \cdot d1$$

$$H_8) EF \text{ y } OD \text{ paralelas} \longrightarrow h_8 = d2 \cdot f1 - d2 \cdot e1 - o2 \cdot f1 + o2 \cdot e1 - d1 \cdot f2 + d1 \cdot e2 + o1 \cdot f2 - o1 \cdot e2$$

Por ser equilátero ABM , las dos condiciones siguientes determinan M :

$$H_9) MA = MB \longrightarrow h_9 = -1 + 2 \cdot m1$$

$$H_{10}) MA = AB \longrightarrow h_{10} = m1^2 + m2^2 - 1$$

Por ser equilátero BCN , las dos condiciones siguientes determinan N :

$$H_{11}) NB = NC \longrightarrow h_{11} = 1 - 2 \cdot n1 - c1^2 + 2 \cdot c1 \cdot n1 - c2^2 + 2 \cdot c2 \cdot n2$$

$$H_{12}) NBC = MAB \text{ (ángulos convexos orientados), expresada mediante } \tan(NBC) = \tan(MAB) \longrightarrow h_{12} = -m2 \cdot c1 \cdot n1 + m2 \cdot c1 + m2 \cdot n1 - m2 - m2 \cdot c2 \cdot n2 - m1 \cdot c2 \cdot n1 + m1 \cdot c2 + m1 \cdot n2 \cdot c1 - m1 \cdot n2$$

Por ser equilátero CDP , las dos condiciones siguientes determinan P :

$$H_{13}) PC = PD \longrightarrow h_{13} = c1^2 - 2 \cdot c1 \cdot p1 + c2^2 - 2 \cdot c2 \cdot p2 - d1^2 + 2 \cdot d1 \cdot p1 - d2^2 + 2 \cdot d2 \cdot p2$$

$$H_{14}) PCD = MAB \text{ (orientados), esto es, } \tan(NBC) = \tan(MAB) \longrightarrow h_{14} = m2 \cdot d1 \cdot c1 - m2 \cdot d1 \cdot p1 - m2 \cdot c1^2 + m2 \cdot c1 \cdot p1 + m2 \cdot c2 \cdot d2 - m2 \cdot c2^2 - m2 \cdot d2 \cdot p2 + m2 \cdot c2 \cdot p2 + m1 \cdot c1 \cdot d2 - m1 \cdot d2 \cdot p1 + m1 \cdot c2 \cdot p1 - m1 \cdot c2 \cdot d1 + m1 \cdot p2 \cdot d1 - m1 \cdot p2 \cdot c1$$

Por ser equilátero DEQ , las dos condiciones siguientes determinan Q :

$$H_{15}) QD = QE \longrightarrow h_{15} = d1^2 - 2 \cdot d1 \cdot q1 + d2^2 - 2 \cdot d2 \cdot q2 - e1^2 + 2 \cdot e1 \cdot q1 - e2^2 + 2 \cdot e2 \cdot q2$$

$$H_{16}) QDE = MAB \text{ (orientados), esto es, } \tan(QDE) = \tan(MAB) \longrightarrow h_{16} = m2 \cdot e1 \cdot d1 - m2 \cdot e1 \cdot q1 - m2 \cdot d1^2 + m2 \cdot d1 \cdot q1 + m2 \cdot d2 \cdot e2 - m2 \cdot d2^2 - m2 \cdot e2 \cdot q2 + m2 \cdot d2 \cdot q2 + m1 \cdot d1 \cdot e2 - m1 \cdot e2 \cdot q1 + m1 \cdot d2 \cdot q1 - m1 \cdot d2 \cdot e1 + m1 \cdot q2 \cdot e1 - m1 \cdot q2 \cdot d1$$

Por ser equilátero EFR , las dos condiciones siguientes determinan R :

$$H_{17}) RE = RF \longrightarrow h_{17} = e1^2 - 2 \cdot e1 \cdot r1 + e2^2 - 2 \cdot e2 \cdot r2 - f1^2 + 2 \cdot f1 \cdot r1 - f2^2 + 2 \cdot f2 \cdot r2$$

$$H_{18}) REF = MAB \text{ (orientados), esto es, } \tan(REF) = \tan(MAB) \longrightarrow h_{18} = m2 \cdot f1 \cdot e1 - m2 \cdot f1 \cdot r1 - m2 \cdot e1^2 + m2 \cdot e1 \cdot r1 + m2 \cdot e2 \cdot f2 - m2 \cdot e2^2 - m2 \cdot f2 \cdot r2 + m2 \cdot e2 \cdot r2 + m1 \cdot e1 \cdot f2 - m1 \cdot f2 \cdot r1 + m1 \cdot e2 \cdot r1 - m1 \cdot e2 \cdot f1 + m1 \cdot r2 \cdot f1 - m1 \cdot r2 \cdot e1$$

Por ser equilátero FAS , las dos condiciones siguientes determinan S :

$$H_{19}) SF = SA \longrightarrow h_{19} = f1^2 - 2 \cdot f1 \cdot s1 + f2^2 - 2 \cdot f2 \cdot s2$$

$$H_{20}) SFA = MAB \text{ (orientados), esto es, } \tan(SFA) = \tan(MAB) \longrightarrow h_{20} = -m2 \cdot f1^2 + m2 \cdot f1 \cdot s1 - m2 \cdot f2^2 + m2 \cdot f2 \cdot s2 + m1 \cdot f2 \cdot s1 - m1 \cdot f1 \cdot s2e1$$

Lista de polinomios de hipótesis: $listaH = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{16}, h_{17}, h_{18}, h_{19}, h_{20}]$

Parámetros y variables

Parámetros (coordenadas libremente elegibles): $c1, c2$

Variables (coordenadas ligadas, condicionadas a los valores de los parámetros), en el orden elegido, denotando var a la sucesión de las mismas:

$$var = o1, o2, d1, d2, e1, e2, f1, f2, m1, m2, n1, n2, p1, p2, q1, q2, r1, r2, s1, s2$$

Por tanto, el anillo de polinomios de la configuración es: $\mathbf{A} = \mathbb{R}(c1, c2)[o1, o2, d1, d2, e1, e2, f1, f2, m1, m2, n1, n2, p1, p2, q1, q2, r1, r2, s1, s2]$

Condiciones y polinomios de tesis

Para probar que el hexágono $MNPQRS$ es regular, basta verificar que es equilátero y que O equidista de sus vértices.

Como venimos haciendo, denotaremos por T_1, T_2, \dots a las condiciones de tesis y por t_1, t_2, \dots a sus correspondientes polinomios de tesis.

$$T_1) NP = MN \longrightarrow t_1 = p1^2 - 2 \cdot p1 \cdot n1 + p2^2 - 2 \cdot p2 \cdot n2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - m1^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2 - m2^2$$

$$T_2) PQ = MN \longrightarrow t_2 = q1^2 - 2 \cdot q1 \cdot p1 + p1^2 + q2^2 - 2 \cdot q2 \cdot p2 + p2^2 - n1^2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - m1^2 - n2^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2 - m2^2$$

$$T_3) QR = MN \longrightarrow t_3 = r1^2 - 2 \cdot r1 \cdot q1 + q1^2 + r2^2 - 2 \cdot r2 \cdot q2 + q2^2 - n1^2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - m1^2 - n2^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2 - m2^2$$

$$T_4) RS = MN \longrightarrow t_4 = s1^2 - 2 \cdot s1 \cdot r1 + r1^2 + s2^2 - 2 \cdot s2 \cdot r2 + r2^2 - n1^2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - m1^2 - n2^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2 - m2^2$$

$$T_5) SA = MN \longrightarrow t_5 = -2 \cdot m1 \cdot s1 + s1^2 - 2 \cdot m2 \cdot s2 + s2^2 - n1^2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - n2^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2$$

$$T_6) OM = MN \longrightarrow t_6 = -2 \cdot m1 \cdot o1 + o1^2 - 2 \cdot m2 \cdot o2 + o2^2 - n1^2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - n2^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2$$

$$T_7) ON = MN \longrightarrow t_7 = -2 \cdot n1 \cdot o1 + o1^2 - 2 \cdot n2 \cdot o2 + o2^2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - m1^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2 - m2^2$$

$$T_8) OP = MN \longrightarrow t_8 = p1^2 - 2 \cdot p1 \cdot o1 + o1^2 + p2^2 - 2 \cdot p2 \cdot o2 + o2^2 - n1^2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - m1^2 - n2^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2 - m2^2$$

$$T_9) OQ = MN \longrightarrow t_9 = q1^2 - 2 \cdot q1 \cdot o1 + o1^2 + q2^2 - 2 \cdot q2 \cdot o2 + o2^2 - n1^2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - m1^2 - n2^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2 - m2^2$$

$$T_{10}) OR = MN \longrightarrow t_{10} = r1^2 - 2 \cdot r1 \cdot o1 + o1^2 + r2^2 - 2 \cdot r2 \cdot o2 + o2^2 - n1^2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - m1^2 - n2^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2 - m2^2$$

$$T_{11}) OS = MN \longrightarrow t_{11} = s1^2 - 2 \cdot s1 \cdot o1 + o1^2 + s2^2 - 2 \cdot s2 \cdot o2 + o2^2 - n1^2 + 2 \cdot n1 \cdot m1 - m1^2 - n2^2 + 2 \cdot n2 \cdot m2 - m2^2$$

Lista de polinomios de hipótesis y tesis:

$$listaHT = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{16}, h_{17}, h_{18}, h_{19}, h_{20}, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}]$$

Comparación de ambas Bases de Groebner

Denotemos por $GB1$ a la Base de Groebner del ideal generado por $ListaH$ y por $GB2$ a la del ideal generado por $ListaHT$. Respecto del orden lexicográfico y el orden de variables dado por la sucesión var , resulta:

$$GB1 = [c2^2 - 12 - 3 \cdot c1^2 + 12 \cdot c1 - 4 \cdot s2 \cdot c2 + 4 \cdot s2^2, -c1^2 + 4 \cdot c1 - c2^2 - 4 + (2 \cdot c1 - 4) \cdot s1 + 2 \cdot s2 \cdot c2, -2 \cdot c2 \cdot c1 + 5 \cdot c2 + (2 \cdot c1 - 4) \cdot r2 + (2 - 2 \cdot c1) \cdot s2, -3 \cdot c1^2 + 11 \cdot c1 - 10 - c2^2 + (2 \cdot c1 - 4) \cdot r1 + 2 \cdot s2 \cdot c2, -4 \cdot c2 \cdot c1 + 9 \cdot c2 + (2 \cdot c1 - 4) \cdot q2 - 2 \cdot s2, 5 - 4 \cdot c1 + 2 \cdot q1, -2 \cdot c2 + s2 + p2, -3 \cdot c1^2 - 4 + 8 \cdot c1 + c2^2 + (2 \cdot c1 - 4) \cdot p1 - 2 \cdot s2 \cdot c2, -2 \cdot c2 \cdot c1 + 3 \cdot c2 + (2 \cdot c1 - 4) \cdot n2 + (-2 + 2 \cdot c1) \cdot s2, -c1^2 + c1 + 2 + c2^2 + (2 \cdot c1 - 4) \cdot n1 - 2 \cdot s2 \cdot c2, -c2 + (2 \cdot c1 - 4) \cdot m2 + 2 \cdot s2, -1 + 2 \cdot m1, f2 - c2, -c1 + 2 + f1, -2 \cdot c2 + e2, 3 + e1 - 2 \cdot c1, -2 \cdot c2 + d2, -2 \cdot c1 + 2 + d1, -c2 + o2, -c1 + 1 + o1]$$

Al calcular $GB2$ se obtiene el mismo resultado obtenido para $GB1$, lo que implica que el ideal generado por la lista de polinomios $listaHT$ sea igual al ideal generado por la lista de polinomios $listaH$.

Demostración por el método de Bases de Groebner iguales

Como consecuencia de la igualdad $GB1 = GB2$, cada una de las condiciones de tesis es consecuencia de las condiciones de hipótesis. Por tanto, el re-

sultado indicado en el enunciado del comienzo de esta sección ha quedado probado por este método.

Lo mismo que ocurría en el caso del teorema de la Sección 3, el punto M queda determinado, salvo una simetría respecto de la recta AB . En consecuencia, se han probado simultáneamente los dos resultados contenidos en el enunciado, es decir, tanto si los triángulos construidos sobre los lados de $ABCDEF$ son todos exteriores a él, como si son los seis solapados con él.

Las coordenadas de los vértices de $ABCDEF$ y de los terceros vértices de los seis triángulos se pueden obtener como se hace para cuadriláteros en el Anexo (Sección 10), calculando sobre un SCA .

5 Extensión a hexágono afinmente regular

El teorema de Napoleon puede extenderse a un hexágono afinmente regular, esto es, imagen de un hexágono regular en una transformación afín [5]. Vamos a tratar de probarlo aplicando el método descrito en [13].

Enunciado (teorema de Napoleon-Barlotti, para $n=6$): *Sea $ABCDEF$ un hexágono sobre cada uno de cuyos lados se ha construido exteriormente un hexágono regular de lado igual a ese lado del hexágono. Si $ABCDEF$ es afinmente regular, es decir, si es imagen de un hexágono regular en una transformación afín, entonces los centros de esos seis hexágonos construidos sobre sus lados son vértices de otro hexágono regular (Fig. 6). El resultado es también cierto si los seis hexágonos se construyen interiormente, es decir, si cada uno de ellos se solapa con $ABCDEF$.*

Coordenadas relativas al hexágono regular inicial

Sean $A'B'C'D'E'F'$ un hexágono regular y τ una transformación afín, tales que $\tau(A'B'C'D'E'F') = ABCDEF$. Comencemos eligiendo coordenadas de los vértices de $A'B'C'D'E'F'$ y de su centro O' : $A' = [0, 0]$, $B' = [1, 0]$, $C' = [c'1, c'2]$, $D' = [d'1, d'2]$, $E' = [e'1, e'2]$, $F' = [f'1, f'2]$, $O' = [o'1, o'2]$.

Condiciones generadoras del hexágono regular $A'B'C'D'E'F'$

Las diez siguientes condiciones de hipótesis determinan la regularidad del hexágono $A'B'C'D'E'F'$, generándolo a partir de los dos vértices A' y B' . Están basadas en su descomposición usual en seis triángulos equiláteros, cada uno de los cuales tiene un lado coincidente con un lado del hexágono

$A'B'C'D'E'F'$, siendo su centro O' el tercer vértice de dichos triángulos (por brevedad, se omiten los correspondientes polinomios de tesis, h_1, h_2, \dots):

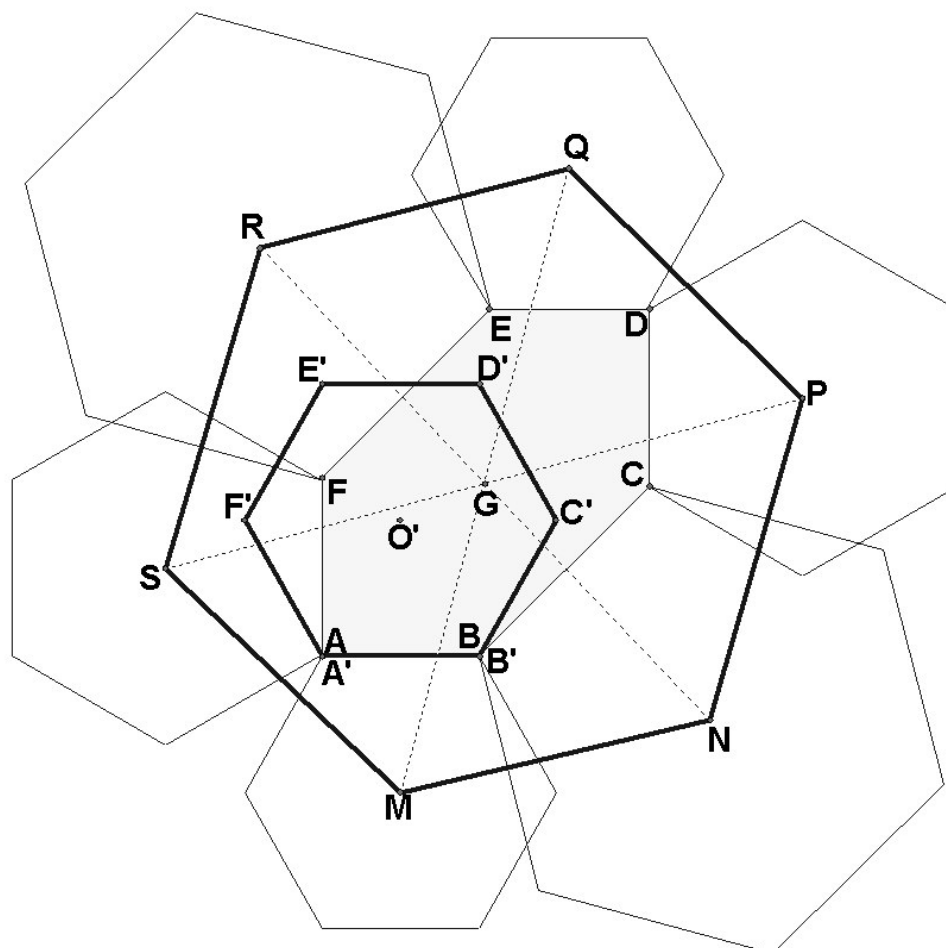


Fig. 6: *Extensión a hexágono afinmente regular*

$$H_1) \overline{O'A'} = \overline{O'B'}$$

$$H_2) \overline{O'A'} = \overline{A'B'}$$

$$H_3) O'C' \text{ y } A'B' \text{ paralelas}$$

$$H_4) B'C' \text{ y } A'O' \text{ paralelas}$$

$$H_5) O'D' \text{ y } B'C' \text{ paralelas}$$

- $H_6)$ $C'D'$ y $O'B'$ paralelas
- $H_7)$ $O'E'$ y $C'D'$ paralelas
- $H_8)$ $D'E'$ y $O'C'$ paralelas
- $H_9)$ $O'F'$ y $D'E'$ paralelas
- $H_{10})$ $E'F'$ y $O'D'$ paralelas

Generación del hexágono $ABCDEF = \tau(A'B'C'D'E'F')$

En principio, las ecuaciones de la transformación afín τ son de la forma $\{x' = \alpha x + \beta y + \epsilon, y' = \gamma x + \delta y + \phi\}$. Ahora bien, puesto que lo interesante es la forma de $ABCDEF$, no importando su posición en el plano, no se pierde generalidad considerando:

- i) el punto A' invariante (traslación identidad), lo que implica $\epsilon = 0 = \phi$
- ii) el punto B' invariante (rotación y cambio de escala apropiado), lo que implica $\alpha = 1$ y $\gamma = 0$.

De este modo, las ecuaciones de τ quedan simplificadas en la forma $\{x' = x + \beta y, y' = \delta y\}$. En consecuencia, las coordenadas de los vertices de $ABCDEF$ resultan ser los siguientes:

$$A = \tau(A') = [0, 0], B = \tau(B') = [1, 0], C = \tau(C') = [c'1 + \beta \cdot c'2, \delta \cdot c'2], \\ D = [d'1 + \beta \cdot d'2, \delta \cdot d'2], E = [e'1 + \beta \cdot e'2, \delta \cdot e'2], F = [f'1 + \beta \cdot f'2, \delta \cdot f'2]$$

Hexágonos regulares construidos sobre los lados de $ABCDEF$

Sean M, N, P, Q, R, S centros de los hexágonos regulares exteriores (Fig. 6), esto es, no solapados con $ABCDEF$, construidos sobre sus respectivos lados AB, BC, CD, DE, EF, FA . Sus coordenadas, $M = [m1, m2], N = [n1, n2], P = [p1, p2], Q = [q1, q2], R = [r1, r2], S = [s1, s2]$, quedan determinadas por las doce siguientes condiciones de hipótesis:

- $H_{11})$ M está en la mediatriz de AB
- $H_{12})$ $\overline{MA} = \overline{AB}$
- $H_{13})$ N está en la mediatriz de BC
- $H_{14})$ $NBC = MAB$ (orientados) expresado por $\tan(NBC) = \tan(MAB)$
- $H_{15})$ $\overline{PC} = \overline{PD}$
- $H_{16})$ $PCD = MAB$ (orientados) expresado por $\tan(PCD) = \tan(MAB)$
- $H_{17})$ Q está en la mediatriz de DE
- $H_{18})$ $QDE = MAB$ (orientados) expresado por $\tan(QDE) = \tan(MAB)$
- $H_{19})$ R está en la mediatriz de EF
- $H_{20})$ $REF = MAB$ (orientados) expresado por $\tan(REF) = \tan(MAB)$

H_{21}) S está en la mediatriz de FA

H_{22}) $SFA = MAB$ (orientados) expresado por $\tan(SFA) = \tan(MAB)$

Finalmente, vamos a considerar el punto $G = [g1, g2]$ de intersección de las diagonales MQ y NR del hexágono $MNPQRS$, el cual va a facilitar el modo de verificar la regularidad de este hexágono. Sus coordenadas quedan determinadas por las dos últimas condiciones de hipótesis:

H_{23}) M, G, Q son colineales

H_{24}) N, G, R son colineales

Lista de polinomios de hipótesis

$listaH = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{16}, h_{17}, h_{18}, h_{19}, h_{20}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}]$

Parámetros y variables

Parámetros (libremente elegibles): β, δ

Sucesión de variables: $var = o'1, o'2, c'1, c'2, d'1, d'2, e'1, e'2, f'1, f'2, m1, m2, n1, n2, p1, p2, q1, q2, r1, r2, s1, s2, g1, g2$

Condiciones de tesis

Las siguientes once condiciones permiten verificar que el hexágono $MNPQRS$ sea equilátero y con vértices equidistantes de G , y, por tanto, regular. (Por brevedad se omiten los correspondientes polinomios de tesis, t_1, t_2, \dots):

$$T_1) \overline{NP} = \overline{MN}$$

$$T_2) \overline{PQ} = \overline{MN}$$

$$T_3) \overline{QR} = \overline{MN}$$

$$T_4) \overline{RS} = \overline{MN}$$

$$T_5) \overline{SM} = \overline{MN}$$

$$T_6) \overline{GM} = \overline{MN}$$

$$T_7) \overline{GN} = \overline{MN}$$

$$T_8) \overline{GP} = \overline{MN}$$

$$T_9) \overline{GQ} = \overline{MN}$$

$$T_{10}) \overline{GR} = \overline{MN}$$

$$T_{11}) \overline{GS} = \overline{MN}$$

Lista de polinomios de hipótesis y tesis

$listaHT = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{16}, h_{17}, h_{18}, h_{19}, h_{20}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}]$

Demostración por el método de Bases de Grebner iguales

Denotemos por $GB1$ a la Base de Groebner del ideal generado por $ListaH$ y por $GB2$ a la del ideal generado por $ListaHT$. Respecto del orden lexicográfico y el orden de variables dado por de la sucesión var , resulta:

$$GB1 = [-3 \cdot \delta^2 + 4 \cdot g^2, -\delta - 2 \cdot g^2 \cdot \beta + 2 \cdot g_1 \cdot \delta, -3 \cdot \delta - 9 \cdot \delta \cdot \beta^2 + 3 \cdot \delta^3 + 12 \cdot g^2 \cdot \beta - 16 \cdot s^2 \cdot g^2 \cdot \delta + 16 \cdot s^2 \cdot \delta, 3 \cdot \delta \cdot \beta^2 - \delta - 3 \cdot \delta^3 + (-4 \cdot \delta + 12 \cdot \delta \cdot \beta^2) \cdot s_1 + 12 \cdot \delta^2 \cdot s^2 \cdot \beta + (-6 \cdot \beta^3 - 6 \cdot \beta \cdot \delta^2 + 2 \cdot \beta) \cdot g^2 + 8 \cdot s^2 \cdot g^2 \cdot \delta, 3 \cdot \beta \cdot \delta^2 + (-2 \cdot \delta + 6 \cdot \delta \cdot \beta^2) \cdot r_2 + (-6 \cdot \delta \cdot \beta^2 - 2 \cdot \delta) \cdot s_2 + (4 \cdot \delta - 6 \cdot \delta \cdot \beta^2) \cdot g^2 - 8 \cdot s^2 \cdot g^2 \cdot \beta, 3 \cdot \delta \cdot \beta^2 - \delta - 3 \cdot \delta^3 + (-4 \cdot \delta + 12 \cdot \delta \cdot \beta^2) \cdot r_1 + 12 \cdot \delta^2 \cdot s^2 \cdot \beta + (-18 \cdot \beta^3 - 6 \cdot \beta \cdot \delta^2 + 6 \cdot \beta) \cdot g^2 + 8 \cdot s^2 \cdot g^2 \cdot \delta, 3 \cdot \beta \cdot \delta^2 + (-2 \cdot \delta + 6 \cdot \delta \cdot \beta^2) \cdot q_2 - 4 \cdot \delta \cdot s_2 + (6 \cdot \delta - 12 \cdot \delta \cdot \beta^2) \cdot g^2 - 8 \cdot s^2 \cdot g^2 \cdot \beta, -\delta - 4 \cdot g^2 \cdot \beta + 2 \cdot q_1 \cdot \delta, -2 \cdot g^2 + s^2 + p_2, -15 \cdot \delta \cdot \beta^2 + 5 \cdot \delta + 3 \cdot \delta^3 + (-4 \cdot \delta + 12 \cdot \delta \cdot \beta^2) \cdot p_1 - 12 \cdot \delta^2 \cdot s^2 \cdot \beta + (6 \cdot \beta \cdot \delta^2 - 18 \cdot \beta^3 + 6 \cdot \beta) \cdot g^2 - 8 \cdot s^2 \cdot g^2 \cdot \delta, -3 \cdot \beta \cdot \delta^2 + (-2 \cdot \delta + 6 \cdot \delta \cdot \beta^2) \cdot n_2 + (6 \cdot \delta \cdot \beta^2 + 2 \cdot \delta) \cdot s_2 - 6 \cdot \delta \cdot g^2 \cdot \beta^2 + 8 \cdot s^2 \cdot g^2 \cdot \beta, -15 \cdot \delta \cdot \beta^2 + 5 \cdot \delta + 3 \cdot \delta^3 + (-4 \cdot \delta + 12 \cdot \delta \cdot \beta^2) \cdot n_1 - 12 \cdot \delta^2 \cdot s^2 \cdot \beta + (-6 \cdot \beta^3 + 6 \cdot \beta \cdot \delta^2 + 2 \cdot \beta) \cdot g^2 - 8 \cdot s^2 \cdot g^2 \cdot \delta, -3 \cdot \beta \cdot \delta^2 + (-2 \cdot \delta + 6 \cdot \delta \cdot \beta^2) \cdot m_2 + 4 \cdot \delta \cdot s_2 - 2 \cdot \delta \cdot g^2 + 8 \cdot s^2 \cdot g^2 \cdot \beta, -1 + 2 \cdot m_1, -g^2 + \delta \cdot f'2, 1 + 2 \cdot f'1, -2 \cdot g^2 + \delta \cdot e'2, e'1, -2 \cdot g^2 + \delta \cdot d'2, d'1 - 1, -g^2 + \delta \cdot c'2, 2 \cdot c'1 - 3, -g^2 + o'2 \cdot \delta, -1 + 2 \cdot o'1]$$

Al calcular $GB2$ se obtiene el mismo resultado obtenido para $GB1$, lo que implica que el ideal generado por la lista de polinomios $listaHT$ sea igual al ideal generado por la lista de polinomios $listaH$. Por tanto, los polinomios t_1, t_2, \dots, t_{11} pertenecen al ideal generado por los polinomios de hipótesis y, en consecuencia, las 24 condiciones de hipótesis implican las 11 condiciones de tesis. En consecuencia, el resultado indicado en el enunciado del comienzo de esta sección ha quedado probado por este método.

Cálculo de coordenadas

Lo mismo que ocurría para los problemas de las secciones precedentes, el punto M queda determinado, salvo una simetría respecto de la recta AB . De hecho, al venir H_1 y H_2 definidas mediante cuadrados de distancias, hay dos posibles soluciones, simétricas respecto de AB , para las coordenadas de los vértices y centro de $A'B'C'D'E'F'$, que pueden obtenerse resolviendo el sistema de estos 10 polinomios de hipótesis respecto de las coordenadas. Una de las dos soluciones resulta ser: $[c'1 = 3/2, c'2 = \sqrt{3}/2, d'1 = 1, d'2 = \sqrt{3}, e'1 = 0, e'2 = \sqrt{3}, f'1 = -1/2, f'2 = \sqrt{3}/2, o'1 = 1/2, o'2 = \sqrt{3}/2]$ y la otra es su simétrica respecto de la recta AB . Las coordenadas de los centros M, N, P, Q, R, S y de los restantes vértices de los seis hexágonos cons-

truidos sobre los lados de $ABCDEF$ se pueden obtener como se hace para cuadriláteros en el Anexo (Sección 10).

En conclusión, se han probado simultáneamente los dos resultados contenidos en el enunciado, es decir, tanto si los hexágonos construidos sobre los lados de $ABCDEF$ son todos exteriores a él, como si son solapados con él.

6 Similitud de las dos extensiones precedentes

En el teorema de Napoleon-Barlotti se considera un hexágono afinmente regular $ABCDEF$, esto es, imagen de otro regular en una transformación afín.

Es sabido que las transformaciones afines conservan la alineación de puntos, el paralelismo de rectas y la razón simple de segmentos contenidos en una misma recta. Por tanto, también conservan el punto medio de segmentos.

En consecuencia, de acuerdo con la notación de la Sección 5, el centro O' del hexágono $A'B'C'D'E'F'$ se transforma en la afinidad τ en el punto medio de cada una de las seis diagonales principales del hexágono $ABCDEF$, que, de este modo, son concurrentes en un punto, $O = \tau(O')$. Además, $ABCO$ es paralelogramo, por serlo $A'B'C'O'$, ya que las afinidades conservan el paralelismo de rectas. Luego O no es otro que el punto G de la Sección 5.

Por otra parte, en el problema considerado la Sección 4, los puntos M, N, P, Q, R, S eran los terceros vértices de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados del hexágono $ABCDEF$. Pero obviamente M, N, P, Q, R, S son también los centros de los hexágonos regulares construidos sobre los lados de $ABCDEF$.

En consecuencia, nuestro enunciado de la Sección 4 es equivalente al teorema de Napoleon-Barlotti para hexágonos de la Sección 5. La ventaja de nuestro enunciado de la Sección 4 es que en su hipótesis se describe de modo mucho más simple el modo de generar hexágonos a los que el teorema de Napoleon-Barlotti es aplicable.

7 Extensión a polígonos no constructibles

El teorema de Napoleón también se puede extender a polígonos no constructibles con regla y compás. Ahora bien, para tales polígonos ya no es aplicable

el método algebraico-computacional utilizado en las secciones precedentes, ya que las condiciones de hipótesis y tesis conducen a expresiones que incluyen expresiones trascendentes (no algebraicas).

Para superar ese inconveniente, en principio, se nos ocurrió plantear las condiciones de hipótesis, para resolver el sistema de ecuaciones resultante y sustituir las soluciones en las ecuaciones a que dan lugar las condiciones de tesis. Pero al resolver dicho sistema de ecuaciones se obtienen expresiones exageradamente largas, muy complicadas de simplificar, al tratar de comprobar que satisfacen a las ecuaciones de tesis.

Tales dificultades nos llevaron a abandonar la aritmética exacta, para seguir operando en aritmética en coma flotante, para tratar de comprobar (aproximadamente) las condiciones de tesis, calculando con el número de dígitos de aproximación elegido. Pero, ya que vamos a operar con números aproximados, decidimos abandonar el sistema de cómputo algebraico y utilizar directamente un sistema de geometría dinámica (SGD) que incluya cálculo numérico aproximado.

Somos conscientes de que dichos cálculos aproximados practicables sobre los SGD's no suponen una demostración, en sentido usual, de la regularidad del polígono \mathbf{V} de vértices los centros de los polígonos regulares construidos sobre los lados del polígono afinmente regular.

Ahora bien, una vez concluida la configuración sobre el SGD y exhibidas las medidas que permiten comprobar la regularidad del polígono \mathbf{V} , se pueden alterar por arrastre las posiciones de los puntos iniciales de la configuración, para comprobar que \mathbf{V} sigue siendo regular.

Es claro que, aunque esto se repita numerosas veces, no pasa de ser una comprobación de tipo discreto (no continuo), al estilo de las ciencias experimentales. Pero al ser τ una transformación continua (en sentido topológico), no es arriesgado concluir que dichas comprobaciones de tipo discreto justifiquen asegurar la regularidad del polígono \mathbf{V} o, al menos, permitan suponer que es muy improbable que tal regularidad no sea cierta en general.

La elección de una estrategia conveniente para generar brevemente la configuración depende de que el número n de lados del n -gono sea impar o par, por lo que trataremos por separado ambos casos. Tomaremos como modelo $n = 7$ y $n = 18$, respectivamente.

8 Extensión a heptágono afinmente regular

Se trata de generar la configuración de Napoleon-Barlotti [5], para $n=7$, desarrollando una estrategia que permita construir brevemente un heptágono afinmente regular, esto es, imagen de un heptágono regular en una transformación afín.

Enunciado: *Sea un heptágono $ABCDEFG$ sobre cada uno de cuyos lados se construye exteriormente un heptágono regular de lado igual a ese lado del heptágono. Si $ABCDEFG$ es afinmente regular, es decir, si es imagen de un heptágono regular en una transformación afín, entonces los centros de esos siete heptágonos construidos sobre sus lados son vértices de otro heptágono regular (Fig. 7). El resultado es también cierto si los siete heptágonos se construyen interiormente, es decir, si cada uno de ellos se solapa con $ABCDEFG$.*

Al ser un polígono no constructible con regla y compás, ya no es aplicable el método utilizado en las secciones precedentes, ya que las condiciones de hipótesis y tesis conducen a expresiones que incluyen expresiones trascendentes (no algebraicas).

Heptágono regular inicial $A'B'C'D'E'F'G'$

Sea $A'B'C'D'E'F'G'$ un heptágono regular, cuya imagen sea $ABCDEFG$ en una transformación afín τ . Para generar sobre el SGD el heptágono $A'B'C'D'E'F'G'$ de centro O' comenzamos eligiendo dos puntos distintos, su centro y uno de sus vértices, A' (Fig. 7), obteniendo los demás vértices con rotaciones sucesivas de centro O' y amplitud $360/7$ grados. (En [9], por ejemplo, se describe en detalle como ejecutar tales rotaciones).

Generación del heptágono afinmente regular $ABCDEFG$

Puesto que lo interesante es la forma del heptágono $ABCDEFG$, no importando su posición en el plano, no se pierde generalidad considerando invariantes los vértices A' y B' , lo que se consigue, en todo caso, aplicando una traslación, una rotación y un cambio de escala en la dirección de $A'B'$. (Notemos que la traslación y la rotación son isometrías, y por tanto, afinidades, y tal cambio de escala es una afinidad homológica ortogonal, por lo que, para nuestro propósito, basta considerar que τ sea afinidad homológica).

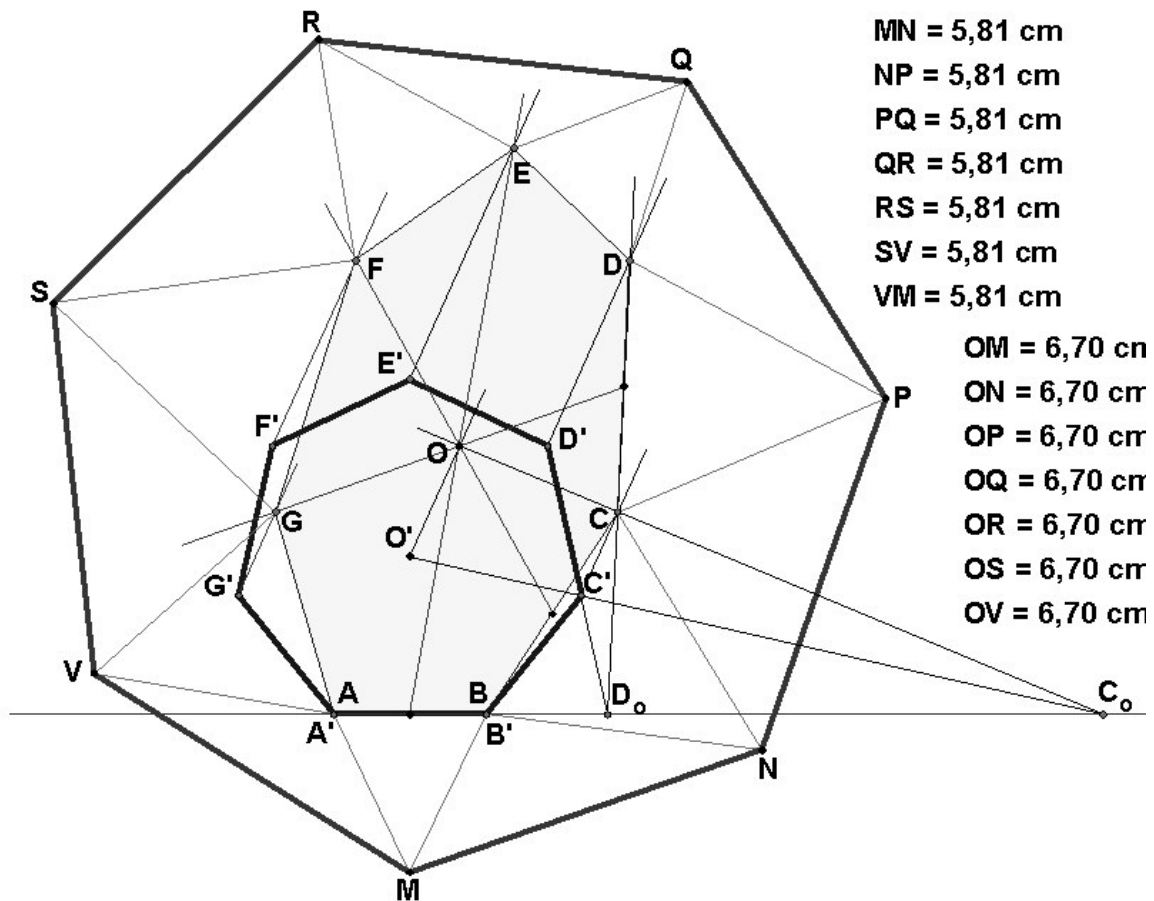


Fig. 7: Extensión a heptágono afínmente regular

Ello sugiere considerar un sistema de referencia métrico de origen A' y semieje positivo de abscisas de origen A' y que pasa por B' .

Puesto que las transformaciones afines conservan la razón simple entre puntos colineales, $A = \tau(A')$ y $B = \tau(B')$ implican que todos los puntos de la recta $A'B'$ sean invariantes por τ . En consecuencia, τ es una afinidad homológica de eje $A'B'$, que queda determinada por el punto $O = \tau(O')$, distinto de O' , siendo la dirección de afinidad la de la recta $O'O$ (Se supone $O'O$ no paralela a $A'B'$, es decir, se supone que no se trata del caso especialmente

simple de afinidad paralela).

Se tiene pues $A = \tau(A')$ y $B = \tau(B')$. Ahora, para determinar los restantes vértices de $ABCDEFG$, basta tener en cuenta que las afinidades conservan la colineación de puntos y la razón simple entre puntos alineados.

Comencemos por determinar $C = \tau(C')$. Siendo C_o el punto de intersección de la recta $O'C'$ y el eje AB (Fig. 7), los puntos $O = \tau(O')$, $C = \tau(C')$ y $C_o = \tau(C_o)$ deben ser colineales, por serlo O' , C' y C_o . En consecuencia, C es el punto de intersección de la recta OC_o con la paralela por C' a la recta OO' (dirección de afinidad).

De modo análogo se determina el punto $D = \tau(D')$. Siendo D_o el punto de intersección de la recta $O'D'$ y el eje AB , será D es el punto de intersección de la recta OD_o con la paralela por D' a la recta OO' (dirección de afinidad).

Este mismo método permitiría determinar los tres vértices restantes del heptágono $ABCDEFG$, pero vamos a hacerlo de otro modo mas sencillo, aprovechando que ya se se tienen los vértices A , B , C , D y que τ conserva la colineación de puntos y la razón simple entre puntos alineados.

Comencemos determinando $E = \tau(E')$. Puesto que el punto medio del segmento AB es imagen en τ del punto medio del segmento $A'B'$ y dicho punto medio es colineal con E' y O' , también son colineales E , O y el punto medio del segmento AB . En consecuencia, E está en la recta que pasa por O y por el punto medio del lado AB (Fig. 7), y también está en la paralela por O a la recta $O'E'$ (dirección de afinidad).

Del mismo modo, F estará en la recta que pasa por O y por el punto medio del lado BC (Fig. 7), y también estará en la paralela por O a la recta $O'F'$ (dirección de afinidad).

Y, análogamente, G estará en la recta que pasa por O y por el punto medio del lado CD (Fig. 7), y también estará en la paralela por O a la recta $O'G'$ (dirección de afinidad).

Heptágonos regulares construidos sobre los lados de $ABCDEFG$

Los centros de los heptágonos regulares exteriores, esto es, no solapados con $ABCDEFG$, construidos sobre sus respectivos lados $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA$, denotados respectivamente M, N, P, Q, R, S, V (Fig. 7), pueden determinarse como se indica a continuación.

Por ser $\frac{360}{7}$ grados la amplitud del ángulo convexo AMB y ser isósceles el triángulo ABM (Fig. 7), el ángulo convexo orientado MAB mide $\frac{5}{14}180^\circ$

y el ángulo convexo orientado MBA mide $-\frac{5}{14}180^\circ$. En consecuencia, M es el punto de intersección de las dos semirrectas AM y BM , respectivos lados origen de dichos ángulos orientados. Obviamente, la semirrecta BM puede ser sustituida por la mediatriz del lado AB .

De modo análogo (Fig. 7): N es el punto de intersección de las dos semirrectas BN y CN ; P es el punto de intersección de las dos semirrectas CP y DP ; Q es el punto de intersección de las dos semirrectas DQ y EQ ; R es el punto de intersección de las dos semirrectas ER y FR ; S es el punto de intersección de las dos semirrectas FS y GS ; y V es el punto de intersección de las dos semirrectas GV y AV .

Regularidad del heptágono $MNPQRSV$

Midiendo (con el número de dígitos elegido) con el SGD la longitud de los segmentos $MN, NP, PQ, QR, RS, SV, VM$ (Fig. 7), se comprueba que se obtienen medidas iguales y, por tanto ese heptágono $MNPQRSV$ es equilátero (aproximadamente, al menos).

De modo análogo, midiendo con el SGD la longitud de los segmentos $OM, ON, OP, OQ, OR, OS, OV$ (Fig. 7) se comprueba que se obtienen medidas iguales y, por tanto ese heptágono $MNPQRSV$ es equiángulo (aproximadamente, al menos).

Cambiando ahora sobre la hoja de trabajo o “worksheet” del SGD la posición del punto O , cambian las medidas de los lados de $MNPQRSV$, pero se mantienen iguales entre sí. Y otro tanto ocurre con las distancias de O sus vértices.

Aunque tales cálculos aproximados no suponen una demostración en sentido estricto de la regularidad del heptágono $MNPQRSV$, al menos nos permiten suponer que es muy improbable que tal regularidad no sea cierta, como ya se comentó al final de la Sección 7.

9 Extensión a octodecágono afinmente regular

Se trata de generar la configuración de Napoleon-Barlotti [5], para $n=18$, desarrollando una estrategia que permita construir brevemente un octodecágono afinmente regular, esto es, imagen de otro regular en una transformación afín.

Enunciado: Sea un polígono convexo de 18 lados, $\mathbf{P} = P_1P_2, \dots, P_{18}$, sobre

cada uno de cuyos lados se construye exteriormente un polígono regular de 18 lados, de lado igual a ese lado del heptágono. Si \mathbf{P} es afínmente regular, es decir, si es imagen de un polígono regular de 18 lados en una transformación afín, entonces los centros de esos 18 polígonos regulares de 18 lados construidos sobre sus lados son vértices de otro polígono regular de 18 lados (Fig. 8). El resultado es también cierto si los 18 polígonos regulares de 18 lados se construyen interiormente, es decir, si cada uno de ellos se solapa con \mathbf{P} .

Como en la sección precedente, haremos uso de un *SGD* que incluya cálculo numérico aproximado.

Polígono regular inicial \mathbf{P}' de 18 lados

Sea \mathbf{P}' un polígono regular de 18 lados, cuya imagen sea \mathbf{P} en una transformación afín τ . Comencemos notando que el polígono regular de 18 lados no es constructible con regla y compás, por no serlo el de 9 lados. Para generar sobre el *SGD* el polígono regular $\mathbf{P}' = P'_1 P'_2 \dots P'_{18}$, comenzamos eligiendo dos puntos distintos, su centro O' y uno de sus vértices, P'_1 , obteniendo los demás vértices aplicando sucesivas rotaciones de centro O' y amplitud $360/18=20$ grados (Fig. 8).

Generación del polígono afínmente regular $\mathbf{P} = P_1 P_2 \dots P_{18}$

Para generar más brevemente \mathbf{P} , a partir del polígono regular de 18 lados \mathbf{P}' , ya no interesa operar como se hizo para el heptágono en la Sección 8, sino mediante un método escalonado descrito a continuación, en que a partir de un vértice invariante (supuestamente situado en la parte inferior del polígono) se va ascendiendo, a uno y otro lado, en sucesivas rampas (Fig. 8), según se describe a continuación.

Puesto que lo interesante es la forma del polígono \mathbf{P} , no importando su posición en el plano, no se pierde generalidad considerando invariantes por τ los vértices P'_1 y P'_2 . Como en la sección precedente, se puede suponer que τ es la afinidad homológica de eje $P_1 P_2$, tal que $O = \tau(O')$, siendo pues su dirección de afinidad la de la recta $O'O$.

Por ser O' punto medio del segmento $P'_1 P'_{10}$ y por conservar τ la colineación de puntos y la razón simple entre puntos alineados, P_{10} será el simétrico de P_1 respecto de O . Análogamente, P_{11} será el simétrico de P_2

respecto de O .

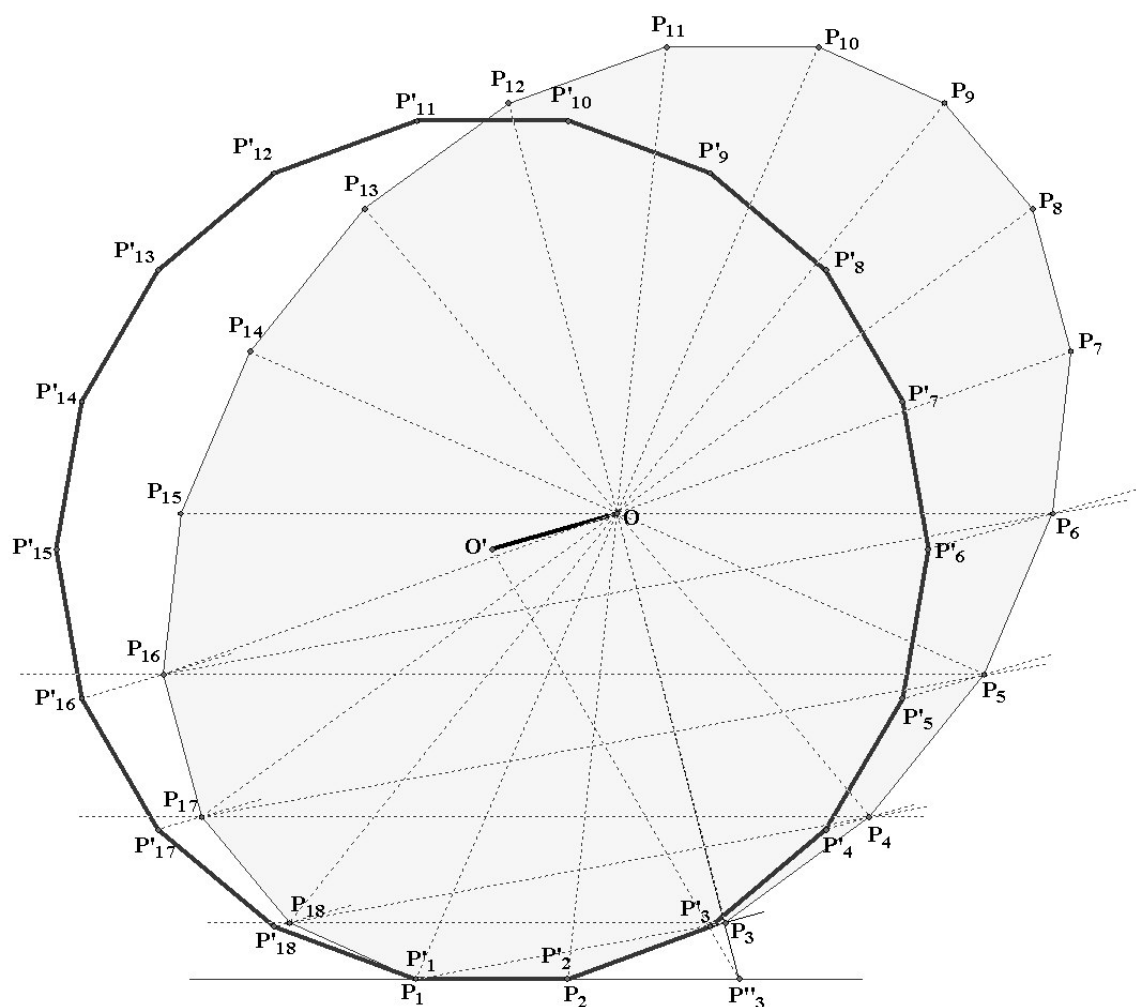


Fig. 8: *Extensión a polígono afínmente regular de 18 lados*

Se tiene pues, $P_1 = \tau(P'_1)$, $P_2 = \tau(P'_2)$ y los restantes vértices de \mathbf{P} pueden ser determinados teniendo en cuenta que las afinidades conservan la colineación de puntos, el paralelismo de rectas y la razón simple entre puntos alineados, según se precisa a continuación.

El vértice $P_3 = \tau(P'_3)$ se determina de modo análogo a como se hizo en la Sección 8 para determinar C . Siendo P''_3 el punto de intersección de la recta $O'P'_3$ con el eje de afinidad P_1P_2 (Fig. 8), P_3 será el punto de intersección de

la recta OP''_3 con la paralela por P'_3 a la recta $O'O$ (dirección de afinidad). Ahora P_{12} será el simétrico de P_3 respecto de O .

Por conservar τ el paralelismo y ser paralelas $P'_1P'_2$ y $P'_3P'_{18}$, el vértice P_{18} es intersección de la paralela por P_3 a P_1P_2 con la paralela por P'_{18} a $O'O$ (dirección de afinidad). Ahora P_9 será el simétrico de P_{18} respecto de O .

De modo análogo, por ser paralelas $P'_1P'_3$ y $P'_4P'_{18}$, el vértice P_4 es intersección de la paralela por P_{18} a P_1P_3 con la paralela por P'_4 a $O'O$. Ahora P_{13} será el simétrico de P_4 respecto de O .

Por ser paralelas $P'_1P'_2$ y $P'_4P'_{17}$, el vértice P_{17} es intersección de la paralela por P_4 a P_1P_2 con la paralela por P'_{17} a $O'O$. Ahora P_8 será el simétrico de P_{17} respecto de O .

Por ser paralelas $P'_1P'_3$ y $P'_5P'_{17}$, el vértice P_5 es intersección de la paralela por P_{17} a P_1P_3 con la paralela por P'_5 a $O'O$. Ahora P_{14} será el simétrico de P_5 respecto de O .

Por ser paralelas $P'_1P'_2$ y $P'_5P'_{16}$, el vértice P_{16} es intersección de la paralela por P_5 a P_1P_2 con la paralela por P'_{16} a $O'O$. Ahora P_7 será el simétrico de P_{16} respecto de O .

Por ser paralelas $P'_1P'_3$ y $P'_6P'_{16}$, el vértice P_6 es intersección de la paralela por P_{16} a P_1P_3 con la paralela por P'_6 a $O'O$. Ahora P_{15} será el simétrico de P_6 respecto de O .

Nota: Otro modo de generar \mathbf{P} a partir de \mathbf{P}' consiste en sustituir las condiciones de paralelismo anteriormente consideradas por condiciones de colineación, aplicando algunos de los teoremas de concurrencia de diagonales del polígono regular de 18 lados descritas exhaustivamente en [14]:

- i) las diagonales $P'_1P'_{10}$, $P'_2P'_{14}$, $P'_3P'_{16}$, $P'_4P'_{17}$ y $P'_6P'_{18}$ concurren en un punto
- ii) las diagonales $P'_1P'_{10}$, $P'_2P'_{13}$, $P'_3P'_{15}$, $P'_4P'_{17}$ y $P'_6P'_{18}$ concurren en un punto
- iii) las diagonales $P'_1P'_{10}$, $P'_2P'_{12}$, $P'_4P'_{15}$, $P'_5P'_{16}$ y $P'_8P'_{18}$ concurren en un punto.

(Por brevedad se omite la descripción detallada de tales sustituciones).

Octodécágonos regulares construidos sobre los lados de \mathbf{P}

Los centros de los octodécágonos regulares construidos sobre los lados de \mathbf{P} , no solapados con él (exteriores), se construyen de modo similar a como se hizo en la Sección 8. Denotemos por V_i al centro del construido sobre el lado P_iP_{i+1} ; $i = 1, \dots, 18$ (Fig. 9). Por ser $360/18 = 20$ grados la amplitud del ángulo $P_iV_iP_{i+1}$ y ser isósceles los triángulos $P_iV_iP_{i+1}$, la amplitud del

ángulo convexo orientado $P_i P_{i+1} V_i$ es 80° y la de $P_{i+1} P_i V_i$ es -80° .

Así pues, V_i es el punto de intersección de la semirrecta $P_{i+1} V_i$ (lado extremo del ángulo orientado $P_i P_{i+1} V_i$) con la semirrecta $P_i V_i$ (lado extremo del ángulo orientado $P_{i+1} P_i V_i$).

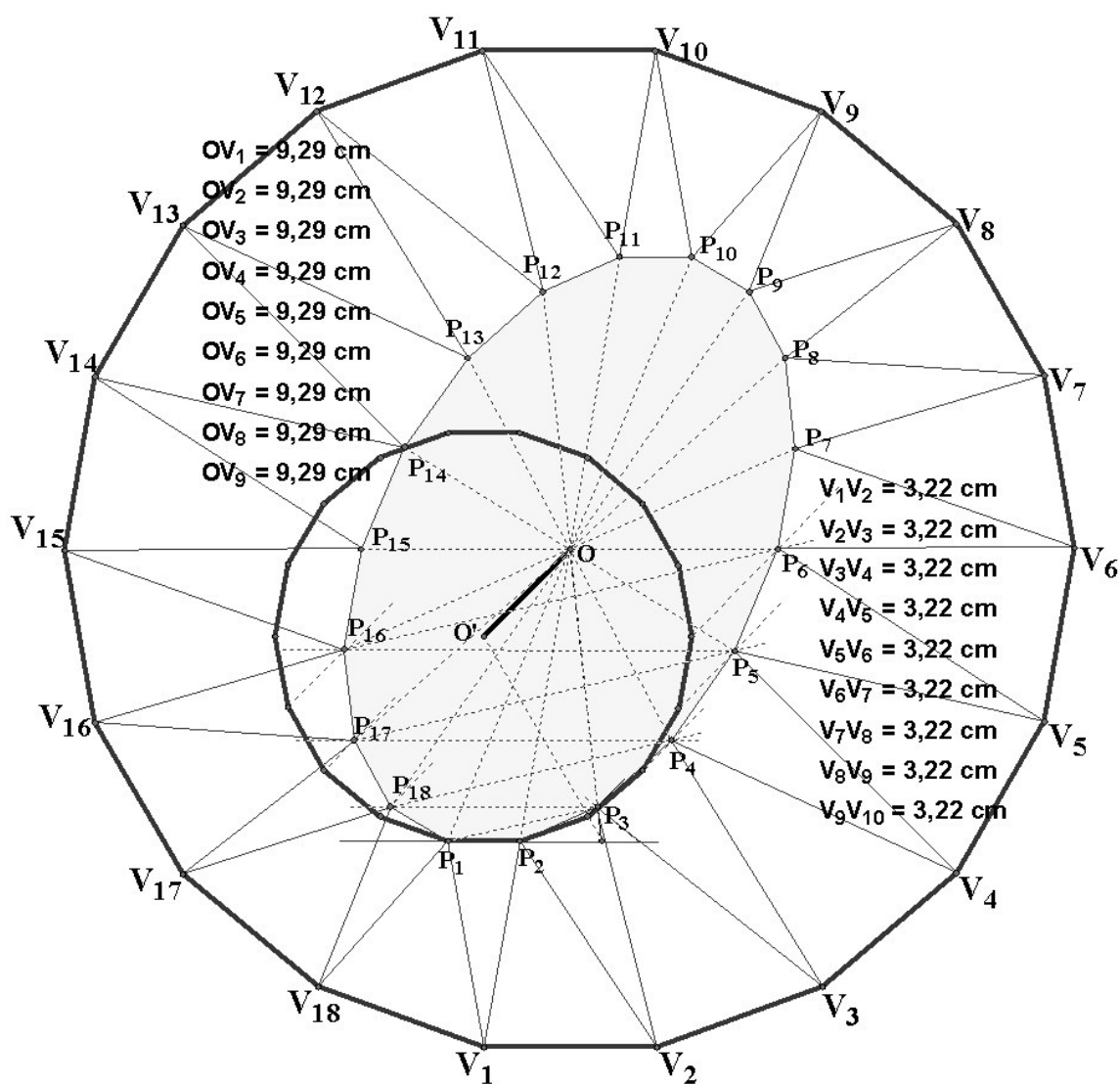


Fig. 9: *Comprobación de la regularidad*

Comprobación de la regularidad de \mathbf{V}

Midiendo con el SGD la longitud de los segmentos V_iV_{i+1} (con el número de dígitos elegido), se comprueba que se obtienen medidas iguales y, por tanto, el polígono \mathbf{V} es equilátero (aproximadamente, al menos).

La Fig. 9 incluye dichas medidas para la mitad de los lados de \mathbf{V} , lo que es suficiente debido a la simetría de \mathbf{V} respecto de O .

De modo análogo, midiendo con el SGD la longitud de los segmentos OV_i ; $i = 1, \dots, 9$ (Fig. 9), se comprueba que se obtienen medidas iguales y, por tanto, \mathbf{V} es equiángulo (aproximadamente, al menos).

Cambiando ahora sobre la hoja de trabajo o “worksheet” del SGD la posición del punto O , cambian las medidas de los lados de \mathbf{V} , pero se mantienen iguales entre sí. Y otro tanto ocurre con las distancias de O a los vértices de \mathbf{V} . Todo ello permite suponer cierta la regularidad de \mathbf{V} , como ya se comentó al final de la Sección 7.

10 Anexo: automatización de cálculos

En la práctica, la demostración mecánica mediante Bases de Groebner iguales se realiza con la ayuda de un SCA, que permite automatizar cálculos y, en especial, cálculo de Bases de Groebner. En lo que sigue de esta Sección, aplicaremos el método algebraico-computacional descrito en [13] para automatizar cálculos sobre el SCA Maple.

Los procedimientos auxiliares que facilitan las operaciones geométricas, para definir con comodidad las condiciones de hipótesis y tesis, ya fueron definidos en el citado artículo [13] y una descripción detallada del uso general de Maple puede verse en [10].

Ejecución de los cálculos del problema de la Sección 2

Reinicio del sistema:

```
restart:
```

Coordenadas de los puntos considerados, comenzando por la desprotección de D , como variable reservada (operador de diferenciación):

```
unprotect(D):
```

```
A:=[0,0]: B:=[1,0]: C:=[c1,c2]: D:=[d1,d2]:
```

```
M:=[m1,m2]: N:=[n1,n2]: P:=[p1,p2]: Q:=[q1,q2]:
```

Polinomios de hipótesis (denotados h_1, h_2, \dots en vez de h_1, h_2, \dots):

```
h1:=dist2(M,B)-dist2(M,A):
h2:=2*dist2(M,A)-dist2(A,B):
h3:=dist2(N,B)-dist2(N,C):
h4:=equiAng(N,B,C,M):
h5:=dist2(P,D)-dist2(P,C):
h6:=equiAng(P,C,D,M):
h7:=dist2(Q,D)-dist2(Q,A):
h8:=equiAng(Q,D,A,M):
h9:=paral(A,B,D,C):
h10:=paral(A,D,B,C):
listaH:=[h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10]:
```

Variables:

```
var=m1,m2,n1,n2,p1,p2,q1,q2,d1,d2
```

Polinomios de tesis (denotados, por brevedad, t_1, t_2, \dots en vez de t_1, t_2, \dots):

```
t1:=paral(M,N,P,Q):
t2:=paral(M,Q,N,P):
t3:=ortog(M,N,N,P):
t4:=dist2(M,N)-dist2(N,P):
listaHT:=[h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10,t1,t2,t3,t4]:
```

Comparación de ambas Bases de Groebner:

```
with(Groebner):
GB1 := Basis( listaH, plex(var) ):
GB2 := Basis( listaHT, plex(var) ):
evalb(GB1 = GB2);  $\longrightarrow$  true
```

Al ser afirmativa la respuesta a la evaluación booleana (con el comando `evalb`) de la igualdad $GB1 = GB2$, la demostración ha concluido con éxito.

Para obtener las coordenadas de los centros de los cuatro cuadrados, basta resolver el sistema de polinomios de hipótesis respecto de las variables, que debe devolver dos soluciones (la de cuadrados exteriores y la de solapados). Para separarlas cómodamente, podemos alojar en *Sol* la lista de soluciones del sistema, bastando entonces teclear *Sol*[1] para obtener la primera y *Sol*[2] para obtener la segunda:

```
Sol:=solve(listaH,[var]):
```

$$\begin{aligned} \text{Sol}[1]; & \longrightarrow [m1 = 1/2, m2 = 1/2, n1 = 1/2 \cdot c1 - 1/2 \cdot c2 + 1/2, n2 = \\ & 1/2 \cdot c1 + 1/2 \cdot c2 - 1/2, p1 = c1 - 1/2, p2 = -1/2 + c2, q1 = 1/2 \cdot c1 + \\ & 1/2 \cdot c2 - 1/2, q2 = 1/2 \cdot c2 + 1/2 - 1/2 \cdot c1, d1 = c1 - 1, d2 = c2] \\ \text{Sol}[2]; & \longrightarrow [m1 = 1/2, m2 = -1/2, n1 = 1/2 \cdot c1 + 1/2 \cdot c2 + 1/2, n2 = \\ & 1/2 \cdot c2 + 1/2 - 1/2 \cdot c1, p1 = c1 - 1/2, p2 = 1/2 + c2, q1 = 1/2 \cdot \\ & c1 - 1/2 \cdot c2 - 1/2, q2 = 1/2 \cdot c1 + 1/2 \cdot c2 - 1/2, d1 = c1 - 1, d2 = c2] \end{aligned}$$

Obviamente esta última solución corresponde a los cuatro cuadrados exteriores a $ABCD$ (Fig. 3) y la anterior, $Sol[1]$ a los interiores. En particular, para el caso en que C sea el punto de coordenadas $(3,2)$, sustituyendo estos valores con el comando de sustitución `subs`, resultan:

$$\begin{aligned} \text{subs}(c1=3, c2=2, \text{Sol}[1]); & \longrightarrow [m1 = 1/2, m2 = 1/2, n1 = 1, n2 = 2, \\ & p1 = 5/2, p2 = 3/2, q1 = 2, q2 = 0, d1 = 2, d2 = 2] \\ \text{subs}(c1=3, c2=2, \text{Sol}[2]); & \longrightarrow [m1 = 1/2, m2 = -1/2, n1 = 3, n2 = 0, \\ & p1 = 5/2, p2 = 5/2, q1 = 0, q2 = 2, d1 = 2, d2 = 2] \end{aligned}$$

Finalmente, las coordenadas de los otros dos vértices de cada uno de los cuatro cuadrados construidos sobre los lados de $ABCD$, se pueden obtener con el procedimiento auxiliar `simetr`. Por ejemplo, para el cuadrado exterior $BCC''B''$ (Fig. 3) de centro N , el vértice C'' será el simétrico de B respecto N y el vértice B'' será el simétrico de C respecto N :

$$\begin{aligned} C'' := \text{simetr}(B, N); & \longrightarrow C'' := [-1 + 2 \cdot n1, 2 \cdot n2] \\ B'' := \text{simetr}(C, N); & \longrightarrow B'' := [-c1 + 2 \cdot n1, -c2 + 2 \cdot n2] \end{aligned}$$

Nota: Los autores ofrecen a los lectores interesados el código Maple de todos los problemas desarrollados en este artículo.

Conclusiones

Este artículo se ha enfocado a describir la construcción de las configuraciones del Teorema de Napoleón extendido a polígonos de más de 3 lados (la extensión de dicho teorema había ya sido probado con anterioridad). Para comprobar la validez de dichas construcciones se ha hecho uso de un método algebraico-computacional sobre un SCA, en caso de polígonos constructibles, y de un SGD, en caso de polígonos no constructibles.

En el primer caso, el método algebraico-computacional usado ha permitido probar simultáneamente la validez de las construcciones para am-

bos polígonos de Napoleón, el exterior y el interior. Dicho método permite además determinar automáticamente en aritmética exacta las coordenadas de los puntos considerados en la configuración.

Y en caso de polígonos afínmente regulares no constructibles, se han descrito métodos de construcción del polígono de Napoleón, distinguiendo según que el número de lados sea impar o par.

En cuanto a avances en la extensión del teorema de Napoleón a polígonos de mas de tres lados (al margen de la construcción de su configuración), por lo que el autor conoce, son novedosos el teorema recíproco para cuadriláteros (Sección 3) y la extensión a hexágonos con centro de simetría (Sección 4). Este último supone, en todo caso, un modo breve de construir hexágonos afínmente regulares.

Referencias

- [1] L. Mascheroni (1797). *La Geometria del Compasso*, que Napoleón mandó traducir al francés en 1798. Republicado en 1980 por la Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard de París.
- [2] C.A. Laisant (1887), *Théorie et applications des équipollences*. Gauthier-Villars, Paris.
- [3] J. Douglas (1940), On Linear Polygon Transformation, *Bull Amer Math Soc*, **46**, págs. 551-560.
- [4] B. H. Neumann (1942), A Remark on Polygons, *J. London Math Soc*, **17**, págs. 165-166.
- [5] A. Barlotti (1955), Una propieta degli n-agoni che si ottengono trasformando in una affinita un n-agono regolare, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (**3**) **10**, págs. 96-98.
- [6] L. Gerber (1980), Napoleon's theorem and the Parallelogram Inequality for Affine-Regular Polygons, *The American Mathematical Monthly*, **Vol. 87**, **No. 8**, págs. 644-648.

- [7] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer (1967), *Geometry Revisited*. Math Assoc. of America, Washington DC. Traducción al español: "*Retorno a la Geometría*" de Coxeter y Greitzer (1996), Col. La tortuga de Aquiles, **8**. Ed. Euler. Madrid.
- [8] J. E. Wetzel (1992), Converses of Napoleon's Theorem. *Amer. Math. Monthly*, **Vol. 99, No. 4**, págs. 339 - 351.
- [9] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (1996). Transformaciones lineales con sistemas de cómputo algebraico. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **42**, págs. 28-46.
- [10] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (1999). *Cálculos matemáticos por ordenador con Maple*. Ed. Rubinos. Madrid.
- [11] D. DeTemple, M. Hudelson (2001), Square-Banded Polygons and Affine Regularity, *The American Mathematical Monthly*, **Vol. 108, No. 2**, págs. 100-114.
- [12] S. B. Gray (2003), Generalizing the Petr-Douglas-Neumann Theorem on N-Gons, *The American Mathematical Monthly*, **Vol. 110, No. 3**, págs. 210-227.
- [13] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (2011). Un método algebraico-computacional para demostración automática en geometría euclídea. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **88**, págs. 31-63.
- [14] M. Benito Muñoz, E. Fernández Moral (2011), Problemas de geometría resueltos con ayuda del polígono regular de 18 lados, *La Gaceta de la RSME*, **Vol. 14, No. 1**, págs. 69-84.

Formas canónicas de extensiones de Galois de grados 3 y 4

Arturo Rodríguez Rodríguez, M^a Belén Rodríguez Rodríguez*

* Departamento de Matemáticas, I.E.S. Salvador Dalí

arturomath@hotmail.com, maria.rodriguez13@educa.madrid.org

Resumen

We parametrize the set of irreducible polynomials in one variable of degree $n = 3, 4$ whose Galois group has order n . As far as we know the result is new for $n = 4$, while for $n = 3$ what is new is the proof, that is much more elementary than the one appearing in [2].

1. Introducción

A lo largo del trabajo fijamos un cuerpo K de característica 0. Esta condición no es imprescindible en la mayoría de los resultados, pero sí lo es en algunos y simplifica las demostraciones. Denotaremos $K^* = K \setminus \{0\}$. Los enunciados a los que hace referencia el título de esta nota son los siguientes:

Teorema 1.1 *Sea $E|_K$ una extensión de cuerpos de grado 3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) $E|_K$ es de Galois.
- (2) Existen un elemento primitivo α de la extensión $E|_K$ y $s \in K$ tales que el polinomio mínimo de α sobre K es

$$P_{K,\alpha} = T^3 - sT^2 + (s-3)T + 1. \quad (1)$$

Además, si éste es el caso, las otras dos raíces de $P_{K,\alpha}$ en un cierre algebraico de K son $1/(1-\alpha)$ y $(\alpha-1)/\alpha$.

Observaciones 1.2 (1) En el enunciado anterior el polinomio $P_{K,\alpha}$ en (1) es irreducible en $K[T]$, lo que equivale a que carezca de raíces en K , es decir, $t^3 - st^2 + (s - 3)t + 1 \neq 0$ para cada $t \in K$, esto es,

$$t^3 - 3t + 1 \neq st(t - 1) \text{ para cada } t \in K.$$

(2) En cuanto a las extensiones de grado 4 distinguimos según que el grupo de Galois sea \mathbb{Z}_4 o $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Además, en el caso cíclico tratamos separadamente qué sucede si -1 es un cuadrado en K .

Teorema 1.3 *Sea $E|_K$ una extensión de cuerpos de grado 4. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) $E|_K$ es de Galois y $G(E : K) = \mathbb{Z}_4$.
- (2) Existen un elemento primitivo α de la extensión $E|_K$ y $a \in K^*$, $s, t \in K$ tales que el polinomio mínimo de α sobre K adopta una de las siguientes formas:

$$P_{K,\alpha} = T^4 - 4t(4s^2 + 1)T^2 + 4t^2(4s^2 + 1), \text{ o bien } P_{K,\alpha} = T^4 - a,$$

la segunda tan sólo en el caso en que -1 es un cuadrado en K .

Teorema 1.4 *Sea $E|_K$ una extensión de cuerpos de grado 4. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) $E|_K$ es de Galois y $G(E : K) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (2) Existen un elemento primitivo α de la extensión $E|_K$ y $s, t \in K$ tales que $P_{K,\alpha} = T^4 - 2(s + t)T^2 + (s - t)^2$.

Definiciones y Notaciones 1.5 Como los cuerpos involucrados en esta nota son de característica 0, una extensión finita de cuerpos $E|_K$ es de Galois si el grado $[E : K]$ de la extensión, es decir, la dimensión de E como K -espacio vectorial, coincide con el orden del grupo de Galois $G(E : K)$ formado por los K -automorfismos de E , esto es, los automorfismos del cuerpo E cuya restricción a K es la identidad. Esta condición equivale a que E sea un cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[T]$, es decir, un cuerpo minimal entre aquéllos que contienen a K y en el que f factoriza como producto de factores lineales.

2. Extensiones de grado 3

Definiciones y Observaciones 2.1 (1) Denotaremos $\mathrm{GL}_2(K)$ el *grupo lineal general* formado por las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en K y determinante no nulo. Si \mathcal{H} es su subgrupo formado por los múltiplos no nulos de la matriz identidad, el cociente $\mathrm{PGL}_2(K) = \mathrm{GL}_2(K)/\mathcal{H}$ se denomina *grupo proyectivo general*. Denotamos $[A] \in \mathrm{PGL}_2(K)$ la clase $\mathrm{mod} \mathcal{H}$ de la matriz $A \in \mathrm{GL}_2(K)$.

(2) Consideremos una extensión $E|_K$ de grado 3. Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K) \quad \text{y} \quad u \in E \setminus K$$

denotamos $A(u) = (au + b)/(cu + d)$, que es un elemento de E bien definido porque $cu + d \neq 0$ ya que $u \notin K$. De hecho, $A(u) \in E \setminus K$, pues en caso contrario existiría $\lambda \in K$ tal que $au + b = \lambda(cu + d)$, luego $(a, b) = \lambda(c, d)$, es decir, las filas de A son proporcionales, y esto es falso. Nótese que u es un elemento primitivo de $E|_K$ pues, por la transitividad del grado,

$$3 = [E : K] = [E : K(u)] \cdot [K(u) : K] \quad \text{y} \quad [K(u) : K] > 1,$$

por lo que $[E : K(u)] = 1$, o sea, $E = K(u)$.

Si las matrices $A, B \in \mathrm{GL}_2(K)$ son congruentes $\mathrm{mod} \mathcal{H}$ y $u \in E \setminus K$, es obvio que $A(u) = B(u)$. Por tanto, el grupo $\mathrm{PGL}_2(K)$ actúa sobre $E \setminus K$ vía

$$\mathrm{PGL}_2(K) \times (E \setminus K) \rightarrow E \setminus K, ([A], u) \mapsto [A](u) := A(u).$$

(3) La anterior es una acción, ya que dadas matrices $A, B \in \mathrm{GL}_2(K)$ y un elemento $u \in E \setminus K$ se cumple la igualdad $A(B(u)) = (AB)(u)$. En efecto, si escribimos

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

su producto es

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix},$$

y en consecuencia, como $B(u) = (b_1u + b_2)/(b_3u + b_4)$, se tiene

$$\begin{aligned} A(B(u)) &= \frac{a_1B(u) + a_2}{a_3B(u) + a_4} = \frac{a_1((b_1u + b_2)/(b_3u + b_4)) + a_2}{a_3((b_1u + b_2)/(b_3u + b_4)) + a_4} \\ &= \frac{(a_1b_1 + a_2b_3)u + a_1b_2 + a_2b_4}{(a_3b_1 + a_4b_3)u + a_3b_2 + a_4b_4} = (AB)(u). \end{aligned}$$

(4) Fijado un elemento $u \in E \setminus K$ la aplicación

$$\text{PGL}_2(K) \rightarrow E \setminus K, [A] \mapsto A(u)$$

es biyectiva. Para comprobar la inyectividad, sean $A, B \in \text{GL}_2(K)$ como en (2) tales que $A(u) = B(u)$. Por el apartado anterior,

$$(A^{-1}B)(u) = A^{-1}(B(u)) = A^{-1}(A(u)) = (A^{-1}A)(u) = u.$$

Por tanto, la matriz

$$C = A^{-1}B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

cumple $C(u) = u$, es decir, $c_3u^2 + (c_4 - c_1)u - c_2 = 0$. Como $u \in E \setminus K$ y la extensión $E|_K$ tiene grado 3, los elementos $\{1, u, u^2\}$ son K -linealmente independientes, y por tanto $c_3 = c_2 = 0$ y $c_1 = c_4$, es decir, $A^{-1}B = C \in \mathcal{H}$, luego $[A] = [B]$.

En cuanto a la sobreyectividad, para cada $x = x_1u^2 + x_2u + x_3 \in E$ buscamos $a, b, c, d \in K$ tales que $ad - bc \neq 0$ y $x = (au + b)/(cu + d)$. Como $[K(u) : K] = 3$ existen $z_1, z_2, z_3 \in K$ tales que $u^3 = z_1u^2 + z_2u + z_3$, y así,

$$\begin{aligned} au + b &= x(cu + d) = (x_1u^2 + x_2u + x_3)(cu + d) \\ &= cx_1u^3 + (dx_1 + cx_2)u^2 + (cx_3 + dx_2)u + dx_3 \\ &= cx_1(z_1u^2 + z_2u + z_3) + (dx_1 + cx_2)u^2 + (cx_3 + dx_2)u + dx_3 \\ &= (cx_1z_1 + dx_1 + cx_2)u^2 + (cx_1z_2 + cx_3 + dx_2)u + (cx_1z_3 + dx_3). \quad (3) \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que los valores

$$c = -x_1, \quad d = x_1z_1 + x_2, \quad a = cx_1z_2 + cx_3 + dx_2 \quad \text{y} \quad b = cx_1z_3 + dx_3$$

satisfacen la igualdad (3) anterior. \square

Antes de probar el Teorema 1.1 necesitamos un lema muy elemental de álgebra lineal.

Lema 2.2 *Sea $A \in \text{GL}_2(K)$ una matriz cuya clase $[A] \in \text{PGL}_2(K)$ tiene orden 3. Entonces, existen $a \in K^*$ y $P \in \text{GL}_2(K)$ tales que*

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & a \end{pmatrix}.$$

Demostración. Denotamos $\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ la base estándar de K^2 y sea

$$f : K^2 \rightarrow K^2, (x, y) \mapsto (x, y)A$$

el endomorfismo de K^2 cuya matriz respecto de la base estándar es A . Como $[A]$ tiene orden 3 la matriz A no es proporcional a la identidad, esto es, f no es una homotecia, luego existe un vector $\omega_1 \in K^2$ que no es proporcional a su imagen $\omega_2 = f(\omega_1)$. Por tanto $\mathcal{B} = \{\omega_1, \omega_2\}$ es base de K^2 y existen $a, b \in K$ tales que la matriz de f respecto de esta base es

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

La matriz $P \in \text{GL}_2(K)$ de cambio de base entre \mathcal{B} y \mathcal{E} cumple $B = PAP^{-1}$, luego $[B] = [P] \cdot [A] \cdot [P]^{-1}$. Por tanto $[B]$ y $[A]$ son conjugadas en el grupo $\text{PGL}_2(K)$, por lo que ambas tienen orden 3. Así, existe $\lambda \in K^*$ tal que

$$\begin{pmatrix} ab & a^2 + b \\ b(a^2 + b) & a(a^2 + 2b) \end{pmatrix} = B^3 = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto equivale a que $a^2 + b = 0$ y $a \neq 0$, como queríamos demostrar. \square

Demostración del Teorema 1.1 Sean $E|_K$ una extensión de Galois de grado 3, $u \in E \setminus K$ y $\sigma \in G(E : K) \approx \mathbb{Z}_3$ un automorfismo de orden 3. Como $\sigma(u) \in E \setminus K$ se deduce de 2.1 (4) que existe una matriz $A \in \text{GL}_2(K)$ tal que

$\sigma(u) = A(u)$. Por 2.1 (3), $u = \sigma^3(u) = A^3(u)$, luego $[A]$ es un elemento de orden 3 de $\text{PGL}_2(K)$ lo que implica, por el Lema 2.2, que existe $P \in \text{GL}_2(K)$ que satisface la igualdad

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & a \end{pmatrix} \text{ para cierto } a \in K^*.$$

Escribimos

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}, \text{ luego } v := P(u) = \frac{p_1u + p_2}{p_3u + p_4} \in E \setminus K \text{ y se tiene}$$

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= \sigma\left(\frac{p_1u + p_2}{p_3u + p_4}\right) = \frac{p_1\sigma(u) + p_2}{p_3\sigma(u) + p_4} = P(A(u)) = (PA)(u) \\ &= (PA)(P^{-1}(v)) = (PAP^{-1})(v) = \frac{1}{-a^2v + a}. \end{aligned}$$

Evidentemente $\alpha = av \in E \setminus K$, luego es un elemento primitivo de la extensión $E|_K$, y se tiene

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \sigma(av) = a\sigma(v) = \frac{a}{-a^2v + a} = \frac{1}{1 - av} = \frac{1}{1 - \alpha}, \\ \sigma^2(\alpha) &= \frac{1}{1 - \sigma(\alpha)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \alpha}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Como la extensión $E|_K = K(\alpha)|_K$ es de Galois el polinomio mínimo de α sobre K es

$$\begin{aligned} P_{K,\alpha} &= (T - \alpha) \cdot (T - \sigma(\alpha)) \cdot (T - \sigma^2(\alpha)) = T^3 - (\alpha + \sigma(\alpha) + \sigma^2(\alpha))T^2 \\ &\quad + (\alpha\sigma(\alpha) + \alpha\sigma^2(\alpha) + \sigma(\alpha)\sigma^2(\alpha))T - \alpha\sigma(\alpha)\sigma^2(\alpha). \end{aligned}$$

El término independiente de este polinomio es 1, ya que

$$\alpha\sigma(\alpha)\sigma^2(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) \cdot \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) = -1.$$

Si denotamos $s = \alpha + \sigma(\alpha) + \sigma^2(\alpha) \in K$, el coeficiente de T en $P_{K,\alpha}$ vale

$$\begin{aligned} \alpha\sigma(\alpha) + \alpha\sigma^2(\alpha) + \sigma(\alpha)\sigma^2(\alpha) &= \frac{\alpha}{1-\alpha} + (\alpha-1) - \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha-1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} + \alpha - \frac{1}{\alpha} - 1 \\ &= -1 + \alpha + \frac{1}{1-\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - 2 \\ &= \alpha + \sigma(\alpha) + \sigma^2(\alpha) - 3 = s - 3, \end{aligned}$$

y por tanto el polinomio mínimo de α sobre K tiene la forma del enunciado:

$$P_{K,\alpha} = T^3 - sT^2 + (s-3)T + 1.$$

Recíprocamente, supongamos que existe $\alpha \in E \setminus K$ cuyo polinomio mínimo $P_{K,\alpha}$ sobre K tiene la forma (1) del enunciado. Si denotamos β y γ las otras dos raíces de $P_{K,\alpha}$ en un cierre algebraico de K , las relaciones de Cardano-Vieta se leen

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = s \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = s-3 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$$

De las dos primeras igualdades, y puesto que $\alpha \neq 1$, se deduce que

$$(\beta + \gamma)(1 - \alpha) + \alpha - \beta\gamma = s - (s - 3) = 3.$$

Empleando que $\beta\gamma = -1/\alpha$ resulta que

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= \frac{3 - \alpha + \beta\gamma}{1 - \alpha} = \frac{3 - \alpha - 1/\alpha}{1 - \alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \quad \text{y} \\ \beta\gamma &= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \alpha}\right). \end{aligned}$$

Esto implica que $\beta = (\alpha - 1)/\alpha$ y $\gamma = 1/(1 - \alpha)$, lo que prueba que $E = K(\alpha)$ es un cuerpo de descomposición sobre K del polinomio $P_{K,\alpha} \in K[T]$, luego la extensión $E|_K$ es de Galois.

Observaciones 2.3 (1) Es conocido, véase por ejemplo [1], §8, Prop. 3.8, que el grupo de Galois sobre K de un polinomio irreducible $f \in K[T]$ es \mathbb{Z}_3 si y sólo si su discriminante es el cuadrado de un elemento de K . Esto debe suceder, por tanto, para el polinomio $P_{K,\alpha}$ del Teorema 1.1. Ahora bien, empleando la fórmula para el discriminante de un polinomio de grado 3, véase por ejemplo [1], §4, 2.14, y denotando $\delta_s = s^2 - 3s + 9 \in K$, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta(P_{K,\alpha}) &= -4(s-3)^3 + s^2(s-3)^2 - 18s(s-3) + 4s^3 - 27 \\ &= -4(s^3 - 9s^2 + 27s - 27) + s^2(s-3)^2 - 18(s-3) + 4s^3 - 27 \\ &= s^4 - 6s^3 + 27s^2 - 54s + 81 = (s^2 - 3s + 9)^2 = \delta_s^2.\end{aligned}$$

(2) La parametrización obtenida en [2] por Kersten y Michalíček de los polinomios de grado 3 con grupo de Galois cíclico de orden 3 es

$$T^3 - 3kT^2 + 3(k-1)T + 1$$

con $k \in K$, y se corresponde con la del Teorema 1.1 tomando $s = 3k$. Su demostración requiere mayores conocimientos de la teoría de Galois: cite-mos entre otros la denominada *teoría de Kummer sin raíces de la unidad*, el llamado *Teorema de la base normal* y algunos rudimentos de cohomología galoisiana que nosotros no necesitamos utilizar.

(3) Como ya hemos señalado en la Introducción, la parametrización de las extensiones de Galois de grado 4 que obtenemos en la sección siguiente es, por lo que nosotros sabemos, un resultado desconocido hasta ahora.

3. Extensiones de grado 4

Comenzamos estudiando las extensiones cíclicas de Galois de grado 4.

Demostración del Teorema 1.3 Sea $E|_K$ una extensión de grado 4 con grupo de Galois \mathbb{Z}_4 . Este grupo posee un único subgrupo propio, que tiene orden 2, luego la extensión $E|_K$ posee una única subextensión propia $L|_K$, y $[L : K] = 2$, y si σ es un generador de $G(E : K)$, entonces $L = \text{Fix}(\sigma^2)$. Tomamos un elemento cualquiera $u \in L \setminus K$, cuyo polinomio mínimo sobre K es de la forma $P_{K,u} = T^2 - 2bT + c \in K[T]$. Entonces $u = b \pm \sqrt{b^2 - c}$, luego

existe $\delta = b^2 - c \in K$ tal que $L = K(u) = K(\sqrt{\delta})$. Por la misma razón, existe $\gamma \in L$ que no es un cuadrado en L tal que $E = L(\sqrt{\gamma})$. Vamos a comprobar que $\alpha = \sqrt{\gamma} \in L$ satisface las condiciones del enunciado.

Comenzamos probando que es un elemento primitivo de $E|_K$ y calculando su polinomio mínimo sobre K . Como $\{1, \sqrt{\delta}\}$ es base de L como K -espacio vectorial, existen $x_1, x_2 \in K$ tales que $\gamma = x_1 + x_2\sqrt{\delta}$, por lo que

$$(\alpha^2 - x_1)^2 = (\gamma - x_1)^2 = \delta x_2^2,$$

es decir, el polinomio $f = (T^2 - x_1)^2 - \delta x_2^2 \in K[T]$ cumple $f(\alpha) = 0$. Para demostrar que f es irreducible en $K[T]$, y puesto que $\deg(f) = 4 = [E : K]$, es suficiente comprobar que $E = K(\alpha)$. Esto se deduce de que $L|_K$ es la única subextensión no trivial de $E|_K$ y $L \neq K(\alpha)$ ya que $\alpha \notin L$ porque γ no es un cuadrado en L .

Para terminar la prueba de esta implicación hemos de ver que f adopta la forma del polinomio $P_{K,\alpha}$ del enunciado. Es evidente que $-\alpha$ es también raíz de f y, puesto que σ tiene orden 4, otra raíz de f , distinta de α y $-\alpha$, es $\beta = \sigma(\alpha)$, así que

$$(T^2 - x_1)^2 - \delta x_2^2 = f = (T - \alpha)(T + \alpha)(T - \beta)(T + \beta) \in K[T].$$

Esto implica que $\sigma(\beta) = -\alpha$. En efecto, $\sigma(\beta)$ es raíz de f y como $E = K(\beta)$, $\sigma(\beta) \neq \beta, -\beta$ porque en caso contrario σ^2 es la identidad. Lo mismo sucede si $\sigma(\beta) = \alpha$, pues entonces $\sigma^2(\beta) = \sigma(\alpha) = \beta$. En consecuencia, $\eta = \alpha\beta$ queda fijo por σ^2 , por lo que $L = K(\eta)$, ya que $\sigma(\eta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta) = -\alpha\beta = -\eta$. En particular, existen $z_1, z_2 \in K$ tales que $\eta = z_1 + z_2\sqrt{\delta}$ y, elevando al cuadrado,

$$z_1^2 + \delta z_2^2 + 2z_1z_2\sqrt{\delta} = (z_1 + z_2\sqrt{\delta})^2 = \eta^2 = \alpha^2\beta^2 = f(0) \in K.$$

Como $\{1, \sqrt{\delta}\}$ son K -linealmente independientes, $z_1z_2 = 0$. Pero $z_2 \neq 0$ pues en caso contrario $\eta = z_1 \in K$, y esto es falso ya que $\sigma(\eta) = -\eta \neq \eta$. Así, $z_1 = 0$, luego

$$\delta z_2^2 = f(0) = x_1^2 - \delta x_2^2, \text{ es decir, } \delta(x_2^2 + z_2^2) = x_1^2. \quad (4)$$

Si $x_2^2 + z_2^2 \neq 0$ definimos $s = x_2/2z_2 \in K$ y $t = x_1z_2^2/2(x_2^2 + z_2^2) \in K$. Entonces, los coeficientes del polinomio $P_{K,\alpha}$ del enunciado son

$$\begin{aligned} 4t(4s^2 + 1) &= (2x_1z_2^2)(1 + x_2^2/z_2^2)/(x_2^2 + z_2^2) = 2x_1 \text{ y} \\ 4t^2(4s^2 + 1) &= 2tx_1 = x_1^2z_2^2/(x_2^2 + z_2^2) = x_1^2 - \delta x_2^2, \end{aligned}$$

y así resulta la igualdad anunciada

$$\begin{aligned} f &= (T^2 - x_1)^2 - \delta x_2^2 = T^4 - 2x_1T^2 + (x_1^2 - \delta x_2^2) \\ &= T^4 - 4t(4s^2 + 1)T^2 + 4t^2(4s^2 + 1) = P_{K,\alpha}. \end{aligned}$$

Analizamos ahora el caso en que $x_2^2 + z_2^2 = 0$. Ya hemos probado que $z_2 \neq 0$, así que $(x_2/z_2)^2 = -1$, luego este caso sólo se presenta si -1 es un cuadrado en K . De la igualdad (4) se sigue que $x_1 = 0$, por lo que denotando $a = \delta x_2^2 \in K$ el polinomio mínimo de α sobre K es $f = T^4 - a$.

Recíprocamente, se trata de probar que si existe un elemento primitivo α de la extensión $E|_K$ cuyo polinomio mínimo sobre K tiene la forma del enunciado, entonces el grupo de Galois $G(E : K)$ es cíclico de orden 4. Esto es bien conocido en el caso en que $P_{K,\alpha} = T^4 - a$, donde $a \in K^*$ y existe $i \in K$ tal que $i^2 = -1$, véase por ejemplo [3], Thm. 10, pg. 214, y lo incluimos aquí porque es muy sencillo. Las raíces de $P_{K,\alpha}$ en un cierre algebraico de K son $\alpha, -\alpha, \alpha i$ y $-\alpha i$. El K -automorfismo σ de E que cumple $\sigma(\alpha) = \alpha i$ tiene orden 4, ya que $\sigma(i) = i$, pues $i \in K$, y por ello $\sigma^2(\alpha) = \sigma(\alpha)i = \alpha i^2 = -\alpha$.

Suponemos ahora que -1 no es un cuadrado en K y existe $\alpha \in E$ tal que $E = K(\alpha)$ y cuyo polinomio mínimo sobre K es

$$P_{K,\alpha} = T^4 - 4t(4s^2 + 1)T^2 + 4t^2(4s^2 + 1), \text{ para ciertos } s, t \in K.$$

Nótese que $t \neq 0$ y $1 + 4s^2 \neq 0$ ya que $P_{K,\alpha}$ es irreducible en $K[T]$. También $s \neq 0$, pues en otro caso $P_{K,\alpha} = T^4 - 4tT^2 + 4t^2 = (T^2 - 2t)^2$, lo que también contradice la irreducibilidad de $P_{K,\alpha}$. Reescribimos

$$P_{K,\alpha} = (T^2 - 2t(4s^2 + 1))^2 - 16s^2t^2(4s^2 + 1),$$

por lo que $\alpha^2 = 2t(4s^2 + 1) \pm 4st\sqrt{4s^2 + 1}$ y, en particular,

$$\rho = \sqrt{4s^2 + 1} = \frac{\pm(\alpha^2 - 2t(4s^2 + 1))}{4st} \in K(\alpha) = E.$$

Nótese que $\rho \in E \setminus K$, pues en caso contrario

$$\begin{aligned} P_{K,\alpha} &= (T^2 - 2t(4s^2 + 1))^2 - 16\rho^2s^2t^2 \\ &= (T^2 - 2t(4s^2 + 1) - 4\rho st)(T^2 - 2t(4s^2 + 1) + 4\rho st), \end{aligned} \quad (5)$$

y $P_{K,\alpha}$ sería reducible en $K[T]$, lo cual es falso. Las raíces de $P_{K,\alpha}$ son $\alpha, -\alpha, \beta$ y $-\beta$, donde $\alpha^2\beta^2 = P_{K,\alpha}(0) = 4\rho^2t^2$ y, despejando, podemos suponer que $\beta = 2\rho t/\alpha \in K(\alpha) = E$.

Por tanto E es el cuerpo de descomposición sobre K del polinomio $P_{K,\alpha}$, lo que implica que la extensión $E|_K$ es de Galois. En consecuencia, el grupo $G(E : K)$ tiene orden 4, y para demostrar que es cíclico basta encontrar un K -automorfismo de E de orden 4. Como $\rho \in E \setminus K$ existe un K -automorfismo σ de E tal que $\sigma(\rho) \neq \rho$, y este es el automorfismo de orden 4 buscado. En efecto, $\rho^2 \in K$ luego $\sigma(\rho)^2 = \sigma(\rho^2) = \rho^2$, por lo que $\sigma(\rho) = -\rho$. Así,

$$\sigma(\alpha) \cdot \sigma(\beta) = \sigma(\alpha\beta) = \sigma(2t\rho) = 2t\sigma(\rho) = -2t\rho = -\alpha\beta. \quad (6)$$

En particular σ no es la identidad y, puesto que $K(\alpha) = E = K(\beta)$, necesariamente $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ y $\sigma(\beta) \neq \beta$. Esto implica, por (6), que $\sigma(\alpha) \neq -\alpha$, luego o bien $\sigma(\alpha) = \beta$ o bien $\sigma(\alpha) = -\beta$. En el primer caso

$$\sigma^2(\alpha) = \sigma(\sigma(\alpha)) = \sigma(\beta) = -\alpha\beta/\sigma(\alpha) = -\alpha,$$

y en el segundo

$$\sigma^2(\alpha) = \sigma(\sigma(\alpha)) = \sigma(-\beta) = \alpha\beta/\sigma(\alpha) = -\alpha.$$

En cualquier caso σ^2 no es la identidad, luego σ tiene orden 4, como queríamos probar. \square

Observaciones 3.1 (1) En la demostración anterior hemos probado que las raíces de $P_{K,\alpha}$ en un cierre algebraico de K son

$$\alpha, -\alpha, 2t\sqrt{4s^2 + 1}/\alpha \quad \text{y} \quad -2t\sqrt{4s^2 + 1}/\alpha,$$

y también hemos señalado que la irreducibilidad de $P_{K,\alpha}$ en $K[T]$ implica que $\rho = \sqrt{4s^2 + 1} \in E \setminus K$.

(2) Empleando la fórmula para el discriminante de un polinomio de grado 4, véase por ejemplo [1], §4, 2.14, el del polinomio $P_{K,\alpha}$ del Teorema anterior resulta ser

$$\Delta(P_{K,\alpha}) = (2^9 \cdot t^3 s^2 (4s^2 + 1))^2 (4s^2 + 1),$$

que no es un cuadrado en K , ya que $\rho = \sqrt{4s^2 + 1} \in E \setminus K$. Además, si denotamos $\delta = 2^9 \cdot \rho t^3 s^2 (4s^2 + 1)$ una raíz del discriminante $\Delta(P_{K,\alpha})$, se deduce de (5) en la demostración del Teorema 1.3 que el polinomio $P_{K,\alpha}$ es reducible en $K(\delta)[T]$, luego por la Proposición [1], §8, 3.9 el grupo de Galois de $E|_K$ es \mathbb{Z}_4 .

Para estudiar extensiones de Galois de grado 4 cuyo grupo de Galois es $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ emplearemos el siguiente lema.

Lema 3.2 Sean K un cuerpo de característica 0 y $s, t \in K$ dos elementos que no son un cuadrado en K y tales que $K(\sqrt{s}) \neq K(\sqrt{t})$. Entonces

$$K(\sqrt{s}, \sqrt{t}) = K(\sqrt{s} + \sqrt{t}) \quad \text{y} \quad [K(\sqrt{s}, \sqrt{t}) : K] = 4.$$

Demostración. Es evidente que $K \subset L = K(\sqrt{s} + \sqrt{t}) \subset E = K(\sqrt{s}, \sqrt{t})$ y $\sqrt{t} \notin K(\sqrt{s})$, porque en caso contrario $K \subsetneq K(\sqrt{t}) \subset K(\sqrt{s})$, luego, por la transitividad del grado,

$$2 = [K(\sqrt{s}) : K] = [K(\sqrt{s}) : K(\sqrt{t})] \cdot [K(\sqrt{t}) : K] = 2[K(\sqrt{s}) : K(\sqrt{t})],$$

de donde $[K(\sqrt{s}) : K(\sqrt{t})] = 1$, es decir, $K(\sqrt{s}) = K(\sqrt{t})$, contra la hipótesis. En consecuencia, $K \subsetneq K(\sqrt{s}) \subsetneq K(\sqrt{s})(\sqrt{t}) = E$, por lo que

$$[E : K] = [E : K(\sqrt{s})] \cdot [K(\sqrt{s}) : K] = 2[K(\sqrt{s})(\sqrt{t}) : K(\sqrt{s})] = 4,$$

lo que prueba la segunda afirmación del enunciado. Para la primera, nótese que

$$s + t + 2\sqrt{st} = (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2 \in L, \quad \text{luego} \quad \sqrt{st} \in L.$$

Además, hemos visto que $\sqrt{t} \notin K(\sqrt{s})$, de donde se sigue que $\sqrt{st} \notin K$, y esto implica que $K \subsetneq K(\sqrt{st}) \subset L \subset E$. En consecuencia,

$$4 = [E : K] = [E : L] \cdot [L : K(\sqrt{st})] \cdot [K(\sqrt{st}) : K] = 2[E : L] \cdot [L : K(\sqrt{st})].$$

Para demostrar que $E = L$ basta ver $[E : L] = 1$ y, por la igualdad anterior, esto equivale a que $L \neq K(\sqrt{st})$. En caso contrario $\sqrt{s} + \sqrt{t} \in K(\sqrt{st})$, luego existen $x, y \in K$ tales que $\sqrt{s} + \sqrt{t} = x + y\sqrt{st}$ y, elevando al cuadrado,

$$s + t + 2\sqrt{st} = (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2 = (x + y\sqrt{st})^2 = x^2 + y^2 st + 2xy\sqrt{st}.$$

Esta igualdad equivale a que $x^2 + y^2 st = s + t$ y $xy = 1$, por lo que $s + t = x^2 + st/x^2$, esto es x^2 es raíz del polinomio

$$T^2 - (s + t)T + st = (T - s)(T - t),$$

luego $s = x^2$ o $t = x^2$, lo que es falso pues ni s ni t son cuadrados en K . \square

Demostración del Teorema 1.4 Supongamos que $E|_K$ es una extensión de Galois cuyo grupo de Galois es $G(E : K) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Este grupo tiene tres elementos de orden 2, luego se deduce del Teorema fundamental de la teoría de Galois que $E|_K$ admite tres subextensiones de grado 2. Consideramos dos de ellas $L|_K$ y $F|_K$, y sean $s, t \in K$ que no son cuadrados en K tales que $L = K(\sqrt{s})$ y $F = K(\sqrt{t})$. Se deduce del Lema 3.2 que $\alpha = \sqrt{s} + \sqrt{t}$ es un elemento primitivo de $E|_K$, y elevando al cuadrado,

$$s = (\alpha - \sqrt{t})^2 = \alpha^2 + t - 2\alpha\sqrt{t}, \text{ esto es, } 2\alpha\sqrt{t} = \alpha^2 + t - s.$$

Elevando al cuadrado de nuevo se tiene

$$4t\alpha^2 = (\alpha^2 + t - s)^2 = \alpha^4 + 2(t - s)\alpha^2 + (t - s)^2.$$

Por tanto, α es raíz del polinomio $f = T^4 + 2(s + t)T^2 + (s - t)^2 \in K[T]$, y de hecho $f = P_{K,\alpha}$ es el polinomio mínimo de α sobre K puesto que $\deg(f) = [E : K] = [K(\alpha) : K]$.

Supongamos, recíprocamente, que $E|_K$ es una extensión de grado 4 y que existe un elemento primitivo α de $E|_K$ cuyo polinomio mínimo sobre K es $P_{K,\alpha} = T^4 + 2(s + t)T^2 + (s - t)^2$ para ciertos $s, t \in K$. Como $P_{K,\alpha}$ carece de monomios de grado impar sus raíces son $\alpha, -\alpha, \beta$ y $-\beta$, donde $\alpha^2\beta^2 = P_{K,\alpha}(0) = (s - t)^2$. Cambiando β por $-\beta$ si es preciso, se puede suponer que $\beta = (s - t)/\alpha$ y, en cualquier caso, $E = K(\alpha)$ es un cuerpo de descomposición de $P_{K,\alpha}$ sobre K , por lo que la extensión $E|_K$ es de Galois. Para demostrar que $G(E : K) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es suficiente probar que no existen K -automorfismos de E de orden 4. Para ello comprobaremos que $\sigma^2(\alpha) = \alpha$ para cada $\sigma \in G(E : K)$.

Esto es obvio si $\sigma(\alpha) = \alpha$, y como $\sigma(\alpha) \in K(\alpha)$ es raíz de $P_{K,\alpha}$ necesariamente $\sigma(\alpha) \in \{-\alpha, \beta, -\beta\}$. Si $\sigma(\alpha) = -\alpha$ entonces $\sigma^2(\alpha) = \sigma(-\alpha) = \alpha$,

mientras que si $\sigma(\alpha) = \beta$ se tiene

$$\sigma^2(\alpha) = \sigma(\beta) = (s - t)/\sigma(\alpha) = (s - t)/\beta = \alpha.$$

Por último, si $\sigma(\alpha) = -\beta$ entonces

$$\sigma^2(\alpha) = -\sigma(\beta) = (t - s)/\sigma(\alpha) = (t - s)/(-\beta) = \alpha. \quad \square$$

Observación 3.3 La demostración del Teorema anterior 1.4 es autocontenida. También podríamos haber probado que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es el grupo de Galois de la extensión $K(\alpha)|_K$, donde el polinomio mínimo de α sobre K es $P_{K,\alpha} = T^4 + 2(s + t)T^2 + (s - t)^2$ utilizando la Proposición §8, 3.9 de [1]. Según dicha proposición basta demostrar que el discriminante $\Delta(P_{K,\alpha})$ de este polinomio es un cuadrado en K y la resolvente cúbica g de f es reducible en $K[T]$. Ahora bien, empleando la fórmula para el discriminante de un polinomio de grado 4, véase por ejemplo [1], §4, 2.14,

$$\begin{aligned} \Delta(P_{K,\alpha}) &= 256(s - t)^6 - 512(s + t)^2(s - t)^4 + 256(s + t)^4(s - t)^2 \\ &= 256(s - t)^2((s - t)^2 - (s + t)^2)^2 = \delta^2, \end{aligned}$$

donde $\delta = 16(s - t)((s - t)^2 - (s + t)^2)$, mientras que la resolvente cúbica de f se calcula empleando la Definición [1], §5, 3.5.5, y vale

$$g = T^3 + 16(s + t)T^2 + 16stT = T(T^2 + 16(s + t)T + 16st),$$

que es reducible en $K[T]$.

Referencias

- [1] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz. *Anillos y cuerpos conmutativos*. Editorial de la UNED, tercera edición. (2002).
- [2] I. Kersten and J. Michalíček. *A characterization of Galois field extensions of degree 3*, Comm. Algebra, 15 (1987), n° 5, 927-933.
- [3] S. Lang. *Algebra*, Addison-Wesley (1965).

Dos resultados del valor medio

Ángel Plaza y Sergio Falcón

Departamento de Matemáticas

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

aplaza@dmate.ulpgc.es, sfalcon@dma.ulpgc.es

Abstract

In this article two results about “mean value” are proved. The first one is proved by Rolle’s theorem, while the second one is proved by Flett’s theorem.

Introducción

Muchas relaciones del valor medio pueden demostrarse como aplicación del Teorema de Rolle o de algún otro teorema del valor medio. El propósito de esta breve nota es presentar dos de estos resultados. En el primer caso, la prueba que presentamos utiliza el teorema de Rolle. Este resultado apareció como problema propuesto en la sección de problemas de la *Electronic Journal of Differential Equations* [2]. Aquí presentamos una de las soluciones aceptadas por la revista [3]. La segunda relación de valor medio que presentamos se demuestra mediante el teorema de Flett [1] y de otro resultado debido a C. Lupu y T. Lupu [5].

1. Una propiedad del valor medio

Teorema: Sea $f : [0,1] \rightarrow R$ una función diferenciable con $f(0) = f(1)$. Entonces existe un punto $\xi \in (0,1)$, tal que

$$\xi^2 f(\xi) = 2 \int_0^\xi xf(x)dx.$$

Demostración: Consideramos la función

$$h(t) = \int_0^t x^2 f'(x)dx.$$

Puesto que

$$h(t) = t^2 f(t) - 2 \int_0^t xf(x)dx,$$

el problema equivale a demostrar que existe un punto $\xi \in (0,1)$, tal que $h(\xi) = 0$. Por hipótesis, se tiene que $f(0) = f(1)$. Nótese que si la función f es constante en algún subintervalo $[0, a] \subset [0,1]$, la propiedad se cumple trivialmente, pues ambos miembros de la igualdad son iguales para cualquier $\xi \in (0, a)$. Consideremos el primer intervalo $[0, a] \subset [0,1]$ en el que $f(a) = f(0)$. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que $f(t) > f(0) \geq 0$, para todo $t \in (0, a)$. Un argumento similar se aplicaría a otro caso. Por el teorema de Rolle, existe un punto $c \in (0, a)$, tal que $f'(c) = 0$. Puesto que $f(t) > f(0) \geq 0$, para $t \in (0, a)$, se puede suponer que $f'(t) > 0$, para todo $t \in (0, c)$. Por consiguiente, en el mismo intervalo se cumple que $t^2 f'(t) > 0$. Por todo lo anterior, resulta que $h(0) = 0$,

$$h(c) = \int_0^c x^2 f'(x)dx > 0$$

y

$$h(a) = \int_0^a x^2 f'(x)dx < \int_0^a f'(x)dx = f(a) - f(0) = 0.$$

Por el teorema de Bolzano, existe un punto $\xi \in (0, c)$ tal que $h(\xi) = 0$.

□

2. Otra propiedad del valor medio

Antes de presentar la segunda propiedad del valor medio, recordemos dos resultados que serán usados en la demostración.

El primero de ellos es el *teorema de Flett* [1], del cual, para comodidad del lector, se presenta también una prueba.

Teorema del valor medio de Flett: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con $f'(a) = f'(b)$. Entonces existe un punto $\xi \in (a, b)$, tal que

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} = f'(\xi).$$

Demostración: Podemos suponer que $f'(a) = f'(b) = 0$, pues en otro caso consideraríamos la función $f(x) - xf'(a)$. Sea φ la función definida por

$$\varphi(a) = f'(a) = 0, \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

para $x \in (a, b]$. La función φ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en $(a, b]$, y

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2}$$

para $x \in (a, b]$. La conclusión del teorema de Flett se sigue de la existencia de un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$. Esto es inmediato por el teorema de Rolle si $\varphi(b) = 0$. Supongamos que $\varphi(b) > 0$. (Un argumento similar se emplearía si $\varphi(b) < 0$). Entonces

$$\varphi'(b) = -\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)^2} = -\frac{\varphi(b)}{(b - a)} < 0$$

Por tanto, existe $x_1 \in (a, b)$ tal que $\varphi(x_1) > \varphi(b)$. Como la función φ es continua y $\varphi(x_1) > \varphi(b) > \varphi(a)$, existe un punto $x_2 \in (a, x_1)$ tal que $\varphi(x_2) = \varphi(b)$. El resultado es consecuencia del teorema de Rolle aplicado a la función φ en el intervalo (x_2, b) .

□

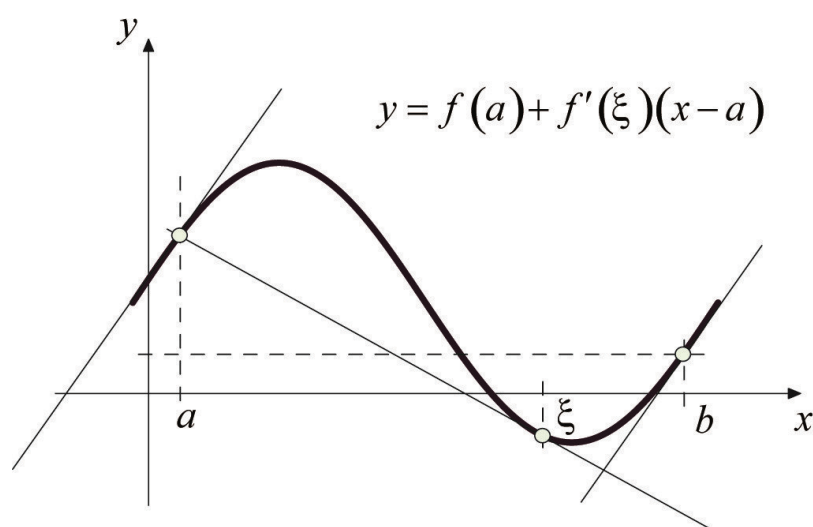


Figura 1: Interpretación geométrica del teorema de Flett

El teorema de Flett considera una función diferenciable en un intervalo real tal que las rectas tangentes en los extremos del intervalo son paralelas. El teorema nos dice entonces que hay un punto, $(\xi, f(\xi))$, en la curva $y = f(x)$, donde la recta tangente pasa además por el punto $(a, f(a))$, como se muestra en la Figura 1.

Otros teoremas del valor medio para operadores lineales integrales se pueden encontrar en la referencia [5]. De ellos, reproducimos el siguiente lema, que será utilizado más adelante.

Lema: Sea $f : [0, 1] \rightarrow R$ una función continua con

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Entonces existe un punto $c \in (0,1)$, tal que

$$\int_0^c xf(x)dx = 0.$$

Demostración: Sea h la función definida por $h(0) = f(0)/2$, y

$$h(s) = \frac{1}{s^2} \int_0^s xf(x)dx$$

para $s \in (0,1]$. La función h es continua en $[0,1]$. Sea φ definida por

$$\varphi(t) = \int_0^t h(s)ds, \text{ y } \varphi(0) = 0.$$

Calculamos $\varphi(1)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{-1}{s} \left(\int_0^s xf(x)dx \right) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{s} \int_0^s xf(x)dx \Big|_{\varepsilon}^1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{s} f(s)ds \\ &= - \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Por el teorema de Rolle existe un punto $c \in (0,1)$ tal que $\varphi'(c) = 0$, de donde se sigue el resultado. □

Teorema: Sea $f : [0,1] \rightarrow R$ una función continua con

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Entonces existe $c \in (0,1)$, tal que

$$c^2 f(c) = \int_0^c xf(x)dx.$$

Demostración: Por el lema anterior existe $d \in (0,1)$, tal que

$$\int_0^d x f(x) dx = 0$$

Consideremos la función diferenciable

$$g(t) = \int_0^t x f(x) dx$$

Es claro que $g(0) = 0 = g(d)$. Por tanto, por el teorema de Rolle, existe un $b \in (0,d)$ tal que $g'(b) = 0$. Nótese que $g'(x) = x f(x)$ y, por tanto, también $g'(0) = 0$. Por el teorema de Flett, existe $c \in (0,b)$, tal que

$$g'(c) = c f(c) = \frac{\int_0^c x f(x) dx - \int_0^0 x f(x) dx}{c - 0},$$

de donde

$$c^2 f(c) = \int_0^c x f(x) dx.$$

□

Referencias

- [1] T.M. Flett, *A Mean Value Theorem*. The Mathematical Gazette 1958; 42 (339) pp. 38-39.
- [2] C. Lupu, Proposed Problem 2010-1, *Electronic Journal of Differential Equations* (EJDE) 2010. <http://math.uc.edu/ode/odeprobs/p2010-1.pdf>
- [3] A. Plaza, S. Falcón, Solution to Problem 2010-1, *Electronic Journal of Differential Equations* (EJDE) 2010. <http://math.uc.edu/ode/odesols/s2010-1a.pdf>
- [4] D. V. Thong, Proposed Problem 2011-4, *Electronic Journal of Differential Equations* (EJDE) 2011. <http://math.uc.edu/ode/odeprobs/p2011-4.pdf>
- [5] C. Lupu, T. Lupu, Mean value theorems for some linear integral operators, *Electronic Journal of Differential Equations* (EJDE) (117) 2009.

Reseña de un “manual de prácticas” de cálculos matemáticos sobre un software libre (gratuito)

FRANCISCO BOTANA: *PPW2.0 Prácticas de Matemáticas Pola Web*. (Libro de 67 págs. en gallego con DVD adjunto). ISBN: 978-84-8158-536-0. Depósito Legal: VG-679-2011. *Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo*. Telf. 986 812235. Correo electrónico: sep@uvigo.es Telf. 986 812 235. Pag. web: webs.uvigo.es/fbotana/ppw20

El autor es Prof. Titular de la Universidad de Vigo. Ha publicado numerosos trabajos sobre matemática computacional en revistas de prestigio internacional. Gran parte de sus trabajos se han enfocado hacia el “mathware”, especialmente en el campo de la demostración automática y los sistemas de geometría dinámica, llegando a desarrollar sistemas propios en ese campo.

Este nuevo libro con su DVD adjunto proporcionan una colección de páginas web interactivas de temas matemáticos del nivel de los primeros cursos de Grado en Ingenierías y Ciencias Matemáticas, Físicas, etc. Su utilización supone un complemento para la docencia, permitiendo desarrollar un estudio individual a los alumnos, liberándolos de cálculos repetitivos o tediosos.

Como es habitual en este tipo de manuales, el libro se presenta como colección de hojas de trabajo. En la hoja inicial se hace una breve descripción del modo de operar en el sistema computacional utilizado, el cual comentaremos mas adelante. En cada una de las restantes hojas de trabajo se trata la práctica del cálculo automático para un tema matemático concreto.

Cada una de las hojas de trabajo consta de tres partes. En la primera parte aparece una única pantalla de ordenador que muestra con toda claridad cómo introducir los datos y cómo se obtienen los resultados. La segunda parte menciona las restricciones de uso. Y en la tercera parte se propone una colección de ejercicios a efectuar por el usuario.

He aquí la lista de hojas de trabajo:

0. Sage: una aplicación libre para matemáticas.
1. Representación de funciones $y=f(x)$
2. Representación simultánea de funciones $y=f(x)$, $y=g(x)$, ...

3. Representación de funciones a trozos
4. Límite de funciones de una variable
5. Derivada de una función $f(x)$
6. Desarrollo de $f(x)$ en serie de Taylor
7. Primitiva de una función $f(x)$
8. Integral definida de una función $f(x)$
9. Representación de funciones de dos variables $z=f(x,y)$
10. Representación de funciones implícitas $F(x,y,z)=0$
11. Representación simultánea de funciones de dos variables $z1=f(x,y), z2=g(x,y),...$
12. Límite de funciones de dos variables
13. Derivadas parciales de funciones reales de varias variables $f(x,y,z,...)$
14. Desarrollo de $f(x,y)$ en serie de Taylor
15. Extremos relativos de funciones de dos o tres variables
16. Extremos condicionados de funciones de dos o tres variables con una o dos condiciones.
17. Gradiente, curvas de nivel y campo gradiente de una funciones de dos variables
18. Gradiente, superficies equipotenciales y campo gradiente de funciones de tres variables
19. Plano tangente a una superficie $z=f(x,y)$ en un punto
20. Visualización de recintos planos
21. Visualización de reflexiones 3D
22. Integrales dobles
23. Integrales triples
24. Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

El software que acompaña al libro se presenta en forma de *DVD*, bajo el nombre **PPW2.0** (abreviación de **Prácticas de matemáticas Pola Web**, versión **2.0**).

El sistema computacional utilizado, *Sage*, es un poderoso software matemático libre o gratuito, sobre el sistema operativo *GNU/Linux*, también libre o gratuito. *Sage* es un software gratuito y de código abierto, que permite utilizar las *TIC* a todo tipo de usuarios. Sus características mas notables son: la integración de múltiples herramientas, la posibilidad de acceso remoto por Internet y la opción de código abierto.

Su creador, el Prof. William Stein de la Universidad de Washington, ha desarrollado este sistema de algebra computacional, como “alternativa libre y de código abierto” a los sistemas tradicionales de algebra computacional, como son Mathematica o Maple.

Sage se puede utilizar de varias formas distintas, según sea el computador en que se desee operar. Se puede instalar en un *PC* con sistema operativo *Mac* o *GNU/Linux*, descargando el correspondiente fichero de la página web siguiente: <http://www.sagemath.org/download.html>, sin mas requisitos que descomprimirlo y ejecutarlo. Pero también se puede utilizar de modo remoto, sin instalar ni descargar nada, solamente conectándose a Internet, a través de la página web anteriormente mencionada.

No este lugar de entrar en detalle sobre los modos de calcular en este sistema de cálculo algebraico, conformándonos simplemente con dar noticia de su existencia y utilidad. Los detalles de los distintos modos de utilización se comentan en el libro que estamos reseñando.

También se puede obtener amplia información sobre Sage y sobre las citadas hojas de trabajo visitando la página web: <http://webs.uvigo.es/fbotana/ppw20>, creada a tal efecto por el autor del manual reseñado. Incluye toda la información necesaria en su colección de carpetas “Documentos y Videos”.

El manual es recomendable, no sólo para alumnos del nivel de Grado en Ingenierías y Ciencias Matemáticas, Físicas, etc. También para profesores de matemáticas de distintos niveles, que no dispongan de licencia de sistemas matemático-computacionales y deseen incorporarse al uso nuevas tecnologías aplicadas al cálculo matemático a través de software libre o gratuito.

Eugenio Roanes Macías

Petición de direcciones de correo electrónico a nuestros socios

Con el fin de mejorar la comunicación rápida de eventos profesionales a nuestros socios, les solicitamos que quienes usen correo electrónico nos envíen un mensaje a la dirección de correo del Secretario de nuestra Sociedad

`jmsordoj@edu.ucm.es`

en que figure el nombre y apellidos del Socio y la dirección de correo electrónico en que desee recibir nuestros mensajes.

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTeX. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm (exactamente como este archivo). El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "Abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, ...), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTeX, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta puigadam@mat.ucm.es , o bien en un disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,
56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,
76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89 y 90

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número

3025-0006-24-1400002948

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.