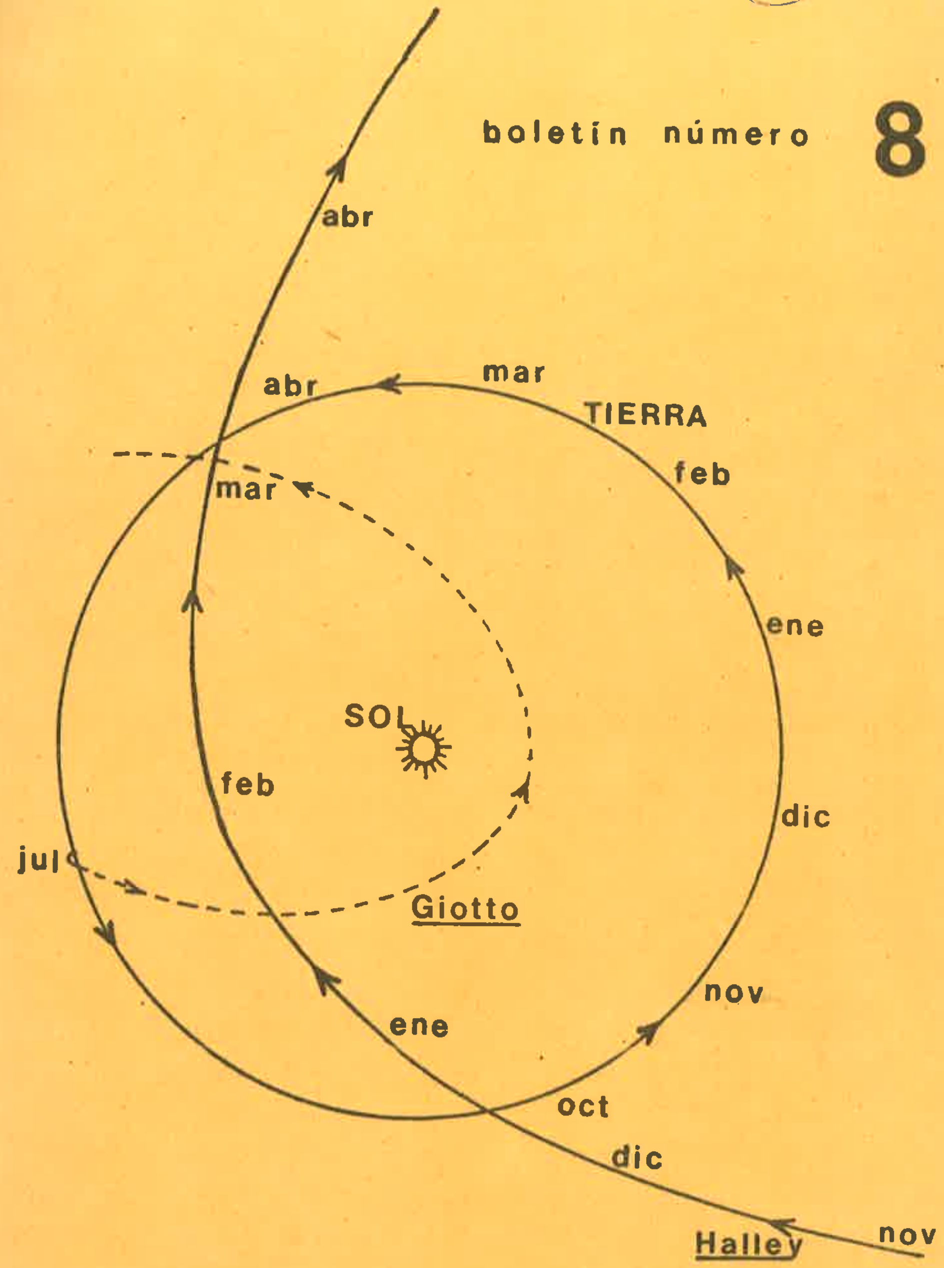
boletín número **8**



sociedad castellana

PUIG ADAM

de profesores de matemáticas

B O L E T I N de la Sociedad Castellana de Profesores de Matemáticas "PUIG ADAM"

nº8 (1985-86)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

  Ronta de Atocha 2 (INBAD)
  MADRID

- La correspondencia deberá dirigirse al

  Apartado nº 9479
  28080 MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

  FERNANDEZ BIARGE, Julio
  PASCUAL IBARRA, José Ramón

- La portada, de J.F.B. muestra las órbitas de la Tierra, del cometa Halley y de la sonda Giotto lanzada en Julio pasado, para alcanzar al cometa en marzo de 1986.

INDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Julio Fernández Biarge

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: José Francisco Carballido Quesada

Vicesecretario: María Luisa Pacios

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

- NOTICIAS -

38ª Encuentro de la C.I.E.A.E.M.

La "Comisión internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de las matemáticas" anuncia la celebración de su 38ª Reunión para los días 24 al 30 de julio de 1986, en la Universidad de Southampton (Inglaterra).

El tema general elegido es:

"La Matemática para alumnos de 14 a 17 años, ¿es realmente necesaria?".

Como subtemas relacionados se proponen:

a) ¿De qué manera la decisión de aprender matemáticas, entre los 14 y los 17 años, viene influída por factores sociales y psicológicos?

b) ¿Cómo se podrían mejorar los métodos y la organización de la enseñanza en estos años?

c) ¿Cómo se desarrollan las necesidades matemáticas de los alumnos más dotados?

d) ¿Cómo podría mejorarse la ayuda a los menos dotados en sus estudios matemáticos?

e) ¿Para los alumnos entre 14 y 17 años, las ciencias naturales, la tecnología, la experiencia de la vida activa , deberían relacionarse con las matemáticas?

f) ¿Se podrían prever en la enseñanza de la matemática de los alumnos de menos de 14 años todas las necesidades mencionadas?

El coste global de asistencia al Encuentro está previsto alrededor de 200 libras esterlinas, comprendido alojamiento en las residencias de la Universidad, comidas, actos programados y excursión. También hay posibilidad de acampada.

Para preinscripción y la recepción de informes ulteriores dirigirse al organizador local: Peter Bowie, Shalbourne, Marlborough, SN 8 . 3 QD , England.

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas

La Sociedad "Isaac Newton", de las Islas, prosigue sus actividades. Además de la publicación de la Revista "*Números*", con interesantes estudios y experiencias didácticas, promueve frecuentes reuniones de trabajo sobre temas vivos y concretos. Así, en el presente curso, anuncia la celebración de un curso para analizar "*Algunas de las causas metodológicas del fracaso en Matemáticas*"; en Lanzarote (Instituto Agustín de Espinosa, de Arrecife) los días 17 y 18 de enero; en Fuerteventura (Universidad Popular de Puerto del Rosario), los días 20 y 21 del mismo mes; y en Las Palmas los días 21 y 22 de febrero, probablemente.

Durante el mes de marzo, habrá cursos sobre "*Numeración y operaciones. La resolución de problemas*", en Lanzarote y Fuerteventura.

Las VII Jornadas Regionales de la Sociedad tendrán lugar en Lanzarote del 1 al 4 de mayo.

XXII OLIMPIADA MATEMATICA NACIONAL

Como es sabido, la Real Sociedad Matemática Española viene organizando este certamen anual de resolución de problemas. Felizmente ha llegado ya a su vigésimo-segunda edición. A lo largo de estos veintidós años son numerosos los "olímpicos" que han accedido a cátedras de matemáticas en la Universidad o en la Enseñanza Media. Se viene cumpliendo, pues, el objetivo primordial que la Sociead se propuso desde el comienzo: captar para los estudios de Matemáticas a los mejores alumnos, por considerar esta materia básica e imprescindible para realizar la investigación científica y tecnológica, que tanto necesita nuestro país para asegurar su desarrollo.

Hasta este año el concurso se realizaba en el mes de junio entre alumnos que hubieran terminado el curso preuniversitario, y, después, el C.O.U. que le sustituyó. Pero la coincidencia de fechas con las pruebas de acceso a la Universidad -Selectividad- presentaba inconvenientes, por lo cual a partir de este año se celebrarán entre alumnos que hayan terminado el tercer curso del bachillerato. Se pretende también, de esta forma, coordinar y enlazar esta Olimpiada con los concursos que, entre alumnos de 1ª y 2ª, vienen realizando otras Sociedades -como la nuestra- y grupos de profesores, a la vez que con las Olimpiadas internacionales, persiguiendo una mejor selección, e incluso preparación, de aquellos alumnos que puedan asistir a ellas con mayor probabilidad de éxito.

La Olimpiada se hace en dos fases. En una primera, que tiene lugar en las cabeceras de los antiguos distritos universitarios, se seleccionan hasta tres alumnos por distrito, que luego realizarán la fase final en Madrid. Los ganadores de esta primera fase son premiados con una beca de estudios, inde pendiente de su situación económica, pero condicionada a seguir los estudios de la Licenciatura en Matemáticas. Las pruebas de la primera fase, fase distrital, han tenido lugar los días 29 y 30 del pasado mes de noviembre. Las de Madrid se realizaron en la E.T.S. de Ingenieros Industriales, y consistieron en dos sesiones de cuatro problemas cada una, cuyos enunciados figuran al final de esta reseña. Se inscribieron 186 alumnos, de los que se presentaron 144. Es estimulante la respuesta de los Centros a la convocatoria del Concurso; pero, ciertamente, la estadística de los resultados obtenidos no ha sido tan halagüeña, más bien decepcionante. Pues, en efecto, éstas han sido:

Puntuaciones	Nª de alumnos
0	58
1 - 10	64
11 - 20	11
21 - 30	7
31 - 40	2
61 - 80	2

que revelan un nivel medio bastante bajo, y constituyen, por tanto, motivo de preocupación y de reflexión.

Resultados tan pobres, ¿no serán quizá un reflejo más de una posible pérdida que se dice viene produciéndose, de un tiempo a esta parte, en la calidad de nuestra enseñanza? Tal descenso -se habla incluso de fracaso- no sólo debe tener en cuenta, como suele hacerse, el elevado número de suspensos. También, y con tanta o mayor gravedad, la posible ineficacia de los sistemas educativos, el abuso de clases puramente teóricas, que degeneran en un saber memorístico, una equivocada manera de juzgar, que no utiliza métodos correctos de evaluación de conocimientos y aptitudes, y otros factores que no sirven para cultivar y fomentar en el alumno hábitos correctos de pensar y de un quehacer personal, con lo cual se impide a los mejores alumnos acceder a más altos

cotas de saber, esto es, de saber hacer. ¿Cómo se explica si no que nada menos 58 alumnos seleccionados por los centros no hayan conseguido arañar ni siquiera un punto? ¿Con qué criterios se ha hecho la selección de los mejores? ¿Cómo ha sido posible que algun centro haya enviado a la Olimpiada 5 ó 6 alumnos?

Se podría pensar, como disculpa, que los problemas propuestos en la prueba eran demasiado difíciles, inadecuados al nivel de los alumnos, Y, en efecto, lo han sido para la mayoría de estos alumnos; pero no hay que olvidar que la Olimpiada es un concurso para premiar no a alumnos simplemente buenos, normales, sino a aquellos posibles alumnos excepcionalmente dotados para los estudios y el hacer propio de las matemáticas. Alumnos que sean no sólo buenos estudiantes, sino estudiantes realmente buenos, esto es, capaces de un trabajo personal de búsqueda, creación y descubrimiento. Es evidente, por tanto, que la naturaleza y los fines de la Olimpiada, que no es un examen, exige que los problemas propuestos han de tener forzosamente un "índice de discriminación" elevado, asequibles desde luego en el sentido de no requerir más conocimientos que los adquiridos en el bachillerato, pero que posibiliten la selección de los mejores, objetivo primordial de la prueba. Objetivo que se ha logrado bien, pues han sido dos los alumnos que prácticamente han resuelto los ocho problemas, y otros dos han obtenido puntuación suficiente.

Los ganadores, por orden de puntuación, han sido:

1. Alberto Garrido Arribas. Instituto de Cantalejo (Segovia).
2. Carlos Ueno Jacue. Instituto "Cervantes" (Madrid).
3. Carlos Alonso Ramos. Instituto de Las Rozas (Madrid).

Es motivo de satisfacción para nuestra Sociedad la comprobación de que los tres alumnos premiados en esta fase de la

Olimpiada Nacional lo fueron también en nuestros concursos. Garrido en el de 1984, para alumnos de 2ª curso; Ueno en dos, 1983 y 1984, para alumnos de 1ª y 2ª, respectivamente; y Alonso en 1983, para los de 1ª.

Damos a continuación los enunciados de los problemas. Sería interesante que los profesores, a su vez, no dejaran de proponerlos a sus alumnos más destacados, con carácter voluntario, como trabajo libre y, si se quiere, a resolver en equipo.

PROBLEMA 1ª

Se descompone el conjunto N de los números naturales en dos subconjuntos A y B (es decir, $A \cup B = N$, $A \cap B = \emptyset$). Probar que:

1) Existe un número m en N tal que $m+5$ ó $m+6$ están en el mismo subconjunto que m de los dos considerados.

2) Existen infinitos números m con la anterior propiedad.

PROBLEMA 2ª

Tres puntos A, B, C, se unen por segmentos. Sobre la mitad del segmento AB se construye un cuadrado, sobre el segmento BC otro cuadrado y sobre el segmento CA un rectángulo de base CA y altura 4 cm. El área del rectángulo supera en 20 cm^2 a la suma de las áreas de los dos cuadrados. Hallar el área del rectángulo.

PROBLEMA 3ª

Dada la ecuación $z^{1986} - 1 = 0$, calcular la suma de los cuadrados de las distancias entre los afijos de sus raíces.

PROBLEMA 4ª

Demostrar que cualesquiera que sean los números reales x, y, z se cumple:

$$\operatorname{sen}(x^3) + \operatorname{sen}(y^3) + \operatorname{sen}(z^3) - \operatorname{sen}(xyz) < 4$$

PROBLEMA 5ª

Si en el interior de un círculo de radio r se toman 100 puntos, probar que al menos dos de ellos distan menos de $\frac{2r}{9}$.

PROBLEMA 6ª

A un baile asisten 8 chicos y 8 chicas que se sientan alternativamente en fila. ¿De cuántos modos pueden formarse 5 parejas de baile si cada pareja está formada por un chico y una chica inicialmente contiguos?

PROBLEMA 7ª

Dados dos números naturales p y q primos entre sí, se pide calcular:

$$\sum_{k=1}^{q-1} D\left[\frac{kp}{q}\right] \quad y \quad \sum_{h=1}^{p-1} D\left[\frac{hq}{p}\right]$$

donde $D[a]$ indica la parte decimal del número a.

PROBLEMA 8ª

A y B representan los períodos de los desarrollos decimales de $\frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q}$, donde p y q son números naturales. Calcular los p y q mínimos sabiendo que A y B tienen el mismo número de cifras y que el máximo común divisor de A y B es 10989.

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.
- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.
- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.
- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.
- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

ESPAÑA, CAMPEONA POR EQUIPOS EN LA OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

En los torneos deportivos internacionales, los éxitos de nuestros representantes suelen ser más bien escasos y casi siempre individuales. Cuando excepcionalmente se consigue algún trofeo, echamos las campanas al vuelo, los triunfadores son recibidos en olor de multitud, y en todos los periódicos se prodigan los grandes titulares. Las cadenas de radio y televisión contribuyen con sus entrevistas e imágenes a popularizar las figuras de los campeones, considerados casi como héroes nacionales. Pero, cuando cuatro muchachos españoles han conquistado con todo merecimiento un campeonato insólito para nuestra patria, como ha sido el caso de nuestros representantes en la I Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, el feliz suceso ha pasado totalmente inadvertido para la opinión pública. Que sepamos, hasta ahora, cuando redactamos esta noticia, ni una sola línea se ha escrito en la prensa diaria, ni una sola voz se ha escuchado en las radios, ninguna imagen hemos visto en la televisión, que recoja los nombres y las figuras de estos estudiantes. Muchachos que, además de poseer unas facultades y aptitudes específicas para el estudio y la comprensión de una disciplina considerada por la generalidad de la gente como muy difícil, han realizado un esforzado entrenamiento para estar en forma, y lograr así subir al podium de los vencedores. Suplamos, al menos, en nuestra modestia, esta omisión y ofrezcámosles desde aquí el testimonio de nuestra admiración, simpatía y felicitación.

Contrasta esta actitud de nuestros medios de comunicación con la seguida en otros países. Concretamente los países del Este, y en particular la Unión Soviética, acaparadora de medallas olímpicas deportivas, son muy celosos de fomentar la cantera de los futuros investigadores y científicos, por ver en ellos la garantía de su progreso tecnológico, que es, en definitiva, la seguridad de conservar la categoría de potencia mundial. Al igual que en los deportes, también en las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas suele alzarse en los primeros lugares y estos hechos encuentran eco resonante en los períodicos y demás medios informativos.

La O.E.A. (Organización de Estados Americanos) y la O.E.I. (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura), han patrocinado la celebración de esta I Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, cuya organización ha corrido a cargo del Ministerio de Educación Nacional y las Universidades Antonio Nariño y Nacional, de Bogotá. Colombia, superando la reciente tragedia de la erupción del volcán Nevado del Ruíz, la ha realizado, durante la primera quincena de diciembre de 1985, siguiendo las pautas marcadas por las Olimpiadas Internacionales de Europa. Las pruebas, por razones de seguridad, han tenido lugar en la ciudad de Paipa, Boyacá. Han consistido en la resolución de seis problemas, en dos sesiones diarias de cuatro horas y media cada día. Estos problemas son seleccionados por un Comité entre los propuestos por las Delegaciones de los países participantes. Como delegados españoles asistieron don Ceferino Ruíz y doña María Gaspar, profesores de las universidades de Granada y Madrid, respectivamente. Los problemas elegidos, cuyos enunciados publicamos a continuación, fueron de dificultad varia, pretendiendo a la vez estimular a los participantes y un reto a la capacidad inventiva de los mejores para facilitar su selección.

De los 23 países miembros de la O.E.I. sólo presentaron concursantes 10: Argentina, Brasil, Colombia, Cuba, España, Honduras, Panamá, Perú, Puerto Rico y Uruguay. En total 36 alumnos, cuatro por cada país, excepto Brasil y Uruguay que concursaron con dos cada uno. Brasil, Colombia, Cuba y España tienen ya experiencia en estas competiciones internacionales, y, salvo España, la más "novata" de los cuatro, las otras tres ya habían obtenido medallas en algunas.

Obtuvieron medallas de oro Javier Pena, de Colombia, y Ralph Teixeira, de Brasil, ambos con la puntuación máxima posible, 60 puntos, seguidos de Angel Ribalta, de Cuba, con 59. Fueron medallas de plata dos españoles, Ricardo Pérez Marco, 56 puntos, e Ignacio Garijo, 47. Medallas de bronce los también españoles, Carlos Ueno, 45 puntos, y Alberto Garrido, con 44. Calificaciones con las que España alcanza el campeonato por equipos, con 192 puntos, seguida por Cuba, con 178, y Colombia, 159.

De los españoles ganadores, Pérez Marco ha sido alumno del Liceo Francés, de Barcelona; actualmente estudia en París el curso preparatorio para ingreso en las Escuelas Superiores; Garijo cursó el bachillerato en el Instituto de Logroño y ahora es alumno del primer curso de la Licenciatura en Matemáticas; Ueno estudia en el Instituto "Cervantes", de Madrid; y Garijo en el de Cantalejo (Segovia). Estos dos últimos, como se indica en la crónica de la Olimpiada Española en este mismo Boletín, han sido también ganadores de ésta, en su primera fase, y de los concursos organizados por nuestra Sociedad.

La entrega de premios tuvo lugar en Bogotá, el 15 de diciembre, en solemne sesión académica presidida por la Ministra de Educación Nacional colombiana, doctora Liliam Suárez Melo.

Es propósito de la O.E.A., si como es de esperar se superan las dificultades, principalmente económicas, celebrar la segunda olimpiada en enero de 1987, con Uruguay como país anfitrión. También Cuba se ha ofrecido para organizar la cuarta en 1989; pero falta por designar la sede de la tercera. Méjico y Ecuador, ahora ausentes, han anunciado su participación.

En la sección de problemas propuestos damos los enunciados de esta Olimpiada.

α

ACTIVIDADES MATEMATICAS EN EL INSTITUTO "MAESTRO JUAN DE AVILA", DE CIUDAD REAL

Por Salvador Herrero Pallardó
Catedrático del Centro

Nota de la redacción

Nuestro compañero y vicepresidente de la Sociedad en Ciudad Real, Salvador Herrero Pallardó, nos ha enviado el siguiente artículo para su publicación en el Boletín. Es Herrero Pallardó uno de los más entusiastas seguidores de la línea didáctica de don Pedro Puig Adam. Su labor, durante muchos años en la dirección y en la cátedra del Instituto de la capital manchega, ha sido considerable. Prueba de ello, y gracias a su influencia, es el buen número de miembros con que cuenta nuestra Sociedad en la región, así como los alumnos que cursaron el bachillerato en el Instituto y ocupan hoy plazas de profesores de matemáticas en universidades y en la enseñanza media. Próxima su jubilación en el servicio activo, la Redacción del Boletín, en nombre de la Sociedad, se complace en rendir homenaje al querido compañero y expresarle nuestra felicitación por la intensa labor que ha llevado a cabo en sus tareas académicas con la mayor dedicación y entrega.

* * * * *

El actual Instituto de Bachillerato "Maestro Juan de Avila", fue fundado por el general Espartero, en 1843, con la denominación de Instituto Provincial de 2ª Enseñanza, ubicado en el edificio que había sido convento de la Merced, situado en el corazón de la ciudad. Allí funcionó hasta el curso 1967-68 en que pasó a ocupar una moderna construcción en la Ronda de Calatrava. Cuenta con instalaciones adecuadas para el desarrollo de la función educativa: aulas luminosas, laboratorios, biblioteca, capilla, salón de actos, campos de deportes para la práctica del fútbol y baloncesto, un gran gimnasio cubierto anejo al Centro, así como las dependencias administrativas, secretaría y dirección. Todas las asignaturas del plan de estudios disponen de locales para el funcionamiento de los Seminarios respectivos.

En la medida de lo posible, las tareas del Seminario de Matemáticas han procurado seguir las líneas didacticas preconizadas por el maestro Puig Adam: trabajo personal de los alumnos y métodos heurísticos. Mientras que los planes de estudio lo permitieron los libros de texto adoptados fueron siempre los de la "Biblioteca Matemática", escritos por la feliz colaboración de Rey Pastor y Puig Adam. El rendimiento obtenidos se manifestaba, especialmente, en el curso preuniversitario, hoy C.O.U., cuyo texto los alumnos asimilaban sin dificultades insuperables, pues habían aprendido ya a gozar con el estudio de la matemática y a comprender los conceptos expuestos con tanta claridad como maestría.

Con objeto de fomentar las vocaciones incipientes matemáticas, desde el curso 1966-67, en que se constituyó, ha venido funcionando sin interrupción, el "Club Matemático Puig Adam", cuyo primer presidente fue el alumno destacado Jose Mª Martínez-Val y Peñalosa, hoy doctor Ingeniero Industrial -con el número uno de su promoción- y catedrático de Técnica Nuclear en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, de Madrid.

Con la misma finalidad de estimular la afición a las matemáticas, se convocó por el Club en 1969 un concurso de resolución de problemas, con la denominación de "Primer Torneo Matemático Puig Adam", para alumnos del Preu. Se pretendía también una selección de los mejores para su posible participación en la Olimpiada Matemática que había iniciado la Real Sociedad Matemática Española. Se realiza en la misma forma que ésta, y felizmente ha llegado ya a su 17ª edición. Los alumnos ganadores reciben premios consistentes en libros donados por el Instituto, cuya dirección presta su apoyo, y corre incluso con los gastos del posible desplazamiento a Madrid de los seleccionados para la Olimpiada. Los premiados en el primer torneo fueron: Antonio Fernández García, José Flores Gómez, José Luis Valle Gómez y Juan Manuel Linares Cáceres. De ellos, algunos son hoy profesores de Universidad o de Enseñanza Media. Linares es Vicepresidente de nuestra Sociedad en Toledo.

A partir del curso 81-82, con análogos fines, se organiza el "Torneo matemático Tomás Vicente Zosca", para alumnos del primer año, y en el de 83-84 el "Torneo Rey Pastor", para alumnos de segundo. Estos certámenes tienen lugar todas las semanas y vienen haciéndose ya durante cinco y tres años, respectivamente.

En el Seminario de Matemáticas, se edita, con colaboración de profesores y alumnos, un "Mural Matemático", con secciones fijas, como son: Galería de matemáticos ilustres; Miscelánea matemática; Efemérides; Matemáticas recreativas; Maravillas del Cielo; Temas de divulgación, etc. No podía pasar inadvertido el XXV aniversario del fallecimiento del maestro Puig. El día 11 de enero, a las once y media se celebró una Misa en la capilla del Instituto por el eterno descanso de su alma. El Mural Matemático se dedicó integramente a honrar su memoria y dar a conocer a los alumnos la ejemplaridad de su vida y de su obra.

Se recordaron su extensa labor científica, publicaciones didácticas, conferencias, participación en congresos. Se hizo mención especial de la XI Reunión de la Comisión Internacional que don Pedro organizó en el Instituto de San Isidro, con la I Exposición de Material Didáctico, instalada, con este motivo, en abril de 1957. En el Mural se mostraron diversos trabajos científicos y didácticos, recogidos en el libro publicado por la Revista de Enseñanza Media en su memoria "Ideas actuales sobre la Matemática y su Didáctica", debidos a Pascual Ibarra, Fernández Biarge, García Rodeja, Walusinski, Servais, E. Castelnuovo, Drenckham, Gattegno, Fletcher...

Otra actividad desarrollada en el Instituto es la que tiene lugar en lo que podríamos llamar Cursos de Ampliación, en los que con carácter voluntario, en horas no lectivas, se imparten clases sobre temas concretos que no figuran en los programas oficiales, tales como: Geometría Analítica unidimensional; Fichas perforadas y su aplicación a la teoría de conjuntos; Lógica matemática y sistemas de numeración; Complementos de matemáticas para alumnos de Informática; Complementos de Matemáticas y su aplicación al Dibujo Lineal; Elementos de Cosmografía, etc.

Si bien estas clases van destinadas a alumnos con mayor interés, no se descuida, tampoco, la atención a los alumnos más flojos en la comprensión de las matemáticas, y así, para ellos, se tienen durante el curso clases especiales de recuperación de las evaluaciones pendientes, y en el mes de julio, cursos de verano dedicados a los que no lograron superar las pruebas en la convocatoria de junio.

Por último, mencionaremos que en noviembre de este curso académico ha quedado constituido el "Grupo Matemático Puig Adam", que sustituye al antiguo Club. Ha aceptado la Presidencia de Honor, el director del Instituto, y ostenta la presidencia efectiva la destacada alumna del tercer año de B.U.P., Angela Fernández Martínez, primer premio en los concursos de resolución de problemas en los cursos anteriores. Forma equipo con un nutrido grupo de alumnos y colabora todo el Seminario de profesores de matemáticas. Permítaseme expresar a unos y otros mi gratitud, sin cuya eficaz y leal colaboración no sería posible proseguir nuestra labor en beneficio de la enseñanza de la Matemática en el Centro.

EL COMETA HALLEY

Por José R. Pascual Ibarra

En estos meses tenemos la visita de un viejo amigo, el cometa Halley, puntual en su cita con los astrónomos. Puntualidad que es de resaltar, porque no es una virtud común a numerosos cometas que, al parecer, suelen frecuentemente presentarse en nuestros cielos de forma arbitraria. Tal es el caso, por ejemplo, del cometa que vino a visitarnos en 1973, descubierto por el astrónomo checo Kohoutek, que desde entonces, como es costumbre, lleva el nombre de su descubridor. El Kohoutek, en su perihelio, se aproximó al Sol hasta una distancia de 37 millones de kilómetros (cerquísima en términos astronómicos), para después alejarse en su desemesurada carrera por los espacios siderales, camino de su afelio, situado a una distancia de 538.050 millones de kilómetros. Para su retorno -¿si es qué vuelve?- habrá que esperar unos ¡doscientos mil años!

No es, pues, extraño que en la antigüedad y en la Edad Media, y hasta en tiempos recientes, la aparición súbita de estos cuerpos errantes con sus impresionantes cabelleras (cometa en griego), desobedientes a las leyes de los astros y planetas entonces conocidos, fueran considerados como fenómenos sobrenaturales, y, en consecuencia, como presagio de desastres (mala estrella) para la humanidad. La superchería de los astrólogos contribuía a ello, porque las calamidades, las guerras y demás males, han sido -y siguen siendo- normales y frecuentes, por lo cual siempre acertaban en sus luctuosos augurios. El asesinato de Julio César en el año 44 antes de Cristo coincidió con la presencia en el cielo de Roma de uno de estos cometas (que no era el Halley), y a él fue atribuído el nefando crimen.

No faltaron, empero, filósofos y científicos que intentaron explicar por causas naturales la presencia de los cometas. Así, Aristóteles creyó que los cometas eran cuerpos gaseosos emanados de la tierra, que al penetrar en la alta atmósfera se incendiaban para extinguirse por consunción al cabo de unas pocas semanas. Pero fue seguramente Séneca el que por primera vez acertó, con prodigiosa intuición, al prejuzgar la verdadera naturaleza de los cometas: "*Estos astros* -escribe- *se hacen visibles cuando se acercan a nosotros, y desaparecen cuando se adentran en las profundidades del espacio, como los peces en el fondo del mar*". "*No es posible, todavía, debido a su rareza, conocer sus órbitas, ni saber si su regreso es periódico... pero llegará un día en que se conocerán las leyes que rigen el movimiento de los planetas*"(*). Llegó incluso a observar que las colas se orientan siempre en sentido opuesto al Sol (el efecto denominado "viento solar").

¿Por qué la llegada del Halley este año está pasando casi inadvertida para el gran público, e incluso apenas ha suscitado curiosidad en las personas aficionadas a los temas científicos? ¿Será porque vamos perdiendo nuestra capacidad de asombro? ¿Contribuirá también la concentración de la población en las grandes ciudades, en las que ya no podemos mirar al cielo? Es cierto también que la aproximación del Halley no va a tener la espectacularidad de alguno de las anteriores; pero hay un hecho importante: es la primera vez que va a ser aprovechada para el estudio de la constitución de los cometas, mediante el lanzamiento efectuado ya, por varios países, de sondas espaciales que con

(*) "El Cometa Halley".- José Luis Comellas y Juan Cruz; pág. 4.

toda seguridad han de proporcionar más datos de los cometas que todas las observaciones realizadas hasta ahora.

Edmund Halley (1657-1747), contemporáneo y amigo de Newton, pensó que los cometas, al igual que los planetas, deberían obedecer las mismas leyes, esto es, girar alrededor del Sol según órbitas elípticas o parabólicas, dependientes de su distancia al astro rey y de su velocidad. Se dispuso pacientemente a trabajar con objeto de calcular la órbita seguida por un brillante cometa que en 1682 fue visible en el cielo de Londres. Trabajó varios años en ello recogiendo y cotejando infinidad de datos de éste y de otros conocidos cometas anteriores. La conclusión a que llegó finalmente fue que el cometa de 1607, observado por Kepler; el de 1531, por Frascaso y Apiano; el de 1456, estudiado por Regiomontano (nombre latinizado de su ciudad natal, Könisberg, Monte del Rey), habían seguido prácticamente la misma trayectoria, en sentido retrógrado, y, además observó que la diferencia entre dos apariciones sucesivas era muy aproximadamente la misma, 76 años. En consecuencia, afirmó que los cuatro cometas eran el mismo, y predijo su nueva aparición para el año 1758. Halley murió en 1742, sin poder contemplar su acertada predicción. Antes de la venida del cometa, los franceses, Clairaut y Lalande, habían revisado los cálculos, rectificando ligeramente los de Halley. El esperado cometa llegó a su perihelio el día 13 de marzo de 1759, un mes antes de la fecha prevista por Clairaut y Lalande, diferencia debida a que la existencia de Urano y Neptuno todavía no eran conocida y a algunos errores de cálculo en las masas de Saturno y Júpiter, circunstancias que modificaron ligeramente la órbita calculada, la primera en la historia de los cometas. La segunda fue la del cometa Hencke, en 1819, que es "pequeña", el cual efectúa su rotación en torno al Sol en sólo algo más de 3 años.

Los cometas, por consiguiente, se pueden clasificar en cometas de *período corto* y cometas de *período largo*. El Hencke es de período corto y el Halley de período largo. La órbita de éste es elíptica y muy excéntrica. En su afelio, cercano a la órbita de Neptuno, dista del Sol 5.230 millones de kilómetros, y en su perihelio se "acerca" al Sol hasta 88,5 millones de kilómetros, algo menos que la órbita de Mercurio. El plano de la órbita forma un ángulo de 18° con el de la eclíptica, por lo que la mayor parte del tiempo permanece muy alejado de los planetas, por cuya razón se mantiene prácticamente invariables la órbita del cometa y su período de rotación. En cada revolución, antes y después del perihelio, se aproxima cruzándola dos veces a la órbita terrestre, permaneciendo unos tres meses relativamente cerca de la Tierra; la distancia más corta a ésta será este año de 63 millones de kilómetros, que tendrá lugar en su viaje de retorno el día 11 de abril, después de su paso por el perihelio el 9 de febrero. Fueron más afortunados en 1910, pues el Halley se aproximó a la Tierra 18 millones de kilómetros; su cola barrió la superficie terrestre, sin más consecuencias, pese a los terrores despertados, que el goce de un bello espectáculo.

Los mejores días (noches) para observar al cometa este año en España, serán los últimos del mes de marzo y los primeros de abril, en condiciones, supuestas buenas las atmosféricas, tanto mejores cuanto más al Sur: Valencia, Andalucía (Almería) y Extremadura. En este sentido los canarios serán los privilegiados. El cometa será visible, a simple vista, o mejor con unos buenos prismáticos, siempre en dirección sur y muy bajo con relación al horizonte.

En la sección Reseña de Libros de este mismo Boletín, se hace recensión de dos libros, recientemente publicados, de los que hemos tomado algunos de los datos para la confección de este artículo, y en los que el lector interesado puede completarlos.

EVALUACIONES EN MATEMATICAS

Por Julio Fernández Biarge

En un artículo anterior, me detuve en el análisis crítico de las evaluaciones en general, sus finalidades y sus efectos. Terminaba ofreciendo ampliar este análisis con algunas consideraciones relativas a las que se realizan en el ámbito de las Matemáticas. Pensaba con ello dar a conocer las conclusiones a que he llegado tras muchos años de experiencia docente, que me gustaría contrastar con las obtenidas por otros compañeros. De ninguna manera pretendo dar soluciones definitivas o recetas mágicas, presentando un sistema de evaluación que salga airoso del análisis crítico que planteaba en el artículo anterior, ni del que puedan hacer otros.

Comienzo por advertir que lo que diga a continuación, no sería aplicable para orientar, por ejemplo, las evaluaciones de las asignaturas de una Facultad de Matemáticas. Voy a limitarme a las evaluaciones de asignaturas de Matemáticas en los estudios en que éstas juegan un papel auxiliar, aunque importante. Auxiliar no quiere decir aquí meramente instrumental. En el Bachillerato y en las Enseñanzas Técnicas o de Ciencias Experimentales, las Matemáticas suministran ciertamente un instrumento imprescindible para el estudio de otras Ciencias o Tecnologías, pero a la vez deben contribuir a formar la mente para las actividades de abstracción a partir de los hechos reales, de modelización de razonamiento deductivo, de sistematización de resultados, de generación de algoritmos y de utilización eficaz de los medios informáticos. Las asignaturas de Matemáticas en estos estudios, pueden y deben ser también la oportunidad para que los alumnos apren dan a expresarse -en forma oral o escrita- con precisión y claridad, y a analizar los hechos con rigurosa sistemática. Las evaluaciones deben estar íntimamente relacionadas con estas metas, y, teniendo en cuenta lo que dijimos en el artículo anterior sobre el efecto de un sistema de evaluación, que acaba convirtiendo el trabajo de los alumnos en una labor de preparación para superarla, deberían inducir en el alumnado actividades que fuesen claramente útiles para la consecución de esos objetivos.

EXAMENES TEORICOS

Las evaluaciones de Matemáticas suelen clasificarse en teóricas o prácticas. Las primeras consisten frecuentemente en exigir la exposición de temas, definiciones, teoremas, demostraciones, etc., y las segundas en la resolución de ejercicios o problemas. No obstante, la distinción entre unas y otras no es tan clara como parece a primera vista.

Un examen teórico debería servir para saber si el alumno ha adquirido determinados conocimientos; a primera vista parece que esto se consigue eligiendo unas "preguntas del programa" y viendo si el alumno es capaz de reproducir lo mejor posible la parte del texto relativa a ellas. Tal proceder, se ha hecho habitual; pero esto es muy engañoso. Un conocimiento matemático no consiste en saber reproducir un texto. Consiste más bien en saber utilizarlo cuando sea oportuno, e incluso en saber cuándo es oportuno utilizarlo; y no me estoy refiriendo sólo a las "reglas prácticas", sino a las propias definiciones de los conceptos más importantes.

Los exámenes teóricos habituales, consistentes en reproducir el texto de una definición, de un teorema o de una demostración, tienen, entre otros, los siguientes inconvenientes:

- Son difíciles de calificar. Si lo que ha escrito el alumno es correcto, no se puede saber si realmente lo ha comprendido o lo trae aprendido de memoria (no hay gran diferencia entre llevar al examen una lección escrita en una "chuleta", o "prendida con alfileres" en la memoria, sin comprenderla). Si contiene incorrecciones, es muy difícil saber si son simples lapsus en la expresión de un concepto bien comprendido, o síntomas de no haber entendido nada de lo escrito.
- Inducen a una preparación memorística, en detrimento de otras actividades que podrían ser mucho más provechosas.
- Se pide al alumno algo totalmente distinto de lo que la vida profesional o los estudios posteriores le exigirán de su preparación matemática.
- Miden una aptitud del alumno -la de reproducir correctamente textos matemáticos- escasamente relacionada con los objetivos más importantes de la asignatura.
- Son más sensibles a la preparación inmediata, en los días precedentes, que al trabajo paciente de meses anteriores.
- Son poco reproducibles; repitiendo el examen (sin nueva preparación) a los pocos meses, el resultado puede ser mucho peor.

Algunos de los inconvenientes señalados puede paliarse con la técnica de evaluación consistente en formular preguntas teóricas concretas, pero que no sean simples "epígrafes del programa".

Por las razones antedichas, en las asignaturas de primer curso de la E.T.S. de Ingenieros Navales hemos abandonado hace años este tipo de evaluaciones, y aconsejaríamos evitarlos en cualquier estudio superior, así como en el C.O.U. En Bachillerato habría que restringir su uso, y conservarlo sólo -combinándolas siempre con otras- en EGB, en edades en que puede aprovecharse la facilidad con que se utiliza la memoria.

EJERCICIOS

Los exámenes prácticos suelen adoptar la forma de ejercicios o de problemas. Es frecuente que los primeros traten de evaluar, simplemente, si el alumno ha adquirido determinadas habilidades de cálculo, que se juzgan imprescindibles para las aplicaciones o desarrollos posteriores. Es evidente que dentro de la formación matemática que se desea para nuestros alumnos, ocupa un lugar importante la adquisición de habilidades tales como las requeridas para el cálculo algebraico, el de derivadas, las operaciones con matrices, el cálculo trigonométrico o las construcciones geométricas elementales. No se trata tan sólo de conocer las propiedades y las reglas que se deducen de ellas, sino de adquirir soltura, e incluso un cierto automatismo, en su manejo. Los ejercicios que habitualmente se proponen, constituyen un buen medio de evaluación del grado en que se han adquirido esas habilidades; pero claro está que son insuficientes para una evaluación completa de hasta qué punto se han alcanzado los objetivos globales de las asignaturas de Matemáticas. Las evaluaciones pueden contener ejercicios, pero no deben consistir exclusivamente en ese tipo de pruebas.

PROBLEMAS

Los problemas pueden dar lugar a evaluaciones mucho más completas que los temas teóricos o los ejercicios, pero es muy frecuente que se desaprovechen sus mejores posibilidades. Hay problemas que apenas detectan si el alumno recuerda o no una determinada "fórmula" o regla práctica. Otros miden la creatividad o ingenio del alumno, pero -a pesar de su posible belleza- apenas reflejan el progreso realizado por él en el estudio de la asignatura. Se proponen a veces problemas que, en apariencia, habrían de medir esos progresos, pero que sin una "preparación" previa, resultarían excesivamente difíciles; no obstante, siendo de un número limitado de "tipos", resulta fácil preparar a los alumnos para que los resuelvan con facilidad, siempre que no se salgan de ese repertorio limitado. Se simulan así resultados brillantes, cuando lo que se hace, en realidad, es sustituir la actividad de raciocinio y de exploración intuitiva, por la de asociación de ideas; sólo hay que percatarse "de qué" es el problema y aplicar rutinariamente la regla ad hoc, aprendida para el caso. La presentación de problemas tipo y el entrenamiento para conseguir la resolución rutinaria de cada uno, constituyen una buena preparación para superar esas evaluaciones desafortunadas: se trata de un nuevo ejemplo de actividad desviada, inducida por un mal sistema de evaluación.

Es prácticamente imposible conseguir una buena evaluación, con los efectos apetecidos, a través de un único problema. Por ello, carece de sentido el tratar de concretar cómo debe ser un problema para que constituya una evaluación aceptable para una asignatura de Matemáticas. Una buena evaluación deberá constar de distintas pruebas, en las que se combinarán comprobaciones de que se han comprendido los conceptos fundamentales, se han adquirido las habilidades precisas, se está familiarizado con determinado vocabulario, se ha avanzado debidamente en el uso del razonamiento deductivo, se ha alcanzado el nivel de abstracción requerido y se ha captado la relación entre la teoría y las aplicaciones.

Más adelante señalaremos algunas directrices que permiten mejorar los sistemas de evaluación basados en la resolución de problemas, pero antes vamos a profundizar en el estudio de los objetivos de la enseñanza de las Matemáticas, cuyo grado de cumplimiento se trata de evaluar.

EVALUACIONES Y REALIDAD

Las asignaturas de Matemáticas tratan, en general, de suministrar al alumno una formación útil para afrontar con éxito las tareas de su vida futura, principalmente en el ámbito profesional. Deducir de esto que lo que conviene, en la mayor parte de los casos, es proporcionarle una colección de "recetas" prácticas, formularios o procedimientos de cálculo, es totalmente equivocado. Los alumnos de hoy necesitarán dentro de algunos años, unas matemáticas que posiblemente no se hayan desarrollado todavía. Los técnicos que hoy día hacen uso de la Investigación Operativa, como fundamento de su profesión, quizá estudiaron su carrera cuando aún no se conocía, y los que hoy calculan estructuras por elementos finitos, valiéndose de un ordenador, la estudiaron posiblemente antes de conocerse tal método y tal tipo de máquinas. Lo que realmente necesitan nuestros alumnos al terminar sus carreras es estar en condiciones de comprender, y estudiar con provecho, los libros o artículos que vayan apareciendo con los últimos avances de la ciencia o técnica a que se dediquen. El que piense que estas consideraciones apenas son aplicables a los estudios de Bachillerato, deberán recordar lo próximos que están, en el pasado, los mal empleados esfuerzos en enseñar a generaciones de alumnos el uso de las tablas de logaritmos decimales y la preparación del cálculo trigonométrico para permitirlo, que jamás les serán ya de utilidad alguna. No hay que olvidar, sin embargo, que algunas partes de las Matemáticas que enseñamos, son imprescindibles para la comprensión de temas de otras asignaturas, u ocupan una posición tan fundamental, que no es posible que pierdan su interés, por mucho que cambien las tecnologías.

Como es evidente que las técnicas de evaluación han de estar íntimamente ligadas a los objetivos de la enseñanza, la lucidez en perfilar estos, ha de ser decisiva a la hora de establecer un sistema de evaluaciones. Una idea razonable, aunque evidentemente discutible, es que las evaluaciones deben simular lo mejor posible la situación real, en que el alumno necesitará aplicar los conocimientos matemáticos que se le proporcionan, en los años siguientes (ya sea en estudios posteriores o en su actividad profesional). Al intentar llevar a la práctica esta idea, se encuentra que los procedimientos habituales de evaluación se alejan muchísimo de conseguir esa simulación.

Las diferencias más notables entre las evaluaciones que suelen practicarse y las que de hecho sufren los alumnos al enfrentarse con la vida al término de sus estudios, son, entre otras:

- Las evaluaciones suelen consistir en temas o problemas "cerrados", en los que está totalmente especificado lo que se da y lo que se pide. En la realidad no es así; los datos han de "buscarse"; no se sabe de antemano cuales van a ser precisos; algunos no pueden obtenerse, y otros cuestan dinero, planteándose la cuestión previa de si resulta conveniente adquirirlos o no. Tampoco se exigen unos resultados concretos; se trata de obtener "todo lo que se pueda" (dentro de un presupuesto y tiempo limitado). El abuso de las pruebas excesivamente cerradas, en este sentido, conduce no sólo a una mala evaluación de la formación adquirida para enfrentarse con los problemas reales, sino también a una educación deformante, que da una perspectiva equivocada de la manera en que se han de aplicar los conocimientos adquiridos.

- Las evaluaciones se hacen, con frecuencia, en condiciones totalmente distintas de las que se dan en las aplicaciones reales. En las evaluaciones es corriente prohibir la consulta de libros; a veces tampoco se permite el uso de instrumentos de cálculo, y, por razones obvias, se impide el trabajo en equipo. También este hecho aleja el significado de las evaluaciones de la comprobación de que se han alcanzado los objetivos para los que se ha concebido la enseñanza, y también induce a una actividad de preparación de las pruebas que no es la adecuada para lograr una correcta formación.

- Los ejercicios y problemas propuestos, son casi siempre ajenos a la realidad. La tendencia a que "parezcan" verdaderas aplicaciones prácticas contribuye a aumentar el engaño. Aparte de su carácter "cerrado" a que nos referíamos antes, la imposibilidad de utilizar medios de cálculo y la limitación de tiempo, hace que los problemas presenten situaciones super-simplificadas, que raramente se dan en la práctica. Las ecuaciones presentan coeficientes enteros, de pequeño valor absoluto, abundan los nulos, y se dan peculiaridades en los datos que se pueden aprovechar para abreviar el cálculo; las figuras que se manejan son cuadrados o círculos, ortoedros o esferas; se elude la complejidad de los datos, y con ello los problemas que plantea el manejo de esa complejidad. Así, se da una visión totalmente deformada de la utilidad relativa de unos métodos u otros, para abordar los problemas, tendiendo a sobrevalorar los que permiten aprovechar peculiaridades que de hecho nunca se dan en la práctica.

- La escala de tiempo de las evaluaciones es completamente distinta de la realidad. Los problemas urgentes de ésta hay que resolverlos en pocos días o se-

manas, trabajando en jornadas completas, con personal auxiliar. En la evaluación, el tiempo se mide en minutos. Esto hace que excelentes métodos de cálculo o de tratamiento de problemas, sean desechados en la enseñanza, porque son inviables en las evaluaciones.

El proceso de evaluación tiene unas limitaciones de tiempo, de medios, de protección contra el fraude, etc., que hace imposible la pretensión de que simule exactamente las condiciones en que el alumno tendrá que aplicar los conocimientos adquiridos en la realidad social. Además los problemas reales exigirán quizá técnicas matemáticas muy especializadas o recientemente desarrolladas, que el estudiante de hoy tendrá que aprender en el momento que las necesite. Por ello, quizá la evaluación debe ir encaminada a comprobar si va adquiriendo la formación matemática fundamental que le será imprescindible para estudiar en su día las técnicas matemáticas especiales que requiera. Esta orientación de las evaluaciones debe ser presentada con sinceridad, evitando el engaño de dar a los problemas apariencias de aplicaciones prácticas, que no responden a la realidad.

UN MODELO DE EVALUACIONES

Las consideraciones anteriores, unidas a las que hicimos en otro artículo anterior, sobre las evaluaciones en general, nos han llevado a perfeccionar los sistemas de evaluación empleados en las asignaturas de Matemáticas, tratando de evitar, en lo posible, caer en los defectos analizados. No pretendemos haber resuelto completamente el problema, y mucho menos mantener que las soluciones que se han mostrado acertadas, hasta cierto punto, en nuestras experiencias, sigan siendo adecuadas si se aplican en otros ámbitos.

El sistema de evaluación empleado en las asignaturas de Matemáticas del primer curso de la E.T.S. de Ingenieros Navales, se basa en los principios siguientes:

- Todas las pruebas se hacen permitiendo que el alumno lleve y utilice toda clase de libros, apuntes y notas. Esto acerca algo las condiciones en que se realiza la evaluación a las de la vida real. Evita actividades de preparación memorística no deseables. Evita radicalmente el posible fraude consistente en la copia ilegal de libros o "chuletas", y al hacer superflua la vigilancia para impedirlo, hace más distendido el ambiente del examen. Hace más provechoso el esfuerzo del alumno durante la prueba, que además de servir para su evaluación, puede contribuir a aumentar sus conocimientos o a descubrir detalles o dificultades que no encontró en un primer estudio de los textos. Como contrapartida, esta norma impide, claro está, proponer temas teóricos en la forma tradicional (veremos luego cómo se consigue dar carácter teórico a estas pruebas), y obliga a los profesores a una labor difícil de preparación de enunciados, casi siempre originales, ya que si se toman de libros, se descubre rápidamente la fuente, y los alumnos tratan de llevar soluciones preparadas al examen.

- Los temas se presentan con apariencia de problemas, combinando varios de distintos tipos. No obstante, estos problemas no tienen la estructura habitual en la enseñanza clásica de las Matemáticas, y algunos de ellos deben considerarse, en realidad, como pruebas teóricas. Distinguiremos tres tipos fundamentales, aunque en ocasiones se proponen enunciados de carácter mixto. Ya dijimos antes que un sólo tipo de problemas no puede satisfacer los requisitos de una evaluación completa.

- Se proponen problemas que tienen como objetivo comprobar que los alumnos han adquirido ciertas habilidades que se consideran imprescindibles, como por ejemplo, en el primer curso de las carreras de ingeniería, la derivación de funciones compuestas, la transformación de integrales, el cálculo con variables de distintos órdenes (salvo infinitésimos de orden superior), los desarrollos de Taylor, el cálculo con complejos, la construcción de organigramas, etc. Se podrían considerar como "ejercicios", aunque se distinguen de muchos de ellos en que, en general, no sólo comprueban que se saben aplicar determinadas reglas, sino también que se sabe discernir cuales son las reglas apropiadas en cada caso. Se da un tiempo razonable para la resolución, de modo que no se trata sustancialmente de medir la velocidad de cálculo. El uso sistemático de este tipo de pruebas induce a los alumnos a una actividad de ejercicio para la adquisición de las actividades antedichas, que es justamente uno de los objetivos parciales de la enseñanza, en los cursos elementales.

- Se proponen problemas que tienen como objetivo comprobar que se han comprendido debidamente ciertos conceptos fundamentales. Estos problemas suelen tener un enunciado largo, la mayor parte del cual sirve para presentar al alumno una situación matemática nueva (para él), bien determinada, a la que le son aplicables los conceptos que se trata de ver si han sido debidamente comprendidos. A continuación se formulan varias preguntas sobre la aplicación de esos conceptos al caso particular descrito, que deben ser contestadas razonadamente. Estos problemas comprueban si el alumno ha aprendido esos conceptos, no para reproducir memorísticamente sus definiciones y propiedades, sino para saberlos aplicar oportunamente. En ese sentido deben ser considerados casi como exámenes teóricos. Evalúan, en realidad, los conocimientos adquiridos. Las preguntas suelen ser detalladas y progresivas, y van marcando al alumno la línea del razonamiento que ha de seguir, por lo que estos problemas apenas exigen nada de "idea feliz" o muestra de ingenio (lo cual se hace a veces a costa de la belleza del problema). Estos problemas evalúan a la vez otros aspectos interesantes de la formación de los alumnos: una de las dificultades que presentan está en la correcta interpretación de la parte expositiva del enunciado; la cual está escrita en el mismo lenguaje empleado en los textos para exponer los conceptos en cuestión, y los ejemplos que los ilustran. Sólo el que ha estudiado estos, estará en buenas condiciones para comprender a fondo el enunciado; el problema mide así hasta qué punto se ha familiarizado el alumno con la nomenclatura propia de los conceptos tratados y con la relación que éstos tienen con otros. La actividad inducida en los alumnos por la práctica de este tipo de evaluaciones es la de estudiar los conceptos fundamentales, no memorísticamente, sino centrándose en su aplicación a casos concretos, en ir adquiriendo familiaridad con la terminología propia de los mismos, y en habituarse al estudio de situaciones matemáticas nuevas, con un cierto nivel de abstracción. Mediante este tipo de problemas se comprueba además cómo va desarrollando el alumno su aptitud para la redacción clara y concisa de los razonamientos que exigen las respuestas. Este tipo de problemas es el más frecuentemente usado en primer curso de la E.T.S. de I. Navales.

- Se proponen problemas que tienen como objetivo comprobar que se han comprendido bien ciertos procesos de razonamiento deductivo. Estos problemas suelen proponer que el alumno lleve a cabo alguna generalización -bien especificada- de algún concepto estudiado en la teoría, o bien que pruebe que no es posible conseguirlo, conservando las principales propiedades. Los razonamientos que se le pide desarrollar, son muy semejantes a los que debió estudiar, diferenciándose de ellos tan sólo en la adición o supresión de alguna hipótesis. El alumno que, para una serie de demostraciones estudiadas en la teoría, no sólo ha comprendido, uno a uno, sus pasos, sino la necesidad u oportunidad de cada uno de ellos, no tendrá dificultad en ver cuales conservan su validez en la situación modificada y cuales la pierden o han de reformar sus conclusiones. Se trata, por tanto, de una prueba esencialmente teórica, pero en la que se reconoce que las demostraciones que se dan al alumno no son para que éste aprenda a reproducirlas de memoria, sino para que las comprenda, y cultive

su capacidad de razonamiento deductivo, aprendiendo a realizar razonamientos análogos. Como en el examen tendrá a su disposición los textos que contienen el sistema de demostraciones que sirven de modelo, si los ha estudiado a fondo, no le será difícil desarrollar un razonamiento paralelo. La resolución de problemas de este tipo contribuye también a perfeccionar la aptitud del alumno para la redacción clara y rigurosa de los razonamientos. Este tipo de problema se utiliza con menor frecuencia que los anteriores en la E.T.S. de I. Navales.

- Se realizan tres evaluaciones parciales a lo largo del curso, además de las finales. Dado que las evaluaciones, concebidas en esta forma, tienen eficacia formativa directa, sería ventajoso hacer más, pero los problemas de coordinación entre grupos y con otras asignaturas, lo impiden.

- Los problemas propuestos suelen tener cinco preguntas, cada una de las cuales se valora separadamente (con 0, 1 ó 2) dando lugar a una calificación de 0 a 10, que resulta bastante independiente del calificador y previsible por el alumno. Esto evita descontentos, protestas y tratos desiguales. La calificación producida por cada evaluación se obtiene como media aritmética de las resultantes de varios problemas.

- A la salida del examen se entregan soluciones resumidas de los problemas propuestos. Esto tiene gran valor formativo, al aclararles a los alumnos las dudas que pudieran tener sobre temas sobre los que han trabajado intensamente antes. Hace además que éstos puedan pronosticar con seguridad la calificación que van a recibir. Es preferible que estas soluciones estén bastante resumidas, pues ello obliga al alumno a un esfuerzo de interpretación muy provechoso.

- Los alumnos tienen a su disposición una extensa colección de enunciados de problemas. En ella figuran todos los que se han propuesto en exámenes parciales y finales, desde 1964 hasta hace poco. No sería ventajoso que esta colección incluyese también soluciones, pues aparte de la enorme extensión que tendría tal publicación, el conocimiento previo de las soluciones restaría eficacia al trabajo del alumno, que debe consistir en enfrentarse con ellos sin más ayuda que la consulta de los textos teóricos. Las soluciones deben conocerse a posteriori, y ello se consigue con otros procedimientos. La existencia de esta colección contribuye eficazmente a facilitar la labor del alumno, que aprende verdaderamente los conceptos y las reglas, cuando se ejercita en su aplicación a casos prácticos; pero además permite su auto-evaluación en cualquier momento, ya que nunca se provocan sorpresas en cuanto a la dificultad, estructura o temática de los problemas que se proponen; por otra parte, permite recomendar fácilmente varios ejercicios cada semana, sin tener que dar copias de los enunciados. Una colección de enunciados de este tipo podría pensarse que facilita una preparación para superar la prueba, en sustitucion de un estudio sensato de la asignatura, pero la estructura de los problemas empleados que ya hemos dicho que constituyen pruebas de índole más bien teórica, hace que esa actividad de preparación sea casi exactamente la que se desea que realice el alumno al estudiar la asignatura.

- Se procura quitar toda tensión o dramatismo a la prueba. Los alumnos escogen sus puestos al entrar, se admite a los rezagados, no se escatima el papel, se procura que puedan extender cómodamente sus libros y apuntes sobre la mesa, no se agobia al que está escribiendo a la hora de entregar el ejercicio, y se atienden las consultas razonables. Se entregan fotocopias de los enunciados, y a la salida, resúmenes de las soluciones. El tiempo es más que suficiente para que un buen alumno pueda hacer el ejercicio completo y para que un alumno medio pueda hacer más de la mitad (lo que basta para pasar la prueba). En los días sucesivos a la publicación de los resultados, se atiende a los alumnos que desean ver sus propios ejercicios y saber por qué han recibido la calificación otorgada. Este ambiente distendido no da lugar a la proliferación de fraudes. Los únicos posibles serían los resultantes de la comunicación entre compañeros, pero el ambiente de trabajo entre libros, con mesas separadas, no contribuye a fomentar esas comunicaciones; las soluciones son extensos razonamientos, difíciles de "pasar", y los que saben resolver los problemas suelen consumir el tiempo disponible en explicarlo todo detalladamente. Siempre se detecta alguna comunicación, generalmente entre alumnos malos, pero ello a penas afecta a la fiabilidad de las evaluaciones.

- Semanalmente se reparte, en cada asignatura de Matemáticas, una hoja, con el plan de trabajo para la semana, en la que se recomienda intentar la solución de determinados ejercicios de la colección citada antes. En la misma hoja se dan las soluciones resumidas de problemas recomendados anteriormente (fotocopias de las que se entregaron, en su día, a la salida del examen). Así se consigue integrar las tareas de evaluación en el proceso docente, en lugar de dejar que aparezcan como ajenas a él, perturbándolo.

DIFICULTADES

El sistema de evaluación que se ha descrito, se muestra bastante satisfactorio donde ha sido establecido, pero puede ser difícilmente transplantable a otros ámbitos. Entre sus inconvenientes presenta el de exigir un trabajo considerable del profesorado para llevarlo a la práctica: los enunciados tienen que ser originales, como ya dijimos, y para tener el valor didáctico que se prentende, han de estar cuidadosamente redactados; la preparación de soluciones extractadas lleva también su trabajo. Los alumnos, llenan varias páginas, para cada problema, con razonamientos, por lo que la labor de calificación suele ser más penosa que con los exámenes de otros tipos. Por otra parte, al eliminar ciertos fenómenos de auto-engaño, muy frecuentes en el sistema educativo (se ponen problemas de apariencia difícil, pero se da la "receta" para resolverlos), puede ocurrir que los resulta dos pongan al descubierto una cruda realidad de fracasos educativos.

Ni siquiera se puede afirmar que los alumnos comprenden, en su mayoría, las razones que avalan el procedimiento de evaluación que preconizamos. En una encuensta realizada por el I.C.E. de la U. Politécnica de Madrid, en el curso 1981-82, a la pregunta: "Admitiendo la actual exigencia de nivel, ¿encuentra aceptables los métodos de evaluación empleados?". Las respuestas de la E.T.S. de Ingenieros Navales, en la que se estaba aplicando el tipo de evaluación que propugnamos, fueron:

Mucho	Bastante	Algo	Poco	Muy poco	
10	13	18	36	23	%

Resultado que sería desalentador, si no fuera porque el resultado global de los tres centros consultados (Caminos, Navales e Informática), fué:

5	10	17	26	42	%

Prácticamente igual fue el resultado global para la asignatura de Física, y sólo ligeramente mejor para la de Química.

Parece ser que los alumnos se avienen con frecuencia a un juego que asegure el aprobado a todo el que realice ciertas tareas bien definidas, aunque éstas sean penosas e inútiles. El aprender a desenvolverse con el lenguaje matemático y con el razonamiento deductivo, no parece suficientemente definido para ellos.

Si nuestros alumnos, tras ser evaluados por nosotros, han de someterse a otras pruebas en la que no podemos intervenir

nosotros (como les ocurre a los profesores de B.U.P. y C.O.U. con la de "Selectividad"), pueden ser vanos los esfuerzos para mejorar las nuestras, por estar, unos y otros, alumnos y profesores, fuertemente condicionados por la manera de realizarse aquéllas.

Creemos, no obstante, que aunque no resulte fácil, ni siquiera conveniente, copiar las directrices de nuestro sistema en otras situaciones, en las que las circunstancias son muy diferentes, algunos aspectos de nuestro análisis precedente, pueden servir para mejorar nuestras evaluaciones; de ello depende, como hemos visto, en gran medida, la calidad de nuestro sistema educativo. La mayor utilidad de este artículo sería, no obstante, el que sirviese de incitación a otros profesores con una larga labor docente y de evaluación, para que nos hiciesen partícipes a todos, de los frutos de sus experiencias.

GRUPO DEL CUADRADO CON LOGO

Por E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano

El grupo de las isometrías que transforman un cuadrado en sí mismo, llamado usualmente "grupo del cuadrado", es un modelo matemático multivalente de gran interés didáctico. El objetivo de este artículo es el de construir una simulación en lenguaje LOGO, que permita familiarizarse con las transformaciones que constituyen el grupo del cuadrado y su composición, mediante el juego y la acción.

Para generar el grupo del cuadrado bastan, por ejemplo, un giro de un recto y una simetría axial, o bien un par de sus simetrías (de ejes no perpendiculares). Pero, por razones de simplicidad de los procedimientos LOGO, hemos preferido generarlo a partir de sus cuatro giros y una simetría. La observación de que el subgrupo de las isometrías que conservan el sentido del grupo del cuadrado (giros) es isomorfo al grupo aditivo de las clases de restos módulo cuatro, facilita la simulación de dicho subgrupo.

1. EXPLICACION

Imaginemos un cuadrado (materializado) de vértices distinguibles y pensemos en los posibles modos de colocarlo de modo que se superponga a sí mismo. Para describirlos con comodidad, designemos por O a su centro y por C al punto medio de uno de sus lados. Un modo de conseguir la superposición consiste en girar alrededor de O un número entero de ángulos rectos. Otro modo con siste en dar la vuelta al cuadrado, de modo que apoye su otra cara, quedando fijos los puntos O y C (simetría de eje OC). También efectuando uno de aquellos giros, seguido de la simetría de eje OC, se conseguirá la superposición. Resultan así las ocho isometrías que autotransforman al cuadrado.

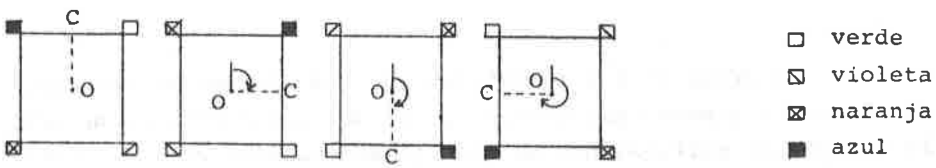


Figura 1

Para caracterizar estas ocho isometrías, pensemos en dibujar el borde del cuadrado (de vértices distinguibles) de los ocho modos posibles. Las cuatro posibles posiciones del punto C quedan determinadas por el ángulo de $\overrightarrow{OC}$ con la semirrecta vertical hacia arriba de origen O, que podrá ser de 0, 1, 2 ó 3 rectos en sentido horario (como se indica en la figura 1), lo que induce a considerar el conjunto $\mathcal{R} = \{0, 1, 2, 3\}$.

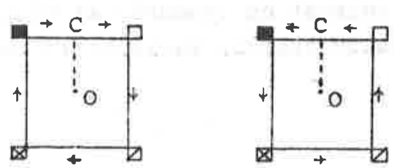


Figura 2

Por otra parte, el borde del cuadrado puede ser recorrido, a partir de C, en dos sentidos posibles (figura 2), lo que induce a considerar el conjunto $\mathcal{S} = \{+1, -1\}$, con el convenio de que +1 representa al sentido horario y -1 al antihorario.

De este modo, mediante un par ordenado de números (R, S),

tales que $R \in \mathcal{R}$ y $S \in \mathcal{S}$, queda caracterizada la posición de los cuatro vértices distinguibles del cuadrado. Y, en consecuencia, las ocho isometrías que autotransforman el cuadrado se reducen a ocho aplicaciones del conjunto producto $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ en sí mismo, definidas en la tabla siguiente:

NOMBRE ABREVIADO	ISOMETRIA	IMAGEN DEL PAR (R, S)
H	Giro de 1 recto (en sentido horario)	(R+1, S)
M	Giro de 2 rectos, o media vuelta	(R+2, S)
A	Giro de 3 rectos (o de un recto en sentido antihorario)	(R+3, S)
I	Giro de 4 rectos, o identidad	(R, S)
Y	Simetría de eje vertical	$\begin{cases} (R, -S), & \text{si } R = 0, 2 \\ (R+2, -S), & \text{si } R = 1, 3 \end{cases}$
X	Simetría de eje horizontal	$\begin{cases} (R+2, -S), & \text{si } R = 0, 2 \\ (R, -S), & \text{si } R = 1, 3 \end{cases}$
V	Simetría de eje en dirección Noreste, desde O	$\begin{cases} (R+1, -S), & \text{si } R = 0, 2 \\ (R+3, -S), & \text{si } R = 1, 3 \end{cases}$
W	Simetrá de eje en dirección Noroeste, desde O	$\begin{cases} (R+3, -S), & \text{si } R = 0, 2 \\ (R+1, -S), & \text{si } R = 1, 3 \end{cases}$

En la Figura 3 se visualizan los nombres abreviados asignados a las isometrías (distintas de I).

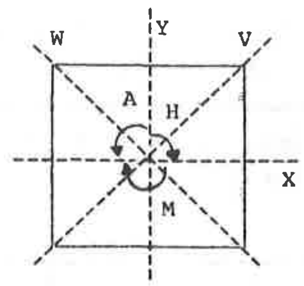
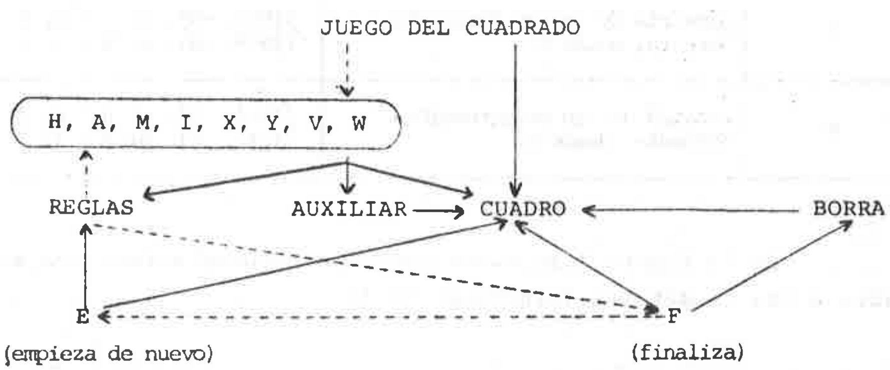


Figura 3

2. PROCEDIMIENTOS

Aunque listados para LOGO de APPLE IIe, con muy ligeras variaciones se adapta al LOGO de IBM pc, APPLE IIc, AMSTRAD, etc.

Antes de dar los listados de los 15 procedimientos LOGO que constituyen el programa, esquematizamos sus interrelaciones en un diagrama, en el que las flechas de línea continua indican que el procedimiento del que sale la flecha envía al subprocedimiento al que llega la flecha. Las flechas de línea discontinua indican que el procedimiento del que salen estas flechas invita a ejecutar a continuación alguno de los procedimientos a que llegan esas flechas.




```
TO JUEGO.DEL.CUADRADO
MAKE "R Ø MAKE "L 50 MAKE "S 1
CS HT SETSCRUNCH 1.2
CUADRO
PR [OBSERVA ESTE CUADRADO. TIENE UNA SEÑAL EN
CADA ESQUINA. HAY 8 MODOS DE COLOCAR ESTE
CUADRADO SOBRE SI MISMO. PIENSALOS]
WAIT 600
PR [ESOS 8 MODOS DE HACERLO SE VAN A LLAMAR
H, A, M, I, X, Y, V, W. AVERIGUA QUE PASA PUL
SANDO UNA DE ESAS LETRAS (Y RETURN)]
END

TO CUADRO
IF :R > 3 [MAKE "R :R - 4]
SETPC 1 SETH :R * 90
PU FD :L / 2 RT 90 * :S FD :L / 2 PD
REPEAT 4 [RT 90 * :S FD :L] MAKE "C 1
REPEAT 4 [MAKE "C :C + 1 SETPC :C PD REPEAT 3
 [FD :L / 6 LT 90 * :S] FD :L / 6 PU FD :L]
BK :L / 2 LT 90 * :S BK :L / 2
END

TO H
AUXILIAR
MAKE "R :R +1
CUADRO
REGLAS
END

TO A
AUXILIAR
MAKE "R :R + 3
CUADRO
REGLAS
END
```

```
TO M
AUXILIAR
MAKE "R :R + 2
CUADRO
REGLAS
END

TO I
AUXILIAR
CUADRO
REGLAS
END

TO X
AUXILIAR
MAKE "S :S * -1
IF OR :R = 0 :R = 2 [MAKE "R :R + 2]
CUADRO
REGLAS
END

TO Y
AUXILIAR
MAKE "S :S * -1
IF OR :R = 1 :R = 3 [MAKE "R :R + 2]
CUADRO
REGLAS
END

TO V
AUXILIAR
MAKE "S :S * -1
IF OR :R = 0 :R = 2 [MAKE "R :R +1] [MAKE "R :R + 3]
CUADRO
REGLAS
END
```



```
TO W
AUXILIAR
MAKE "S :S * -1
IF OR :R = 1 :R = 3 [MAKE "R :R+1] [MAKE "R :R + 3]
CUADRO
REGLAS
END

TO AUXILIAR
CS PU SETPOS SE -60 20 PD
CUADRO
PU SETPOS SE -10 20
SETPC 1 PD SETPOS SE 10 20
SETH 120 BK 7 FD 7
LT 60 BK 7 FD 7
PU SETPOS SE 60 20 PD
END

TO REGLAS
PR [PULSA UNA DE LAS TECLAS H, A, M, I, X, Y, V, W]
PR [CUANDO DESEES FINALIZAR, PULSA F]
END

TO F
REPEAT 3 [PR[ ]]
PU SETPOS SE -60 20 PD
PR [TODO LO HECHO ES IGUAL QUE SOLO]
BORRA
IF AND :S = 1 :R = Ø [MAKE "PA [I]]
IF AND :S = 1 :R = 1 [MAKE "PA [H]]
IF AND :S = 1 :R = 2 [MAKE "PA [M]]
IF AND :S = 1 :R = 3 [MAKE "PA [A]]
IF AND :S = -1 :R = Ø [MAKE "PA [Y]]
IF AND :S = -1 :R = 1 [MAKE "PA [V]]
IF AND :S = -1 :R = 2 [MAKE "PA [X]]
IF AND :S = -1 :R = 3 [MAKE "PA [W]]
```

```
MAKE "R Ø MAKE "S 1
CUADRO
PR :PA
PR [PARA VOLVER A EMPEZAR, PULSA E]
END

TO BORRA
SETPC Ø SETH Ø
FD :L / 2 RT 90 BK :L / 2
REPEAT 4 [FD :L REPEAT 4 [FD :L / 6 LT 90] RT 90]
FD :L / 2 LT 90 BK :L / 2
END

TO E
CS HT
MAKE "R Ø MAKE "S 1
CUADRO
REGLAS
END
```

Si no se dispone de monitor en color, los procedimientos titulados CUADRO y BORRA, pueden ser respectivamente sustituidos por los procedimientos CUADRO (monocolor) y BORRA (monocolor), que hacen distinguibles los vértices del cuadrado, por el número de trazos dibujados en cada uno (figura 7).

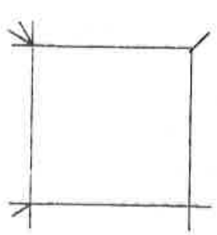


Figura 4


```
TO CUADRO (monocolor)
IF :R > 3 [MAKE "R :R - 4]
SETH :R * 90
PU FD :L / 2 RT 90 * :S PD FD :L / 2
LT 45 * :S FD :L / 10 BK :L / 10 RT 135 * :S
FD :L * 11 / 10 BK :L / 10 RT 90 * :S BK :L / 10
FD :L * 12 / 10 BK :L / 10 LT 45 * :S FD :L / 10
                BK :L / 10 RT 135 * :S BK :L / 10
FD :L * 12 / 10 BK :L / 10 LT 30 * :S FD :L / 10
                BK :L / 10 LT 30 * :S FD :L / 10
                BK :L / 10 RT 150 * :S BK :L / 10
FD :L * 6 / 10 PU LT 90 * :S BK :L / 2
END

TO BORRA (monocolor)
SETPC Ø
FD :L / 2 RT 90 FD :L / 2
REPEAT 4 [REPEAT 4 [FD :L / 10 BK :L / 10 LT 30]
         RT 75 FD :L / 10 BK :L / 10 RT 135 FD :L]
BK :L / 2 LT 90 BK :L / 2
SETPC 1
END
```

3. EJECUCION

El programa está concebido de modo que pueda ejecutarse sin conocimientos previos.

Al escribir JUEGO.DEL.CUADRADO (seguido de RETURN), comienza por ofrecer una somera explicación e invita a ejecutar una de las isometrías H, A, M, I, X, Y, V, W.

Para ejecutar, por ejemplo, el giro H, basta pulsar H (seguido de RETURN) y aparecen, a la izquierda el cuadrado en su posición original, en medio una flecha, y a la derecha la imagen en H del cuadrado (Figura 4)

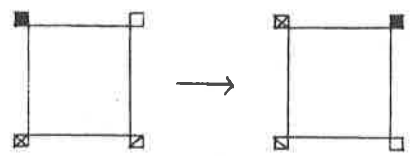


Figura 5

Si a continuación se desea ejecutar, por ejemplo, la simetría X, basta pulsar X (seguido de RETURN) y aparecen, a la izquierda el cuadrado en la posición en que había quedado anteriormente, en medio la flecha, y a la derecha la imagen en X del cuadrado (Figura 5)

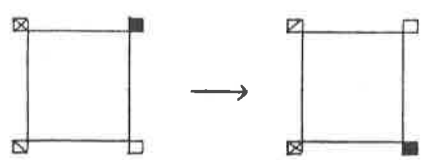


Figura 6

Para determinar la transformación compuesta de las doa anteriores, basta pulsar F (inicial de finalización), seguido de RETURN, y aparece a la izquierda el cuadrado en la posición en que se comenzó, manteniendo a la derecha el cuadrado en su posición final (Figura 6) y apareciendo el nombre abreviado de la transformación producto, V, en nuestro ejemplo. Del mismo modo se pueden componer tres, o más, isometrías.

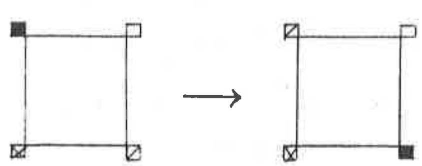


Figura 7

Para volver a empezar (sin mostrar las instrucciones iniciales), basta pulsar E (seguido de RETURN) y se restituye la posición original del cuadrado, invitando a efectuar las transformaciones deseadas (H, A, M,...).

El programa puede ser aprovechado a muy distintos niveles de enseñanza; para prever la posición imagen dada la original, para prever la transformación producto, para construir la tabla del grupo, para detectar subgrupos, etc.

4. SUGERENCIA

Para elaborar el grupo de rectángulo, bastará sustituir las clases residuales módulo cuatro, por las de módulo dos. Análogamente, para el grupo de triángulo (equilátero) bastará sustituir por las clases residuales módulo 3. Y, en general, a partir de las clases residuales módulo n, se construirá el grupo de n-gono (regular).

BIBLIOGRAFIA

ABELSON: Apple Logo. Mc Graw Hill, 1982.

ABELSON & DISESSA: Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics. M.I.T., 1981.

WATT: Aprendiendo con Logo. Mc Graw Hill, 1984.

PROGRAMA SOBRE LOGICA TRIVALENTE

Por Manuel Avilés Sánchez

INTRODUCCION

La lógica clásica es un sistema regido por la ley de bivalencia. Según esto, toda oración enunciativa es o bien verdadera o bien falsa, lo que quiere decir que desde el punto de vista formal el conjunto de valores consta de dos elementos.

La lógica trivalente se refiere a sistemas con tres valores; por eso recibe el nombre de lógica no clásica, aunque Aristóteles pusiera en duda la ley de bivalencia.

Dos trabajos debidos a Lukasiewicz y Post son pioneros en el tratamiento de la lógica trivalente. El primero de ellos llega a ella mediante investigaciones sobre lógica modal, y el segundo a través de la resolución de problemas que le surgieron por cuestiones internas a la lógica.

Desde el punto de vista algebraico, el planteamiento es sencillo. Si en la lógica bivalente existen dos conjuntos, a saber, el de las variables A(p,q,...) y el de los valores B(0,1), y una aplicación de A sobre B, tal que toda variable proposicional queda transformada en proposición por la asignación de uno de los posibles valores.

Partiendo de un enfoque algebraico no hay problema si consideramos que el conjunto B está formado por los elementos 0, .5, 1.

DEFINICION DE LOS FUNTORES

1ª/ Negación

Si convenimos en entender por $[p]$ el valor de la variable p. Se define $[N_p] = 1 - [p]$.

2ª/ Conjunción

Para la conjunción Kpq su valor de verdad es el más bajo de los valores de verdad de sus componentes.

3ª/ Disyunción

Apq es el valor de verdad más alto de los valores de sus componentes.

4ª/ Implicación

a) Si $[p] \leq [q]$, entonces $[Cpq] = 1$.
b) Si $[p] > [q]$, $[Cpq] = [q] - [p] + 1$.

5ª/ Coimplicación

a) Si $[p] \neq [q]$, $[Epq] = [1 - ([p] + [q])]$
b) Si $|p| = |q|$, $|Epq| = 1$.

El programa, del cual se acompaña un listado, ha sido diseñado para un ordenador APPLE 11 con 48 K de RAM, y el listado en una impresora EPSOM MX-F/T TYPE 21.

El programa calcula tablas de verdad de la lógica trivalente para fórmulas con un número arbitrario de variables. Por supuesto, sirve también para comprobar si una fórmula es consecuencia lógica de una serie de premisas. Sin más que comprobar si el condicional cuyo antecedente es la conjunción de las premisas, y cuyo consecuente es el resultado, es, o no, una tautología.

Se ha usado la notación de Lukasiewicz por ser, desde mi punto de vista, la más práctica para este propósito.

Cuando el programa pide que se introduzca la fórmula han de emplearse como variables P(1)... P(N), y no dejar ningún espacio en blanco. Por ejemplo CP(1)CP(2)P(1).

Aunque podríamos haber usado los axiomas de Wajsberg, o mejor el sistema funcionalmente completo de Slupecki, preferimos por comodidad emplear los funtores C, N, K, A y E, que hacen mucho más legibles las fórmulas.

DESCRIPCION DEL PROGRAMA

Se introduce la fórmula de la forma anteriormente indicada y se localiza el número de variables diferentes utilizadas en la expresión para seguidamente localizar si se trata de un funtor diádico o monádico. Mediante las líneas 510, 590, 670, 430, 730 se analizan y calculan los valores de la disyunción, implicación, coimplicación, conjunción y negación, respectivamente. Almacenándose su valor en la variable R.

La fórmula original se almacena en la variable A$ para después ser leída mediante las sentencias MID$, LEFT$. Localizan do así los funtores y las variables P(i) parciales que les afectan, teniendo en cuenta el tratamiento de los paréntesis que deben ser descartados, pues, al someter a tratamiento la variable A$ mediante LEN(A$), son contados como un carácter más.

Las sentencias VAL, LEN, y STR$ sirven para simular un tratamiento de cadenas que, dada la naturaleza de BASIC, no es buena.

La impresión de resultados se realiza a partir de la línea 1200, usando la sentencia GET C$, para controlar la pantalla en la impresión de resultados. Al final de la impresión de la tabla aparece si es una contingencia, una contradicción o se trata de una tautología.

Dada la velocidad del APPLE 11, si la fórmula contiene más de 5 variables, la impresión de la tabla con los valores correspondientes de P(1), P(2), P(3), P(4), P(5) y del valor de la fórmula R, es excesivamente lento.

<u>Listado del programa</u>

```
10  REM PROGRAMA DE LOGICA TRIVALENTE
20  CLEAR
30  HOME
40  PRINT "LOGICA TRIVALENTE- LUKASIEWICZ -": PRINT "UTILICE
COMO VARIABLES P(1) Y
    P(2) "
50  PRINT " HASTA P(N)"
60  PRINT "COMO FUNTORES USE : K CONJUNCION, A DISYUNCION,
C IMPLICACION, E COIMPLI
    CACION, N NEGACION "
70  PRINT "INTRODUZCA LA FORMULA Y AL FINAL PULSE RETURN"
80  VTAB 15: HTAB 7
90  INPUT A$:MM = 10000
100 HOME
110 FOR I = 1 TO LEN (A$)
120 N$ = MID$ (A$,I, LEN (A$) - I)
130 MA = VAL (N$)
140  IF MA <  = 0 THEN 180
150  IF  VAL ( MID$ (A$,I - 1,1)) > 0 THEN 180
160  IF MA >  = MM OR MA   = MX THEN 180
170 H = 1:MX = MA
180  NEXT I
190  IF H = 0 THEN 240
200 MM = MX:MX = 0:H = 0
210 M = M + 1:M$ = M$ + "A" + STR$ (MM)
220  REM  M ES EL NUMERO DE VARIABLES DIFERENTES UTILIZADAS EN
LA EXPRESION
230  GOTO 110
240  REM  BUSQUEDA DE N=SUBINDICE MAS ALTO EMPLEADO EN LA
EXPRESION
250 N =  VAL ( MID$ (M$,2, LEN (M$) - 1))
260  DIM P(N + 3)
270 P(N + 1) = 0:P(N + 2) = .5:P(N + 3) = 1:TI = 1: GOSUB 1200
280  FOR J = 0 TO  INT (3 ^ M + .5) - 1
290 PP = 1
300 K = J
310 C = INT (K / 3)
320 RE = K - 3 * C
330  GOSUB 1440
340 P(X) = RE / 2
350  IF C < 3 THEN 370
360 K = C: GOTO 310
370  IF M = 1 THEN 400
380  GOSUB 1440
390 P(X) = C / 2
400 A1$ = A$:L = LEN (A1$)
```

```
410  FOR I = L - 4 TO 1 STEP  - 1
420 P$ = MID$ (A1$,I,1)
430  IF P$ <  >"K" THEN 500
440  GOSUB 940
450 R = P
460  IF Q < P THEN R = Q
470 Z = 2
480  GOSUB 1050
490  GOTO 780
500  IF P$ <  > "A" THEN 580
510  REM DISYUNCION
520  GOSUB 940
530 R = P
540  IF Q > P THEN R = Q
550 Z = 2
560  GOSUB 1050
570  GOTO 780
580  IF P$ <  > "C" THEN 660
590  REM IMPLICACION
600  GOSUB 940
610 R = Q - P + 1
620  IF P <  = Q THEN R = 1
630 Z = 2
640  GOSUB 1050
650  GOTO 780
660  IF P$ <  > "E" THEN 730
670  REM COIMPLICACION
680  GOSUB 940
690 R = 1: IF P <  > Q THEN R =  ABS (1 - (P + Q))
700 Z = 2
710  GOSUB 1050
720  GOTO 780
730  IF P$ <  > "N" THEN 780
740  GOSUB 1020
750 R = 1 - P
760 Z = 1
770  GOSUB 1050
780  NEXT I
790  REM  IMPRESION:IF M>11 THEN 730
800 TI = 2: GOSUB 1200
810  IF R = 0 THEN W1 = 1
820  IF R = .5 THEN W2 = 1
830  IF R = 1 THEN W3 = 1
840  NEXT J
850 A$ = " CONTRADICCION"
860  IF W1 + W2 + W3 > = 2 THEN A$ = " CONTINGENCIA"
870  IF W3 = 1 NAD W2 + W1 = 0 THEN A$ = "TAUTOLOGIA"
880  PRINT : PRINT "ES UNA ";A$
890  PRINT " DESEA HALLAR OTRA TABLA  1 SI ,2 NO "
900  GET GY
```



```
910  ON GY GOTO 20,930
920  GOTO 900
930  END
940 C1 = I + 1
950  IF MID$ (A1$,C1,1) = "(" THEN C2 = C2 + 1
960  IF C2 = 2 THEN 990
970 C1 = C1 + 1
980  GOTO 950
990 N2 = VAL (MID$ (A1$,C1 + 1, LEN (A1$) - C1))
1000 Q = P(N2)
1010 C1 = 0:C2 = 0
1020 N1 =  VAL ( MID$ (A1$,I + 3, LEN (A1$) - I - 2))
1030 P = P(N1)
1040  RETURN
1050  IF I - 1 =  < 0 THEN 1070
1060 A2$ = LEFT$ (A1$,I - 1)
1070 C1 = I + 2
1080  IF MID$ (A1$,C1,1) = ")" THEN C2 = C2 + 1
1090  IF C2 = Z THEN 1110
1100 C1 = C1 + 1: GOTO 1080
1110  IF C1 = LEN (A1$) THEN 1130
1120 A3$ = RIGHT$ (A1$, LEN (A1$) - C1)
1130  ON R * 2 + 1 GOSUB 1170,1180,1190
1140 C1 = 0:C2 = 0
1150 A2$ = A2$ + A3$
1160 A1$ = A2$: RETURN
1170 A2$ = A2$ + "P(" + STR$ (N + 1) + ")": RETURN
1180 A2$ = A2$ + "P(" + STR$ (N + 2) + ")": RETURN
1190 A2$ = A2$ + "P(" + STR$ (N + 3) + ")": RETURN
1200  REM  IMPRESION DE RESULTADOS
1210 D = 36 / (M + 1)
1220 PP = 1
1230  FOR K = 1 TO M
1240  GOSUB 1440
1250  ON TI GOTO 1260,1290
1260  INVERSE
1270  PRINT  TAB( D * K - 1);"P(";X;")";
1280  NORMAL : GOTO 1300
1290  PRINT  TAB( D * K - 1);P(X);
1300  NEXT K
1310  ON TI GOTO 1320,1350
1320  INVERSE : PRINT  TAB( 38);"R": NORMAL
1330  VTAB 4
1340  RETURN
1350  PRINT  TAB( 38);R
1360  PRINT :CO = CO + 1
1370  IF CO < 9 THEN 1340
1380  PRINT " PULSE ESPACIO  PARA CONTINUAR    ";: GET C$
1390  VTAB 2
```

```
1400  FOR W = 1 TO 11
1410  PRINT "                                          ": NEXT W
1420  VTAB 4:CO = 0
1430  GOTO 1340
1440  IF  MID$ (M$,PP,1) = "A" THEN 1460
1450 PP = PP + 1: GOTO 1440
1460 X =  VAL ( MID$ (M$,PP + 1, LEN (M$) - PP))
1470 PP = PP + 1
1480 RETURN
```


MATEMATICAS ELECTORALES

Por Fernando Palancar Almazán
Profesor Agregado del I.B. "Vega del Jarama" de San Fernando de Henares

I. INTRODUCCION

Vamos a hacer un breve estudio, sin gran profundidad y con un único objetivo divulgativo, sobre el tema del cálculo del número de escaños del Congreso de los Diputados en las elecciones legislativas. En primer lugar comentaremos la "ley D'Hont", que es el sistema de cálculo vigente en la actualidad. En segundo lugar veremos como podría ser un modelo de reparto proporcional. Por último compararemos los resultados obtenidos por ambos métodos.

II. LA LEY D'HONT

La exposición de esta famosa regla la vamos a hacer sobre el ejemplo de los datos de las elecciones generales de Octubre de 1982, en las tres provincias con mayor número de votantes: Madrid, Barcelona y Valencia.

Comenzaremos por Valencia por ser la provincia que tiene los datos menos abultados. El número de votos válidos fué V = = 1.193.026, y según la legislación vigente (B.O.E. del 23-III.1977), solo consideramos aquellos partidos que hayan obtenido un número de votos superior al 3 por ciento de V (3% de V = 35.790). En la Tabla I están anotados los votos obtenidos por los partidos que han superado dicho 3%.

TABLA I

VALENCIA	P.S.O.E.	COALICION POPULAR	P.C.E.	U.C.D.
NUMERO DE VOTOS (NV)	635.522 (1)	350.281 (2)	63.026	52.768
NV/2	317.761 (3)	175.140 (5)		
NV/3	211.840 (4)	116.760 (8)		
NV/4	158.880 (6)	87.570 (11)		
NV/5	127.104 (7)	70.056 (14)		
NV/6	105.920 (9)	58.380		
NV/7	90.788 (10)			
NV/8	79.440 (12)			
NV/9	70.613 (13)			
NV/10	63.552 (15)			
NV/11	57.774			

NUMERO DE ESCAÑOS	
P.S.O.E.	10
COALICION POPULAR	5

Para aplicar la ley D'Hont se divide la fila con el número de votos de los diferentes partidos entre 2, y se anota en la fila siguiente; a continuación se dividen los datos de la primera fila entre 3 y después entre 4 y así sucesivamente hasta donde sea necesario, siguiendo el proceso que exponemos seguidamente y que puede verse en la Tabla I.

Siendo el número de escaños correspondiente a Valencia N = 15, al mayor número de la primera fila (635.522), le corresponde el primer escaño, el segundo número más grande (350.281), también está en la primera fila y a él le corresponde el segundo escaño, siendo el tercero para el tercer número (317.761) que está en la segunda fila. El proceso se continúa según aparece en la Tabla donde se encuentran especificados cada uno de los quince escaños.

En las Tablas II y III podemos ver los desarrollos y resultados de aplicación de la ley D'Hont en las provincias de Madrid y Barcelona.

III. UN MODELO DE REPARTO PROPORCIONAL

Propongo aquí un posible modelo de reparto proporcional del número de escaños, y vamos a seguir la exposición del método sobre el ejemplo de Valencia.

Con el total de votos válidos V = 1.193.026 y el número de escaños N = 15, calculamos el número de votos que correspondería a cada escaño E = V/N, E = 79.535; entonces lo primero que hacemos es considerar únicamente aquellos partidos que superan la mitad de esta cantidad E/2 = 39.767.

TABLA II

Votos válidos V = 2.738.558, 3% de V = 82.156, Número de escaños N = 32

MADRID	P.S.O.E.	COALICION POPULAR	P.C.E.	C.D.S.	U.C.D.
Número de votos (NV)	1.439.137 (1)	891.372 (2)	137.459 (17)	113.384 (21)	92.508 (27)
NV/2	719.568 (3)	445.686 (5)	68.729	56.692	46.254
NV/3	479.712 (4)	297.124 (7)			
NV/4	359.784 (6)	222.843 (10)			
NV/5	285.827 (8)	178.274 (13)			
NV/6	239.856 (9)	148.562 (15)			
NV/7	205.591 (11)	127.338 (19)			
NV/8	179.892 (12)	111.421 (22)			
NV/9	159.904 (14)	99.041 (25)			
NV/10	143.913 (16)	89.137 (29)			
NV/11	130.830 (18)	81.033 (31)			
NV/12	119.928 (20)	74.281			
NV/13	110.702 (23)				
NV/14	102.795 (24)				
NV/15	95.942 (26)				
NV/16	89.946 (28)				
NV/17	84.655 (30)				
NV/18	79.952 (32)				

NUMERO DE ESCAÑOS	
P.S.O.E.	18
COALICION POPULAR	11
P.C.E.	1
C.D.S.	1
U.C.D.	1

TABLA III

Votos válidos V = 2.671.594, 3% de V = 80.147, Número de escaños N = 33

BARCELONA	P.S.C. - P.S.O.E.	CONVERGENCIA I UNIO	COALICION POPULAR	P.S.U.C.	ESQUERRA REP. DE CATALUNYA
Número de votos (NV)	1.292.672 (1)	560.555 (3)	385.967 (5)	131.314 (16)	99.850 (22)
NV/2	646.336 (2)	280.277 (7)	192.983 (10)	65.657	49.925
NV/3	430.890 (4)	186.851 (11)	128.655 (18)		
NV/4	323.168 (6)	140.138 (15)	96.491 (24)		
NV/5	258.534 (8)	112.111 (20)	77.193 (30)		
NV/6	215.445 (9)	93.425 (25)	64.327		
NV/7	184.667 (12)	80.079 (29)			
NV/8	161.584 (13)	70.069 (33)			
NV/9	143.630 (14)	62.283			
NV/10	129.267 (17)				
NV/11	117.515 (19)				
NV/12	107.722 (21)				
NV/13	99.436 (23)				
NV/14	92.333 (26)				
NV/15	86.178 (27)				
NV/16	80.792 (28)				
NV/17	76.039 (31)				
NV/18	71.815 (32				

NUMERO DE ESCAÑOS	
P.S.C. - P.S.O.E.	18
CONVERGENCIA I UNIO	8
COALICION POPULAR	5
P.S.U.C.	1
E.R.C.	1

Anotamos, según aparece en la Tabla IV, los votos obtenidos por los partidos que superan la cantidad E/2, y calculamos la suma de los votos de estos partidos T = 1.101.597.

TABLA IV

VALENCIA	NUMERO DE VOTOS (NV)	$\frac{15 \times NV}{T}$		NUMERO DE ESCAÑOS
P.S.O.E.	635.522	8,65	8 + 0	8
COALICION POPULAR	350.281	4,76	4 + 1	5
P.C.E.	63.026	0,85	0 + 1	1
U.C.D.	52.768	0,71	0 + 1	1
TOTALES	T = 1.101.597			15

Entonces considerando que los votos que suman la cantidad T son los que han de repartirse los quince escaños, lo hacemos proporcionalmente según una simple regla de tres, así para el P.S.O.E. sería:

$$\begin{array}{ccc} T & \text{———} & 15 \\ 635.522 & \text{———} & x \end{array} \quad ; \quad x = \frac{15 \times 635.522}{T} \qquad x = 8,65$$

Hacemos este cálculo para todos los partidos, obteniendo los resultados que aparecen en la segunda columna de la Tabla. A partir de estos datos vemos que se obtienen 12 escaños completos (8 PSOE y 4 CP), los tres escaños que faltan los adjudicamos tomando las tres mayores de las partes decimales de dichos números, y obtenemos los resultados finales que aparecen en la última columna de la Tabla.

En las Tablas V y VI podemos ver los resultados que se obtienen al aplicar el presente método a las provincias de Madrid y Barcelona.

IV. COMPARACION DE AMBOS METODOS

Vamos ahora a considerar los datos globales de toda España, tratando de ver en qué medida el número de escaños se corresponde con el número de votos obtenidos.

En la Tabla VII hemos anotado el número de votos obtenidos en todo el Estado, por los partidos que han obtenido algún escaño. El número total de votos obtenidos por estos partidos es T = 20.158.835, y si, de la misma forma que hacíamos en el apartado anterior, repartimos los 350 escaños proporcionalmente al número de votos, obtenemos los resultados que aparecen en la segunda columna de la Tabla.

De esta forma no se pueden asignar escaños, pues ha de hacerse provincia por provincia, pero podemos ver en qué medida la asignación final de escaños es proporcional al número de votos, pues esta columna refleja una rigurosa asignación proporcional del número de escaños.

En las dos últimas columnas aparecen los resultados globales obtenidos después de aplicar provincia por provincia, los dos métodos expuestos en este artículo. La tercera columna refleja la actual composición del Congreso de Diputados.

Analizando la Tabla VII podemos ver en qué medida la ley D'Hont favorece a los partidos mayoritarios. El reparto propor-

TABLA V

V = 2.738.558 N = 32 E = V/N = 85.579 E/2 = 42.789

MADRID	NUMERO DE VOTOS (NV)	$\frac{32 \times NV}{T}$		NUMERO DE ESCAÑOS
P.S.O.E.	1.439.137	17,22	17 + 0	17
COALICION POPULAR	891.372	10,66	10 + 1	11
P.C.E.	137.459	1,64	1 + 1	2
C.D.S.	113.384	1,35	1 + 0	1
U.C.D.	92.508	1,10	1 + 0	1
TOTALES	T = 2.673.860			32

TABLA VI

V = 2.671.594 N = 33 E = V/N = 80.957 E/2 = 40.478

BARCELONA	NUMERO DE VOTOS (NV)	$\frac{33 \times NV}{T}$		NUMERO DE ESCAÑOS
PSC - PSOE	1.292.672	16,65	16 + 1	17
CONVERGENCIA I UNIO	560.555	7,22	7 + 0	7
COALICION POPULAR	385.967	4,97	4 + 1	5
P.S.U.C.	131.314	1,69	1 + 1	2
E.R.C.	99.850	1,28	1 + 0	1
C.D.S.	49.772	0,64	0 + 1	1
PARTIT DELS COMUNISTES DE CATALUNYA	41.371	0,53	0 + 0	0
TOTALES	T = 2.561.501			33

TABLA VII

RESULTADOS TOTALES	NUMERO DE VOTOS (NV)	$\frac{350 \quad NV}{T}$	LEY D'HONT	REPARTO PROPORCIONAL
P.S.O.E.	10.127.392	175,83	202	187
COALICION POPULAR	5.403.959	93,82	105	98
U.C.D. (*)	1.425.093	24,74	11	27
P.C.E. (**)	844.976	14,67	4	8
CONVERGENCIA I UNIO	772.726	13,41	12	11
C.D.S.	600.842	10,43	2	3
P.N.V.	395.656	6,86	8	7
HERRI BATASUNA	210.601	3,65	2	3
COALICION POPULAR - UCD	139.148	2,41	2	3
E.R.C.	138.116	2,39	1	1
EUSKADIKO EZKERRA	100.326	1,74	1	2
TOTALES	20.158.835 (T)		350	350

(*) Incluye los votos de "Centristes de Catalunya".

(**) Incluye los votos del P.S.U.C.

cional propuesto también favorece a los partidos grandes, pero en menor medida que la regla D'Hont.

También podemos observar algunas curiosidades provocadas por la mayor o menor dispersión de los votos de los partidos, como por ejemplo, que 844.976 españoles votaron al PCE y obtuvieron 4 escaños, mientras que sólo 395.656 votaron al PNV, pero consiguieron 8 escaños.

NOTA

"SOBRE UNA CONJETURA REFERENTE A LA AUTOORTOGONALIDAD DE C.L.C."

En el nº 3 de este Boletín publicamos algunos ejemplos de cuadrados mágicos formados con números primos. En ese trabajo se formulaba una conjetura sobre la autoortogonalidad de los cuadrados latinos completos (c.l.c.).

Uno de los métodos empleados para la construcción de cuadrados mágicos con números primos requería la existencia de pares de cuadrados latinos completamente ortogonales.

El caso más inmediato, ya que no el más frecuente, para el cual se cumplen los requisitos exigidos, venía dado por los cuadrados latinos completos ortogonales con su traspuesto.

Esta situación en cierta manera es excepcional, pues si bien pares de cuadrados latinos ortogonales existen para cualquier orden, distinto de 2 y 6, no ocurre lo mismo con los autoortogonales. Cuadrados latinos autoortogonales se conocen pocos y no para todos los órdenes. La rareza parece aumentar si además se impone, como es nuestro caso, la condición adicional de que sean distintos todos los elementos de ambas diagonales.

Sin embargo, en los casos estudiados por nosotros, los cuadrados latinos completos utilizados eran todos autoortogonales. Esto, evidentemente, no demostraba nada, pero iba en contra de lo esperado y sugería una posible relación entre "completo" y "autoortogonal".

Puesto que se conocían ejemplos de c.l.c. ortogonales, no traspuesto uno del otro, y c.l. autoortogonales no completos, la conjetura implicaba sólamente una relación entre la condición de completo y la de autoortogonal; y exigía, naturalmente, la no existencia de c.l.c. para los órdenes 2, 3 y 6.

Aunque el estudio de los casos tratados no era exhaustivo, ya que una vez encontrado un c.l. que satisfacía los requisitos exigidos para nuestros fines interrumpíamos la búsqueda, la coincidencia era lo suficientemente curiosa como para satisfacer que sí, efectivamente, el orden 6 carecía de c.l.c., como así ocurría con los órdenes 2 y 3, entonces la demostración o refutación del aserto sería difícil o muy laboriosa.

Desconociendo, en aquel momento, c.l.c. de orden 6, en nuestros ensayos no pudimos contruir ninguno; la circunstancia de no haberse publicado la solución del problema propuesto en junio de 1981 según indicábamos en el artículo, pese al tiempo transcurrido y a su apariencia no excesivamente complicada, nos reafirmaba en nuestra creencia. De ahí la conjetura.

Pero en septiembre de este año, Boletín de la A.P.M.E.P. nª 350, aparecen varias soluciones al problema citado. Hay nada menos que 92.160 c.l.c. de orden 6 y queda comprobado que la conjetura es falsa.

Finalmente, las cuestiones planteadas al término del artículo de referencia siguen vigentes; éste hecho solamente afecta a la conveniencia de reformular las cuestiones d y e suprimiendo el condicional respecto de la conjetura.

Madrid, Octubre 2985.

José Manuel Martínez Sánchez

RESEÑA DE LIBROS

"MATEMATICAS. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS", por A. Martínez Losada, F. Hernández Aína, y F. Lorenzo Miranda. Ed. Bruño. Madrid, 1985. 349 págs.

"Resolver problemas es propio de la inteligencia, y la inteligencia es propia de la naturaleza humana. Por tanto, resolver problemas es la actividad más específicamente humana" (Polya).

Antes, y me refiero a épocas muy pretéritas, todos los estudiantes de matemáticas, lo mismo en las Facultades de Ciencias que en las Escuelas Especiales, manejábamos libros de problemas y ejercicios: el famoso Petersen sobre construcciones geométricas, las colecciones de F.J. y F.G.M., el Papellier, las Questioni de Enriques, etc. En ellos, y otros, nos adiestrábamos en esta actividad. Es cierto que, en principio, nos veíamos obligados a ello por imperativo de los exámenes y la preparación para las oposiciones. En unos y otras, en efecto, siempre figuraba una prueba denominada práctica, que muchas veces solía ser previa y eliminatoria, cuando no única. Pero también es verdad que, superando esta inicial "finalidad utilitaria", el alumno inteligente bien pronto se veía captado por la belleza del problema, por el desafío que supone el encararse con una situación nueva, por la alegría superpuesta de haber logrado personalmente vencer las dificultades, y siempre porque el entrenamiento en la resolución de problemas constituye la mejor contribución para el esclarecimiento y fijación en la mente de los conceptos matemáticos, a la vez que proporciona una visión del alcance de las estructuras matemáticas, y, en ocasiones, la fuente concreta para la creación de los mismos.

En las sucesivas reformas que han sufrido los planes de estudio en el bachillerato y en las enseñanzas universitarias, ¿no se habrá descuidado en demasía esta práctica formativa? Citemos de nuevo a Polya ("La découverte des Mathématiques"). "*He tenido* -escribe- *excelentes ocasiones de observar y juzgar la preparación de los futuros profesores de matemáticas y espero ser un observador imparcial, si se me permite emitir una opinión: la preparación de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria es insuficiente; su primera y primordial obligación para enseñar la matemática es dominar la metodología en la resolución de problemas. Esta es mi convicción*". Y añade una severa crítica: "*el profesor debería educar a sus alumnos en el arte y la técnica de resolver problemas, mas si no lo sabe él, ¿cómo podrá hacerlo?*".

Conscientes de estos hechos -al parecer muy generales- los autores del libro que reseñamos han elaborado una buena colección de ejercicios y problemas, dirigidos tanto a los alumnos de C.O.U. y primer curso de Facultades y Escuelas Universitarias, como a los profesores que imparten estas enseñanzas. En su mayor parte resueltos, de algunos se indica el camino a seguir en la resolución y de otros sólo se da la solución. Ordenados por las dificultades que presentan, se señala con uno o dos asteriscos los que requieren un mayor grado de adiestramiento. Los seis capítulos de que consta la obra van precedidos de un resumen de las cuestiones teóricas aplicables. Los epígrafes de dichos capítulos, son: 1/ Conjuntos. Estructuras algebraicas. Algebra de proposiciones. 2/ Sistemas de ecuaciones lineales y espacios vectoriales. 3/ Geometría. 4/ Cálculo diferencial. 5/ Cálculo integral. 6/ Cálculo de probabilidades.

El libro, pues, como pretenden los autores, creemos que cumple su finalidad: prestar un buen servicio a los profesores. A algunos, quizá, les permitirá fortalecer sus propios conocimientos, y a todos el disponer de una buena colección de ejercicios para proponer a sus alumnos, seleccionando aquellos más apropiados a tenor del proceso de maduración del curso, e incluso de cada alumno en particular.

J.R.P.I.

α

"A PROBLEM SEMINAR", por Donal J. Newman. Editor: Paul R. Halmos. Springer Verlag, New York, Inc. 1982

El autor de este libro de problemas nos recuerda en el prefacio aquellos buenos tiempos en los que las Matemáticas eran divertidas, no el pesado: Teorema, Prueba, Teorema, Prueba,..., sino el caprichoso "He encontrado un buen problema".

Quiere ofrecer, por ello, "Un Seminario de Problemas" a aquellos estudiantes de hoy, que no han tenido ocasión de divertirse y de disfrutar con la estimulante tarea de la resolución de problemas.

El libro se presenta dividido en tres partes. En la primera, presenta una colección de enunciados, clasificados por materias. Su número no es muy grande, pues resulta evidente que el autor ha hecho un gran esfuerzo de selección. La variedad es enorme y todos son interesantes; algunos de ellos son verdaderas provocaciones a la imaginación. En la segunda parte, se da una breve orientación o idea clave para abordar la resolución de cada problema, suficiente para comenzar a razonar, si no se sabía por dónde comenzar, pero no tan detallada que prive al lector del placer de obtener la solución por sí mismo. En la tercera parte, aparecen las soluciones completas.

Se trata en definitiva, de un valioso repertorio de situaciones matemáticas sobre las que pensar, ejercitando tanto la intuición como el raciocinio, que, sin duda, deleitará durante largas horas a los aficionados a las Matemáticas.

J.F.B.

* * * * * * *

"RUEDAS, VIDA Y OTRAS DIVERSIONES MATEMATICAS", por Martin Gardner. Ed. Labor, 1985, 273 págs.

Es bien conocida la atrayente personalidad de Martin Gardner, sobre todo por su asidua colaboración en la Revista "Scientific American", Investigación y Ciencia en su versión española. Su columna "Juegos Matemáticos" es afanosamente buscada por todos los lectores que gustan de aguzar su inteligencia, y, en particular, por los profesores de matemáticas que desean encontrar en ellos motivaciones interesantes para la presentación de sus lecciones, con objeto de evitar el aburrimiento y el hastío, que, como es sabido, es una de las causas de la hostilidad de los alumnos hacia el aprendizaje de las matemáticas.

La extensa correspondencia de Martin Gardner con muchos de sus lectores y con los colegas que le aportan sugerencias y variantes curiosas de sus "juegos", origen de nuevos y fascinantes problemas, le han permitido la publicación de más de una veintena de libros que son más, bastante más, que simples juegos de inteligencia.

La Editorial Labor, en cuidada traducción de Luis Bou García, nos ofrece ahora el último, delicioso libro que sigue a los anteriores de la misma editorial, los famosos ¡AJA!: "Inspiración" y "Paradojas". En él se tratan algunos problemas clásicos, como, por ejemplo, el de Fermat y el llamado juego de Nim; pero Gardner es siempre original en su presentación y tratamiento. En todas las cuestiones se manifiesta, junto a la altura científica, las dotes pedagógicas del maestro. Casi siempre comienza por un caso simple, en ocasiones trivial, pero con qué arte sabe elevarse en el pensamiento creador. Escrito con humor, son abundantes las citas y las anécdotas históricas relativas a la cuestión tratada. En ocasiones da la solución, pero casi siempre deja al lector el desafío de llegar por sí mismo al descubrimiento. Por eso es un libro ciertamente entretenido, no sólo en el sentido de diversión, sino también porque requiere tiempo e ingenio, trabajo personal y constancia, para descifrar los enigmas y llegar a las soluciones. Personalmente puedo decir que ha sido el libro que me ha ocupado casi exclusivamente las vacaciones del verano, y que ha contribuído a que hayan sido más felices.

Recomendable, por tanto, a mi juicio, para los alumnos más aventajados, y para todos los profesores que deseen amenizar sus clases... sin dejar de hacer matemáticas.

Una extensa bibliografía -casi toda en inglés-, notas históricas y un índice de nombres incrementan el valor de la obra.

J.R.P.I.

"EL COMETA HALLEY, 1985-86". Guía práctica para su observación, por José Luis Comellas y Manuel Cruz. Colección Salvat, Temas Clave. De venta en quioscos, 64 págs.

Es una breve exposición acerca de los cometas en general, y, en particular, del Halley, así como de las condiciones en que va a producirse su aparición en estos meses. Profusamente ilustrado con atractivos dibujos y bellas fotografías en color. Dirigido al gran público, con intención divulgadora, contiene, no obstante, explicaciones correctas y muy claras sobre los conocimientos actuales de esos singulares astros, que son los cometas, y una interesante historia de las reacciones que sus apariciones han provocado ocasionalmente en la humanidad. Es un opúsculo muy adecuado como guía de observación del Halley en su próxima visita a la tierra, y aprovechable para interesar a nuestros alumnos de bachillerato en estas cuestiones.

J.F.B.

"EL COMETA HALLEY", por Isaac Asimov. Ed. Plaza y Janés, 1985, 149 pág.

Isaac Asimov nos ofrece un nuevo libro, uno más de los muchos que tiene escritos de divulgación científica, actividad en la que tiene acreditado un rigor científico y una amenidad narrativa que hacen su lectura instructiva a la par que deleitosa.

Este que reseñamos aprovecha como motivo la actualidad de tener entre nosotros un visitante ilustre, de la más rancia estirpe, pues sus orígenes se remontan, según testimonios chinos, a más de 300 años antes de Cristo: el cometa Halley.

La historia de este viejo visitante que nos cuenta el autor, a la vez que la de otros de su clase, se lee como si fuera una apasionante novela. Relata los infundados terrores que sus visitas periódicas produjeron entre los hombres, y estudia la constitución y naturaleza de estos viajeros del espacio, el porqué de sus en ocasiones espléndidas cabelleras, y, en particular, las condiciones óptimas para observar en los días y horas más convenientes al ilustre visitante, todo ello acompañado de ilustraciones y grabados, actuales y antiguos, del mayor interés. Pero su lectura me ha sugerido además algunas reflexiones, relativas a la enseñanza de las matemáticas, que no me resigno a dejarme en el tintero (perdón por el tópico, porque escribo con bolígrafo). Durante algunos años, en el Curso Preuniversitario, la asignatura de Matemáticas acogió unas lecciones de Cosmografía que los alumnos seguían con gran interés, sobre todo si se acompañaban con salidas al campo para contemplar el firmamento y alguna visita a los Observatorios Astronómicos. Al sustituir aquel Curso por el C.O.U., en la reforma de 1970, dichas nociones se suprimieron, y en su lugar figura desde entonces lo que podríamos denominar como un "ensayo general" de iniciación a los programas vigentes en en el primer curso de las Facultades de Ciencias y Escuelas de Ingeniería, olvidando que muchos de los alumnos no accederán a ellas por seguir otros derroteros. Con esta medida es muy probable que nuestros bachilleres no sepan explicar, por ejemplo, porqué hace calor en el verano en nuestro hemisferio; cuál es la causa de las mareas; cómo se producen los eclipses; y quizá no hayan oído hablar jamás del sol de medianoche. Relata Rey Pastor en su librito de Cosmografía el asombro que le causó la lectura de una novela en la que el autor contaba un romance entre los protagonistas que tenía lugar en los días de Carnaval a la luz de la luna, cuando como es sabido -o debería saberse- esa fiesta coincide siempre con el novilúneo.

Si se recomienda insistentemente que la enseñanza de la Matemática debe estar en conexión con la vida natural y social, con la realidad, este año se presenta una realidad fascinante, como es la visita del Halley, ocasión que no debe dejar de aprovecharse. Unas clases extras, como ya se ha hecho en algún centro, deben organizarse, así como la adquisición de alguno de los libros que, con este motivo, se han publicado. Entre ellos el de Asimov nos parece uno de los más recomendables.

J.R.P.I.

CORRIGENDA

Como el buen sentido de nuestros lectores habrá detectado y corregido, en nuestro boletín nª 7, por un error imputable a la imprenta, aparecieron permutados los contenidos de las páginas 34 y 67 (aunque no sus numeraciones).

En el enunciado del PROBLEMA 3º propuesto en la página 83 de nuestro Boletín nº 6 se deslizó un error (decía $\frac{3}{2}$ en lugar de $\frac{\sqrt{3}}{2}$). El enunciado correcto es:

Sean $P_1, \ldots, P_n$ $(n \geq 2)$ puntos del plano. Probar que se verifica:

$$\max_{1 \leq i < j \leq n} \overline{P_i P_j} > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1) \min_{1 \leq i < j \leq n} \overline{P_i P_j}$$

donde $\overline{P_i P_j}$ es la distancia euclídea entre P_i y P_j .

PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA I OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

PROBLEMA 1ª

Hallar todas las ternas de números enteros (a,b,c) tales que:

$$a + b + c = 24$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 210$$
$$a\,b\,c = 440$$

PROBLEMA 2ª

Sea P un punto en el interior del triángulo equilátero ABC, tal que PA = 5, PB = 7 y PC = 8. Hallar la longitud del lado del triángulo.

PROBLEMA 3ª

Resolver la ecuación:

$$4x^2 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$$

sabiendo que sus raíces, reales y positivas, verifican la igualdad:

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$$

PROBLEMA 4ª

Se tiene la igualdad:

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$$

en la cual $x \neq 1$, $y \neq 1$, $x \neq y$. Demostrar que ambas fracciones son iguales a $x + y + z$.

PROBLEMA 5ª

A cada entero positivo $\underline{n}$ se asigna un entero no negativo $f(n)$, de tal manera que se satisfacen las siguientes condiciones:

i) $f(rs) = f(r) + f(s)$.

ii) $f(n) = 0$, siempre que la cifra de las unidades de $\underline{n}$ sea 3.

iii) $f(10) = 0$.

Se pide hallar $f(1985)$, justificando la respuesta.

PROBLEMA 6ª

Dado un triángulo ABC, se consideran los puntos D, E, F de las rectas BC, AC y AB, respectivamente. Si las rectas AD, BE y CF pasan todas por el centro O de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, cuyo radio es r, demostrar que:

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{r}$$

Ver "Corrigenda" en Pág. 82

¡¡ ESPERAMOS VUESTRAS SOLUCIONES PARA SU PUBLICACION EN PROXIMOS NUMEROS DEL BOLETIN !!

PROBLEMAS RESUELTOS

SOLUCIONES RECIBIDAS CORRESPONDIENTES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTRO BOLETIN Nª 5

PROBLEMA 1ª

En una sucesión finita de números reales, la suma de siete términos consecutivos cualesquiera es negativa y la suma de once términos consecutivos cualesquiera es positiva. Determinar el número máximo de términos de la sucesión.

- ▪ - ▪ - ▪ -

Solución

Sea $a_1, a_2, \ldots, a_N$ una sucesión de N términos con dichas propiedades. Algunos lemas facilitan la construcción de ejemplos y la determinación del máximo pedido:

Lema 1: Si $N \geq 11$, de cada once términos consecutivos los cuatro primeros tienen suma positiva. Lo mismo los cuatro últimos. (En efecto, los siete últimos la tienen negativa, luego los cuatro primeros han de tenerla positiva para que la tengan los once).

Lema 2: Si $N \geq 14$, de cada 14 términos consecutivos, los tres primeros tienen suma negativa. Los tres últimos también. (En efecto, los $14 = 2 \cdot 7$, han de tener suma negativa; como los 11 últimos la tienen positiva, los tres primeros la tendrán negativa también).

Lema 3: Si N $\geq$ 14, de cada catorce consecutivos, el cuarto y el undécimo son con seguridad positivos (los tres primeros tienen suma negativa, por lema 2; los cuatro primeros, positiva, por lema 1; luego el cuarto ha de ser positivo; análogamente en sentido contrario).

Lema 4: Si N $\geq$ 15, de cada 15 consecutivos, el primero es positivo. Lo mismo el último y el central. (En efecto, por lema 1, los 4 primeros tienen suma positiva; los 11 restantes también, luego la suma de los 15 consecutivos es positiva; los 14 últimos han de tener suma negativa, luego el primero ha de ser positivo; lo mismo el último; los 14 no centrales han de tener suma negativa, luego el central será positivo).

De estos lemas resulta inmediatamente la imposibilidad de que sea N $\geq$ 17; en efecto, si hubiese 17 términos consecutivos, los tres primeros habrían de ser positivos, por el lema 4 (como primeros de 15 consecutivos), pero su suma habría de ser negativa, por lema 2, lo que es contradictorio.

En cambio, sí existen sucesiones de 16 términos que cumplen las condiciones del problema. Según los lemas anteriores, es fácil deducir que la configuración de signos ha de ser:

$$+ + - + + + - + + - + + + - + +$$

Los ejemplos más sencillos de tales sucesiones se obtienen añadiendo la condición de que sean iguales entre sí los términos positivos (p) y también los negativos (-n). Se ha de verificar:

$$\left.\begin{array}{l} 5p - 2n < 0 \\ 8p - 3n > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{2}{5} > \frac{p}{n} > \frac{3}{8}$$

Las soluciones más sencillas en números enteros son:

a) p = 5, n = 13

5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5

b) p = 12, n = 31

12, 12, -31, 12, 12, 12, -31, 12, 12, -31, 12, 12, 12, -31, 12, 12

etc.

La contestación del problema es, pues: el número máximo pedido es 16.

Argearge

Recibida otra solución de

Rafael Bravo de la Parra

PROBLEMA 6°

Probar que toda partición del espacio tridimensional en tres subconjuntos disjuntos tiene la siguiente propiedad: por lo menos en uno de los tres subconjuntos se realizan todas las distancias; es decir, para todo $a \in \mathbb{R}$, existen en dicho subconjunto dos puntos M y N tales que la distancia $\overline{MN}$ es igual a a.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Solución

Lo demostraremos por reducción al absurdo. En efecto, supongamos la existencia de una partición del espacio en tres subconjuntos disjuntos A, B, C, tales que en A no se "realice" la distancia a, que en B no se realice la distancia b, y que en C no se realice la c. Sin restringir la generalidad, pues bastaría un cambio en las notaciones, podemos suponer $a \geq b \geq c$.

Elijamos un punto cualquiera $A_1 \in A$ (si A fuera el conjunto vacío, tomaríamos para A_1 un punto arbitrario del espacio), y consideremos la esfera de centro A_1 y radio $\underline{a}$; llamemos S_a al conjunto de puntos de la superficie de esta esfera. Hemos supuesto que ningún punto de esta superficie puede pertenecer a A, luego $S_a \subseteq B \cup C$. Elijamos ahora otro punto B_1 de la intersección $S_a \cap B$ (si fuera vacía, B_1 podría ser un punto arbitrario de S_a), y consideremos la esfera de centro B_1 y radio $\underline{b}$; sea S_b la superficie de esta esfera. Como hemos supuesto $\underline{b} \leq \underline{a} \leq 2\underline{a}$, las dos superficies S_a y S_b se cortarán en una circunferencia L, y como en B no hay ningún punto que realice $\underline{b}$, se tendrá $L \subsetneq C$. Ahora bien, el radio de L se calcula fácilmente, y es

$$r = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$$

esto es,

$$2r = b\sqrt{4 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Por ser $b \leq a$, es:

$$2r \geq b\sqrt{3} > b \geq c$$

lo que significa que en la circunferencia L, y, por tanto, en C, hay una infinidad de puntos que realizan $\underline{c}$, contra la hipótesis.

Argearge.