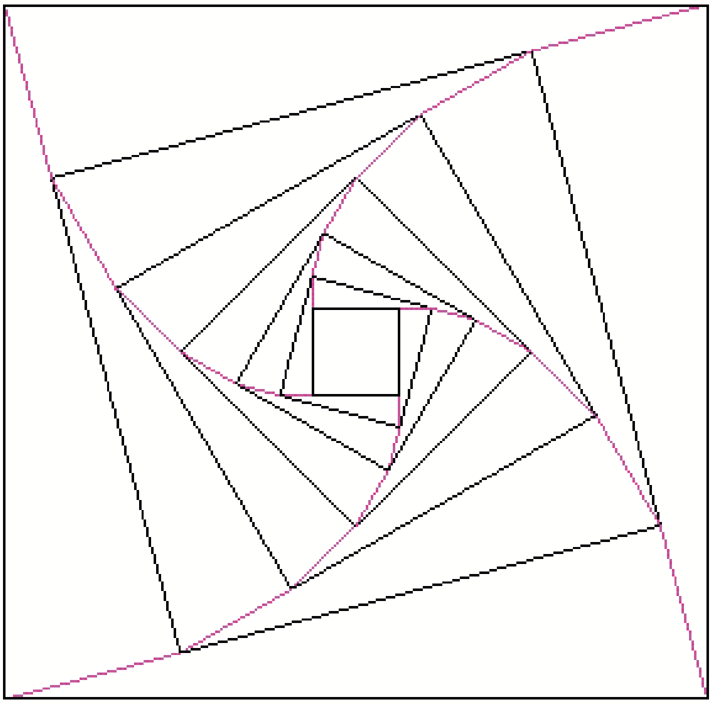
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 63
FEBREO DE 2003

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
MARTÍN GARBAYO MORENO

Adjunta a la presidencia (mantenimiento página web):
MARÍA JOSÉ MORENO SÁNCHEZ DE LA SERRANA

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2003

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2003 para el sábado *día 6 de abril del 2003*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

XXI Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas

y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Letras

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *7 de junio del 2003* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del dia 7 de Mayo del 2003, dirigiéndose por carta o por fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid
Fax: 91 394 4662

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2002-2003.

XXXIX Olimpiada Matemática Española
Primera Fase - Madrid

Las pruebas de la PRIMERA FASE de la *"XXXIX Olimpiada Matemática Española"* correspondientes al curso 2002-2003 y a los distritos de Madrid, se han celebrado en los días 17 y 18 de Enero de 2003.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española,* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio* y se desarrolla en dos fases: la Primera tiene lugar en distintos distritos; este año, tres de ellos corresponden a la Comunidad de Madrid, que cuenta con cinco Universidades estatales, además de las privadas.

Los tres ganadores de cada distrito reciben un Diploma acreditativo de la Real Sociedad Matemática Española y son propuestos a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio para la concesión de un premio en metálico que este año es de 380, 285 y 220 euros para los ganadores de cada Distrito.

Los alumnos premiados son invitados a participar en la Segunda Fase, que este año tendrá lugar en *La Laguna (Tenerife)* y en *Las Palmas (Gran Canaria)***,** del 2 al 6 de Marzo. En ella se entregarán 6 Medallas de Oro, 12 de Plata y 18 de Bronce. Las medallas de oro llevarán anejas premios en metálico de 750 euros.

Con los mejores clasificados en esa segunda fase, se formará el equipo que representará a España en la *44º Olimpiada Matemática Internacional* y en la *XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.*

Las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de tres horas y media de duración cada una, en las que se propusieron seis problemas, cuyos enunciados damos en este número de nuestro Boletín. Las pruebas de los tres distritos que corresponden este año a todas las Universidades de nuestra Comunidad, se realizaron conjuntamente, y a ellas concurrieron 68 alumnos, algunos más que el año anterior.

Cada problema se calificó con un máximo de *7 puntos*, como en la mayor parte de las competiciones internacionales y como ya se hizo el curso anterior. De este modo, había una posibilidad teórica de obtener *42 puntos***.**

Damos a continuación los nombres de los *nueve* alumnos premiados en los distritos de Madrid **A**, **B** y **C**, ordenados por puntuaciones decrecientes:

1º A. - D. Luis HERNÁNDEZ CORBATO, de 2º de Bach.
del I. E. S. Fortuny de Madrid .... **29 puntos**
1º B. - D. Javier GÓMEZ SERRANO, de 2º de Bach.
del Colegio Alemán de Madrid .... **28 puntos**
1º C. - D. Ricardo MARTÍN BRUALLA, de **4º de E.S.O.**
del Colegio Alemán de Madrid .... **24 puntos**

2º A. - D. Daniel de la BARRERA MAYORAL, de **1º de Bach.**
del Colegio "La Inmaculada" de los PP Escolapios de Getafe ... **24 puntos**
2º B. - D. Alejandro CRUZ ROBLEDILLO, de 2º de Bach.
del Colegio Santa María del Pilar de Madrid .... **24 puntos**
2º C. - D. Worrawit PATTARANIT, de 2º de Bach.
del I. E. S. "Ramiro de Maeztu" de Madrid .... **21 puntos**

3º A. - D. Juan APARICIO ROA, de 2º de Bach.
del Colº. "Retamar" de Madrid .... **20 puntos**
3º B. – Dª. Elisa LORENZO GARCÍA, de **4º de E.S.O.**
del I. E. S. "Fortuny" de Madrid .... **16 puntos**
3º C. - D. Luis SARABIA UTRILLA, de **1º de Bach.**
del Colº de "San Viator" de Madrid .... **16 puntos**

Debemos resaltar que entre los premiados hay dos que están cursando 1º de Bachillerato y otros dos que cursan 4º de E. S. O.

Como otros años, la mayor parte de los premiados son bien conocidos por su brillante participación en los concursos de resolución de problemas de nuestra Sociedad o en otras competiciones anteriores, incluso internacionales.

Nuestra enhorabuena a los premiados y a los profesores que los han preparado.

En este mismo número del Boletín, damos los enunciados de esos problemas y, junto con cada uno, las puntuaciones medias alcanzadas en él, por todos los participantes y por los nueve premiados, así como el número de soluciones calificadas con 6 o con 7, que consideramos aceptables.

Problemas propuestos en la Primera Fase de la XXXIX Olimpiada Matemática Española en los Distritos de Madrid

(Los mismos problemas que en la mayoría de los distritos españoles)

Problema 1

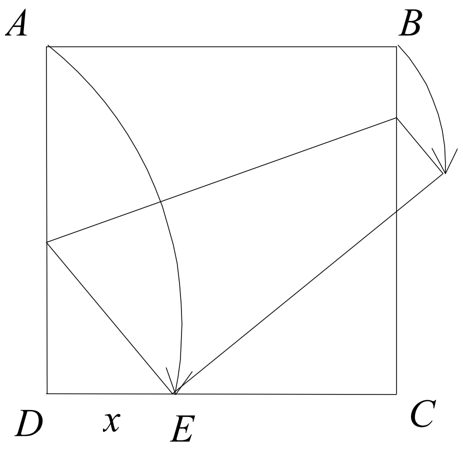
Determina los dos valores de x más próximos (por defecto y por exceso) a 2003º que cumplen la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\frac{1}{sen^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} - \frac{1}{\mathrm{cotg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\mathrm{cosec}^2 x} = -3$$

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 3,0
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7):4,3
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 68): 12

Problema 2

Un cuadrado de papel *ABCD* se dobla de modo que el vértice *A* toque en un punto arbitrario *E* del lado *CD*. Así, se obtienen tres triángulos rectos formados por una sola capa de papel.



Determinar la longitud de sus lados en función de $x = DE$, para demostrar que el perímetro del triángulo mayor es la suma de los perímetros de los otros dos, y vale la mitad que el perímetro del cuadrado. *(Teorema de Haga)*

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 0,7
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 3,1
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 68):1

Problema 3

Dado el polinomio $p(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$, prueba que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3 D = C^3$

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,3
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 5,9
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 68): 12

Problema 4

Se dispone de pequeñas piezas de madera de tamaño 4 x 5 x 10. Decide si es posible o no apilarlas, sin dejar huecos y apoyándolas siempre sobre cualquiera de sus caras, para formar un ortoedro de dimensiones 2^{2003} x 3^{2003} x 5^{2003}.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 0,7
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 4,6
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 68): 5

Problema 5

Dado un triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, y con lados de longitud $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$, llamemos *D* al punto de intersección del lado *AB* con la bisectriz del ángulo *C*. Demuestra que:

$$CD = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a + b}$$

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 0,4
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 2,1
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 68): 2

Problema 6

¿Existirán 16 números naturales distintos y menores de 100 tales que al colocarlos en las casillas de un tablero 4 x 4 el producto de los situados en cada fila sea el mismo y, a su vez, coincida con el de los colocados en cada columna y en las dos diagonales principales?

Si la respuesta es afirmativa, indica cuáles son.

Si la respuesta es negativa, justifícalo.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 0,8
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 4,0
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 68): 4

XVII Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas

El Salvador, octubre de 2002

La Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas se celebró entre los días 30 de septiembre y 6 de octubre de 2002 en la ciudad de San Salvador, capital de la República de El Salvador. En ella participaron delegaciones de veintiún países iberoamericanos: únicamente una ausencia, la de Chile, que envió un profesor como observador pero no un equipo.

Los participantes españoles fueron Sergio Millán López, de L 'Hospitalet de Llobregat (Barcelona); José Miguel Manzano Prego, de Motril (Granada), Daniel Rodrigo López, de Montcada i Reixac (Barcelona), y David García Soriano, de Madrid. Les acompañaban los Profesores Marco Castrillón López e Ignasi Mundet Riera, ambos antiguos olímpicos y medallistas en esta competición.

Luis Hernández Corbato, primer clasificado español en la Olimpiada Internacional de Matemáticas, en la que obtuvo su segunda Medalla de Bronce en una IMO, prefirió no acudir este año, ya que él ya ha consumido una (con Medalla de Oro) de las dos participaciones que, según las normas de la Iberoamericana tiene cada estudiante, y sin embargo, por razones de edad, podría participar, si resulta clasificado, en 2003 y 2004 todavía.

Sergio, José Miguel y Daniel obtuvieron cada uno Medalla de Plata, mientras que David fue felicitado por el Jurado por su brillante solución al problema número 5. La Copa Puerto Rico, que se otorga al país con mayor progreso relativo en los últimos tres años, ha correspondido este año a Guatemala.

La XVIII Olimpiada se celebrará en Argentina en septiembre de 2003, mientras que en 2004 le corresponde a España ejercer de anfitriona.

Problemas propuestos

Problema 1

Los números enteros del 1 al 2002, ambos inclusive, se escriben en una pizarra en orden creciente 1, 2, . . . , 2001, 2002. Luego, se borran los que ocupan el primer lugar, cuarto lugar, séptimo lugar, etc., es decir, los que ocupan los lugares de la forma $3k + 1$. En la nueva lista se borran los números que están en los lugares de la forma $3k +1$. Se repite este proceso hasta que se borran todos los números de la lista. ¿Cuál fue el último número que se borró?

Problema 2

Dado cualquier conjunto de 9 puntos en el plano de los cuales no hay tres colineales, demuestre que para cada punto P del conjunto, el número de triángulos que tienen como vértices a tres de los ocho puntos restantes y a P en su interior, es par.

Problema 3

Un punto P es interior al triángulo equilátero ABC y cumple que $\angle APC = 120º$. Sean M la intersección de CP con AB y N la intersección de AP con BC. Hallar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo MBN al variar P.

Problema 4

En un triángulo escaleno ABC se traza la bisectriz interior BD, con D sobre AC. Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta BD, y sea M el punto sobre el lado BC tal que DM es perpendicular a BC. Demuestre que $\angle EMD = \angle DMF$.

Problema 5

La sucesión de números reales a_1, a_2, ... se define así: $a_1 = 56$ y $a_{n+1} = a_n - 1 / a_n$ para cada entero $n \geq 1$. Demuestre que existe un entero k, $1 \leq k \leq 2002$, tal que $a_k < 0$

Problema 6

Un policía intenta capturar a un ladrón en un tablero de 2001 × 2001. Ellos juegan alternadamente. Cada jugador, en su turno, debe moverse una casilla en uno de los tres siguientes sentidos:
$\downarrow$(abajo); $\rightarrow$(derecha); $\nwarrow$(diagonal superior izquierda).
Si el policía se encuentra en la casilla de la esquina inferior derecha, puede usar su jugada para pasar directamente a la casilla de la esquina superior izquierda (el ladrón no puede hacer esta jugada). Inicialmente el policía está en la casilla central y el ladrón está en la casilla vecina diagonal superior derecha al policía. El policía comienza el juego. Demuestre que:
(a) El ladrón consigue moverse por lo menos 10000 veces sin ser capturado.
(b) El policía posee una estrategia para capturar al ladrón.
Nota: El policía captura al ladrón cuando entra en la casilla en la que está el ladrón. Si el ladrón entra en la casilla del policía, no se produce captura.

Recensiones en ZDM y en Math Reviews

Las prestigiosas revistas Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) y Mathematical Reviews incluyen en sus volúmenes recensiones de artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN MATHEMATICAL REVIEWS

2002c:00004 D. Pedro Abellanas y la falsa moneda, por *Tomás Recio y Luis Miguel Pardo*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 58 (2001) 78-93.

2002k:00012 El teorema π de Buckingham: núcleo del Análisis Dimensional, por *Francisco A. González Redondo*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 55 (2000) 67-75.

2002k:00013 Origen y primera formulación del teorema π, por *Francisco A. González Redondo*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 59 (2001) 83-93.

2002k:01009 Acerca de un problema de la "Optica" de Euclides, por *Juan Tarrés Freixenet*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 86-92.

2002k:13035 Sistemas de ecuaciones lineales sobre anillos de Prüfer, por *Tomás Sánchez Giralda*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 57 (2001) 86-94.

2002m:00017 El teorema Π entre Vaschy y Buckingham: el método de las variables de dimensión cero, por *Francisco A. González Redondo*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 71-81.

Actualización de la página web de la Sociedad

La nueva página web de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, cuyo mantenimiento corre a cargo de nuestra consocia Adjunta a la Presidencia, María José Moreno Sánchez de la Serrana, está ya disponible:

http://www.ucm.es/info/secdealg/puigadam

Su estructura básica consta de una *Portada*, en la cual se ha instalado un contador para saber cuántos nos visitan así como el país de procedencia. Desde ella se tiene acceso a siete secciones que se describen a continuación.

1. La Sociedad

Esta sección, dedicada a dar a conocer nuestra Sociedad, consta de tres apartados:

a) *Historia* de la Sociedad
b) *Fines* de la Sociedad
c) *Junta Directiva* de la Sociedad

2. El Boletín

Esta sección, dedicada a dar a conocer nuestro Boletín, consta de cuatro apartados:

a) *Índices* (de todos los números del Boletín)
b) *Último número* (del Boletín)
c) *Instrucciones para el envío de originales* (para su publicación en el Boletín)
d) *Adquisición de números atrasados* (del Boletín)

El apartado *Índices* da paso a una página intermedia donde se puede seleccionar si interesa ver los artículos por números del Boletín o bien por orden alfabético de autores. En el primer caso se enlaza con la página de la UCM donde se registra nuestro Boletín. En el segundo caso aparece el índice de boletines (hasta el penúltimo número publicado). Además se está elaborando una base de datos para poder hacer consultas más sofisticadas (por ejemplo, buscar los artículos que contengan la palabra "integral").

El apartado *Último número* muestra el índice del último número publicado. Además en un futuro incluirá un avance del número siguiente.

3. Sobre Puig Adam

Esta sección, dedicada a dar a conocer la figura del Prof. D. Pedro Puig Adam, que da nombre a nuestra Sociedad, consta de tres apartados:

a) *Biografía*
b) *Artículos sobre Puig Adam*
c) *Conferencias de Puig Adam*

El primer apartado contiene un artículo biográfico de Julio Fernández Biarge (discípulo suyo). El segundo contiene tres artículos, uno de Javier Peralta y dos de Joaquín Hernández Gómez. El tercero contiene dos conferencias del propio Puig Adam tituladas "Valor formativo de las Matemáticas en la Segunda Enseñanza" y "Apología de la inutilidad".

4. Concursos

Esta sección, dedicada a dar a conocer los Concursos de Problemas organizados por (o en los que colabora) nuestra Sociedad, contiene información sobre ellos:

a) *Concurso de Primavera*
b) *Concurso de Resolución de Problemas "Puig Adam"*
c) *Concurso Intercentros*
d) *OME* (Olimpíada Matemática Española)

5. Inscripción de socios

En esta sección se muestra la Hoja de Inscripción en la Sociedad. Contiene un enlace para abrir un archivo de word, que permite rellenar cómodamente dicha Hoja e imprimirla para enviarla por correo.

6. Noticias

Esta sección se dedica a dar informaciones relativas a las actividades de la Sociedad (concursos, conferencias, etc) y también noticias matemáticas en general (conferencias, congresos, noticias de prensa, etc)

7. Contactar

Esta sección incluye el e-mail, teléfono, fax y dirección postal de la Sociedad, así como el propio e-mail de la mantenedora de la página web (la "web master").

Anuncio de conferencia

Organizada por la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y la Sección Departamental de Algebra de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense está prevista la celebración de la Conferencia títulada

Algebra in the Time of Computers

por **Kurt Kreith**

University of California at Davis

kkreith@ucdavis.edu

Nota biográfica: Kurt Kreith es profesor emérito de la Universidad de California en Davis. Su campo de investigación se centró en el estudio de Ecuaciones Diferenciales. Pero sus trabajos más recientes son sobre el desarrollo de programas para profesores, y están enfocados en el papel de las Nuevas Tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas a nivel de Educación Secundaria. Bajo los auspicios del "American Forum for Global Education", ha desarrollado un curriculum sobre "Las Matemáticas del Cambio Global", que imparte a profesores y alumnos de primer año de su universidad.

Día y hora: 23 de junio de 2003, 19:00 horas

Lugar: Facultad De Educacion (Univ. Complutense)
c/ Rector Royo Villanova s/n (Ciudad Universitaria)
Sala de Grados (Tercera Planta, entrando por puerta principal)

Advertencia: Dada la antelación de este anuncio, se recomienda asegurarse poco antes de su celebración de que va a tener lugar en la fecha mencionada.

Petición de su correo electrónico a nuestros Socios

Con el fín de poder avisar a nuestros socios de conferencias y otras actividades profesionales, que supongamos puedan ser de su interés, rogamos que todos aquellos que dispongan de dirección de correo electrónico nos envíen un mensaje indicándolo a la cuenta de nuestra Sociedad: puigadam@mat.ucm.es

Phidias numbers

Adam Marlewski

Institute of Mathematics, Poznan University of Technology
ul.Piotrowo 3a, 60-965 Poznan, Poland
amarlew@math.put.poznan.pl

Govert Werther

EuroSchool, Nassauplein 8, 1815 GM Alkmaar, the Netherland
werther@euroschool.nl

Abstract

First, we recall the definition and basic properties of the Golden Number Φ, known also as the Phidias number. Next, we generalise this notion to get Phidias numbers of arbitrary order and of various degrees in wealth (from poor to rich). We also prove theorems on the convergence of the sequences of these numbers.

Resumen

Comenzamos con la definición y las propiedades básicas del Número Áureo Φ, también conocido como el número de Fidias. Lo generalizamos definiendo números de Fidias de orden arbitrario y de grados varios en riqueza (de pobres a ricos), probando teoremas sobre convergencia de sucesiones de tales números.

Introduction

Eight centuries ago Leonardo of Pisa, also known as Fibonacci, described in his *Liber abaci* a sequence, which now holds his name. The limit of the quotients of two consecutive elements of this sequence is the Golden Number. This number, which turns up in many fields of number theory and geometry, could very well be called one of the jewels of classical mathematics.

1. Definition and basic formulae for the Golden Number Φ

The Great Pyramid of Giza was built for Pharaoh Khufu (known also by his Greek name Cheops) about 2560 BC. Since centuries the Great Pyramid fascinates and still keeps its mysteries. Some of them are already revealed. An example is the position of its basis. This is a square with diagonals which are almost collinear with the directions north-south and east-west. The earth magnetic pole migrates, and by the time the pyramid was built this collinearity was perfect!

The Great Pyramid was erected in only 20 years and still dominates the region which today is covered by desert sand. The measurements [AP, ME] give its height of 146.6 m and its sides of 230.4 m. From this follows that the angle between a side of the pyramid and its square basis is equal to

(1.1) $$\arctan(146.6/115.2) \approx 0.904767 \approx 51^\circ 50'.$$

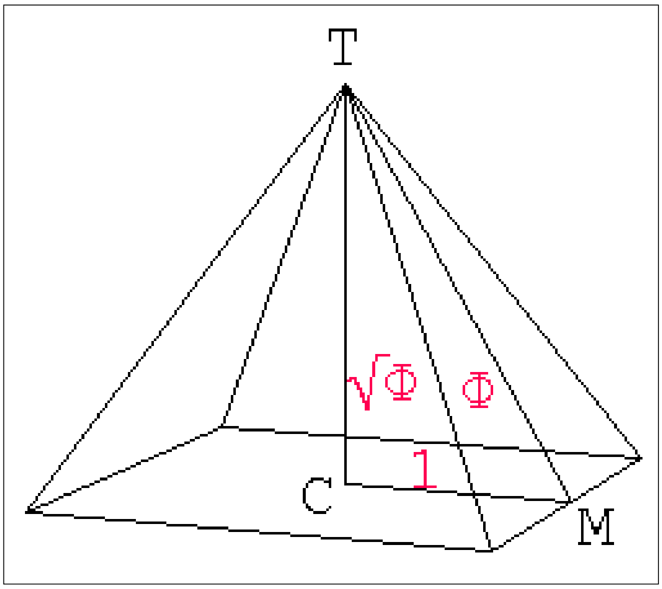


Fig. 1. *The golden triangle CMT in a pyramid*

Let's now consider a right-angular triangle, as CMT in Fig.1. Its shortest side has the length 1 and the length of the hypotenuse equals the value $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1.618033$. The cosine of the angle $\angle CMT$ equals $\varphi = 1/\Phi$. It says that this angle is $\arccos(\varphi) \approx 0.904557 \approx 51^\circ 49'$. It differs by only about 1' from the value $51^\circ 50'$ detected in sizes of the Great Pyramid! Is this coincidence casual or intended?

The Ahmes Papyrus (written about 1650 BC, in 1858 brought to Britain by Henry Rhind) is one of the oldest documents reporting mathematical problems studied and methods applied by Egyptians. In this paper it is mentioned that the number Φ, by that time named the *sacred ratio*, was used in the construction of the Pyramid of Cheops. Unfortunately, no details are given. In Euclid's 13-tome "Elements" (310 BC) the same number Φ appears when a linear segment of length AB=1 (see Fig.2) is divided by a point C into two parts such that the proportion AC/CB = AB/AC holds. If we set AC = φ, then this proportion is

(1.2) $$\varphi : (1 - \varphi),$$

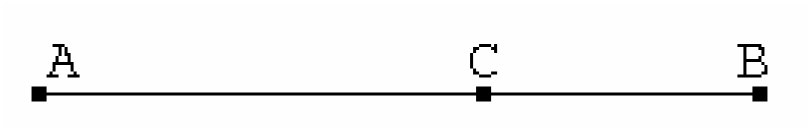


Fig. 2. *The golden section: AC/CB=AB/AC*

By Theorem of Phytagoras we have

(1.3) $$\Phi^2 = \Phi + 1,$$

so the proportion (1.2) is equal to Φ

(1.4) $$\varphi : (1 - \varphi) = 1/\Phi : (1 - 1/\Phi) = 1/\Phi : ((\Phi - 1)/\Phi) = 1/(\Phi - 1) = \Phi$$

Euclid called the point C the *golden point*, and the proportion AC/CB between the longer part and the shorter one - the *golden mean, golden ratio*, or *mean ratio.* It seems that both the problem and names were in use by earlier Greek mathematicians, especially Phytagoras (580-500 BC). The Greeks cherished the opinion that rectangles, of which the ratio of the side lengths equals Φ, are the most harmonious, aesthetical and pleasant among all rectangles. It is believed that Phidias (500 BC), the greatest sculptor of antic Athens, consciously used this ratio in his constructions, in particular in the statue of the Olympian Zeus, which is considered as one of seven wonders of the world (the Great Pyramid is another one). In honour to Phidias' mastery the American mathematician Mark Barr proposed to denote the ratio at hand by the capital letter Φ, and its reciprocal $1/\Phi$ by the small letter φ (note: $\varphi = \Phi - 1$). For this reason both numbers are sometimes called respectively the *great* and the *small Phidias number*. Another denotation for Φ, applied in [JC], is the letter τ - the initial letter of Greek word *tome* meaning *cut*.

There are other names for the sacro ratio Φ in use, namely the *divine proportion*, introduced by Fra Luca Pacioli in his book *Divina proportione* (edited in

1509), and the *golden section***,** first used in Latin (*sectio aurea*) probably by Leonardo da Vinci (1452-1519). He applied this proportion to design the plan of his masterpiece "The last supper". The name *Golden Number* to the value **Φ** gained popularity since Kepler.

For **Φ**>0, the relation (1.3) can be rewritten as

(1.5) $$\Phi = \sqrt{(1+ \Phi)}$$

and

(1.6) $$\Phi = 1 + 1/\Phi.$$

Both these equalities generate following infinite representations of the Golden Number **Φ**

(1.7) $$\Phi = \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(1+ ...)})})})},$$

(1.8) $$\Phi = 1+ 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + ...))).$$

Let us look at the formula (1.8). Its right-hand side resembles a fraction. But, in spite of the name mean ratio attributed to **Φ**, the Golden Number is not a ratio, is not a rational number (for the proof see [JS, RK]). It is an example of so-called *continued fraction* (see e.g. [GKP] for definitions). Its value is defined as the limit of so-called *convergents*. Below we take that convergents.

2. Fibonacci numbers and Kepler limit

Let us modify the expression (1.8) by substituting all values 1 by 0 except to some initials ones. We then obtain such rational numbers (they are convergents of **Φ**) as

$$\begin{aligned}
&1 &&= 1/1,\\
&1 + 1/1 &&= 2/1,\\
&1 + 1/(1 +1) &&= 3/2,\\
&1 + 1/(1 +1/(1 + 1)) &&= 5/3,\\
&1 + 1/(1 +1/(1 + 1/(1 + 1))) &&= 8/5,\\
&1 + 1/(1 +1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1)))) &&= 13/8,\\
&...
\end{aligned}$$

It is easy to notice that the successive denominators are simply the sum of two previous denominators, starting with 1 and 1. The nominators observe the same rule as well, we only have to start with 1 and 2. This observation may be written down in the following mathematical formula:

(2.1) $$F_0 := 0,\ F_1 := 1,$$

(2.2) $$F_{n+1} := F_n + F_{n-1},\ \ n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

This way the sequence $(F_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ is produced. It was Fibonacci who, in his book *Liber abaci* (edited in 1202), first defined this sequence. Today they are worldwide recognised as *Fibonacci numbers*. This name was proposed by French mathematician François Édouard Anatole Lucas (1842-91), the author of famous Towers of Hanoi puzzle (see e.g. [GKP]). We are indebted to him for discovering that Fibonacci numbers are involved in the Pascal triangle, and also for a sequence of numbers which are today called the Lucas numbers.

Johannes Kepler (1571-1630), the author of three laws describing the movement of planets around the Sun, was the first man who noticed, in 1608, that the ratio F_{n+1}/F_n of two consecutive Fibonacci numbers tends to Golden Number $\mathbf{\Phi}$,

(2.3) $$\lim F_{n+1}/F_n \to \mathbf{\Phi} \text{ as } n \to \infty.$$

It was also Kepler who said that the Golden Number and Theorem of Phytagoras are the greatest jewels of geometry.

It is easy to prove the statement (2.3). First we divide (2.2) by F_n. This gives

(2.4) $$F_{n+1}/F_n = 1 + F_{n-1}/F_n.$$

Thus, under the assumption that the sequence of quotients F_{n+1}/F_n has a finite limit (denoted here by) g as $n \to \infty$, the limiting of both sides in (2.4) gives:

$$g = 1 + 1/g.$$

It can be converted into the quadratic equation:

(2.5) $$g^2 - g - 1 = 0.$$

Its roots are $g = -\varphi$ and $g = \mathbf{\Phi}$. Fibonacci numbers are positive, so the solution is

$$g = \mathbf{\Phi}.$$

3. Natural powers of the Golden Number

The relation (1.4) generates any higher power of Φ, e.g.

$$\Phi^3 = \Phi\cdot\Phi^2 = \Phi\cdot(\Phi + 1) = \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 1 = F_3\cdot\Phi + F_2,$$

$$\Phi^4 = \Phi\cdot\Phi^3 = \Phi\cdot(2\Phi + 1) = 2\Phi^2 + \Phi = 2(\Phi + 1) + \Phi = 3\Phi + 2 = F_4\cdot\Phi + F_3,$$

$$\Phi^5 = \Phi\cdot\Phi^4 = \Phi\cdot(3\Phi + 2) = 3\Phi^2 + 2\Phi = 3(\Phi + 1) + 2\Phi = 5\Phi + 3 = F_5\cdot\Phi + F_4.$$

If we take into account that

$$\Phi = 1\cdot\Phi + 0 = F_1\cdot\Phi + F_0 \text{ and } \Phi^2 = 1\cdot\Phi + 1 = F_2\cdot\Phi + F_1,$$

then by the mathematical induction we can easily prove the formula

$$\Phi^n = F_n\cdot\Phi + F_{n-1},\quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{3.1}$$

where F_n is n-th Fibonacci number defined by (2.1)-(2.2).

One can find analogous formulae for numbers which are generated in analogous way as the Golden Number Φ. In the next section we define a sequence of such numbers, and we denote them by Φ_k. The Golden Number is the first of them. In aim to systemise the notions we write it as Φ_2, i.e. $\Phi_2 := \Phi$; the index 2 is here added to show that it is related to the quadratic equation (2.5). In the denotation just adopted the identity (3.1) is written as

$$\Phi_2{}^n = F_n\cdot\Phi_2 + F_{n-1}, \tag{3.2}$$

With the intention of systemising our consideration we will treat Fibonacci numbers in analogous way as we deal with Golden Number, i.e. we enrich them with the index 2. So we set

$$F_{2,n} := F_n.$$

Then (2.1), (2.2) and (3.2) take forms

$$F_{2,0} := 0,\ F_{2,1} := 1, \tag{3.3}$$

$$F_{2,n+1} := F_{2,n} + F_{2,n-1}, n = 1, 2, 3, 4, ... \tag{3.4}$$

$$\Phi_2{}^n = F_{2,n}\cdot\Phi_2 + F_{2,n-1}.,\quad n = 1, 2, 3, 4, ... \tag{3.5}$$

Formulae (3.3)-(3.4) produce the sequence

$$(F_{2,n})_{n = 0, 1, 2, ...} =$$
$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...).$$

Obviously, elements of this sequence are (classical) Fibonacci numbers. We can call them *2-Fibonacci numbers*. Analogously, Golden Number Φ_2 can be called the *2-Phidias number*, or *Phidias number of order 2*. In the next section we define 3-Fibonacci numbers $F_{3,n}$ and 3-Phidias number Φ_3.

4. Silver Number

Similarly as in (3.3) and (3.4), we define *3-Fibonacci numbers* (also known as *Fibonacci numbers of order 3, Tribonacci numbers*) as follows

(4.1) $$F_{3,0} := F_{3,1} := 0,\ F_{3,2} := 1,$$

(4.2) $$F_{3,n} := F_{3,n-1} + F_{3,n-2} + F_{3,n-3},\ \ n = 3, 4, 5, \ldots$$

So this recurrence defines any number $F_{3,n}$ as the sum of the three preceeding terms. Thus we obtain the sequence

$$(F_{3,n})_{n = 0, 1, 2, \ldots} =$$
$$(0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, \ldots).$$

As in case of 2-Fibonacci numbers $F_{2,n}$, the sequence of the quotients $F_{3,n+1}/F_{3,n}$ converges. The convergence is suggested by such observations as

$$F_{3,10}/F_{3,9} = 149/81 \approx 1.83950617,$$

$$F_{3,15}/F_{3,14} = 3136/1705 \approx 1.83929618,$$

$$F_{3,20}/F_{3,19} = 35890/19513 \approx 1.83928662.$$

Reasoning as in Section 2 we find that the limit

$$g = \lim F_{3,n+1}/F_{3,n} \text{ as } n \to \infty$$

has to satisfy the equation

(4.3) $$g^3 - g^2 - g - 1 = 0.$$

This polynomial equation of the third degree has two complex zeroes and the real zero equals

(4.4) $$\{(19 + 3\sqrt{33})^{1/3} + (19 - 3\sqrt{33})^{1/3}\}/3 = 1.839286795..$$

In [GH] and [RR] this number is called the *silver number*. According to the convention stated in section 3 we denote this value by Φ_3 and we call it the *3-Phidias*

number, or *Phidias number of order 3*. In the Section 6 we will see that it is natural to attribute this name to other numbers, and that's why we propose the value Φ_3 to be more exactly called the *rich Phidias number of order 3*.
One can state interesting relations related to Φ_3, for instance the analogy to formula (3.5) is

$$(4.5) \qquad \Phi_3^{\,n+1} = F_{3,n}\cdot\Phi_3^{\,2} + (F_{3,n-1} + F_{3,n-2})\cdot\Phi_3 + F_{3,n-1}, \quad n = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

The proof can be easily done by induction, see e.g. [PC].

5. Rich Phidias numbers

Let us recall the equations (2.5) and (4.3) which define the 2-Phidias and 3-Phidias numbers Φ_2 and Φ_3, respectively. Both these equations are special cases of the equation

$$(5.1) \qquad g^k - g^{k-1} - g^{k-2} \ldots - g - 1 = 0,$$

where k is an arbitrary natural number.

Let's call this equation the *rich k-Phidias equation* or *rich Phidias equation of degree k*. We derive it in the same way as that presented in Sections 2 and 4. To do this we define the *n-th Fibonacci number of order k* by the recurrence

$$(5.2) \qquad F_{k,n} := F_{k,n-1} + F_{k,n-2} + \ldots + F_{k,n-k}, \quad n = k, k+1, k+2, \ldots$$

applied with k initial values:

$$(5.3) \qquad F_{k,0} = F_{k,1} = \ldots = F_{k,k-2} = 0, \quad F_{k,k-1} = 1.$$

Now we investigate the quotients

$$\begin{aligned} q_n := F_{k,n+1}/F_{k,n} &= (F_{k,n} + F_{k,n-1} + F_{k,n-2} + \ldots + F_{k,n-k+1}) / F_{k,n} = \\ &= 1 + 1 / (F_{k,n} / F_{k,n-1}) \\ &+ 1 / (F_{k,n} / F_{k,n-1})\cdot 1 / (F_{k,n-1} / F_{k,n-2}) \\ &+ \ldots \\ &+ 1 / (F_{k,n} / F_{k,n-1})\cdot 1/(F_{k,n-1} / F_{k,n-2})\cdot\ldots\cdot 1/(F_{k,n-k+1} / F_{k,n-k})\cdot \end{aligned}$$

If we assume that there exists the finite limit g of the quotients q_n, the above equality turns into the relation (5.1). Let us denote this limit by Φ_k and call the *rich k-Phidias number*, or *rich Phidias number of order k* (the motive to call this number a rich one will be justified in Section 8). Exact values are easily obtained for k = 1, 2, 3 and 4 only, the values for k>4 may be determined numerically. Some of them are listed in Table 1.

Table 1. k-Phidias numbers

k	Φ_k
1	1
2	1.618033988749..
3	1.839286755214..
4	1.927561975482..
5	1.965948236646..
6	1.983582843424..
…	…

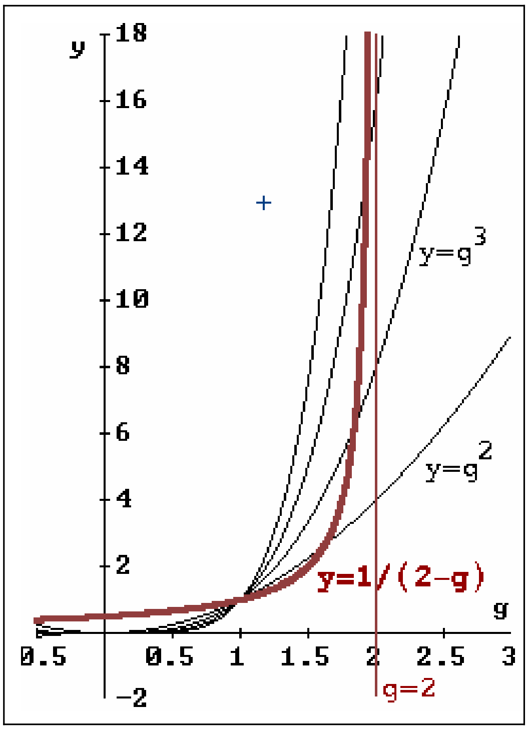


Fig. 3. *Graphs of the functions $g \to g^k$ (k = 2, 3, 4, 5), $g \to 1/(2 - g)$ and of the line g = 2*

Equation (5.1) can be written in the form:

(5.4) $$g^k = g^{k-1} + g^{k-2} + ... + g + 1.$$

For any $g \neq 1$ the right-hand expression is $(g^k - 1)/(g - 1)$, so (5.4) takes form:

(5.5) $$g^k = 1/(2 - g),$$

i.e.

(5.6) $$g^k - 1/(2 - g) = 0.$$

This can be called the *rich Phidias equation of order k*, or *rich k-th Phidias equation.* It immediately leads (see Fig.3) to:

*Theorem 1***.** Rich Phidias numbers Φ_k converge monotonically to 2 as k approaches the infinity.

6. Poor Phidias numbers

Both Fibonacci sequence $(F_n)_{n=0,1,2,...}$ and Phidias number Φ may be generalised in various ways and there is a very huge literature on it. The sequence $(F_{k,n})_{n=0,1,2,...}$ of k-Fibonacci numbers and k-Phidias numbers Φ_k, both presented in previous section, are possible results. To get them we dealt with the equation (5.4) having the regular polynomials on its right-hand side. This regularity appears in the presence of all consecutive powers of the variable g, as well as all elements identified by lower indexes in the formula (5.2) corresponding to (5.4).
Now let us work with the case when some terms are absent. So we consider the recursive definition

(6.1) $$L_0 = L_1 = ... = L_{k-2} = 0, \; L_{k-1} = 1,$$

(6.2) $$L_{n+k} := L_{n+ms} + ... + L_{n+m2} + L_{n+m1}, \; n = 0, 1, 2, ...$$

with k>ms, and its corresponding equation (easily got by the replacing L_{n+r} by g^r)

(6.3) $$g^k - g^{ms} - ... - g^{m2} - g^{m1} - 1 = 0$$

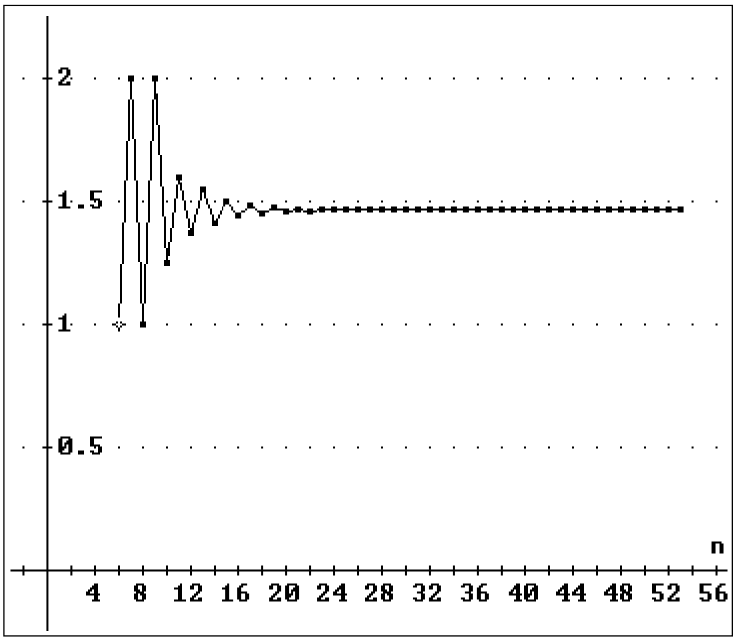


Fig. 4. *Convergence of the quotients L_n/L_{n-1} of numbers L_n defined by formulae (6.4)-(6.5)*

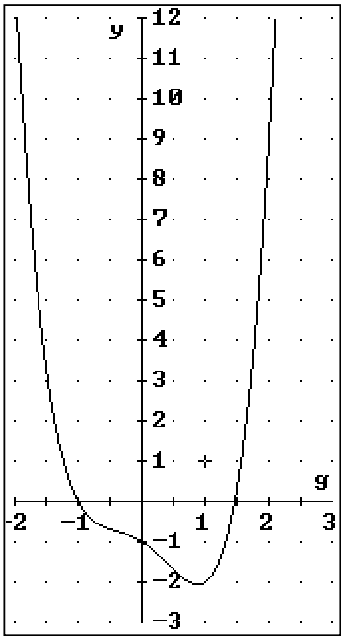


Fig. 5. *Graph of the polynomial $g \to g^4 - g^2 - g - 1$*

where $k > ms > ... > m2 > m1 \geq 0$.

For example, with $k = 4 > m2 = 2 > m1 = 1$ we have

(6.4) $\qquad L_0 = L_1 = L_2 = 0, \ L_3 = 1,$

(6.5) $\qquad L_{n+4} := L_{n+2} + L_{n+1} + L_n, \ n = 0, 1, 2, ...,$

(6.6) $\qquad g^4 - g^2 - g - 1 = 0,$

so the numbers form the sequence

$$(L_n)_{n = 0, 1, 2, ...} = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8, 11, 17, 24, 36, 52, 77, 112, ...).$$

For n = 10, 20, 30, 40, 50 and 100 their quotients L_n/L_{n-1} assume values

5/4	= 1.25 ,
241/165	= 1.46606060... ,
11032/7528	= 1.46546227... ,
504355/344136	= 1.46556884... ,
23057166/15732546	= 1.46557130... ,
6747757084228261/4604182272046428	= 1.46557123... .

The sequence of these quotients converges (see Fig.4) to the positive root of the corresponding Phidias equation (6.6), i.e. to the value 1.4655712309999489... (see Fig.5).

In the classical Fibonacci recurrence (2.2) the right-hand side is the sum of exactly two terms. This particular case in (6.2) holds if on the right-hand side we skip all terms but the most extreme ones. Then we have

(7.1) $\qquad L_0 = L_1 = ... = L_{k-2} = 0, \ L_{k-1} = 1,$

(7.2) $\qquad L_n := L_{n-1} + L_{n-k}, \ n = k, k+1, k+2, ...$

and corresponding equations

(7.3) $\qquad g^k = g^{k-1} + 1,$ i.e.

(7.4) $\qquad g^{k-1} - 1/(g - 1) = 0.$

For any $k > 2$ a number of terms embrassed in the right-hand side of the formula (7.2) does not surpass the number of terms present in (6.2). It validates that the equation (7.3), as well as (7.4), is called the *poor k-th Phidias equation*, or *poor Phidias equation of degree k.*

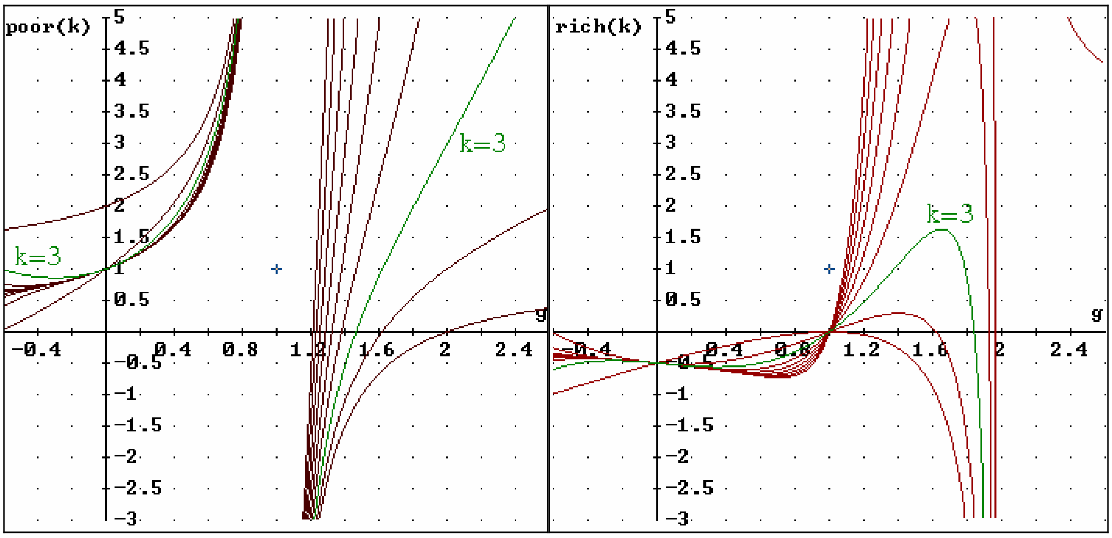


Fig. 6. *Graphs of functions $g \to g^{k-1} - 1/(g-1)$ defining poor equations (7.4) and $g \to g^{k} - 1/(2-g)$ forming rich equations (5.6) for k = 1, 2, 3, 4, …, 9.*

It is easy to verify (see also Fig.6, left window) that this equation has always a single positive zero. We fit into proposed system of names if we call it the *poor k-th Phidias number*, or *poor Phidias number of order k.* Identically as in Section 6, its value is the limit of quotients L_{n+1}/L_n of successive numbers produced by formulae (7.1)-(7.2) with arbitrarily fixed gap k. The equation (7.4) immediately reveals:

Theorem 2. The sequence of poor Phidias numbers of order k decreasingly converges to 1.

8. In-between Phidias numbers

Theorems 1 and 2 say that rich k-th Phidias numbers tend to 2 and the poor ones to 1 as k tends to the infinity. Let us recall that these numbers are defined by the number of terms present in the recurrence formula (6.2). If in its right-hand side all the terms are involved, we have rich Phidias numbers - see (5.2). If we have only two terms, with indices distant at the value k, we have poor Phidias numbers of order k - see (7.2). Obviously, only in case k = 2 these two formulae (and, in consequence, rich and poor Phidias numbers) coincide. If k > 2, there may be defined so-called the *(in-between) Phidias numbers of order k*, and there are as many as the number of possible recurrences (6.2). There are 2^{k-1} such recurrences, because they are so many as the words composed of k characters such that every word ends with 1 and any of other k-1 characters is 1 or 0. For instance, with $k = 4$ we have $2^3 = 8$ configurations:

1111, 0111, 1011, 1101, 0011, 0101, 1001, 0001.

The first of them refers to the rich 4-th Phidias number, the last one - to the poor 4-th Phidias number. The word 0111 corresponds to the recurrence (6.5) and generates the corresponding Phidias equation (6.6). The graph of the polynomial staying on the left-hand side of this equation crosses the abscissa axis at the point 1.4655712309999489... This observation may be generalised as following.

Theorem 3. Let *k, ms, ..., m2, m1* be natural numbers such that $k > ms > \ldots > m2 > m1 > 0$. Then the equation (6.3) has at least one zero in the interval (1, 2).

Proof. Denote the left-hand side in (6.3) by y(g), i.e.

$$y(g) := g^k - g^{ms} - \ldots - g^{m2} - g^{m1} - 1.$$

There is

$$y(1) = 1^k - (1^{ms} + \ldots + 1^{m2} + 1^{m1} + 1) = 1 - (s + 1) = -s < 0$$

and

$$y(2) = 2^k - u,$$

where

$$u = 2^{ms} + \ldots + 2^{m2} + 2^{m1} + 1.$$

Obviously, $u < 2^{k-1} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 1 = (2^k - 1)/(2 - 1) = w$, where $w = 2^k - 1$. Thus $y(2) > 2^k - w = 1$. It states $y(1)\cdot y(2) < 0$, so the graph of the polynomial y crosses the abscissa axis (at least at one point).

Remarks

All calculations as well as plots are made within the computer algebra system Derive 5 for Windows (from Texas Instruments Inc.), which is the Windows successor of Derive 3 (from Soft Warehouse, Inc.). In particular, it produced the exact value of rich Phidias number of order 3, also known as the silver number.

Conclusions

Throughout centuries, a lot of mathematicians, as well as people of other professions, were fascinated by the Golden Number and Fibonacci sequence. In this article we recall the definitions of these items, we refer to their presence in such wonders as The Great Pyramid of Giza and Leonardo da Vinci's "The last supper" (and such relations may essentially increase the pupils' interest in the subject). We report some generalisations of the Fibonacci sequence and Golden Number, in particular we mention so-called Tribonacci numbers and the silver number. In aim to systemise the subject we propose to use such names as Phidias numbers of the order k and its particular cases: the k-th rich Phidias number and the k-th poor Phidias number. At last, we show theorems on localisations of these numbers.

References

[PC] P. COLLINS, *Extension of interesting Fibonacci result to 3-term sequence*, http://indigo.ie/~peter/Fib1.htm (August 24th, 2001)

[JC] J. H. CONWAY, R. K.GUY, *The book of numbers*, Springer-Verlag New York 1996; Polish edition: *Księga liczb*, WNT Warszawa 1999

[GKP] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH, O. PATASHNIK, *Concrete mathematics. A foundation for computer science*, Addison-Wesley Company, Reading (Mass.) 1994; Polish edition: *Matematyka konkretna*, PWN Warszawa 1996

[GH] G. HAINRY, Le nombre d'argent, *Tangente* 48 (1996), 30-31

[RK] R. KNOTT, http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html (August 24th. 2001)

[AP] A. PISKADŁO, *100 najsłynniejszych budowli*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1979

[RR] R. RABCZUK, Liczba srebrna i potrójne liczby Fibonacciego, *Gradient* LII (1999), 164-166

[Me] L. C. STECCHINI, *A History of measures: The dimensions of the Great Pyramid*, http://www.metrum.org/measures/dimensions.htm (August 24th 2001)

[JS] J. SHALLIT, A simple proof that *Phi* is irrational, *Fibonacci Quarterly*, 13 (1975), p. 32

Estudio de las secciones planas de las cuádricas mediante sus invariantes métricos

Julio Fernández Biarge
Universidad Politécnica de Madrid

Abstract

In this paper, the metric invariants of the pair of equations formed by a quadratic surface and a plane are studied. We apply these invariants to determine the metric properties of the conic section. We also study the metric invariants of the pair of plückerian equations of a quadratic surface and a point, and we apply them to study the metric properties of the tangent cone to the surface, with vertex in the given point.

1. Introducción

El estudio de las propiedades métricas de la sección de una cuádrica con un plano, dadas sus ecuaciones en coordenadas cartesianas rectangulares, suele hacerse mediante un cambio del sistema de referencia a otro que tenga uno de los planos coordenados sobre el plano dado. Esta operación la realizan rápida y cómodamente los sistemas usuales de diseño gráfico y es igualmente fácil deshacer el cambio de referencia.

No obstante, en ocasiones tiene ventaja hacer uso de los invariantes métricos, como por ejemplo, cuando no se trata de estudiar un caso particular, sino de obtener fórmulas generales que permitan expresar directamente datos métricos de la sección, a partir de los coeficientes de las ecuaciones dadas.

Para el estudio de los invariantes de las secciones mencionadas, emplearemos en todo lo que sigue coordenadas cartesianas homogéneas respecto a un sistema de referencia ortonormal. Así, designaremos las coordenadas de un punto $\boldsymbol{x}$ con la notación (x_0,x_1,x_2,x_3), de modo $x_0=0$ es la ecuación del plano impropio y las cartesianas (no homogéneas) de un punto propio $\boldsymbol{x}$ serán $(x_1/x_0,x_2/x_0,x_3/x_0)$.

Consideraremos la cuádrica de ecuación

$$f \equiv \sum_{0}^{3} \sum_{0}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0 \tag{1.1}$$

y el plano

$$l \equiv \sum_{0}^{3} u_i x_i = 0 \tag{1.2}$$

Designaremos con **A** la matriz (a_{ij}) (simétrica) de coeficientes de (1.1), con $\mathbf{A}_{00}$ a la matriz menor complementaria de a_{00}, y con A_{ij} a los elementos de la matriz adjunta de **A**. Además, para (i,j=1,2,3), designaremos con α_{ij} a los elementos de la matriz adjunta de $\mathbf{A}_{00}$. El determinante de $\mathbf{A}_{00}$ es, según lo anterior, A_{00} .

Como es bien sabido (ver, por ejemplo, [1]), los invariantes métricos de la cuádrica (1.1) son

$$I = \sum_{1}^{3} a_{ii} \qquad J = \sum_{1}^{3} \alpha_{ij} \qquad K = A_{00} \qquad \Delta = \det(\mathbf{A}) \tag{1.3}$$

que tienen grados de homogeneidad respectivos 1, 2, 3 y 4. Esto quiere decir que si el primer miembro de (1.1) se multiplica por un factor ρ (≠0), estos invariantes, a pesar de no variar la cuádrica representada, quedan multiplicados por ρ, ρ^2, ρ^3 y ρ^4. Si dos cuádricas con invariantes $\{I,J,K,\Delta\}$ y $\{I',J',K', \Delta'\}$ son congruentes, o bien estos invariantes corresponden a dos representaciones de la misma cuádrica en distintas referencias ortonormales, no puede afirmarse la igualdad de sus invariantes, sino la existencia de un factor ρ no nulo, tal que $I=\rho I'$, $J=\rho^2 J'$, $K=\rho^3 K'$,$\Delta= \rho^4 \Delta'$.

2. Invariantes de una sección plana de una cuádrica

Para estudiar ahora invariantes de la sección plana de (1.1) por (1.2), comenzaremos por formar el haz de cuádricas

$$f + \lambda l x_0 = 0 \tag{2.1}$$

Los invariantes métricos de esta cuádrica (dependiente de λ) son:

$$I^{\wedge}=I\ ,\ J^{\wedge}=J\ ,\ K^{\wedge}=K\ ,\ \Delta^{\wedge}=\Delta+2\lambda\sum_{0}^{3}A_{0i}u_i-\lambda^2\sum_{1}^{3}\sum_{1}^{3}\alpha_{ij}u_iu_j\ . \quad (2.2)$$

Como los invariantes han de serlo con independencia del valor de λ, esto nos proporciona dos invariantes del par $\{f,\ l\}$:

$$L_p=\sum_{0}^{3}A_{0i}u_i \quad , \quad K_p=\sum_{1}^{3}\sum_{1}^{3}\alpha_{ij}u_iu_j \qquad (2.3)$$

Debemos advertir que en cada uno de estos invariantes hay que considerar el grado de homogeneidad en las a_{ij} y el de homogeneidad en las u_i . En nuestro caso, expresaremos esto diciendo que estos invariantes son de grados respectivos {3,1} y {2,2}. La multiplicación de la forma f por un factor ρ hace que L_p quede multiplicado por ρ^3 y K_p por ρ^2 . La multiplicación de la forma l por un factor σ hace que L_p quede multiplicado por σ y K_p por σ^2

En lugar de considerar el haz de cuádricas (2.1) podemos considerar, como hicimos en el artículo [2], el haz

$$f+\lambda l^2=0 \qquad (2.4)$$

La matriz de la cuádrica general de este haz es **A**+$\lambda(u_iu_j)$. Sus invariantes métricos se obtienen fácilmente, teniendo en cuenta que la matriz (u_iu_j) es de rango 1, con lo que no aparecen términos en λ^2. Estos son:

$$\begin{aligned} I^*&=I+\lambda\sum_{1}^{3}u_i^2 & J^*&=J+\lambda(I.\sum_{1}^{3}u_i^2-\sum_{1}^{3}\sum_{1}^{3}a_{ij}u_iu_j) \\ K^*&=K+\lambda\sum_{1}^{3}\sum_{1}^{3}\alpha_{ij}u_iu_j & \Delta^*&=\Delta+\lambda\sum_{0}^{3}\sum_{0}^{3}A_{ij}u_iu_j \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Como estas expresiones han de ser invariantes con independencia de λ, obtenemos otros tres del par $\{f,\ l\}$, además de los (2,3). Disponemos, por tanto de los siguientes invariantes métricos (de los que indicamos sus grados a su derecha):

$$
\boxed{\begin{array}{llll}
I \quad \{1,0\}\ , & J \quad \{2,0\}\ , & K \quad \{3,0\}\ , & \Delta \quad \{4,0\}\ , \\
L_p = \sum_0^3 A_{0i}u_i & \{3,1\}\ , & I_p = \sum_1^3 u_i^2 & \{0,2\}\ , \\
J_p = I.I_p - \sum_1^3\sum_1^3 a_{ij}u_iu_j & \{1,2\}\ , & K_p = \sum_1^3 \alpha_{ij}u_iu_j & \{2,2\}\ , \\
\Delta_p = \sum_0^3\sum_0^3 A_{ij}u_iu_j & \{3,2\}\ . & &
\end{array}} \tag{2.6}
$$

Debe notarse que sólo L_p, J_p, K_p y Δ_p dependen a la vez de los coeficientes de f y de los de l, y que tan sólo L_p y Δ_p contienen el coeficiente u_0 de l (por lo que los restantes no se alteran al sustituir el plano (1.2) por otro paralelo a él). Debido a la indeterminación de los factores ρ y σ antes mencionados, de los valores de estos invariantes y de los que podemos formar por combinaciones homogéneas de ellos, sólo tienen significado geométrico:

a) Su anulación.
b) El signo de su valor, si sus grados de homogeneidad son los dos pares.
c) Su valor, si sus grados de homogeneidad son ambos nulos.

Estos invariantes no son todos independientes; aunque el cálculo es un tanto penoso, puede comprobarse que

$$L_p^2 \equiv \Delta_p K - \Delta K_p \tag{2.7}$$

3. Relación entre esos invariantes y los de la cónica sección, en E_2

Si efectuamos un cambio de sistema de referencia a otro ortonormal en el que el plano $l = 0$ quede con ecuación $vy_3 = 0$ (designando con (y_0, y_1, y_2, y_3) las coordenadas en el nuevo sistema), la cónica $\{ f = 0, l = 0 \}$ quedará en la forma

$$\{ \sum_0^3\sum_0^3 b_{ij}\, y_i y_j = 0 \quad , \quad vy_3 = 0 \ \} \tag{3.1}$$

o sea:

$$\{ \ \sum_0^2 \sum_0^2 b_{ij}\, y_i y_j = 0 \quad , \quad v y_3 = 0 \ \} \qquad (3.2)$$

La primera de estas ecuaciones representa una cónica en **E₂** , cuyos invariantes métricos son

$$I_2 = b_{11} + b_{22} \qquad J_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \qquad K_2 = \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Por otro lado, para el par (3.1), en **E₃** , obtenemos los invariantes

$$I = b_{11} + b_{22} + b_{33} \ , \ I_p = v^2 \ , \ J_p = Iv^2 - b_{33}v^2 \ , \ K_p = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} v^2 \ , \ \Delta_p = B_{00} v^2$$

de lo que resultan inmediatamente las relaciones:

$$I_2 = \frac{J_p}{I_p} \quad , \quad J_2 = \frac{K_p}{I_p} \quad , \quad K_2 = \frac{\Delta_p}{I_p} \qquad (3.3)$$

Como los elementos métricos de la cónica sección se deducen fácilmente en función de estos invariantes, las fórmulas (3.3) nos permiten expresarlos en función de los coeficientes de f y de l .

4. Aplicación al estudio métrico de la cónica sección

Con los instrumentos desarrollados en los párrafos anteriores, podemos ofrecer algunas aplicaciones interesantes.

4.1. Planos diametrales y distancia al centro

El significado geométrico de la anulación del invariante L_p es simplemente establecer que el plano (1.2) es *diametral* de la cuádrica (1,1), es decir, que el plano pasa por su centro (A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}), si lo tiene, o por el punto de tangencia con el plano impropio si es paraboloide, o sea que (salvo que sea una identidad, por ser todos los A_{0i}=0), *la ecuación en coordenadas de planos (plückerianas) del polo del plano impropio* $x_0 = 0$ *respecto a la cuádrica será*

$$L_p = 0\,, \qquad \text{o sea} \qquad A_{00}u_0 + A_{01}u_1 + A_{02}u_2 + A_{03}u_3 = 0\,. \tag{4.1}$$

Por otro lado, debe notarse que la ecuación normal del plano $l = 0$ es $l / \sqrt{I_p} = 0$ y por tanto, si $A_{00} \neq 0$ (o sea, si $f = 0$ es una cuádrica con centro; recuérdese además que $K = A_{00}$), obtenemos:

$$\left[\ \textit{Distancia del centro de la cuádrica } f = 0 \textit{ al plano } l = 0\ \right] = \left| \frac{L_p}{K\sqrt{I_p}} \right| \tag{4.2}$$

4.2. Planos tangentes a la cuádrica

La anulación del invariante Δ_p , que implica la anulación de K_2 , expresa que la cónica sección es degenerada, o sea que el plano $l = 0$ es tangente a la cuádrica $f = 0$. Por tanto*, la ecuación de la cuádrica en coordenadas de planos (plückerianas) es:*

$$\Delta_p = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \sum_0^3 \sum_0^3 A_{ij} u_i u_j = 0 \tag{4.3}$$

4.3. Género de la cónica sección

La anulación del invariante K_p , que implica la de J_2 , expresa que la *cónica sección es del género parábola*, o dicho de otro modo, que el plano $l = 0$ es tangente a la cónica del infinito de la cuádrica $f = 0$. En consecuencia, *la ecuación en coordenadas de planos de la cónica del infinito de la cuádrica dada (considerada como cuádrica degenerada) es*

$$K_p = 0 \quad \text{o sea} \quad \sum_1^3 \sum_1^3 \alpha_{ij} u_i u_j = 0 \tag{4.4}$$

Como K_p tiene grados de homogeneidad pares, su signo es geométricamente significativo. En efecto, teniendo en cuenta que $K_p / I_p = J_2$, que I_p es positivo y el significado del invariante J_2 en las cónica, resulta que:

Si $K_p \neq 0$, la sección es una cónica con centro.

El género de la cónica sección es elipse si $K_p > 0$ e hipérbola si $K_p < 0$.

Si es $K_p > 0$ y $\Delta_p / J_p > 0$, el plano no tiene intersección real con la cuádrica.

4.4. Ecuación reducida de la sección, si tiene centro

Si la sección tiene centro, es $K_p \neq 0$ y puede efectuarse un cambio de sistema de referencia ortonormal que deje el par $\{f=0, l=0\}$ en la forma "reducida":

$$\{ \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_0 y_0^2 = 0 \quad , \quad y_3 = 0 \} \tag{4.5}$$

Entonces es $I_2 = \alpha_1+\alpha_2$, $J_2 = \alpha_1\alpha_2$, $K_2=\alpha_0\alpha_1\alpha_2$, y según las relaciones (3.3), serán $\alpha_0 = K_2 / J_2 = \Delta_p / K_p$ y α_1 y α_2, las raíces de la ecuación $w^2 - I_2 w + J_2 = 0$ o sea de la $I_p w^2 - J_p w + K_p = 0$. Esto permite escribir la ecuación reducida de la cónica sección en la forma

$$\{ \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 = \frac{\Delta_p}{K_p} y_0^2 \quad , \quad y_3 = 0 \} \tag{4.6}$$

donde α_1 y α_2 son las raíces de la ecuación $I_p w^2 - J_p w + K_p = 0$.

En consecuencia, como los cuadrados de los semiejes de la cónica son α_0 / α_1 y α_0 / α_2, o sea $\Delta_p / (K_p\alpha_1)$ y $\Delta_p / (K_p\alpha_2)$, se deduce que

Los cuadrados de los semiejes (reales o imaginarios puros) de la cónica sección, se pueden calcular como raíces de la ecuación

$$K_p^3 w^2 - J_p K_p \Delta_p w + I_p \Delta_p^2 = 0 \tag{4.7}$$

La sección será *circular* si $\alpha_1 = \alpha_2$, o sea si

$$J_p^2 - 4 I_p K_p = 0 \ . \tag{4.8}$$

4.5. Área de la sección, si es elipse, ángulo de las asíntotas si es hipérbola y excentricidad

En el caso de la elipse, es $K_p > 0$ y el producto de los cuadrados de los semiejes es, según (4.7), $I_p \Delta_p^2 / K_p^2$, con lo que resulta:

$$\text{Área de la sección } = \pi \Delta_p \sqrt{\frac{I_p}{K_p^3}} \qquad (4.9)$$

Si se trata de una hipérbola, es $K_p < 0$; como es sabido, *el ángulo* φ *comprendido entre sus asíntotas* viene dado por $\operatorname{tg}^2 \varphi = - 4J_2/I_2^2$, lo que, según (3.3), nos da

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \frac{I_p \sqrt{-K_p}}{J_p} \qquad (4.10)$$

La hipérbola es *equilátera* si $J_p = 0$.

Llamando ε a la excentricidad, si los cuadrados de los semiejes son las raíces w_1 , w_2 de (4.7), será $\varepsilon^2 = 1 - w_1/w_2$. Tengamos en cuenta que dada una ecuación $at^2+bt+c=0$, el cociente de sus raíces, $t_1/t_2 = t_1^2/(c/a)$, será raíz de

$$u + (b / \sqrt{ac})\sqrt{u} + 1 = 0$$

y la ecuación que tiene como raíces $1- t_1/t_2$ y $1- t_2/t_1$ será

$$acv^2+(b^2-4ac)(v+1) = 0 \ .$$

Aplicando esto a la (4.7) con $v = \varepsilon^2$, y simplificando (ya que $I_p \neq 0$,$\Delta_p \neq 0$), resulta la *expresión que nos permite calcular la excentricidad de la sección:*

$$K_p I_p \varepsilon^4 + (J_p^2 - 4K_p I_p)(\varepsilon^2 + 1) = 0 \qquad (4.11)$$

Nótese que si la sección es circular, debido a (4.8), $\varepsilon = 0$.

4.6. Ecuación reducida de las secciones parabólicas

Si $K_p = 0$, la sección es una parábola. Mediante un cambio de referencia ortonormal el par $\{f=0,\ l=0\}$ puede ponerse en la forma “reducida”:

$$\left\{ \alpha y_1^2 + 2\beta\, y_0 y_2 = 0 \quad , \quad y_3 = 0 \right\} \tag{4.12}$$

Entonces, $I_2 = \alpha$, $J_2 = 0$, $K_2 = -\beta^2\alpha$, con lo que, según (3.3), podemos obtenener $\alpha = J_p \,/\, I_p$ y $\beta^2 = -\Delta \,/\, I_p$. Esto nos permite escribir la ecuación reducida de la parábola sección en la forma

$$\left\{ y_1^2 + 2\frac{I_p}{J_p}\sqrt{\frac{-\Delta_p}{J_p}}\, y_0 y_2 = 0 \quad , \quad y_3 = 0 \right\} \tag{4.13}$$

Esto es, supuesto $K_p = 0$, *el valor del parámetro de la parábola sección es*

$$p = \frac{I_p}{J_p}\sqrt{\frac{-\Delta_p}{J_p}}$$

4.7. Cono tangente a la cuádrica a lo largo de su sección con el plano

Si la cuádrica $f = 0$ es regular ($\Delta \neq 0$), este cono pertenece al haz (2.4) y corresponde al valor de λ que anula el determinante Δ^* dado en (2.5), o sea, según (2.6), el valor $\lambda = -\Delta_p/\Delta$. Es decir, su ecuación será:

$$f - (\Delta_p/\Delta)l^2 = 0 \tag{4.14}$$

Los invariantes métricos de este cono son

$$I_C = I - \frac{\Delta}{\Delta_p} I_p \ , \ \ J_C = J - \frac{\Delta}{\Delta_p} J_p \ , \ \ K_C = K - \frac{\Delta}{\Delta_p} K_p \ \ , \ \ \Delta_C = 0 \tag{4.15}$$

Por tanto, el mencionado cono será:

equilátero si $I\,\Delta_p - I_p\,\Delta = 0$ *y dualmente equilátero si* $J\,\Delta_p - J_p\,\Delta = 0$.

En el primer caso, el cono tendrá infinitas ternas de generatrices aristas de un triedro trirrectángulo y en segundo, infinitas ternas de planos tangentes formando triedros trirrectángulos. Si es $K\,\Delta_p - K_p\,\Delta = 0$, o sea, según (2.7), $L_p = 0$, el cono es un cilindro.

El vértice del cono es el polo del plano $l = 0$ respecto a la cuádrica, o sea que sus coordenadas homogéneas son

$$(L_p, \sum_0^3 A_{1i}u_i, \sum_0^3 A_{2i}u_i, \sum_0^3 A_{3i}u_i) \qquad (4.16)$$

Como la ecuación normal del plano es $l / \sqrt{I_p} = 0$, la distancia d del vértice (4.16) del cono (4.12) a ese plano será

$$d = \frac{\Delta_p}{L_p\sqrt{I_p}} \qquad (4.17)$$

y el *volumen del cono circunscrito* a la cuádrica $f = 0$ que tiene como base la sección con $l = 0$, según (4.8) y (4.15) será

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{\Delta_p^2}{L_p\sqrt{K_p^3}} \qquad (4.18)$$

5. Invariantes métricos de las cuádricas de planos

La ecuación en coordenadas de planos (plückerianas) del círculo absoluto (considerado como cuádrica de planos singular) es $u_1^2+u_2^2+u_3^2 = 0$ (que escribiremos como $\Gamma = 0$) en cualquier sistema ortonormal de referencia.

Consideraremos una cuádrica cualquiera $g = 0$, en coordenadas de planos, con

$$g \equiv \sum_0^3 c_{ij}u_iu_j = 0 \qquad (5.1)$$

y denominaremos con **C** a la matriz (c_{ij}), y con C_{ij} a los elementos de la matriz adjunta de **C** ; pondremos $\Lambda = \det(C)$. Por último, usaremos la notación

$$\gamma_{ijkl} = \begin{vmatrix} c_{ij} & c_{il} \\ c_{kj} & c_{kl} \end{vmatrix} \qquad .$$

Si $\Lambda \neq 0$, o sea si la cuádrica es no singular, podemos suponer que la cuádrica de planos (5.1) es la (4.3) que corresponde a la cuádrica de puntos (1.1), con lo que los coeficientes de estas ecuaciones (5.1) y (4.3) serán proporcionales. Eligiendo convenientemente el factor de proporcionalidad, no hay inconveniente en considerar que las matrices **C** y **A** son mutuamente inversas y por tanto,

$$c_{ij} = A_{ij}/\Delta \quad , \quad a_{ij} = C_{ij}/\Lambda \quad , \quad \Delta = 1/\Lambda \quad . \qquad (5.2)$$

Podemos formar ahora la serie de cuádricas $g + \lambda\Gamma = 0$. El discriminante de la forma cuadrática del primer miembro igualado a cero es

$$c_{00}\lambda^3 + (\gamma_{0011} + \gamma_{0022} + \gamma_{0033})\lambda^2 + (C_{11} + C_{22} + C_{33})\lambda + \Lambda = 0$$

lo que nos proporciona los invariantes métricos de la cuádrica de planos (5.1):

$$M = c_{00} \quad , \quad N = \sum_{1}^{3} \gamma_{00ii} \quad , \quad P = \sum_{1}^{3} C_{ii} \quad , \quad \Lambda = \det(\mathrm{C}) \qquad (5.3)$$

Las relaciones entre estos invariantes y los (1.3) de la cuádrica de puntos (1.1), son, según se deduce de (5.2):

$$M = K/\Delta \quad , \quad N = J/\Delta \quad , \quad P = I/\Delta \quad , \quad \Lambda = 1/\Delta \qquad (5.4)$$

(la segunda exige algunos cálculos auxiliares, fáciles de realizar).

6. Invariantes del par de ecuaciones, en coordenadas plückerianas, de una cuádrica y de un punto

Si la ecuación de la cuádrica es $g = 0$, con g dado por (5.1), y la del punto, de coordenadas cartesianas homogéneas (p_0, p_1, p_2, p_3), es $p = 0$, con

$$p \equiv \sum_{0}^{3} p_i u_i = 0 \qquad (6.1)$$

Podemos considerar la serie de cuádricas $g + \mu\, p^2 = 0$. La matriz de la cuádrica general de la serie es $\mathbf{C} + \mu\,(p_i p_j)$. Sus invariantes métricos, análogos a los (5.3), teniendo en cuenta que la matriz $(p_i p_j)$ es de rango 1, por lo que no aparecen términos en μ^2, son:

$$\begin{aligned} M^{\wedge} &= M + \mu\, p_0^2 \quad , & N^{\wedge} &= N + \mu \sum_{0}^{3}\sum_{0}^{3} \eta_{ij} p_i p_j \\ P^{\wedge} &= P + \mu \sum_{0}^{3}\sum_{0}^{3} \pi_{ij} p_i p_j \quad , & \Lambda^{\wedge} &= \Lambda + \mu \sum_{0}^{3}\sum_{0}^{3} C_{ij} p_i p_j \end{aligned} \qquad (6.2)$$

$$\text{donde} \qquad (\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11}+c_{22}+c_{33} & -c_{01} & -c_{02} & -c_{03} \\ -c_{10} & c_{00} & 0 & 0 \\ -c_{20} & 0 & c_{00} & 0 \\ -c_{30} & 0 & 0 & c_{00} \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad (\pi_{ij}) = \begin{pmatrix} \gamma_{2233}+\gamma_{2211}+\gamma c_{1122} & \gamma_{1330}+\gamma_{1220} & \gamma_{2330}+\gamma_{2110} & \gamma_{3110}+\gamma_{3220} \\ \gamma_{1330}+\gamma_{1220} & \gamma_{0022}+\gamma_{0033} & \gamma_{0120} & \gamma_{0130} \\ \gamma_{2330}+\gamma_{2110} & \gamma_{0120} & \gamma_{0033}+\gamma_{0011} & \gamma_{0230} \\ \gamma_{3110}+\gamma_{3220} & \gamma_{0130} & \gamma_{0230} & \gamma_{0011}+\gamma_{0022} \end{pmatrix}$$

De esto deducimos, como se hizo para obtener (2.6), que serán invariantes del par $\{ g , p \}$, los siguientes (con expresión de sus grados de homogeneidad en las c_{ij} y en las p_i):

$$\boxed{\begin{array}{l} M \quad \{1,0\} \quad , \quad N \quad \{2,0\} \quad , \quad P \quad \{3,0\} \quad , \quad \Lambda \quad \{4,0\} \\ M_p = p_0^2 \quad \{0,2\} \quad , \qquad N_p = \sum_0^3 \sum_0^3 \eta_{ij} p_i p_j \quad \{1,2\} \quad , \\ P_p = \sum_0^3 \sum_0^3 \pi_{ij} p_i p_j \quad \{2,2\} \quad , \quad \Lambda_p = \sum_0^3 \sum_0^3 C_{ij} p_i p_j \quad \{3,2\} \quad . \end{array}} \qquad (6.3)$$

A partir de los valores de estos invariantes, se pueden expresar las propiedades métricas del cono circunscrito a $g = 0$ con vértice en $p = 0$ (todo en coordenadas plückerianas. En particular, podemos expresar el par $\{ g , p \}$ respecto a otro sistema de referencia ortonormal, quedando las ecuaciones $\{ h , q \}$ en las nuevas coordenadas (v_0, v_1, v_2, v_3), de modo que el punto $p = 0$, vértice del cono, quede en el origen (1,0,0,0), o sea $q \equiv sv_0$, es decir, de ecuación $sv_0 = 0$.

Al hacer $v_0 = 0$ en la ecuación $h = 0$, esta queda reducida a la de un cono. Si los ejes coordenados se eligen coincidiendo con tres ejes del cono, el par de ecuaciones quedará reducido a

$$\left\{ h \equiv d_1 v_1^2 + d_2 v_2^2 + d_3 v_3^2 = 0 \quad , \quad q \equiv s v_0 = 0 \right\} \qquad (6.4)$$

cuyos invariantes (6.3) serán

$$M_p = s^2\ , N_p = (d_1 + d_2 + d_3)\, s^2\ , P_p = (d_2 d_3 + d_3 d_1 + d_1 d_2) s^2\ , \Lambda_p = d_1 d_2 d_3 s^2$$

Por consiguiente, conocidos esos invariantes, los coeficientes d_i de la forma reducida, se pueden obtener como proporcionales a las raíces de la ecuación cúbica:

$$M_p w^3 - N_p w^2 + P_p w - \Lambda_p = 0 \qquad . \qquad (6.5)$$

De esta ecuación reducida pueden deducirse sus propiedades métricas.

Referencias

[1] ABELLANAS, P. (1961), *Geometría Básica.* Ed. Romo. Madrid.

[2] FERNÁNDEZ BIARGE, J. (1951), *Invariantes de las secciones planas de las cuádricas.* Gaceta Matemática, 1ª serie, tomo III, núm. 4. Madrid.

Cálculo de límites radicales a través de sistemas en diferencias acoplados

J. C. Cortés López
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
jccortes@mat.upv.es

G. Calbo Sanjuan
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols, L'Alcúdia, Valencia

Resumen

This paper deals with the study of convergence of a radical family through a nonlinear coupled difference system and the sandwich criterion.

1 Introducción

El objetivo de este artículo es estudiar la convergencia de la sucesión radical

$$\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\ldots}}}},\quad a\geq 2 \tag{1}$$

por un método distinto al usual (que recordaremos en el desarrollo del trabajo), y que se puede enmarcar dentro de la teoría de los sistemas de ecuaciones en diferencias no lineales acoplados. Sistemas discretos de este tipo, pero sin los signos positivo y negativo alternados pueden encontrarse, por ejemplo, en el ejercicio 4 de la página 96 del texto [1], en concreto, en esta referencia encontramos la sucesión radical

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}},$$

y su límite se calcula mediante el método clásico, que más adelante recordaremos para la sucesión (1).

2. Estudio de un caso particular

Empezaremos estudiando el caso particular de (1),

$$\sqrt{21-\sqrt{21+\sqrt{21-\sqrt{21+\ldots}}}} \tag{2}$$

que se obtiene para $a = 21$. Para realizar el estudio le asociaremos una sucesión auxiliar cuyo límite también calcularemos (sin hacer un esfuerzo adicional). En efecto, para ello definiremos las sucesiones recurrentes acopladas

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \sqrt{21-y_n} \quad , \quad x_0 = 0 \\ y_{n+1} & = & \sqrt{21+x_n} \quad , \quad y_0 = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

que define un sistema no lineal de ecuaciones en diferencias de primer orden acoplado. Observemos que

$$x_n = \left\{0, \sqrt{21}, \sqrt{21-\sqrt{21}}, \sqrt{21-\sqrt{21+\sqrt{21}}}, \sqrt{21-\sqrt{21+\sqrt{21-\sqrt{21}}}}, \ldots\right\},$$

$$y_n = \left\{0, \sqrt{21}, \sqrt{21+\sqrt{21}}, \sqrt{21+\sqrt{21-\sqrt{21}}}, \sqrt{21+\sqrt{21-\sqrt{21+\sqrt{21}}}} \ldots\right\},$$

y queremos calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. El método usual para determinar este límite consiste en, suponer formalmente que existen los límites,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \quad , \quad y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} \tag{4}$$

y tomar límites en (3), con lo que sustituyendo (4) se obtiene el sistema de ecuaciones no lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{21-y} \\ y & = & \sqrt{21+x} \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son $S_1 = \{x = 4, y = 5\}$, $S_2 = \{x = -5, y = -4\}$. Ahora bien, es sencillo comprobar (lo veremos más adelante) que ambas sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 0}$, $\{y_n\}_{n\geq 0}$ son de términos no negativos, por lo que podemos descartar inmediatamente la solución negativa S_2, y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 5. \tag{5}$$

Veamos otra forma de llegar a esta misma conclusión, utilizando un argumento más elaborado basado en el teorema de punto fijo y el criterio del emparedado. Partiendo de la primera ecuación de (3) se obtiene

$$x_{n+1}^2 = 21 - y_n \Rightarrow x_{n+1}^2 = 4^2 + 5 - y_n \Rightarrow x_{n+1}^2 - 4^2 = 5 - y_n,$$

por tanto

$$(x_{n+1} - 4)(x_{n+1} + 4) = 5 - y_n. \tag{6}$$

Veamos que $x_n \geq 0 \ \ \forall n \geq 0$. De hecho, podemos decir más: $0 \leq x_n \leq 21 \ \ \forall n \geq 0$. En efecto, lo podemos probar por inducción. Para $n = 0, \ \ 0 \leq x_0 = 0 \leq 21$. Supongamos por hipótesis de inducción que $0 \leq x_n \leq 21 \ \ \forall n = 0, 1, \ldots, m$. Ahora lo vemos para $n = m + 1$. En efecto, por hipótesis de inducción $0 \leq x_{m-1} \leq 21$, luego

$$21 \leq 21 + x_{m-1} \leq 42 \Rightarrow \sqrt{21} \leq \sqrt{21 + x_{m-1}} \leq \sqrt{42} \Rightarrow -\sqrt{42} \leq -\sqrt{21 + x_{m-1}} \leq -\sqrt{21}$$

$$21 - \sqrt{42} \leq 21 - \sqrt{21 + x_{m-1}} \leq 21 - \sqrt{21}$$

$$\sqrt{21 - \sqrt{42}} \leq \sqrt{21 - \sqrt{21 + x_{m-1}}} \leq \sqrt{21 - \sqrt{21}}$$

aplicando (3) hemos concluido

$$0 \leq \sqrt{21 - \sqrt{42}} \leq \sqrt{21 - y_m} = x_{m+1} \leq \sqrt{21 - \sqrt{21}} \leq 21.$$

Por lo tanto como $x_{n+1} + 4 \neq 0$, (6) se puede expresar

$$x_{n+1} - 4 = \frac{5 - y_n}{x_{n+1} + 4},$$

tomando módulos

$$|x_{n+1} - 4| = \frac{|5 - y_n|}{|x_{n+1} + 4|},$$

y utilizando que $x_n \geq 0 \ \ \forall n \geq 0$

$$|x_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4} |y_n - 5|. \tag{7}$$

Por otra parte podemos razonar de forma análoga sobre la sucesión $\{y_n\}_{n \geq 0}$, partiendo de (3)

$$y_{n+1}^2 = 21 + x_n \Rightarrow y_{n+1}^2 = 5^2 - 4 + x_n \Rightarrow y_{n+1}^2 - 5^2 = -4 + x_n,$$

por tanto

$$(y_{n+1} - 5)(y_{n+1} + 5) = -4 + x_n.$$

Como $x_n \geq 0 \ \ \forall n \geq 0$ de la definición de y_n a partir de (3) se deduce que $y_n \geq 0 \ \ \forall n \geq 0$, luego

$$|y_{n+1} - 5| = \frac{|-4 + x_n|}{|y_{n+1} + 5|}$$

y por tanto

$$|y_{n+1} - 5| \leq \frac{1}{5} |x_n - 4| \,. \tag{8}$$

Ahora aplicaremos conjuntamente (7) y (8) para resolver el problema

$$0 \leq |x_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4} |y_n - 5| \leq \frac{1}{4 \cdot 5} |x_{n-1} - 4|$$

$$\leq \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 4} |y_{n-2} - 5| \leq \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5} |x_{n-3} - 4|$$

continuando así recursivamente tenemos

$$\left.\begin{array}{ccccll} 0 & \leq & |x_{n+1} - 4| & \leq & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n}{2}} |y_0 - 5| = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n}{2}} & \text{si n es par} \\ 0 & \leq & |x_{n+1} - 4| & \leq & \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n+1}{2}} |x_0 - 4| = 4\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n+1}{2}} & \text{si n es impar} \end{array}\right\} . \tag{9}$$

Luego, tanto si n es par como impar, tomando límites cuando $n \to \infty$ en (9) tenemos

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - 4| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{5}{4} \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n}{2}} = 0 \quad \text{si n es par}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - 4| \leq \lim_{n\to\infty} 4 \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n+1}{2}} = 0 \quad \text{si n es impar}$$

aplicando el criterio del emparedado llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4.$$

Aunque no es objetivo del trabajo, podemos calcular el límite de la sucesión auxiliar, $\{y_n\}_{n\geq 0}$ razonando igual. En efecto, de (7) y (8) se obtiene

$$\left.\begin{array}{ccccll} 0 & \leq & |y_{n+1} - 5| & \leq & \frac{1}{5}\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n}{2}} |x_0 - 4| = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n}{2}} & \text{si n es par} \\ 0 & \leq & |y_{n+1} - 5| & \leq & \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n+1}{2}} |y_0 - 5| = 5\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n+1}{2}} & \text{si n es impar} \end{array}\right\} \tag{10}$$

y por tanto tomando límites y razonando como antes se deduce

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 5.$$

3. Generalización de los resultados

Pretendemos ahora generalizar el método desarrollado en el segundo apartado para estudiar la sucesión general (1). Observemos que dado $a \geq 2$ arbitrario, entonces siempre existe $r \geq \Phi$ (siendo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, el número de oro), tal que $a = a_r = r^2 - r + 1$ (basta hacerse la gráfica de la parábola $a_r = r^2 - r + 1$, para cercionarse de esta afirmación). Por tanto definiendo

$$\left.\begin{array}{rclcl} x_{n+1} & = & \sqrt{a_r - y_n} & , & x_0 = 0 \\ y_{n+1} & = & \sqrt{a_r + x_n} & , & y_0 = 0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

se tiene

$$x_{n+1}^2 = a_r - y_n = \left(r^2 - r + 1\right) - y_n = (r-1)^2 + r - y_n$$

$$x_{n+1}^2 - (r-1)^2 = r - y_n \Rightarrow \left(x_{n+1} - (r-1)\right)\left(x_{n+1} + (r-1)\right) = r - y_n.$$

Por inducción es sencillo probar que $x_n \geq 0$ y podemos escribir

$$x_{n+1} - (r-1) = \frac{r - y_n}{x_{n+1} + r - 1},$$

$$\left|x_{n+1} - (r-1)\right| \leq \frac{1}{r-1}\left|y_n - r\right|. \tag{12}$$

Razonando igual que antes también se obtiene

$$\left|y_{n+1} - r\right| \leq \frac{1}{r}\left|x_n - (r-1)\right|. \tag{13}$$

Por lo tanto de (12) y (13)

$$\left|x_{n+1} - (r-1)\right| \leq \frac{1}{r-1}\left|y_n - r\right| \leq \frac{1}{r(r-1)}\left|x_{n-1} - (r-1)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{r(r-1)^2}\left|y_{n-2} - r\right| \leq \left(\frac{1}{r(r-1)}\right)^2 \left|x_{n-3} - (r-1)\right|,$$

razonando así recurrentemente llegamos

$$\left.\begin{array}{lll} 0 \leq |x_{n+1} - (r-1)| \leq \frac{r}{r-1}\left(\frac{1}{r(r-1)}\right)^{\frac{n}{2}}|x_0 - 4| = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{n}{2}} & & \text{si n es par} \\ 0 \leq |x_{n+1} - (r-1)| \leq (r-1)\left(\frac{1}{r(r-1)}\right)^{\frac{n+1}{2}} & & \text{si n es impar} \end{array}\right\} \tag{14}$$

Por tanto tomando límites cuando $n \to \infty$ en (14) y aplicando el criterio del emparedado se tiene

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r - 1, \tag{15}$$

ya que si $r > \Phi$ entonces $0 < \frac{1}{r(r-1)} < 1$. Dado $a = a_r = r^2 - r + 1$, resolviendo esta ecuación de segundo grado

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1-a)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2} \tag{16}$$

y se deduce de (15) y (16)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r - 1 = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}. \tag{17}$$

Para el caso particular del segundo apartado $a = 21 > 2$ se deduce de (17) y considerando que el límite ha de ser positivo por ser una sucesión de números positivos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{-1 + \sqrt{81}}{2} = 4.$$

Observemos para terminar que si suponemos que existen

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

tomando límites cuando $n \to \infty$ en (11) entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{a_r - y} \\ y & = & \sqrt{a_r - x} \end{array}\right\}$$

y las soluciones de este sistema no lineal son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a_r - 3}}{2} \quad , \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{4a_r - 3}}{2}$$

4. Conclusiones

En este trabajo se proporciona un método para calcular límites de sucesiones recurrentes no lineales, y aunque es notablemente más largo que el convencional, tiene la ventaja de aportar más información que aquél, pues proporciona el valor límite de otra sucesión: la asociada. Además, desde el punto de vista docente tiene el interés de que su utilización implica el manejo de distintas herramientas matemáticas de interés didáctico como el criterio del emparedado, el manejo de subsucesiones,...

Referencias

[1] J. Rivaud, Ejercicios de Análisis Tomo I, *Ed. Aguilar.*(1975).

Del *Artem Analyticem* de Vieta a la *Mathesis Universalis* de Descartes. Nuevas perspectivas en torno a un período singular en la Historia del Álgebra

Francisco A. González Redondo

Dpto. Álgebra. Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
faglezr@edu.ucm.es

Abstract

In this paper some specially relevant contributions to the History of Algebra are analized. Namelly, F. Vieta's In Artem Analyticem Isagoge (1591) and R. Descartes' La Géometrie (1637) –completed with other precedent works–. Taken together and understood as consecutive and complementary steps, they are to be considered as the origin of symbolic algebra. But in the search for new historical perspectives in the evolution of Algebra, it will be advanced that they also deserve a significant place in the origin of mathematical physics.

1. Consideraciones historiográficas introductorias

Tal como apuntaba Paul Benoit [1] en su estudio sobre el Álgebra desde el final de la Edad Media hasta los prolegómenos de la Modernidad, el tema histórico que tratamos en estas páginas constituye un problema abierto:

> "En Italia, más en concreto en Florencia y en Venecia, matemáticos como Chuquet vivieron, trabajaron, produjeron obras que marcarán sin duda la historia del cálculo aritmético y algebraico. Que marcarán, porque esta historia se está elaborando, se hace gracias a investigadores italianos o alemanes, ingleses o franceses. Historia ingrata…".

Efectivamente, se trata de una tarea conjunta en elaboración. En ella, los historiadores de la Matemática suelen identificar el estudio de la evolución histórica del Álgebra con algo que se asemeja más al análisis de las técnicas de –y casi sólo de– la resolución de ecuaciones [2] [3]. Ya de entrada sorprende que, antes de estudiar el ámbito ecuacional, no se empiece por un estudio de los objetos matemáticos que integran las ecuaciones. Dado que éstas son igualdades entre entes de la misma naturaleza cualitativa –además, obviamente, de tener la misma cuantía para poder ser realmente iguales– (en síntesis números o símbolos que representen números), cabe preguntarse –y debe indagarse– acerca del tratamiento que a esos entes dieron los matemáticos protagonistas de la Historia. Y para ellos, visto desde hoy, la cuestión estaba clara: en las ecuaciones se igualan números y sólo números… o números o símbolos que representan medidas de cantidades de magnitudes geométricas.

Por tanto, la Historia del Álgebra, por lo menos hasta el siglo XVIII, constituye –en no poca medida– una Historia de las Magnitudes… por supuesto contemplando sus relaciones –es decir, cómo se integran– en las ecuaciones.

Pero si hay una idea clara de en qué consiste el Álgebra en la actualidad, si se quiere dar una caracterización de su naturaleza, se diría que el Álgebra es la parte de la Matemática que estudia los conjuntos en los que se definen operaciones; operaciones que dotan a esos conjuntos de unas determinadas estructuras, de unas determinadas álgebras.

Así, cabe preguntarse también por la presencia en los tratados clásicos de ingredientes explícitos o implícitos de lo que después será el Álgebra moderna. En síntesis, buscar si los antiguos consideraban conjuntos de entes matemáticos en los que se definieran operaciones internas (o externas mediante algún dominio de operadores). Es decir –enlazando con lo anterior–, si en el seno de una magnitud, caracterizada como conjunto de cantidades de la misma naturaleza, se definen operaciones internas entre cantidades (o externas por números), etc.

En las páginas de este *Boletín* ya se presentó hace algunos años [4] una lúcida formulación de la estructura algebraica de las magnitudes escalares, construida partiendo de un semigrupo conmutativo, cancelativo, absoluto y arquimediano $(M,+,\prec)$, en tanto que semimódulo sobre un subsemianillo unitario del cuerpo real $(S,+,\cdot)$. La estructuración que en aquellas páginas se iba construyendo, completada con la que presentamos en [5], que determinaba algebraicamente las magnitudes físicas como espacios vectoriales reales unidimensionales $R(R)$, constituye el referente matemático de este artículo.

Complementariamente, las perspectivas que abrimos en torno al problema historiográfico se amplían si constatamos que una parte nada despreciable de las revisiones que deben hacerse tienen su origen en lo que considero constituyen errores importantes en las traducciones de los trabajos clásicos originales. Pueden avanzarse algunos ejemplos de este aserto.

En la versión de W. Smith [6] del *In Artem Analyticem Isagoge* (1591) de Vieta la expresión latina “lex homogenorum” (genitivo plural) se traduce al inglés por “law of homogeneity” –“ley de homogeneidad” o “ley de la homogeneidad” en castellano– cuando debiera traducirse por “law of homogeneities” o “law of the homogeneous” –“ley de las homogeneidades” o “ley de los(as) homogéneos(as)”– . La mutilación de perspectivas no es anecdótica, pues, con la singularización lingüística, el estudio histórico de todos los autores –entre ellos, por ejemplo, Boyer [2] o van der Waerden [3]– mutila el ámbito magnitudinal, reduciendo el análisis al ámbito ecuacional, lógicamente posterior y consecuencial al primero.

En este mismo sentido reductor –aunque aquí no se trate de un error, pues se reconoce a pie de página la opción elegida– Struik [7] decide traducir el término francés “grandeur” –“magnitud” en castellano– que emplea Girard en su *L’invention nouvelle en l’algèbre* (1629), por la palabra inglesa “term” –“término” [de una ecuación]–. Sí es de justicia añadir que, a diferencia del resto de los historiadores de la Matemática, Struick había traducido “lex homogenorum” por “ley de las magnitudes homogéneas”.

Por supuesto, este tipo de correcciones pueden hacerse a todos los compiladores de versiones modernas de trabajos clásicos, como el todavía no citado de J. Fauvel y J. Gray [8]. Pero, por no extendernos, podemos concluir con el paroxismo en el mundo de las traducciones incomprensibles que constituye la versión de T. R. Witmer [9] del *Artis Magnae* (1545) de Cardano: mientras Don Girolamo sería incapaz de entender la matemática que se le atribuye, ningún lector actual podría nunca alcanzar una visión ni tan siquiera próxima de la obra del de Pavía en una edición que actualiza toda la notación hasta hacerla parecer posterior a *La Géométrie* (1637) de Descartes [10], obra que tardaría casi un siglo en aparecer publicada.

Pero en la introducción a este artículo, en el que vamos a centrarnos en el estudio de las obras de Vieta y Descartes, falta por apuntar otro aspecto que aporta perspectivas novedosas a un estudio historiográfico que empezamos (desde otros puntos de vista y otros contenidos) hace algunos años [11] y [12]. Ambos autores franceses escribían con unas pretensiones mayores que las que normalmente se les atribuyen: su intención última es proporcionar un nuevo lenguaje matemático, entendido como nueva álgebra, el lenguaje de las magnitudes para poder expresar todo el conocimiento científico de la Naturaleza.

El proceso será lento. La ampliación real desde el Álgebra *per se* a la matematización de la Filosofía Natural resultará tardía. El Newton [13] de los *Principia*

(1687), no se apercibirá –no querrá o no sabrá– de las herramientas que tiene ante sí. Será el Euler maduro del *Nouveau principe de Mécanique* (1750) quien lo haga, gracias a que el Euler joven de la *Mechanica* (1736) se había atrevido a dar los primeros pasos [14]. Pero centrémonos por el momento en los aspectos estrictamente algebraicos.

2. El concepto de magnitud en la *Isagoge* de Vieta

En 1591 escribe Vieta, utilizando el lenguaje habitual de la Ciencia de la época (el latín), su *Introducción al Arte Analítica*. En esta obra se observa cómo el autor percibe las ventajas que comporta la generalización desde el cálculo con números (*logistica numerosa*), el los "algebristas" anteriores, al cálculo con símbolos que representen cantidades conocidas o desconocidas de magnitudes geométricas, es decir –en su lenguaje–, las ventajas del cálculo con magnitudes de la misma especie (*logistica speciosa*) o –en el nuestro– cantidades de la misma magnitud.

La imposibilidad de medir cantidades cualesquiera de magnitudes geométricas llevó a los griegos a operar geométricamente con [cantidades de] magnitudes en vez de con medidas, y, por tanto, a trabajar con proporciones entre cantidades en vez de con ecuaciones entre medidas. De este modo se suplían los posibles resultados irracionales –inconcebibles numéricamente– por su representación geométrica –perfectamente concebible– y con la que se podía operar (logística entre magnitudes) [15].

Sin embargo, la ausencia de un simbolismo adecuado obligaba a que toda igualdad entre [cantidades de] magnitudes concretas tuviera que limitarse a cantidades particulares representadas por números (enteros positivos), entre los que se realizaban las operaciones correspondientes. Es decir, una logística entre números [16].

La contribución de Vieta puede resumirse, en consecuencia, en el hecho de que gracias a él se produce el tránsito de una técnica aritmética sin más, a un estudio de tipos de formas de ecuaciones, es decir, a toda una teoría de ecuaciones expresada simbólicamente en la que los datos no son números, sino cantidades cualesquiera. Todo ello precedido, eso sí, de una teoría de las magnitudes que integrarán las ecuaciones. Como puede detectarse, este paso será de capital importancia para el desarrollo de las ciencias cuantitativas y/o cuantificables.

Afirma Vieta [6] en el Capítulo I, escrito a modo de introducción:

> "En el arte cetético ($\zeta\eta\tau\eta\tau\iota\kappa\eta$), sin embargo, la forma de proceder es el particular del propio arte, hasta el punto de que el arte cetético no utiliza su lógica sobre los números –lo que condujo al tedio de los antiguos analistas– sino que usa su lógica a través de una logística que novedosamente tiene que ver con especies. Esta logística es mucho más poderosa y alcanza mayores éxitos que la numérica cuando se comparan entre sí magnitudes, y alcanza mayores éxitos que la numérica cuando se comparan entre sí magnitudes en ecuaciones una vez que la *lex homogenorum* ha sido establecida".

La propia consideración hacia la ley del que la enuncia, la relevancia que para él tiene [11], queda evidenciada en el Capítulo III, "Sobre la ley de las homogeneidades y los grados y géneros de las magnitudes que se comparan", donde la *Lex Homogenorum*, "la primera y eterna ley de las igualdades o proporciones" (*prima et perpetua lex aequalitatum seu proportionum*), según la cual sólo pueden compararse [cantidades] homogéneas con [cantidades] que sean homogéneas a ella (*homogenea homogeneis comparari*). En esta tesitura no nos extraña que dedique todo el capítulo a explicar los ámbitos de aplicación de la ley.

Primero establece qué magnitudes pueden ser comparadas entre sí, es decir, cuáles pueden sumarse o sustraerse (la menor de la mayor), y cuáles pueden formar expresiones algebraicas complejas:

> "1. Solamente pueden compararse entre sí magnitudes homogéneas."

De modo que si una magnitud se suma a otra es porque son homogéneas y el resultado de la suma será homogéneo a ambas (*si magnitudo magnitudini additur, haec illi homogenea est*). En términos actuales se diría que en el conjunto de las cantidades de una determinada magnitud la suma es una operación interna. Por tanto, quizá no sea demasiada exageración el afirmar que en Vieta encontramos un primer esbozo del concepto de operación interna definida en un conjunto, elemento obviamente fundamental en la Historia del Álgebra.

Por el contrario, si se multiplican dos magnitudes (no necesariamente homogéneas) el resultado es heterogéneo con respecto a ambas (*si magnitudo in magnitudinem ducitur, quae fit huic et illi heterogenea est*).

Pero, ¿qué son las magnitudes para Vieta? Desde el punto de vista cuantitativo:

"2. Se denominan grados escalares (*gradus scalaris*) a las magnitudes que por su propia naturaleza ascienden y descienden proporcionalmente de género en género".

Es decir, $x, x^2, x^3, x^4, ...$ son los diferentes grados o magnitudes que ascienden o descienden en la escala:

$$x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 = ...$$

Y, en palabras de Vieta, ¿cuáles son estas magnitudes escalares? ¿Cómo se denominan?

"3. La primera de las magnitudes escalares (*magnitudinis scalaris*) es el lado o "raíz", la segunda el "cuadrado", la tercera el "cubo", …".

En palabras nuestras actuales, ésta es la naturaleza cuantitativa de las cantidades que pueden compararse. Pero estas cantidades tienen una naturaleza cualitativa, es decir, pertenecen a unos determinados géneros, son cantidades de unas determinadas magnitudes.

Como puede observarse, hasta el nombre de "magnitudes escalares" se debe a Vieta, quien lo introduce en un sentido claramente diferente al nuestro (desde Hamilton), en el que distinguimos las magnitudes a las que damos este nombre de las de naturaleza vectorial o tensorial [17].

Además, las relaciones magnitudinales hay que seguir caracterizándolas, pues no solamente existirán cantidades desconocidas (las incógnitas), sino también cantidades-coeficientes "en abstracto" (o desconocidas inicialmente) que completarán los términos a comparar o integrarán las ecuaciones:

"4. Los géneros de las magnitudes comparadas, de modo que puedan igualarse ordenadamente a las magnitudes escalares son: la primera "longitud" o "latitud", la segunda "plano", la tercera "sólido", …".

Y es que en los miembros de una ecuación pueden aparecer cantidades de una misma magnitud, como el "cubo" x^3 o el "sólido" ax^2, producto de una longitud por un cuadrado. El género de las magnitudes comparadas impondrá el grado o potencia (*potestas*) de la ecuación:

"5. De las magnitudes escalares, el mayor grado en relación al "lado", o el menor al que corresponden las magnitudes comparadas se denomina "poten-

> cia". El resto de las magnitudes escalares que son menores se denominan grados en el camino hacia la potencia".

Enlazando los párrafos citados, las afirmaciones realizadas y las expresiones apuntadas, habrá potencias puras, como x^6, y potencias compuestas o conjuntas, como $x^6 + ax^5$, donde x^5 es un grado "en el camino hacia la potencia" x^6.

> "6. La potencia es pura cuando se encuentra libre de magnitudes "compuestas". Si la potencia se compone con una magnitud que es el producto de un grado menor y un coeficiente, será una potencia compuesta".

Final y complementariamente, ante el requisito de homogeneidad –que exige que todos los términos que se relacionen sean del mismo género–, las cantidades conocidas de magnitudes de diferente especie que la de la incógnita, cuando se componen con magnitudes escalares de menor grado que el de la incógnita, homogeneizan todos los términos:

> "7. Las magnitudes coeficientes (*magnitudo coefficiens*) que multiplican magnitudes escalares en relación a una cierta potencia, y que así producen una magnitud homogénea que se suma a dicha potencia, se llamarán subgrados".

3. Algunas consideraciones ecuacionales desde el *Arte Analítica*

Una vez caracterizado el concepto de magnitud, desarrolla Vieta en el Capítulo IV, "Sobre las reglas para el cálculo con especies", las cuatro "Reglas Canónicas" de la logística especiosa. Es decir, se extiende analizando las operaciones que pueden realizarse en el conjunto de cantidades de una magnitud en cuatro parágrafos, uno por cada regla:

> Regla I. Sumar una magnitud a una magnitud.
> Regla II. Restar una magnitud de una magnitud.
> Regla III. Multiplicar una magnitud por una magnitud.
> Regla IV. Dividir una magnitud por una magnitud.

Con el desarrollo de todas estas reglas para las magnitudes escalares, ya sí podrán construirse las relaciones entre ellas. En la *Isagoge* se expresarán, por ejemplo, así:

"Si se busca la suma de Z y $\frac{A \text{ plano}}{B}$, el resultado será $\frac{(A \text{ plano})+(Z \text{ en } B)}{B}$".

Es decir, en notación actual:

$$z+\frac{a^2}{b}=\frac{a^2+zb}{b}.$$

Y, en cualquier caso, de lo que se trata es de encontrar el valor de una cantidad desconocida de una cierta magnitud a partir de unas cantidades conocidas de magnitudes que integran la ecuación, tema al que dedica el Capítulo V, "Acerca de las leyes de la cetética".

Pero ya en el Capítulo II, titulado "Sobre las reglas que gobiernan las ecuaciones y las proporciones", había avanzado algunas cuestiones cuando terminaba dichas reglas (16 *symbola* o postulados que para Vieta provienen de Euclides) introduciendo la doble conversión de proporciones entre las cantidades a igualdades y viceversa:

> "En suma, una proporción puede decirse que es la composición (*constitutio*) de una ecuación, y una ecuación la resolución (*resolutio*) de una proporción".

El paso no es baladí. En los *Principia* de Newton –escritos casi cien años más tarde– no encontraremos aún (para la Mecánica) este tránsito de las relaciones de proporcionalidad entre cantidades de las magnitudes que intervienen en la ley fundamental de la Dinámica, a la ecuación entre medidas de esas cantidades.

Es decir, lejos de hallar formulada en el magno tratado newtoniano la expresión simbólica:

$$\vec{f}=m\cdot\frac{d^2\vec{s}(t)}{dt^2},$$

no es que no exista en él notación vectorial, ni que ni tan siquiera aporte algo parecido a:

$$(f) \propto (m) \cdot (a);$$

el problema es que Newton únicamente escribirá (y no nos sorprendamos por lo estrictamente retórico del enunciado, ausente toda formulación simbólica):

> "El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime la fuerza".

En todo caso, con la novedad que introduce Vieta, mediante la *lex homogenorum* ya pueden establecerse las ecuaciones de acuerdo con las preceptivas restricciones: todos los términos en cada ecuación tienen que ser cantidades de la misma magnitud, y, en consecuencia, los dos miembros que van a igualarse deben ser también del mismo género de magnitud. El *Arte Analítica*, así concebida, ya puede entrar a constituir el lenguaje, a resolver la problemática del conocimiento científico, tal como afirma para cerrar la *Isagoge*:

> "Finalmente, el arte analítica, habiendo sido expuesto en sus tres perspectivas de la cetética, la porística y la exegética, hace suyo por derecho el fastuoso problema entre los problemas: No dejar ningún problema sin solución (*Nullum non problema solvere*)".

Sus subsiguientes trabajos sí se dedicarán al estudio de tipos de ecuaciones y a su resolución, recuperando y extendiendo la *Aritmética* de Diofanto en trabajos como: *Ad logisticam speciosam notae priorae* y *Ad logisticam speciosam notae posteriores* (1592), o *Zeteticorum libri quinque* (1593). Pero análisis históricos sobre el Álgebra en tanto que evolución del estudio de las ecuaciones sí hay bastantes.

4. La evolución de la *Mathesis Universalis* de Vieta a Descartes

René Descartes hereda y prácticamente asume como propias muchas de las consideraciones de Vieta. De ello se le acusa y de ello se defiende. En una carta escrita a Mersenne en 1637, refiriéndose a *La Géometrie*, escribe Descartes [18]:

> “Ante la sugerencia de que lo que he escrito puede haber sido sacado fácilmente de Vieta, la realidad es que mi tratado es precisamente difícil de comprender porque he intentado no introducir en él nada de lo que ya conocía Vieta o cualquier otro… Comienzo las reglas de mi álgebra con lo que Vieta escribe al final de su libro, *De enmendatione aequationum*. Es decir, que comienzo donde él lo dejó”.

En cualquier caso ambos tienen en mente la idea de una ciencia universal, la *Mathesis Universalis* de Descartes, para quien “algunas huellas de estas matemáticas verdaderas se encuentran en Pappus y Diofanto” [19, Regla IV], y que corresponde prácticamente a la cetética ($\zeta\eta\tau\eta\tau\iota\kappa\eta$) de Vieta, mediante la cual –con la ayuda de la *logística especiosa*– se realiza la nueva álgebra, entendida como arte analítico general.

Sin embargo, mientras Vieta considera como lo más importante esa característica única del arte, esa aplicación en dos campos, la rética ($\rho\eta\tau\iota\kappa\eta$) o cómputo con números, y la exegética ($\varepsilon\xi\eta\gamma\eta\tau\iota\kappa\eta$) o construcción de magnitudes a partir de ecuaciones, pero manteniendo separados los ámbitos de la Aritmética y la Geometría, en Descartes se produce un cambio radical. A mi juicio, y frente a lo que consideran generalizadamente los historiadores de la Matemática, no es que identifique la Aritmética y la Geometría. Su ruptura con las limitaciones de los griegos clásicos puede estudiarse mucho mejor desde la visión al respecto de la Física actual, dado que, como apunta J. Klein [20], la concepción de Descartes de un simbolismo [algebraico, diríamos nosotros] para las figuras relaciona dos líneas de pensamiento:

> “(1) la concepción del Álgebra como una teoría “general” de las proporciones cuyo objeto, solamente comprensible simbólicamente, adopta sus características específicas a partir del ámbito de lo numérico; (2) la identificación de este objeto matemático “simbólico” con el objeto de la verdadera física”,

es decir, de la representación cuantitativa de los elementos del mundo real (magnitudes) y las relaciones entre ellas (leyes de la naturaleza, etc.), abstracciones que se observan desde los tiempos antiguos (Aristóteles es un caso paradigmático) se desarrollan incesantemente desde Nicolás de Oresme [21] y se sintetizan –hasta aquí– en Descartes [19].

La abstracción que el intelecto lleva a cabo se efectúa a dos niveles sucesivos [20]. Una primera intención, cuyo objeto pertenece al mundo de lo real, y a partir del cual abstrae el concepto de número como multitud de unidades (*multitudo* *unitatum*, $\pi\lambda\eta\theta o\sigma\ \mu o\nu\alpha\delta\omega\nu$). Una segunda intención, que no ve la multitud de unidades directamente, sino en el *actus signatus*, un acto cuyo objeto es ya un concepto existente, de modo que la multitud de unidades se convierte en un único ser, en un ente de razón independiente (*ens rationis*) con el que opera el intelecto. En esta situación [20] "estamos tratando con un símbolo, bien un signo-letra algebraico o una figura geométrica".

La *Mathesis Universalis* como teoría general de las proporciones y las ecuaciones, como expresión particular de esa imaginación que asegura la posibilidad de un conocimiento simbólico se convierte, además, en la "física verdadera". Pero sigue sin precisarse en qué consiste realmente esta *mathesis* que maneja solamente magnitudes en general que el intelecto concibe como entes abstractos, en tanto que el objeto principal de la industria humana consiste en la búsqueda de proporciones reducibles a la igualdad [19, Regla XIV].

Pues bien, la *Mathesis Universalis* consiste en expresar las relaciones o proporciones entre esas cosas por las que se conocen los objetos –es decir, que caracterizan los objetos–, extensión, figura, movimiento, y otros semejantes en forma de igualdades entre lo que se conoce y lo que se desconoce (lo que se busca). Estas comparaciones deben construirse de manera tal que la cosa buscada y la dada participen de la misma naturaleza, aunque en ocasiones "esa naturaleza común no se encuentra igualmente en los dos términos sino según ciertas relaciones o proporciones en que está envuelta". En otras palabras, es

> "una ciencia general que explique todo lo cognoscible sobre el orden y la medida que no esté sujeta a ninguna otra materia".

Es más, para Descartes –explícitamente– sólo pueden ser reducidas a la igualdad las cosas que llevan consigo el más o el menos, "cosas comprendidas bajo la denominación de magnitud" –donde nos aproximamos algo más a $(M,+,\prec)$–. Pero esto en el sentido más amplio posible, puesto que "es preciso abstraer las proporciones tanto de las figuras de que se ocupan especialmente los geómetras como de cualquier otra materia que tratemos".

5. La concepción magnitudinal de Descartes entre las *Regulae* y *La Géometrie*

Para el Descartes de las *Reglas para la Dirección del Espíritu* (1628) –ampliando la denotación terminológica de Vieta– existen diferentes "especies de magnitudes"; la primera y principal la extensión, otra la figura, otra el movimiento, etc. Y, en efecto, dado que se necesita la ayuda de la imaginación resulta útil aplicar lo que se dice de las magnitudes en general a la extensión real de un cuerpo, puesto que la corporeidad como tal de los cuerpos es la magnitud que nuestra imaginación se representa más fácilmente.

Por "extensión" entiende todo lo que tiene longitud, anchura y profundidad, de modo tal que la extensión ocupa el lugar, es decir, "lo que tiene extensión ocupa el lugar" o "lo que tiene extensión es un sujeto ocupando el lugar". Por otro lado, aunque un cuerpo tiene extensión, la extensión no es el cuerpo. En consecuencia, de los objetos se estudia su extensión en el sentido de compararla con alguna extensión conocida, y a esta comparación reducir las proporciones, puesto que a lo que aspira no es a "conocer un nuevo ser", sino a reducir las proporciones a ese punto en el que lo desconocido se encuentra a partir de lo conocido. Para ello se consideran en la extensión los elementos que ayudan a exponer las diferencias de las proporciones: dimensión, unidad y figura.

Por "dimensión" entiende Descartes "el modo y razón según los cuales un sujeto es considerado como mensurable" [12]. Pero, y aquí radica gran parte de lo apuntado antes, las dimensiones de un cuerpo no son únicamente la longitud, la anchura y la profundidad ("dimensiones geométricas"), sino que en un mismo sujeto puede haber infinidad de dimensiones: la pesadez de los cuerpos, la velocidad del movimiento, etc., puesto que:

> "todas esas cosas son idénticas si las consideramos desde el punto de vista de la dimensión, como debe hacerse aquí y en las ciencias matemáticas".

Esta "dimensión" se convierte en lo que puede considerarse algo próximo a un "atributo de las magnitudes", puesto que para Descartes, por ejemplo, la pesadez es la dimensión según la cual los objetos son pesados, la velocidad es la dimensión del movimiento. Así, cualquier división en varias partes iguales es una especie de dimensión, aunque si se consideran las partes relativamente al todo se está *contando*, mientras que si se considera el todo dividido en partes se está *midiendo*, distinción entre los ámbitos de la Aritmética y de la Geometría.

Finalmente, en *La Géometrie* [10] será donde se matematicen realmente las consideraciones precedentes acerca de las magnitudes, donde se formule simbólicamente esa *Mathesis Universalis* avanzada con ejemplificación solamente parcial en las *Reglas* [19]. Teniendo presente en todo momento, eso sí, que *La Géometrie* no es más que –o es tanto como– uno de los tres Apéndices, de los tres campos de aplicación del *Discurso del Método* [22].

En este sentido, las primeras palabras del Libro I son clarificadoras:

> "Todo problema en Geometría puede reducirse a términos tales que basta conocer la longitud de ciertas líneas para su construcción".

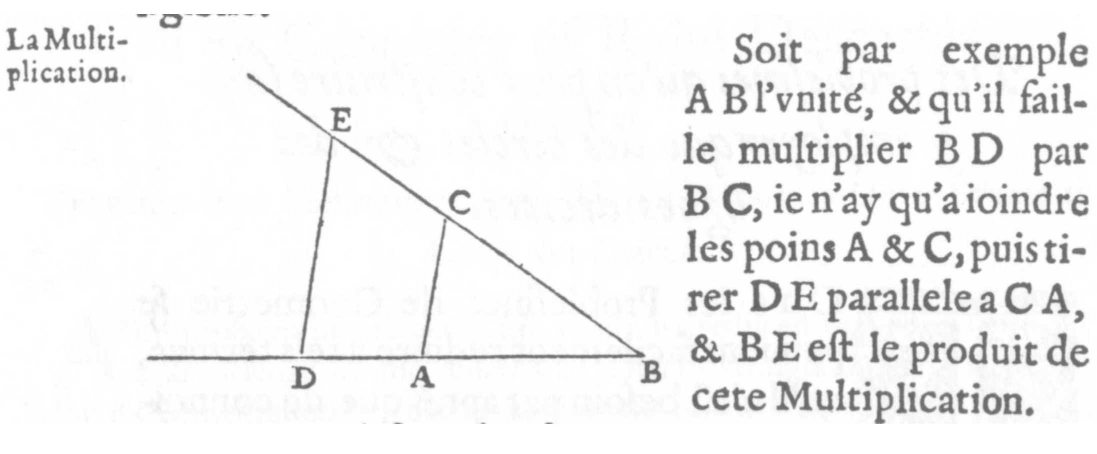
Pero con una interpretación del término "líneas" que va más allá del de "cantidades de longitud", puesto que para Descartes:

> "debe tenerse en cuanta que todas las partes de una misma línea deben expresarse siempre mediante el mismo número de dimensiones. De modo que a^3 tiene tantas dimensiones como *abb* o b^3, siendo todos ellos partes componentes de la misma línea $\sqrt{a^3 - b^3 + abb}$, de modo que una línea puede estar compuesta por ciertas combinaciones de cantidades de magnitudes con dimensiones mayores que uno".

Si en la Aritmética usual se admitían las operaciones adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas, en su *Geometría* Descartes define cinco operaciones entre líneas que se corresponden con las anteriores.

Por ejemplo, para multiplicar las líneas $a = BD$ y $b = BC$ considera $e = AB$ como unidad, une los puntos A y C y dibuja DE paralelo a CA. Entonces $c = BE$ es el producto de a y b. Es decir (retomando un recurso ya utilizado por Ommar Khayyam siglos atrás [15]), dadas a y b cantidades de longitud, y elegida una cantidad de longitud unidad e, el producto de a y b se define mediante la proporción

$$b : c = e : a \quad \rightarrow \quad ab = ec.$$


La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

Así, vemos que Descartes se somete desde el principio de su tratado al primer ámbito de aplicación de la Ley de las Homogeneidades de Vieta, el de las magnitudes.

Una vez realizadas las oportunas consideraciones magnitudinales, es decir, una vez establecidas las operaciones que se pueden realizar entre [cantidades y/o medidas de] magnitudes, queda legitimada su inclusión en ecuaciones. Este camino lo emprende en el parágrafo que titula "Sobre el procedimiento para acceder a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas".

El procedimiento en cuestión, el método para resolver el problema que se tiene entre manos, consiste en encontrar un medio de expresar una misma cantidad de dos formas diferentes; "eso es a lo que se le llama ecuación, pues los términos de una de estas expresiones son iguales a los de la otra".

En el caso de necesitar varias ecuaciones (un sistema) para resolver el problema, se reducirá el número de ecuaciones "hasta que no exista sino una sola línea desconocida que sea igual a alguna línea conocida o cuyo cuadrado, cubo, cuadrado del cuadrado, supersólido, cuadrado del cubo, etc., sea igual a la suma o diferencia de dos o más cantidades".

Es decir, si *z* es la cantidad desconocida:

$$\begin{aligned} &z = b \\ &z^2 = -az + bb \\ &z^3 = az^2 + bbz - c^3 \\ &z^4 = az^3 - c^3 z + d^4 \end{aligned}$$

De estas dos o más cantidades una debe ser conocida y las otras deben estar compuestas por algunas medias proporcionales entre la unidad y ese cuadrado, cubo, cuadrado del cuadrado, etc., multiplicado por otras líneas conocidas. En suma, todos los términos de todas las ecuaciones deben ser homogéneos; cantidades de la misma magnitud; todos de las misma naturaleza.

El sometimiento a la homogeneidad (en este caso también en el ámbito ecuacional) se enmarca en una corriente en la Historia de la Matemática de fundamentación, rigor y coherencia conceptual, corriente que se había venido solapando con otras dos. Por un lado estaba el recurso a las relaciones algebraicas como mera *logistica numerosa*, que en su interpretación geométrica se traduciría en la legitimación de operaciones tales como la suma de números que se supone representan cantidades de longitud, con números que representan área igualadas a volúmenes. Claro es, la homogeneidad implica cierta inflexibilidad en los cálculos.

Otra corriente ha buscado la flexibilización sin la pérdida de rigor, recurriendo a la elección de una unidad para las magnitudes geométricas que subyace a las relaciones aparentemente inhomogéneas entre cantidades, de modo que, en realidad, las homogeneiza.

Esta elección de unidad es la opción elegida por Descartes, de modo que, como apunta Boyer [2], sustituye una homogeneidad "en el pensamiento" por una homogeneidad "en la forma", paso que hizo más flexible su álgebra geométrica. Así, no es estrictamente necesario que todas las partes de una línea deban tener (explícitamente) el mismo número de dimensiones cuando la unidad viene determinada por las condiciones del problema.

En palabras del propio Descartes [10], el requisito de que todos los términos tengan el mismo número de dimensiones no es necesario "cuando la unidad está determinada, puesto que la unidad puede entenderse siempre, incluso cuando existen demasiadas dimensiones (o demasiado pocas); así, si se pide extraer la raíz cúbica de $aabb - b$, debemos considerar la cantidad $aabb$ dividida por la unidad una vez, y la cantidad b multiplicada dos veces por la unidad".

6. Consideraciones finales

Como apuntaba anteriormente, aunque la contribución de Descartes culminaba una trayectoria que ponía en manos de los filósofos de la Naturaleza del siglo XVII la posibilidad de matematizar las relaciones cuantitativas enunciadas retóricamente, ni Galileo ni Newton pasarán de relaciones de proporcionalidad entre cantidades de las magnitudes, mientras Leibniz expresará mediante ecuaciones solamente principios de conservación (como el de la cantidad de movimiento) en los que se igualan cantidades de una única magnitud.

En el Euler de 1736 [14] [23], que empieza como terminaban los matemáticos del siglo anterior, formulando relaciones de proporcionalidad entre cantidades de espacio (S, s), tiempo (T, t) o velocidad (C, c),

$$C : c = S : \frac{sT}{t} \quad \text{ó} \quad C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t},$$

por fin, encontraremos expresiones como

$$dc = \frac{npdt}{A},$$

relacionando la variación de la velocidad c (*celeritas*) de un cuerpo de masa puntual A, en una escala de tiempos t, la fuerza p (*potentia*) que actúa sobre el cuerpo, con la presencia de una constante n cuyo valor dependerá de las unidades elegidas para medir las magnitudes presentes [14].

Pero todas estas cuestiones, aún no suficientemente estudiadas por los historiadores, hay que tratarlas detenida y detalladamente. De ello nos ocuparemos en próximos trabajos.

Bibliografía

[1] BENOIT, P. (1991) "Cálculo, álgebra y mercancía". En M. Serres (dir.) *Historia de las Ciencias*, pp. 225-253. Madrid, Cátedra.

[2] BOYER, C. B. (1968) *A History of Mathematics*. New York, Wiley.

[3] VAN DER WAERDEN, B. L. (1985) *A History of Álgebra. From Al-Khwarizmi to Emmy Noether*. New York: Springer-Verlag.

[4] ROANES MACÍAS, E. (1986) "Estructura de magnitud escalar". *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* 11, 51-65.

[5] GONZÁLEZ DE POSADA, F. y GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2002) "Foundamentals of Dimensional Theory". *Journal of New Energy* [En prensa].

[6] VIETA, F. (1591) *In Artem Analyticem Isagoge*. Edición en ingles de J. Winfree Smith, Apéndice a Klein (1968)

[7] STRUICK, D. J. (ed.) (1986) *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Princeton, Princeton University Press.

[8] FAUVEL, J. y GRAY, J. (eds.) (1987) *The History of Mathematics: A Reader*. Milton Keynes, The Open University Press.

[9] CARDANO, G. (1545) *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*. Edición en inglés de T. Richard Witmer (1993) *Ars Magna or the Rules of Álgebra*. New York, Dover.

[10] DESCARTES, R. (1637) *La Géométrie*. Edición en ingles con facsímile en francés de D. E. Smith y M. L. Latham (1954) *The Geometry of René Descartes*. New York, Dover.

[11] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (1995) "Historia del Postulado General de Homogeidad. En torno a F. Viete (1591)". En F. A. González Redondo y P. Dávila Álvarez (eds.) *Anuario Científico 1994 del Grupo de Análisis Dimensional*, pp. 167-174. Universidad Politécnica de Madrid.

[12] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (1996) "Las concepciones dimensionales en la obra de René Descartes". En F. A. González Redondo y P. Dávila Álvarez (eds.) *Anuario Científico 1995 del Grupo de Análisis Dimensional*, pp. 109-115. Universidad Politécnica de Madrid.

[13] NEWTON, I. (1687) *Principia Matemática Philosophia Naturalis*. Edición en castellano de A. Escohotado (1987) *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*. Madrid, Tecnos.

[14] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2002) "La contribución de Leonard Euler a la matematización de las magnitudes y de las leyes de la Mecánica, 1736-1765". *Llull. Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*. [En prensa].

[15] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2002) "El Álgebra [geométrica] de Euclides a Ommar Khayyam". *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* nº 62, 72-87.

[16] VAN DER WAERDEN, B. L. (1983) *Geometry and Álgebra in Ancient Civilizations*. New York: Springer-Verlag.

[17] GONZÁLEZ DE POSADA, F. y GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (1996) *Blas Cabrera: Principios fundamentales de Análisis Vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el Universo de Minkowski*. Madrid, Amigos de la Cultura Científica.

[18] DESCARTES, R. (1824) *Oeuvres de Descartes, publiées par Victor Cousin*. París.

[19] DESCARTES, R. (1628) *Reglas para la Dirección del Espíritu*. Edición de F. Larroyo, Porrúa, México, 1984.

[20] KLEIN, J. (1968) *Greek Mathematical Thought and the Origin of Álgebra*. Cambridge, M.I.T. Press.

[21] BOYER, C. B. (1959) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York, Dover.

[22] DESCARTES, R. (1637) *Discurso del Método*. Edición de G. Quintás, Alfaguara, Madrid, 1981. [Incluye como Apéndices *Los Meteoros*, *La Dióptrica* y *La Geometría*].

[23] Euler, L. (1736) *Mecánica sive motus scientia analytice exposita*. Edición de P. Stäkel, 2 vols., 1912. En L. Euler, *Opera Omnia*, "Series Secunda. Opera Mecánica et Astronomica. Volumen Primum". Berna, Teubner.

Ordenador, intuición y solución de dos problemas

Enrique Rubiales Camino
Catedrático de Bachillerato
Miembro de la Junta Directiva de la Soc. Puig Adam

Abstract

This article shows how the computer can be of great help when it comes to use intuition to reach the solution of certain math problems commonly proposed in problem solving math contests

En un principio, al lector de este artículo puede parecerle un tanto chocante el título, pero si cuento como ha surgido es muy posible que ya no le resulte tan extraño. Debo de decir que este artículo debería haber sido la continuación de otro que tenía que haber escrito antes, con el título de "Reflexiones sobre la selección de problemas", y que al no tenerlo acabado, no le he publicado todavía, pero el que no puedo demorar es el que voy a escribir ahora mismo. Lo que si puedo decir es que he comenzado la casa por el tejado, pero es que esos dos problemas me han estado obsesionando, de modo que hasta no acabar lo que me había propuesto con ellos, no he continuado con el artículo de la selección de problemas, y todavía sigo seleccionando problemas.

Ya voy a contar como se planteó el artículo en cuanto a estos dos problemas. Para ello empezaré por enunciarlos, y para entendernos los llamaré problema nº 1 y problema nº 2.

Problema nº 1.

Demostrar que si a, b y c son raíces de la ecuación $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$*, se verifica que* $\dfrac{a^{1982} - b^{1982}}{a-b} + \dfrac{b^{1982} - c^{1982}}{b-c} + \dfrac{c^{1982} - a^{1982}}{c-a}$ *es un número entero.*

Problema nº 2.

La función g se define sobre los números naturales y satisface las condiciones:

- *g(2)=1*
- *g(2n)=g(n)*
- *g(2n+1)=g(2n)+1.*

Sea n un número natural tal que 1 ≤ n ≤ 2002. Calcula el valor máximo M de g(n). Calcula también cuántos valores de n satisfacen g(n)=M.

Respecto al problema nº 1, he de decir, que la elección de dicho problema se me presentó cuando estaba buscando problemas para preparar a los posibles alumnos que estuviesen interesados en presentarse a la fase primera de la Olimpiada Matemática, como es un problema de nivel alto y como no era capaz de resolverlo, pues decidí que no lo iba a poner, pero como me quedaba el gusanillo de no ser capaz de resolverlo y lo que es peor, que no sabía como atacarlo, pues con las fórmulas de Cardano se me acababa la inspiración, decidí, entonces proponérselo a mi amigo y colega Eugenio Ferrándiz. Él lo resolvió, y además me dijo que lo había hecho por el método de inducción. No pretendo contar como se resuelve, pues mi interés con este problema es otro, que ya se verá más adelante, y por tanto, diré que en el papel que me entregó llega a la siguiente fórmula de recurrencia:

$$T(n+1) = T(n) + T(n-1) + T(n-2),$$

donde

$$T_{n+1} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} + \frac{b^{n+1} - c^{n+1}}{b-c} + \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{c-a}$$

$$T_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} + \frac{b^n - c^n}{b-c} + \frac{c^n - a^n}{c-a}$$

$$T_{n-1} = \frac{a^{1n-1} - b^{n-1}}{a-b} + \frac{b^{n-1} - c^{n-1}}{b-c} + \frac{c^{n-1} - a^{n-1}}{c-a}$$

$$T_{n-2} = \frac{a^{n-2} - b^{n-2}}{a-b} + \frac{b^{n-2} - c^{n-2}}{b-c} + \frac{c^{n-2} - a^{n-2}}{c-a},$$

y además: $T_0 = 0$, $T_1 = 3$ y $T_2 = 2$.

Y aquí es donde surge la idea para iniciar un artículo, pues al final del escrito me puso la siguiente nota:

"lo que permitiría incluso hallar T_{1982} con un programa sencillo."

Por supuesto que se refería a un programa de ordenador, pues sabe que a mi ese tema me gusta mucho. Entonces lo que voy a contar a continuación es la experiencia y las reflexiones a la que me ha llevado la búsqueda de ese programa.

Como me inicié en la Informática con el lenguaje de programación Basic, y aunque hoy día está superado, pero sigo siendo un ferviente seguidor de él, decidí hacer un programa, en el lenguaje de programación que ahora se llama QBASIC y cuyo listado es el siguiente:

```
REM VER QUE T(1982)ES UN NÚMERO ENTERO
CLS
DEFLNG T
DIM T(2000)
T(2)=2 : T(1)=3 : T(0)=0
FOR N=2 TO 1981
   T(N+1) = T(N) + T(N-1) + T(N-2)
   PRINT T(N+1);
NEXT N
END
```

Con este lenguaje de programación empiezan las primeras sorpresas, ya que no suponía que creciese tan deprisa ese número entero que estaba calculando, aunque podría decir que este fallo lo tenía que haber previsto por haber trabajado con la sucesión de Fibonnaci. Para que sea vea como se me fueron presentando los resultados diré:

1) En el programa anterior comencé sin la instrucción de la línea 3, por lo que estaba trabajando con números reales de simple precisión, y el programa al ejecutarle, llegó hasta el momento en que dijo "Desbordamiento", por lo que vi que n = 145 y el número entero salía en el formato 1.954729E+38$, es decir que el número que estaba buscando tenía en ese momento 39 dígitos.

2) Que cambié la instrucción de la línea 3 por la que me iba a dar enteros de simple precisión con lo que sólo llegaba a n = 17 y el entero era el número 26059. Por supuesto lejos de la solución que buscaba, pero que me estaba sirviendo para ver que el QBASIC estaba muy lejos de resolver problemas de este tipo.

3) Seguí con este lenguaje de programación para hacer mis últimas averiguaciones y así si en la línea 3 ponía la instrucción de entero de doble precisión llegaba a un n = 35 y el entero era el número 1512334645, por lo que seguía casi igual que antes, pero ya hice mi última tentativa, poniendo en la línea 3 la instrucción correspondiente a los números reales de doble precisión por lo que obtuve n =1165 y la aproximación de número entero igual a 1.712060227634681D+308, es decir un número entero que va a tener 309 dígitos.

Tras estos tanteos, lo lógico era usar alguno de los lenguajes de cálculo simbólico, y para ello el que me pareció más adecuado fue el Derive. Como era de esperar, hubo cambios efectivos, pero también tuve mis problemas, pues empecé utilizando la instrucción ITERATES, y ello me llevó a que el cálculo con n = 198 ya fuese excesivamente largo en el tiempo. Para que el lector lo pueda comprobar le escribiré la función que utilicé con la instrucción ITERATES, que es la siguiente:

```
FUNCION(n):= ITERATES([ELEMENT(v,2),ELEMENT(v,3),
ELEMENT(v,3) + ELEMENT(v,2) + ELEMENT(v,1)],v,[3,2,5],n)
```

Si ahora ejecutamos FUNCION(8), el resultado aparece en un tiempo mínimo, si ejecutamos FUNCION(198), es mejor tomárselo con calma, pues va tardar bastante, y evidentemente, si pongo FUNCION(1982) es mejor dejarlo y abortar el intento de cálculo, pues evidentemente habría que dejar al ordenador trabajando bastante tiempo, y la verdad es que esa no era mi intención, ya que era mejor utilizar la instrucción ITERATE, y entonces utilicé la siguiente función:

```
FUNCION1(n):= ITERATE([ELEMENT(v,2),ELEMENT(v,3),
ELEMENT(v,3) + ELEMENT(v,2) + ELEMENT(v,1)],v,[0,3,2],n).
```

De esta forma puse FUNCION1(12), apareciendo el resultado [1238,2277,4188], y afortunadamente que nadie piense que voy a escribir los números que me aparecieron cuando escribí FUNCION1(1982), pues sólo diré que el tal número debe tener aproximadamente unos 670 dígitos. Y aquí es donde puedo afirmar que la intuición de Eugenio falló, pues él no debía creerse que este número tuviese tal cantidad de dígitos.

Y con esto doy por acabada mi aventura con la frase antes dicha de mi amigo "lo que permitiría hallar...".

Ahora me toca relatar las incidencias que me llevaron al Problema nº 2 y a su solución, y donde vuelve a presentarse el uso del ordenador, que yo sigo considerando un gran auxiliar, que nos sirve incluso para descubrir demostraciones que en principio no se nos desvelan como querríamos que nos ocurriese sin su ayuda.

Según estaba dándole vueltas al Problema nº 1 me llegó el Boletín de la Sociedad “Puig Adam”, y lo primero que busco cuando me llega el Boletín es la página donde vienen problemas y me da igual que sean del Concurso, de Olimpiadas o de los que proponen los lectores, y al coger este número me fijé en el de esta función y comencé a tantear el solucionarlo. Como es lógico lo primero fue tratar de hallar el valor de M, y para ello me escribí la función de la siguiente manera:

g(2) = 1
g(2n) = g(n)
g(2n+1) = g(2n)+1) = g(n)+1, y pase a dar valores a la n y escribí:

$$n=1\begin{cases} g(2)=1 \\ g(3)=g(1)+1=2 \end{cases} n=2\begin{cases} g(4)=g(2)=1 \\ g(5)=g(2)+1=2 \end{cases}$$
$$n=3\begin{cases} g(6)=g(3)=2 \\ g(7)=g(3)+1=3 \end{cases} n=4\begin{cases} g(8)=g(4)=1 \\ g(9)=g(4)+1=2 \end{cases}$$

No voy a seguir escribiendo lo que si estaba haciendo en el papel, pero si en lo que me estaba fijando y es que las potencias de 2 me estaban dando siempre un 1 y que el anterior a esa potencia se iba aumentando en 1, lo que me hizo sospechar que por ahí podría descubrir la solución a esta primera parte. Entonces al resultado que llegué fue el siguiente:

$g(2) = 1$, $g(2^2-1) = g(3) = 2$, $g(2^3-1) = g(7) = 3$, $g(2^4-1) = g(15) = 4$,
$g(2^5-1) = g(31) = 5$, $g(2^6-1) = g(63) = 6$, $g(2^7-1) = g(127) = 7$,
$g(2^8-1) = g(255) = 8$, $g(2^9-1) = g(511) = 9$, $g(2^{10}-1) = g(1023) = 10$

y evidentemente el siguiente valor ya se pasaba del año que habían puesto, que era el 2002.

Todavía no me había dado cuenta que esto tenía que ver realmente con las potencias de dos, pero relativamente, pues de lo que había que darse cuenta es de que estas potencias de dos me llevaban a la base dos, y eso todavía estaba lejos y es donde va aparecer el uso del ordenador.

Para la segunda parte del problema también empecé mediante tanteos sobre el papel, pensando que se me iba a dar como la primera parte, es decir tras diversos tanteos, calculando los valores de la función para un número bastante grande de valores de n. Sin embargo no marchaba de tal manera que pensé que lo más práctico sería buscar un programa y como con el Problema nº 1 hacerlo en QBASIC. Ya sabía que el M que tenía que buscar debía ser 10, luego para un programa de ordenador llegar hasta 2002 no tendría que ser difícil, por lo que hice el siguiente programa:

```
REM FUNCIÓN G(N)
CLS
DIM A(3000)
A(1)= 1 : K = 1
FOR N=1 TO 1001
   A(2*N) = A(N): PRINT A(2*N);
   A(2*N+1) = A(N)+1 : PRINT A(2*N+1);
   IF N=K*100 THEN FOR I=1 TO 1000000 : NEXT I:K = K+1
      :PRINT ´ BUCLE DE RETENCIÓN
NEXT N
PRINT
FOR N=1 TO 1001
   IF A(2*N) = 10 THEN PRINT A(2*N), : PRINT 2*N
   IF A(2*N+1) = 10 THEN PRINT A(2*N+1), : PRINT 2*N+1
NEXT N
END
```

Ejecutando el problema, van saliendo diversas pantallas con las imágenes de los números desde el 1 al 2002, y así vemos que para 1023 tenemos 10, como podíamos suponer, y luego los números 1535, 1791, 1919 y 1983. Con lo que el número de ellos es 5, que es lo que nos pide el problema, aunque yo también obtuve los distintos valores de n. Y como se ve en este programa en QBASIC no hay ningún problema de desbordamiento como ocurría en Problema nº 1. Ahora bien resuelta la segunda parte con el ordenador, me quedaba resolverla sin él, y además, se me ocurrió que podía saber cuantos números acababan en 1, cuántos en 2, y así llegar hasta el 10; que este último, ya si sabía que eran 5. Total pensé para mí, si lo va hacer el ordenador, sólo es preparar un programa que los cuente, y así lo hice, cuyo listado es el siguiente:

```
REM FUNCIÓN G(N) PARA SABER COMO ACABAN
CLS
```

```
DIM A(3000),B(10)
A(1) = 1
FOR N = 1 TO 1001
   A(2*N) = A(N)
   A(2*N+1) = A(N) + 1
NEXT N
PRINT : PRINT
FOR K = 1 TO 10
   FOR N = 1 TO 1001
      IF A(2*N) = K THEN B(K) = B(K) + 1
      IF A(2*N+1) = K THEN B(K) = B(K) + 1
   NEXT N
NEXT K
FOR K = 1 TO 10
   S = S + B(K)
   PRINT B(K)
NEXT K
PRINT : PRINT S
END
```

El resultado que sale es el siguiente:

$$\begin{array}{rcr} 1 & \rightarrow & 10 \\ 2 & \rightarrow & 55 \\ 3 & \rightarrow & 165 \\ 4 & \rightarrow & 330 \\ 5 & \rightarrow & 462 \\ 6 & \rightarrow & 461 \\ 7 & \rightarrow & 323 \\ 8 & \rightarrow & 150 \\ 9 & \rightarrow & 41 \\ 10 & \rightarrow & 5 \\ & & 2002 \end{array}$$

Y después de estos resultados me quedé tan satisfecho, pero como explicaré más adelante hay unos cuantos pequeños errores, pero que aunque haya puesto que son pequeños, no dejan de ser errores, y por tanto no dan el resultado esperado. En esos momentos no me di cuenta, pero luego cuando caí en ello, pensé que después de todo me venía muy bien para poner de relieve como se van resolviendo las cosas mediante el proceso error-paso atrás-rectificar-nuevo paso-seguir adelante, de modo que lleguemos a la solución esperada.

En este momento volví al lápiz y al papel y seguí pensando como atacarlo de forma que no necesitase el ordenador. Entonces me dediqué a obtener el resultado de g(1624), g(1027), g(1524),..., haciendo su desarrollo paso a paso. Lo voy a escribir con uno de esos números, pero lo hice exactamente igual con unos cuantos más.

$$\begin{aligned} g(1524) &= g(762)= g(381) = g(2 \times 190 + 1) = g(190) + 1 = g(95) + 1 = \\ &= g(2 \times 47 + 1) + 1 = g(47) + 2= g(2 \times 23 + 1) + 2 = g(23) + 3 = \\ &= g(2 \times 11 + 1) + 3 = g(11) + 4 = g(2 \times 5 + 1) + 4 = g(5) + 5 = \\ &= g(2 \times 2 + 1) + 5 = g(2) + 6 = 7. \end{aligned}$$

Aquí ya se me presentó sin ninguna duda como había que atacar el problema pues me di cuenta que si un número era par, en la imagen de la función sumaba un 0 y si un número era impar, en la imagen de la función sumaba un 1. Por tanto mi pregunta era qué ocurría si pasaba el número a base 2, es decir le dividía por 2. Así cogí el número 1524 y me puse a dividir por 2, es decir

		Cociente	Resto
1524 : 2	=	762	0
762 : 2	=	381	0
381 : 2	=	190	1
190 : 2	=	95	0
95 : 2	=	47	1
47 : 2	=	23	1
23 : 2	=	11	1
11 : 2	=	5	1
5 : 2	=	2	1
2 : 2	=	1	0

Ya se observa que teniendo en cuenta el uno del cociente final y los demás unos de los restos resultan 7 unos como era de esperar. Haciéndolo igual con otros tantos números, concluí que pasándolos a binario y contando los unos tenía resuelto el problema para ponerme a la búsqueda de todos los que g(n)=10.

Entonces me dediqué a escribir una tabla con números pequeños en base 2, y por tanto puse:

n	binario	g(n)
2	10	1
3	11	2
4	100	1
6	110	2
7	111	3
8	1000	1
10	1010	2
12	1100	2
14	1110	3
15	1111	4
16	10000	1

Luego ya sabemos que los números que se escriban en el sistema binario con tres unos y los demás dígitos sean ceros, tendremos que su imagen mediante la función g(n) es 3, y siempre teniendo en cuenta que el número escrito en binario no puede exceder al número 2002.

De esta forma escribí:

$$\begin{aligned}
1 &= 2^0 = 1\\
11 &= 1+2^1 = 3\\
111 &= 3+2^2 = 7\\
1111 &= 7+2^3 = 15\\
11111 &= 15+2^4 = 31\\
111111 &= 31+2^5 = 31 + 32 = 63\\
1111111 &= 63+2^6 = 63 + 64 = 127\\
11111111 &= 127+2^7 = 127 + 128 = 255\\
111111111 &= 255+2^8 = 255 + 256 = 511\\
1111111111 &= 511+2^9 = 511 + 512 = 1023
\end{aligned}$$

Y no seguí más pues el siguiente ya se pasa.

Entonces para contestar a la segunda parte, que nos dice que busquemos los n tal que g(n)=10, lo que tenemos que buscar son los números que escritos en el sistema binario tienen que tener diez unos, y como el 1023 tiene los diez unos, lo que hice fue añadir un cero, y luego ver donde lo colocamos de modo que al pasarlo al sistema decimal no sobrepase al número 2002.

De esta forma tenemos:

11111111110 = 2046, no vale; 11111111101 = 2045, no vale;
11111111011 = 2043, no vale; 11111110111 = 2039, no vale;
11111101111 = 2031, no vale; 11111011111 = 2015, no vale.
11110111111 = 1983, si vale; 11101111111 = 1919, si vale;
11011111111 = 1791, si vale; 10111111111 = 1535, si vale.

Y parece que nos falta el que obtuvimos al principio, pero no es así, pues lo que pasa es que habría que poner el cero en primer lugar y ese número ya no tendría once dígitos sino que tendría diez, aunque si nos daría la imagen del que nos falta. Por tanto podríamos escribir 01111111111 = 1023. Y partir de aquí, ya saqué como obtener el número n tal que g(n)=10. Basta tener en cuenta el número de unos que hay y el número de ceros que hay, por lo que la fórmula se reduce a las permutaciones con repetición, de forma que en este caso, tenemos:

$$P_{11;10,1} = \frac{P_{11}}{P_{10}P_1} = \frac{11!}{10!1!} = 11,$$

y como hay que tener en cuenta que hay que restarle las que exceden del número correspondiente al año 2002, pues resultan los 5 casos que ya sabía que me tenían que salir.

Entonces para los restantes casos tendríamos:

1) Acabar en 1: $\mathrm{P}_{11;1,10} = \frac{P_{11}}{P_1P_{10}} = \frac{11!}{1!10!} = 11.$

2) Acabar en 2: $\mathrm{P}_{11;2,9} = \frac{P_{11}}{P_2P_9} = \frac{11!}{2!9!} = 55.$

3) Acabar en 3: $\mathrm{P}_{11;3,8} = \frac{P_{11}}{P_3P_8} = \frac{11!}{3!8!} = 165.$

4) Acabar en 4: $\mathrm{P}_{11;4,7} = \frac{P_{11}}{P_4P_7} = \frac{11!}{4!7!} = 330.$

5) Acabar en 5: $\mathrm{P}_{11;5,6} = \frac{P_{11}}{P_5P_6} = \frac{11!}{5!6!} = 462.$

Ahora, sin embargo, en los casos que siguen hay que tener en cuenta los que superan al número 2002, y por tanto en estos casos tenemos:

6) Acabar en 6: $\mathrm{P}_{11;6,5} - 1 = \dfrac{P_{11}}{P_6 P_5} - 1 = \dfrac{11!}{6!5!} - 1 = 462 - 1 = 461.$

7) Acabar en 7: $\mathrm{P}_{11;7,4} - 1 = \dfrac{P_{11}}{P_7 P_4} - 7 = \dfrac{11!}{7!4!} - 7 = 330 - 7 = 323.$

8) Acabar en 8: $\mathrm{P}_{11;8,3} - 1 = \dfrac{P_{11}}{P_8 P_3} - 15 = \dfrac{11!}{8!3!} - 15 = 165 - 1 = 150.$

9) Acabar en 9: $\mathrm{P}_{11;9,2} - 1 = \dfrac{P_{11}}{P_9 P_2} - 14 = \dfrac{11!}{9!2!} - 14 = 55 - 14 = 41.$

10) Acabar en 10: $\mathrm{P}_{11;10,1} - 6 = \dfrac{P_{11}}{P_{10} P_1} - 6 = \dfrac{11!}{10!1!} - 6 = 11 - 6 = 5.$

Y a partir de estos cálculos fue el descubrimiento de que lo que estaba hecho con el lenguaje de programación QBASIC estaba mal, ya que para el 1 me aparecían 10 casos y eran 11, pero ya se podía descubrir porqué ocurría tal cosa y era debido a que en el programa no estaba contado el caso g(1)=1, pues empezaba en el 2. El caso correspondiente al 7 teníamos 322 casos, pues se daba la casualidad de que g(2002)=7, y no se contaba. Y por último estaba el caso del 8 que teníamos 150 casos y realmente son 149, pero es que en el programa se contaba también g(2003)=8. Total que como unos casos no aparecían y otros aparecían de más, pues la suma final era correcta y por eso al dar 2002, di por bueno el resultado, y precisamente al pensarlo sin ordenador fue cuando descubrí los fallos que había tenido. El programa para el caso g(n)=8 es el siguiente:

```
REM FUNCIÓN G(N)PARA EL VALOR 8
CLS
DIM A(3000)
A(1)=1 : K=0
FOR N=1 TO 1001
   A(2*N)=A(N)
   A(2*N+1)=A(N)+1
NEXT N
PRINT : PRINT
FOR N=1 TO 1000
  IF A(2*N) = 8 THEN PRINT 2*N;",";
```

```
    : PRINT A(2*N) : K=K+1
    IF A(2*N+1) = 8 THEN PRINT 2*N+1;",";
    : PRINT A(2*N+1) : K=K+1
NEXT N
IF A(1) = 8 THEN PRINT 1;","; : PRINT A(1) : K=K+1
IF A(2002) = 8 THEN PRINT 2002;","; : PRINT A(2002) : K=K+1
PRINT K
END
```

Y a partir de este programa es muy fácil hacer el que nos diese todos los valores que van del 1 al 10.

Ya para completar este artículo me quedan dos cuestiones que salieron al hilo de todo esto y es como utilizar para este problema el programa Derive. Una cuestión es como puse la función g(n), pues lo que hice fue lo siguiente:

g(2k) = g(k), si n es par
g(2k+1) = g(k) + 1, si n es impar, y g(1) = 1.

Tomé 2k = n, por lo que $k=\frac{n}{2}$, si n es par. Tomé 2k+1 = n, por lo que $k=\frac{n-1}{2}$, si n es impar. Así tenemos:

$$g(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}, \text{ si n es par}\\ \frac{\text{n-1}}{2}, \text{ si n es impar}\end{cases} \quad \text{y } g(1) = 1.$$

Luego la función en Derive queda de la siguiente manera:

G(n):= IF(n=1,1,IF(MOD(n,2) = 0,G(n/2),G((n-1)/2)+1).

Así tendríamos:

G(3) = 2, G(64) = 1, G(1023) = 10, G(1024) = 1,
G(1984) = 10, G(2002) = 7.

Si ahora quisiéramos que nos saliesen todos los valores hasta uno determinado, pues basta definir la función siguiente:

V(n):=VECTOR(G(k),k,1,n),

y por ejemplo para V(7), tendríamos [1,1,2,1,2,2,3], y por supuesto también podríamos obtener V(1023), y donde el último valor sería, por supuesto 10.

Y ya sólo me queda la otra cuestión, que es como llegue a definir la función g(n) en función de las potencias de dos para que obtuviese los sucesivos valores de dicha función desde n = 1 hasta n = 2002.

La función que obtuve fue la siguiente:

$$g(n) = 1 + g(n - 2^k),$$

donde k es el menor exponente que hace que n - 2^k sea igual a 0. Por tanto el valor inicial para la iteración es g(0)=0.

Como ya es habitual en este artículo lo que hice fue programarlo en QBASIC, y el programa es el siguiente:

```
REM FUNCIÓN G(N) MEDIANTE ITERACIÓN
CLS
DIM G(2050)
G(0) = 0
FOR K=0 TO 10
   FOR N=2^K TO 2^(K+1) - 1
      G(N)=1+G(N-2^K)
   NEXT N
NEXT K
FOR I=1 TO 2002
   PRINT G(I);",";
NEXT I
END
```

Para programarlo en Derive recurrí a escribir la función G sólo con la variable n, y para ello tuve que ingeniármelas para que la variable k la pusiese en función de n. Entonces, tenemos:

G(n):= IF(n=0,0,1+G(n-2^(FLOOR(LOG(n,2))))).

Así obtenemos:

G(1) = 1, G(2) = 1, G(3) = 2, G(4) = 1,
G(5) = 2, G(6) = 2, G(7) = 3.

¿Y si queremos que nos salgan todos esos valores de una vez?. Pues escribimos:

VECTOR(G(k),k,1,7).

Tenemos: [1,1,2,1,2,2,3] . De la misma forma podríamos llegar al número que quisiéramos, sin más que escribir:

VECTOR(G(k),k,1,100),VECTOR(G(k),k,1,1023),
VECTOR(G(k),k,1,2002).

Bibliografía

[1] MOLDES TEO, F. Javier (1995), *QBASIC*. Anaya. Madrid.

[2] Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Bol. nº 61, Jun. 2002.

[3] Revista Números. Sociedad Canaria "Isaac Newton" de profesores de Matemáticas. Problema nº 2, XIV Olimpiada Matemática de la Sociedad Matemática de Canadá.

Una Apuesta por la Búsqueda de Elementos Motivadores en el Aprendizaje de las Matemáticas en Bachillerato

Juan José Prieto Martínez
I.E.S. Pedro de Tolosa de la Comunidad de Madrid
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Fac. de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid
jjprieto@mat.ucm.es

Abstract

This article is about the motivation in the study of the Mathematics: the teachers have to find elements to cause the learning of this subject.

Introducción

Las matemáticas, como herramienta de trabajo en la vida cotidiana y con aplicaciones en problema reales, es un aspecto tratado cada vez más en nuestras aulas. Los docentes debemos intentar, en todos los niveles de la enseñanza secundaria, que los alumnos comprendan que las matemáticas surgen y son aplicadas en la vida real; de esta forma, quizás, podamos obtener como elemento motivador el aprendizaje de los conceptos y procedimientos fijados en la programación inicial de curso. Los profesores tenemos la obligación de enseñar a nuestros alumnos aspectos de actualidad relacionados con el área o problemas que tuvo la humanidad y que fueron resueltos justamente mediante conceptos y procedimientos que corresponden con el tema que se imparte en clase. Que comprendan que lo explicado y estudiado en el aula es herramienta fundamental de trabajo para el día de mañana. Posiblemente, la actitud de algunos de nuestros docentes cambie.

Por ejemplo, desde el punto de vista metodológico se debe señalar que la unidad didáctica sobre la Probabilidad en las Matemáticas de Bachillerato y, sobre todo, las Aplicadas en las Ciencias Sociales, no debe tener una gran teoría con teoremas, proposiciones y demostraciones. Se trata de una disciplina aplicada, y los problemas que se abordan deben ser extraídos del contexto de la vida cotidiana, del mundo laboral, de las ciencias sociales. En el desarrollo didáctico de la unidad se debe ir desgranando una serie de problemas relativos a la parte de la materia con dificultad variada, indicando, si es posible, su aplicación en otros campos del conocimiento (por ejemplo, *la teoría de la decisión*). Sus resoluciones ayudará al alumno y al profesor, más que las largas y tediosas demostraciones, a valorar el grado de aprendizaje realizado. Al final del tema se debe proponer una colección de problemas, cuya resolución conlleva la aplicación de estrategias más complejas y una reflexión por parte del alumno. Obviamente no hay que perder el equilibrio entre el rigor exigible a las Matemáticas y el aspecto manipulativo de su aprendizaje. Corresponde al profesor fijar el nivel de dificultad y el rigor con que debe plantear la enseñanza de esta materia, así como seleccionar los contenidos a impartir. Pero tampoco puede olvidarse el profesor de un elemento esencial hoy en día en el proceso de enseñanza / aprendizaje dentro de las aulas: la motivación. Ver, por ejemplo, las propuestas y reflexiones que se muestran en Estaire [2], García y Arriero [3], Prieto [5] y Rubiales [6], aplicando las nuevas tecnologías para hacer más sencilla la comprensión por parte de los alumnos de nuevos conceptos, y por buscar el interés de los adolescentes en temas que ellos deben de aprender "casi" por imposición. Se debería indicar en determinados momentos de la explicación dónde y cómo se aplican los conceptos explicados, respondiendo a las motivaciones, intereses y necesidades de ambos sexos, así como de cualquier colectivo multicultural.

El objetivo de este trabajo consiste en hacer hincapié entre los docentes de: (1) una mayor profundización y estudio en determinadas unidades didácticas; (2) una mayor motivación y formación de nuestros alumnos mediante materiales didácticos; (3) una formación continua del personal docente para facilitar el aprendizaje no solamente para el que aprende sino también para el que enseña. Se presenta como ejemplo la unidad didáctica del Cálculo de Probabilidades, que se empieza a impartir en 4º curso de E.S.O., que progresa en contenido a lo largo del Bachillerato, y que sirve como soporte imprescindible, por ejemplo, en la *teoría de la decisión*. La citada teoría puede ser comentada ante nuestros jóvenes proponiendo y realizando un par de problemas de aula y comprobando la similitud existente con el currículo de Bachillerato. En el siguiente epígrafe se esclarece este punto con un ejemplo. Nótese las dificultades que presentan, normalmente, la mayoría de los alumnos en resolución de problemas de cálculo de probabilidades, y en particular de probabilidad condicionada. Los diagramas de árbol, cuya institucionalización ha sido propuesto por Parzysz [4] constituyen una herramienta utilísima en la enseñanza del Cálculo de Probabilidades y en mi opinión, infrautilizada. Debemos todos recordar que el espíritu del sistema educativo actual a la que todos los docentes hemos accedido durante los últimos años hace huir al alumno de un aprendizaje memorístico (hechos, nombres y fórmulas) y fomentar en él un aprendizaje comprensivo y analizador (enseñar a pensar), es decir un aprendizaje significativo (Ausubel [1]). Sin embargo, a pesar de este cambio de paradigma educativo, en los libros de texto siguen apareciendo tediosas demostraciones, fórmulas para resolver problemas de "salón" o aula, sin ningún interés real más que el requerido por el alumno como "receta" para la resolución de ejercicios de examen, sin más implicaciones cognitivas.

1. ¿Teoría de la Decisión en Bachillerato? Buscando elementos motivadores de enseñanza-aprendizaje

Una persona encargada de tomar decisiones tiene un conjunto de opciones para considerar sucesos inciertos, que pueden ocurrir, y un resultado, posiblemente económico, asociado con cada combinación de alternativa y suceso. Deben evaluarse las alternativas de sucesos que representan la posibilidad de que ellos ocurran. Si la decisión implica una gran secuencia de sucesos, entonces puede trazarse un *árbol de decisión* para estructurar el problema denominado de decisión y utilizar el criterio de dominancia de las estrategias para seleccionar la decisión que cuenta con la utilidad más alta. Un árbol de decisión es un dispositivo gráfico para mostrar la secuencia de las opciones de decisión y los eventos involucrados en la toma de una decisión bajo condiciones de incertidumbre. Una *estrategia* se define como un conjunto de decisiones que determina por completo un plan de acción. Por ejemplo, en la Figura 1, se plantea el caso de una empresa que debe decidir si comercializa un producto o no. La decisión depende de la velocidad con que los distribuidores acepten el producto o no y el tipo de estrategia de Márketing (promoción o publicidad) empleada por la empresa. Obsérvese las probabilidades que se presentan asociadas a cada uno de los posibles sucesos.

Considera las posibles estrategias disponibles para el encargado de la toma de decisión. Una estrategia fácil de identificar es no introducir el producto en el mercado. Una segunda es introducir el producto: si la aceptación es rápida entonces promocionar; si la aceptación es lenta también promocionar. A esta estrategia se le puede denominar promocionar / promocionar. Además, de las estrategias citadas existen otras posibles como:

1) La estrategia de promocionar / publicidad: introducir el producto en el mercado; si la aceptación es rápida entonces promocionar; si la aceptación es lenta, entonces realizar publicidad del producto.
2) La estrategia de publicidad / promocionar: introducir el producto en el mercado; si la aceptación es rápida, entonces realizar la publicidad del producto; si la aceptación es lenta, entonces se debe promocionar.
3) La estrategia de publicidad / publicidad: introducir el producto; tanto si la aceptación es rápida como si es lenta se debe hacer publicidad del producto.

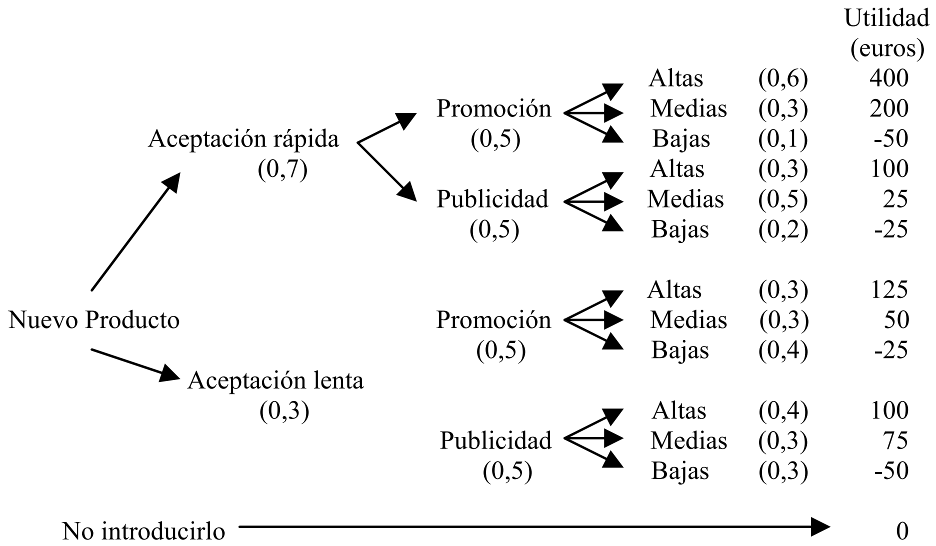


Figura 1

Nótese que puede trazarse un árbol de decisión para cada estrategia. El árbol para la estrategia promoción / promoción se presenta en la Figura 2.

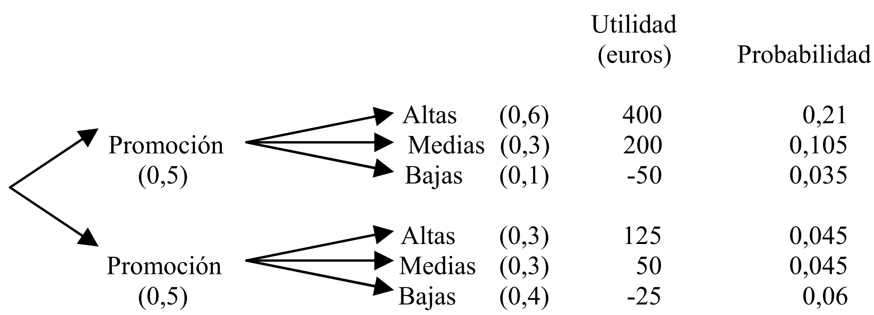


Figura 2

Las probabilidades para cada resultado se muestran al final del árbol. Por ejemplo, la probabilidad para obtener una utilidad de 400 euros (referente al resultado de aceptación rápida y ventas altas) es (0,7)(0,5)(0,6)=0,21. Las restantes probabilidades se calculan de manera similar. La suma de las probabilidades debe ser igual a ½ debido a que existe su estrategia alternativa promoción / publicidad con suma también de ½.

Las distribuciones de probabilidad para la utilidad de cada una de las estrategias son de gran interés. Por ejemplo, la distribución de probabilidad para la estrategia promoción / promoción se muestra en la Tabla 1.

Utilidad X	*P(X)*	*P(X o más)*
-50	0,035	0,5
-25	0,06	0,465
25	0	0,405
50	0,045	0,405
75	0	0,36
100	0	0,36
125	0,045	0,36
200	0,105	0,315
400	0,21	0,21

Tabla 1

El resto de las distribuciones de probabilidad se presentan a continuación en la Tabla 2. Estas distribuciones, en ocasiones, se conocen como *loterías de utilidad o perfiles de riesgo,* ya que describen de manera compacta los riesgos con que se enfrenta el encargado de la toma de decisión. Obsérvese que la estrategia de no introducir el producto no se ha presentado debido a que tiene una utilidad de 0 euros.

Promoción / Publicidad			Publicidad / Promoción			Publicidad / Publicidad		
Utilidad X	*P(X)*	*P(X o más)*	*Utilidad X*	*P(X)*	*P(X o más)*	*Utilidad*	*P(X)*	*P(X o más)*
-50	0,08	0,5	-50	0	0,5	-50	0,045	0,5
-25	0	0,42	-25	0,13	0,5	-25	0,07	0,455
25	0	0,42	25	0,175	0,37	25	0,175	0,385
50	0	0,42	50	0,045	0,195	50	0	0,21
75	0,045	0,42	75	0	0,15	75	0,045	0,21
100	0,06	0,375	100	0,105	0,15	100	0,165	0,165
125	0	0,315	125	0,045	0,045	125	0	0
200	0,105	0,315	200	0	0	200	0	0
400	0,21	0,21	400	0	0	400	0	0

Tabla 2

A través de las Tablas 1 y 2 se observa que la estrategia de promoción / promoción se impone a la de publicidad / publicidad por dominancia probabilística, ya que la probabilidad acumulada P(X o más) es mayor en cada caso. No existe otra dominancia, a no ser que consideremos la estrategia promoción / publicidad, que domina "casi" a la de publicidad / promoción, excepto en el valor de la P(Utilidad de -25 ó más). En el primer caso el valor es de 0,42 y en el segundo de 0,5.

En ocasiones es más fácil ver la dominancia probabilística observando una gráfica de las probabilidades acumuladas, es decir, un esquema de P(X o más). Una estrategia domina a otra si su curva acumulada en todos los puntos es la misma o está por encima de la curva acumulada de otra. La Figura 3 muestra el caso de una estrategia dominada en el lado izquierdo. La estrategia promoción / promoción (línea punteada) se impone a la estrategia publicidad / publicidad (línea continua), debido a que en todos los puntos su curva está por encima de ella. En el supuesto caso de que una curva se corte con otra, se dice que no hay dominancia.

Cuando hay muchos resultados en el árbol de decisión, suele ser más fácil verificar la dominancia utilizando las curvas acumuladas que usar las distribuciones de probabilidad y distribuciones acumuladas para estrategias seleccionadas. En el ejemplo se contempla que no puede eliminarse ninguna estrategia. Es importante notar que el criterio de dominancia no brinda un mecanismo para elegir entre estrategias; es sólo un criterio parcial de decisión.

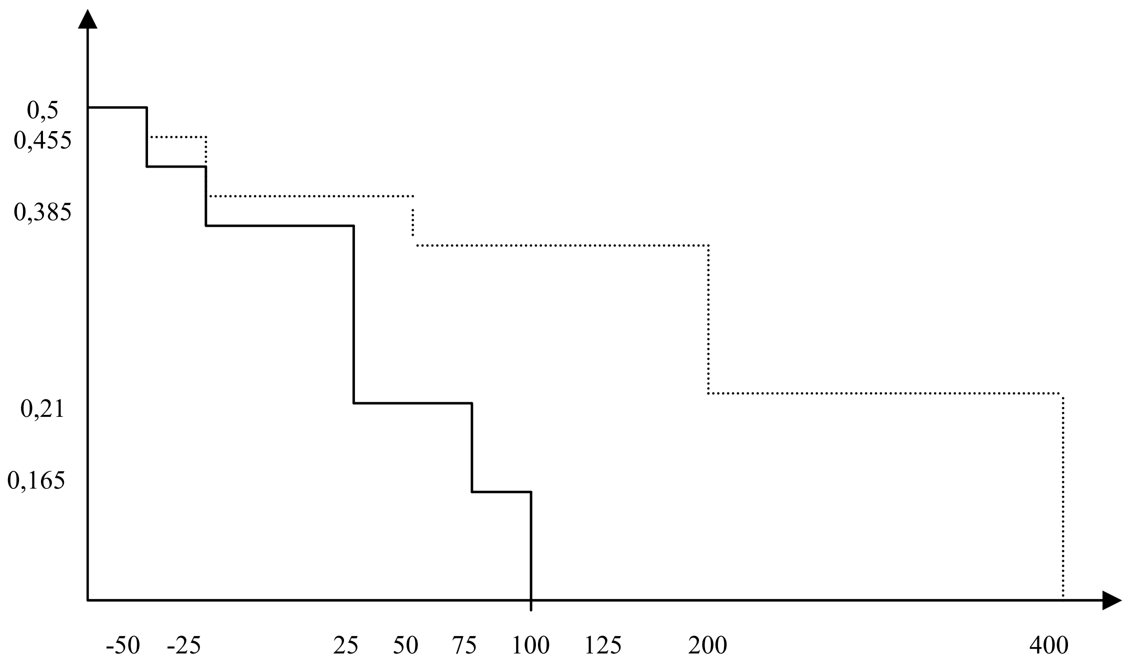


Figura 3

3. Conclusiones

Las distribuciones de probabilidad acumulada y los diagramas de árbol que se deben estudiar en Bachillerato son unas herramientas esenciales en las Ciencias Estadísticas y, en particular, en la Teoría de la Decisión. Hacer ver a nuestros alumnos que si el problema de decisión es relativamente simple, implicado sólo unos pocos resultados posibles, quien toma la decisión puede entender con rapidez el riesgo con que se enfrenta. Las decisiones de negocios en el mundo laboral suele involucrar muchas incertidumbres y detectar el riesgo es difícil. Como seguimiento de nuestro ejemplo, hay incertidumbre acerca del tamaño del mercado para el producto, de la celeridad con que crecerá el mercado, de la participación de mercado que la empresa obtendrá, del precio que podrá cobrarse y del costo de fabricación del producto. La persona encargada de tomar la decisión encontrará muchas dificultades para entender el riesgo asociado con la decisión de introducir el producto. El Cálculo de Probabilidades que se estudia en Bachillerato y, más tarde, en una carrera universitaria es un paso fundamental para entender el riesgo en una decisión compleja.

Por consiguiente, puede ser conveniente realizar una actividad o grupos de actividades relativas a un bloque temático relacionadas estrechamente con asignaturas de carreras universitarias y con aplicación inmediata en el mundo laboral y empresarial. La realización de las actividades puede realizarse individual o en grupo; en exposición oral, en un debate o por escrito. Para que el proceso sea enriquecedor es necesario que el alumno se sienta motivado y que llegue a creerse el papel de investigador, realmente interesado en su labor. Es fácil conseguir esta motivación, pues pueden proponerse multitud de actividades similares a las presentadas en el epígrafe 2 con carácter lúdico y práctico en el área de las Matemáticas; que pueden estar relacionadas con el entorno de los alumnos y sus familias, con su centro, su localidad, con el resto de materias que está cursando, etc.

Con respecto a la realización de estas actividades debe intentarse que no se conviertan simplemente en una mera manipulación y exposición. Esto puede conseguirse si se logra que el alumno reflexione sobre su contenido, así como en los procedimientos utilizados y destrezas a ejecutar. El alumno debe deducir que ha adquirido unos conceptos matemáticos que son aplicables no sólo a la actividad desarrollada sino a otras muchas situaciones de la misma o de distinta área de investigación. Por el camino clásico, muy posiblemente, este fin no se llegue a lograr.

Referencias

[1] AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. y HANESIAN, H. (1983). *Psicología Educativa: Un Punto de Vista Cognoscitivo.* (2ª Edición), Trillas, México.

[2] ESTAIRE, J. de Francisco. (2001). *Estudio de funciones con derive.* Suma, 36, 73-76.

[3] GARCÍA GARCÍA, I. y Arriero Villacorta, C. (2001). *Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas.* Suma, 34, 73-80.

[4] PARZYSZ, B. (1990). *Un outil sous-estimé:lÁrbre probabiliste.* APMEP, 372, 47-54.

[5] PRIETO MARTÍNEZ, J. J. (2002). *La programación Lineal con la Hoja de Cálculo Excel: Una apuesta por las nuevas tecnologías.* Al Sur, 2, 54-59.

[6] RUBIALES CAMINO, E. (2001). *Reflexiones sobre la motivación en la clase de Matemáticas.* Soc. "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Bol. 59, 35-47.

Sobre una transformación geométrica

Ricardo Moreno Castillo
I.E.S. Gregorio Marañón
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

Here some geometrical transformations are presented, in whose plane inversion is a particular case.

INTRODUCCIÓN

Es cosa sabida que una inversión en el plano de potencia k induce una inversión sobre toda recta que pase por su centro, cuyos puntos invariantes son los de corte de la recta con el círculo de radio $\sqrt{k}$ y centro en el de inversión.

Pensemos en una curva *C*, simétrica respecto del origen de coordenadas, y a la que toda recta que pase por él (salvo quizás un número finito) corta en dos puntos distintos del origen (obviamente equidistantes de él). Si la circunferencia de los puntos dobles de la inversión la sustituimos por *C*, tenemos una transformación del plano que tiene en común con la inversión la propiedad de inducir sobre las rectas que pasan por su centro una inversión que tiene como puntos dobles aquellos en los que la recta corta a la curva *C*.

1. Ecuaciones de la transformación

Sea $r = \Phi(\theta)$ la ecuación polar de *C*. Sobre cada recta de ecuación $y = \lambda x$ consideramos la inversión centrada en el origen y potencia $k(\theta) = \Phi^2(\theta)$, siendo $\theta = arc\,tg\,\lambda$. Los puntos invariantes son los de encuentro con la curva. Si unimos cada punto del plano con el origen y le aplicamos la inversión correspondiente a la recta así obtenida, tenemos una transformación del plano en sí mismo cuyas ecuaciones en coordenadas cartesianas son:

$$x^* = \frac{x}{x^2+y^2} k\left(arc\,tg \frac{y}{x} \right) \quad , \quad y^* = \frac{y}{x^2+y^2} k\left(arc\,tg \frac{y}{x} \right)$$

Y en coordenadas polares:

$$r^* = \frac{k(\theta)}{r} \quad , \quad \theta^* = \theta$$

2. Conservación de ángulos

Vamos a ver que si la curva base C *no* es una circunferencia, la correspondencia que acabamos de fabricar *no* es conforme. Todavía más: si el círculo unidad se convierte en una curva ortogonal a las rectas que pasan por el origen, C es necesariamente una circunferencia. La ecuación polar de la transformada del círculo unidad es $r = k(\theta)$, y un vector tangente es

$$(k' \cos\theta - k sen\theta, k' sen\theta + k \cos\theta)$$

Su producto escalar por $(\cos\theta, sen\theta)$ es (x, y). Si éste es cero, k es constante y la curva original es una circunferencia.

Si C es una curva algebraica, la transformación es birracional. En este caso, lo que acabamos de ver demuestra que las transformaciones que podemos obtener de esta manera están entre las birracionales en general (tan utilizadas en geometría algebraica) y las que conservan los ángulos (como la inversión).

3. Algunos ejemplos

En la tabla que viene a continuación están las ecuaciones de la transformación y las transformadas de figuras sencillas para algunas curvas base. Vamos a calcularlas explícitamente para el último ejemplo, en el que ésta es la rosa de cuatro pétalos, de ecuación $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$. La potencia de la inversión inducida sobre la recta $y = \lambda x$ es el cuadrado de la distancia al origen de los puntos en que corta a la curva: $k(arc\,tg\,\lambda) = x^2 + y^2 = 4\lambda^2 / (1+\lambda^2)^2$. Ahora bien, si (x, y) es un punto del plano, la pendiente de la recta que lo une con el origen es y/x. Entonces tenemos que:

$$x^* = \frac{x}{x^2 + y^2}\,\frac{4(y/x)^2}{\left[1 + (y/x)^2\right]^2} = \frac{4x^3y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$$

$$y^* = \frac{y}{x^2 + y^2}\,\frac{4(y/x)^2}{\left[1 + (y/x)^2\right]^2} = \frac{4x^2y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$$

Curva de partida	Ecuaciones de la transformación	Transformada de la circunferencia unidad y de las rectas $x = 1$ e $x^8 - y^4x^2 - y^6 =($
Elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 1$	$x^* = \frac{x}{x^2 + 2y^2}$ $y^* = \frac{y}{x^2 + 2y^2}$	$\left(x^2 + 2y^2\right)^2 - x^2 - y^2 = 0$ $x^2 + 2y^2 - x = 0$ $x^2 + 2y^2 - y = 0$
Par de rectas de ecuaciones $y = 1$ e $y = -1$	$x^* = \frac{x}{y^2}$ $y^* = \frac{1}{y}$	$y^4 - x^2 - y^2 = 0$ $x = y^2$ $y = 1$
Par de parábolas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = -x^2$	$x^* = \frac{y^2}{x^3}$ $y^* = \frac{y^3}{x^4}$	$x^8 - y^4x^2 - y^6 = 0$ $x^3 - y^2 = 0$ $x^4 - y^3 = 0$
Rosa de cuatro pétalos de ecuación $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2y^2$	$x^* = \frac{4x^3y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$ $x^* = \frac{4x^2y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$	$\left(x^2 + y^2\right)^5 - 16x^4y^4 = 0$ $\left(x^2 + y^2\right)^3 - 4x^3y^2 = 0$ $\left(x^2 + y^2\right)^3 - 4x^2y^3 = 0$

Conclusiones

Las variantes de esta transformación según sea la curva sobre la cual la construimos son tan grandes, que no parece fácil deducir propiedades generales. Es más, la curva no ha de ser necesariamente diferenciable, vale también un polígono regular de un número par de lados. Con todo, se puede investigar si tienen algo en común aquellas cuyas curvas base comparten alguna característica (como la de ser acotada o carecer de puntos singulares) y también se pueden estudiar casos particulares que puedan ser especialmente interesantes. Aquí nos hemos limitado a ofrecerla para quien quiera entretenerse con ella.

Referencias

[1] PUIG ADAM, P (1947), *Geometría Métrica*, Madrid.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex (en este último caso deberá usarse estilo "article" y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos (normal). Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección en minúsculas negritas y numerados, sin punto después del número ni punto final, excepto el de introducción que irá sin numerar. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de las copias en papel

Se enviarán vía postal por duplicado a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes: 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62 y 63.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

– la dirección a donde se han de enviar
– el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.