BOLETIN

5

OME
XXI

SOCIEDAD
CASTELLANA
PUIG ADAM
DE PROFESORES
DE MATEMATICAS

B O L E T I N de la Sociedad Castellana de Profesores de Matemáticas "PUIG ADAM"

nº5 (1984-85)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

  Ronda de Atocha 2 (INBAD)
  MADRID

- La correspondencia deberá dirigirse al

  Apartado nº 9479
  28080 MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

  PASCUAL IBARRA, José Ramón
  FERNANDEZ BIARGE, Julio
  OCHOA MELIDA, Juan

- En la portada presentamos un retrato de nuestro maestro D. Pedro Puig Adam, realizada por el gran artista MAMPASO y publicado en 1960 por la revista EDUCADORES, que nos ha autorizado amablemente su reproducción.

- Ver en las páginas 5 y 6 las convocatorias de nuestra próxima Asamblea General y el Tercer Concurso de Problemas.

INDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Julio Fernández Biarge

Vicepresidentes:

Juan Ochoa Mélida (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Joaquín Gómez Rey (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: José Francisco Carballido Quesada

Vicesecretario: María Luisa Pacios

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Angel Martínez Losada

OFRENDA

El día 12 de enero del presente año se han cumplido veinticinco del fallecimiento de nuestro maestro don Pedro Puig Adam. Nuestra Sociedad, que, como símbolo y voluntad de proseguir la obra renovadora de la docencia de la matemática que él realizara, ostenta su nombre, ha querido conmemorar esta efemérides dedicándole el presente número del Boletín.

Por este motivo figura en la portada la efigie de don Pedro, espléndido dibujo debido a la pluma del insigne artista Manuel Mampaso, que en el retrato, además de su parecido físico, ha sabido captar magistralmente la inteligencia, la nobleza y la dignidad del retratado. Fue publicado en el número 8/1960 de la Revista EDUCADORES, cuyo director amablemente nos ha autorizado su reproducción. Reciba por ello nuestra gratitud.

La mejor manera de honrar la memoria de un maestro es, sin duda, la lectura de su obra y la práctica de su doctrina. Por eso, nos ha parecido apropiado comenzar el Boletín con un trabajo del propio don Pedro. La tarea de elegir uno entre tantos artículos, conferencias y lecciones de su extensa obra no nos ha sido fácil. Todos presentan, junto a la belleza de su prosa, reflejo de la exquisita sensibilidad del autor, un gran interés, y, como toda obra clásica, perenne actualidad. Nos hemos decidido, finalmente, por el discurso inaugural de la XI Reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática, por entender que en él se contienen algunas de las ideas centrales que inspiraron sus originales contribuciones a la renovación de la didáctica heurística de las matemáticas. En aquel Encuentro -como se denominan habitualmente los congresos de la Comisión-, celebrado en Madrid en abril de 1957, don Pedro preparó en el Instituto de San Isidro la Primera Exposición Internacional de Material Didáctico Matemático realizada en Europa.

A continuación se insertan dos de los discursos leídos en la solemne y entrañable sesión necrológica que, con asistencia de familiares y buen número de antiguos alumnos y compañeros del profesorado, celebró el día 16 de enero la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de la que don Pedro era miembro numerario desde 1952. En ella intervinieron don José Ramón Pascual Ibarra, sobre "Rasgos humanos de don Pedro Puig Adam"; don Mariano Yela Granizo, con el tema "Pedro Puig Adam, maestro"; don Miguel Jerez Juan, que habló sobre "El ingeniero don Pedro Puig Adam"; y, por último, don Sixto Rios García, acerca de la "Obra Matemática de don Pedro". Estimando el gran interés que para nuestros socios tiene el conocer esos discursos, hemos solicitado de la Real Academia el permiso para reproducir los dos primeros, cuyos temas están más cercanos a nuestra labor docente de cada día, y esa Institución ha accedido amablemente a ello. Los autores nos han facilitado los textos, por lo que queremos manifestarles, lo mismo que al Secretario de la Academia, nuestro sentido agradecimiento.

Si bien nuestro propósito inicial era que este número resultase casi monográfico, la urgencia de aportar datos concretos -según manifestaciones recibidas de bastantes socios- que permitan situar la reforma en marcha en nuestro Bachillerato dentro del panorama educativo internacional, nos ha impulsado a continuar la información iniciada en el número anterior con el artículo de nuestra compañera Lucas Padín, presentando en éste referencias a las Enseñanzas Medias en Italia, R.F. Alemana y Reino Unido. El trabajo del Profesor-Inspector Alan G. Kaye es una traducción resumida de las dos conferencias pronunciadas por el autor en los "Coloquios Internacionales Universidad-Enseñanza Media", celebrados en Madrid en 1983, que fueron organizados por la Asociación para la Renovación de la Enseñanza (ARDE) y la Universidad Complutense, con la colaboración del Consejo Británico.

VIDA DE LA SOCIEDAD

CONVOCATORIA DE LA ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE 1985

En la reunión de la Junta Directiva celebrada el día 23 de Marzo de 1985 se acordó convocar la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 1985 para el sábado 25 de Mayo de este año, a las 11 h 30 m en primera convocatoria, o a las 12 h en segunda, en el Instituto "Isabel la Católica" (Alfonso XII, 3 y 5) Madrid.

Se seguirá el siguiente Orden del Día:

1. Lectura y aprobación, en su caso, del Acta de la sesión anterior.
2. Informe del Sr. Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Estudio de la posibilidad y conveniencia de cambiar el ámbito territorial de la Sociedad.
5. Elecciones para la renovación de la mitad de la Junta Directiva.
6. Ruegos y preguntas.

Los miembros de la Junta cuya renovación establecen los Estatutos para este año son los siguientes: Vicepresidentes de Madrid, Guadalajara y Ciudad Real, Secretario y Bibliotecario.

Esperamos vuestra asistencia y participación.

CONVOCATORIA DEL TERCER CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS PARA ALUMNOS DE PRIMERO Y SEGUNDO DE BACHILLERATO

La Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas, organiza, en el ámbito de actuación de la misma (provincias de Madrid, Toledo, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara y Segovia), el Tercer Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas, entre alumnos de los cursos primero y segundo de B.U.P.

Los Centros de alguna de las provincias mencionadas que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de dos por primer curso y dos por segundo), deberán realizar su preinscripción antes del día 9 de Mayo próximo, dirigiéndose por carta a esta Sociedad, apartado de Correos 9479, 28080 Madrid. En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados.

La sociedad comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas, y estos Centros extenderán a los alumnos seleccionados las credenciales en las que se haga constar que están matriculados en el primero o segundo curso, en el 1984-85 y que han obtenido la calificación de Sobresaliente en la asignatura de Matemáticas.

Con objeto de facilitar los desplazamientos de los alumnos concursantes, las pruebas y la entrega solemne de premios y diplomas se hará en el mismo día, en fecha que se avisará, dentro de la segunda quincena de junio.

NUESTRO PROXIMO NUMERO DEL BOLETIN

Pensamos dedicar gran parte del número 6 de nuestro Boletín a temas relacionados con la Informática y su papel en la Enseñanza. Solicitamos la colaboración de nuestros socios en forma de artículos que nos hablen de sus ideas y experiencias en relación con estos temas.

También continuaremos facilitando información sobre los estudios de Matemáticas en los Bachilleratos de otros países.

NOTICIAS

El día 12 de marzo, ya prácticamente terminado el contenido de este Boletín, nos llega la triste noticia del fallecimiento de un ilustre catedrático de matemáticas de instituto: don Joaquín García Rúa. Profesor ejemplar, desempeñó su cátedra en los institutos de Santander, Guadalajara y Madrid, "Ramiro de Maeztu". Desde 1958 hasta su jubilación ejerció como Inspector de Enseñanza Media, mas su vocación docente no le impidió continuar ejerciendo la enseñanza activa en el entonces Centro de Orientación Didáctica, cuya sección de matemáticas dirigió conjuntamente con el también inspector don Alfredo Rodríguez Labajo. En este centro organizaron reuniones de profesores e impartieron numerosos cursos destinados al perfeccionamiento del profesorado. Aun después de su jubilación, hasta casi el final de su vida terrena, don Joaquín no dejaba de asistir todos los días al recientemente desaparecido Instituto JORGE JUAN del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, del que era Jefe del Servicio de Publicaciones, y a la Real Sociedad Matemática Española, de la que fue socio fundador. En ambas instituciones realizó una intensa labor: organización de las Jornadas Anuales Matemáticas Hispano-Lusas, publicación de los Cuadernos Didácticos y numerosas aportaciones de carácter didáctico en Gaceta Matemática.

Don Joaquín, a sus noventa y tres años, conservaba en su cuerpo estilizado y sutil una envidiable lozanía de espíritu, rodeado de compañeros y discípulos que le respetaban y admiraban profundamente. Descanse en Paz.

INFORMES

Los días 18 y 19 de Enero tuvieron lugar, en toda España, las pruebas de la XXI Olimpiada Matemática Española, en su fase de distritos. En el Distrito de Madrid se presentaron a esas pruebas 147 alumnos y resultaron ganadores:

1ª - Miguel Berrozpe Garcia
2ª - Francisco J. Gallego Rodrigo
3ª - José María Méndez Martín

Los días 22 y 23 de Febrero se celebraron en Madrid las pruebas correspondientes a la fase nacional de esta XXI Olimpiada Matemática. Concurrieron a ellas 45 alumnos, ganadores de la fase previa en sus correspondientes distritos. Los seis primeros clasificados fueron:

1ª - Ricardo Pérez Marcos
2ª - Ignacio Garijo Amilburo
3ª - Juan Aguarón Jóven
4ª - Ana José Reguera López
5ª - José Luis Ansorena Barasoain
6ª - Antonio Gómez Amigo

Si, como es de desear, España participa en la O.M.I. - 85, los tres primeros de los seis alumnos anteriormente citados, serán los que probablemente representarán a España en las pruebas que tendrán lugar en Helsinki del 1 al 10 de Julio.

Es importante señalar que, por acuerdo de la Real Sociedad Matemática Española, desde este mismo año, la fase de Distrito de la Olimpiada Española tendrá lugar en la segunda quincena de Junio y podrán acceder a ella exclusivamente los alumnos que en el curso 84 - 85 hayan superado el tercer año del B.U.P.

Enunciados de los problemas propuestos en la fase de Distrito de la XXI Olimpiada Matemática Española los días 18 y 19 de enero de 1985

1. Las sucesiones de números reales $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ cumplen la desigualdad $(a_n-b_n)\ (b_n-c_n) > 0$ para todo natural n. Sabiendo que:

$$\lim a_n = \lim c_n = f$$

estudiar la convergencia de $\{b_n\}$.

---

2. Sea n un número natural cualquiera. Demostrar que para todo k natural y menor o igual que n, la expresión

$$(n+1)\ (n+2)\ \dots\ (2n-1)\ (2n)$$

es divisible por 2^k.

---

3. Estudiar la continuidad y dibujar la gráfica de la función,

$$y = x^2 - 3x + 1 + |-x^2+x+2|$$

---

4. En una superficie esférica S de centro 0 está inscrito un cono C de vértice V. Los planos por V y 0 cortan a C en triángulos equiláteros. Hallar el radio r de S sabiendo que el plano paralelo a la base del cono C distante d del vértice V corta a S y a C en circunferencias que limitan una corona circular de área k^2.

---

5. Sean a, b, c tres números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \geq 8$$

---

6. Sobre los lados AB y AC de un triángulo se toman respectivamente los puntos L y M de manera que

$$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

Las rectas BM y CL se cortan en P y la AP corta a la BC en N. Determinar el número x que cumple

$$\overrightarrow{BN} = x\,\overrightarrow{BC}$$

---

7. Se consideran las ecuaciones de segundo grado con coeficientes complejos:

$$x^2 - sx + p = 0\ , \qquad x^2 - s'x + p' = 0$$

Hallar las condiciones que han de cumplir los coeficientes s, p, s', p' para que las raíces de cada ecuación sean vértices opuestos de un cuadrado.

---

8. Resolver la ecuación,

$$4x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 40x + 25 = 0$$

Enunciados de los problemas propuestos en la Fase Nacional de la XXI Olimpiada Matemática Española los días 22 y 23 de Febrero de 1985

1. Sea P el conjunto de los puntos del plano y $f: P \to P$ una aplicación que verifica las tres condiciones siguientes:

1ª) f es una biyección.
2ª) Para cada recta r del plano, f(r) es una recta.
3ª) Para cada recta r, la recta f(r) es paralela a (o coincidente con) r.

¿Qué posibles transformaciones puede ser f?

2. Sea Z el conjunto de los enteros y Z × Z el conjunto de los pares ordenados de enteros. La suma de estos pares se define por

$$(a,b) + (a',b') = (a+a',\ b+b')$$

siendo (-a,-b) el opuesto de (a,b).

Estudiar si existe un subconjunto E de Z × Z que verifique las siguientes condiciones:

1ª) La suma de dos pares de E es otro par de E.
2ª) El par (0,0) pertenece a E.
3ª) Si $(a,b) \neq (0,0)$ entonces, o bien (a,b) pertenece a E, o bien (-a,-b) pertenece a E (no ambas).

---

3. Resolver la ecuación: $\tan^2 2x + 2\tan 2x \cdot \tan 3x - 1 = 0$

---

4. Consideremos tres números naturales a,b,c tales que la razón $\frac{a+b+c}{abc}$ sea la inversa de un número k entero y positivo. Se pide:

1ª) Demostrar que $p = a^3+b^3+c^3$ no es primo.
2ª) Demostrar que existen ternas de naturales a,b,c que verifiquen las condiciones para cualquier $k \in N$.

---

5. Ecuación de la circunferencia que pasa por los afijos de las soluciones de la ecuación

$$z^3 + (-1+i)\,z^2 + (1-i)\,z + i = 0$$

---

6. Se consideran las semirrectas no alineadas OX, OY. Por $A \in OX$ se trazan pares de rectas r_1, r_2, antiparalelas respecto del ángulo XOY; r_1 corta a OY en M y r_2 corta a OY en N. Se hallan las bisectrices de los ángulos AMY, ANY que se cortan en P. Hallar el lugar de los puntos P.

---

7. Dada la ecuación $x^5 - px - 1 = 0$, estudiar el valor de p de forma que existan dos soluciones x_1, x_2 de la ecuación, tales que verifiquen la ecuación $x^2 - ax - b = 0$, con a,b enteros

---

8. Diremos que una matriz cuadrada es de "suma constante" sí y solo sí la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de cada una de las dos diagonales son iguales. Analogamente una matriz cuadrada es de "producto constante" sí y solo sí son iguales los productos de los elementos de cada fila, de cada columna y de cada una de las dos diagonales.

Se pide determinar las matrices cuadradas de orden 3 sobre R que son a la vez de suma y de producto constante

---

EL PAPEL DE LO CONCRETO EN LA MATEMATICA

por Pedro Puig Adam

Conferencia inaugural de la XI Reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática celebrada en el Instituto San Isidro de Madrid en Abril de 1957

La Comisión me ha pedido que sea yo esta vez, como representante español, quien inaugure sus tareas pronunciando unas palabras sobre «El papel de lo concreto en la Matemática». Pero, ante todo, permítaseme dar la bienvenida a los numerosos colegas extranjeros que nos honran con su presencia, agradeciéndoles el considerable esfuerzo que ha supuesto para muchos de ellos la venida, y, sobre todo, la traída de material; y también a los profesores españoles que a nuestra llamada han acudido para acompañarles en las tareas de esta reunión.

Quiero expresar gratitud, en nombre de la Comisión, a las Embajadas de los países participantes, a las autoridades académicas españolas que nos han apoyado y nos cobijan, a aquellas otras autoridades que con tanta diligencia han hecho montar las instalaciones; gracias, pues, repito, en nombre de la Comisión a la que me honro en pertenecer. Pero también quiero añadir mi propia gratitud a todos, los de fuera y los de dentro de casa. Todos sabéis el enorme empeño e ilusión que he puesto en que esta Reunión-Exposición se celebrara en mi patria. Lo saben los miembros todos de la Comisión y lo sabe también el profesorado español, que me ha apoyado en la empresa.

España se halla actualmente en plena evolución social e industrial, no puede quedarse rezagada, le urge colocarse al nivel de los pueblos que tienen una ciencia y una técnica propias, y aportar en lo posible su esfuerzo al progreso universal; ello exige, ante todo, una adecuada formación matemática de nuestra juventud. No he de insistir ahora en el papel fundamental que la matemática desempeña en el progreso técnico de la humanidad. La técnica es, en definitiva, el dominio de las fuerzas naturales, y no puede lograrse tal dominio sin un conocimiento profundo de las fuentes de energía y de las leyes con que se gobiernan. Energética y Cibernética, en sus aspectos nuclear y electrónico, respectivamente, son los grandes campos de actividad técnica presente y futura, y ya sabemos la magnitud del instrumental matemático que tales técnicas necesitan. Para la obra técnica matemática del futuro se precisarán cuadros cada vez más amplios de investigadores, agrupados en equipos de estructura piramidal, es decir, edificados en estratos que vayan desde una amplia base humana de eficiencia realizadora, hasta singulares cúspides creadoras de elevada perspectiva. A nosotros los educadores nos corresponde asegurar todo lo posible la elevación de estas estructuras, empezando por consolidar y amplificar sus bases en cantidad y calidad, hacer la cultura elemental y media asequible al mayor número de inteligencias, no sólo en el sentido político de equiparación cultural de clases sociales (problema que tanto preocupa a nuestro Gobierno), sino también en un sentido amplificador de accesibilidad pedagógica.

La Matemática ha constituído, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser nunca una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces. La coyuntura matemática actual está clamando por una profunda revisión de modos y métodos de enseñar, que permitan ensanchar los campos de eficiencia matemática de nuestra juventud; para eso estamos y para eso se creó nuestra Comisión, que agrupa a hombres de la mejor voluntad, procedentes de distintos campos y nacionalidades: matemáticos puros, ingenieros, psicólogos, epistemólogos, pedagogos y profesores de todos los niveles de enseñanza. Saludo alborozado, como español, su presencia entre nosotros, que contribuirá poderosamente a que nuestro profesorado, al ser tenido en cuenta, se sienta orgulloso de colaborar en la gran tarea de mejorar la enseñanza matemática en todo el mundo.

* * *

Y ahora entremos en el tema, motivo de la breve conferencia inicial. Aun no siendo mucho lo que voy a decir, pienso que me pierdo una bella ocasión de callarme y de aprender, ya que empiezo por sentirme disconforme con el título que han asignado a mi charla, que, en lugar de llamarla «El papel de lo concreto en la Matemática», mejor la rotularía yo «El papel de la Matemática en lo concreto». Trataré de explicarme, si puedo, porque la primera dificultad para hablar de cualquier cosa es saber de qué se está hablando, y no es fácil decir algo de lo concreto en Matemáticas cuando ha de empezarse por confesar, como lo hago, mi incapacidad de precisar qué es lo concreto y qué es la Matemática.

Para acotar un poco los términos de la cuestión diré que quisiera referirme a la Matemática como actividad mental y no como cúmulo de conocimientos adquiridos mediante ella; y que, ante la imposibilidad de definir «lo concreto», me referiré a este algo «inconcreto» que, en lenguaje vulgar, se contrapone, a veces indebidamente, a lo abstracto. Prescindiendo del juego paradójico de adjetivos, quiero precisar, pues, que abandono todo intento de definición de lo concreto y de lo abstracto, y que quiero referirme tan sólo a la disyuntiva, o a la simple comparación que los relativiza. Pero, aun así, surgen difíciles interrogantes. ¿Qué debemos entender por actividad matemática? ¿En qué consiste la distinción comparativa, que permite situar, en cada caso, a un lado lo concreto y al otro lo abstracto? Las respuestas que demos a estas preguntas acaso marcarán un sello específico a nuestra enseñanza.

Si consideramos como actividad matemática estrictamente la operatoria relacional entre conceptos ya elaborados, hemos de situarnos inicialmente en un mundo de entes idealizados, bien sea considerándolos como innatos, como indirectamente definidos por sus relaciones, o como resultantes de procesos de idealización que caen fuera de la actividad matemática. Este es el punto de vista del matemático puro, que no es ciertamente el mío como educador. Como tal, yo no puedo dejar de pensar que la actividad matemática de la gran mayoría de mis futuros alumnos se desenvolverá partiendo de situaciones bastante menos depuradas que al paso les ofrezca la realidad concreta. Y aquí hacemos uso, por primera vez, del adjetivo concreto, asociándolo al ambiente real en torno al hombre futuro que será nuestro escolar; de poco le servirá entonces toda la dinámica operacional abstracta o semiabstracta, si no encuentra para su aplicación los entes ya depurados con los que se le adiestró.

Lo he repetido hasta la saciedad a lo largo de mi vida académica profesional: una formación matemática completa de nuestra juventud, es decir, una formación que habilite a dicha juventud para prestar una decisiva utilidad en el mundo técnico-social futuro, no puede limitarse al cultivo de la fase central operatoria, al cultivo de las facultades lógicas, como suele decirse, entendiendo así minimizado el papel de la Lógica en la Matemática. Este punto de vista, demasiado exclusivista, que cada generación de profesores hereda de la precedente, crea una tendencia a la abstracción prematura, al descuido y al olvido, que son un desprecio implícito, del mundo real; y la enseñanza, que de ello resulta, deviene, en cierto modo, estéril, por desarrollarse en una atmósfera rarificada a fuerza de depuración. El mecanismo lógico abstracto es sólo una fase intermedia en la resolución de los problemas cuantitativos de la filosofía natural, fase esencial ciertamente, pero que tiene que ir precedida de una fase de planteamiento o de abstracción, en la que la mente reduzca a esquemas matemáticos los fenómenos naturales en estudio, y seguida de otra fase de concreción, es decir, de interpretación, de proyección de los resultados obtenidos al campo de la realidad. Creo que el olvido del cultivo simultáneo de las dos fases anterior y posterior aludidas, motivó en gran parte el fracaso de la enseñanza matemática tradicional.

Abstraer del mundo físico el *substratum* matemático de los fenómenos no es cuestión que se resuelva jugando a los silogismos, sino adquiriendo la intuición de lo esencial; el mecanismo lógico viene después, lo que no disminuye su importancia. Es, asimismo, al proyectar de nuevo en el campo físico de origen los resultados de dicha elaboración abstracta, cómo se ha podido juzgar de la verosimilitud de las esquematizaciones y de la validez de las teorías físico-matemáticas sobre ellas edificadas. Por ello es igualmente importante educar al alumno, desde un principio, a practicar esta actividad que hemos llamado concreción, si queremos despertar en él facultades verificadoras y evitar la insensibilidad, desgraciadamente tan frecuente entre nuestros escolares, ante los resultados físicamente absurdos. La ausencia del cultivo de estas fases supone un con-

cepto restringido de actividad matemática que hay que evitar, pues no se remedian *a posteriori* sus estragos con la adición circunstancial de los llamados problemas y ejercicios de aplicación. Se hace necesario prevenir el mal desde el origen mismo de la enseñanza de la Matemática, atacando el problema genético de la formación de las abstracciones, y añadiendo el sentido posterior de readaptación de las abstracciones formadas, a la realidad concreta.

Es axioma de la moderna educación que el educador debe analizar sus propios procesos de aprendizaje, para tenerlos en cuenta al guiar el de sus alumnos. Pues bien: yo me di cuenta por primera vez del vacío creado por la enseñanza matemática tradicional, al comprobar las dificultades de planteamiento que encontraba en el estudio de los fenómenos de la técnica del ingeniero. Analizando tales dificultades, comprendí que procedían del hábito de razonar sobre entes demasiado perfectos y que difícilmente podían encajar en el complejo cuadro que la técnica me ofrecía; para una tal adaptación precisaba atrevidas simplificaciones y una cierta intuición apriorística de su posibilidad dentro del margen de aproximaciones que tal técnica permitía. Comprobé que todo mi bagaje de cálculo y de ecuaciones diferenciales me servía de muy poco para la labor de planteamiento, cuando no me estorbaban, induciéndome a la consideración de sutilezas innecesarias. Toda la educación matemática de que me ufanaba, no me había enseñado a efectuar procesos eficientes de abstracción, de selección de causas predominantes en las que juega más la intuición que la lógica. Y no se escuden los profesores puristas en que ésta es tarea de educación tecnológica posterior. Existe una cuestión de hábito que es preciso educar desde el principio, sin que con ello pretendamos los profesores de Matemáticas invadir el campo específico de tales tecnologías. Si no se educa este hábito desde un principio, difícilmente el alumno podrá construir por sí mismo esquemas lógicos con buen sentido de aplicación, y aun los que se le presenten, aparecerán ante su sentido crítico exigente de pureza, como artificios que ha de admitir sin convicción.

La técnica necesita fundamentalmente el cultivo de estas facultades esquematizadoras; y no ejercitarlas desde un principio entre los alumnos de nuestras escuelas superiores, es incapacitar, a quienes en ellas se forman, para toda labor posterior de auténtica creación. Y al ver esto claro en mi aprendizaje como técnico, aprendizaje que simultaneaba con mis primeros años de ejercicio como profesor de Matemáticas en este Instituto, comprendí que este fallo era general en toda la educación matemática elemental, y tal vez uno de los más importantes factores contribuyentes a la general aversión de la juventud hacia el estudio de la Matemática: su desconexión con la realidad (en este caso, naturalmente, la realidad infantil); su apartamiento del mundo y de sus intereses concretos, intereses que no coinciden con los primarios vitales del adulto, como algunas escuelas han preconizado; su desconocimiento del mundo, de sus percepciones sensibles y de sus acciones, con las que juega y aprende a un tiempo inconscientemente.

Lo concreto empieza siendo para el niño lo que percibe; sobre estas percepciones primeras actúa elaborando analogías de las que surgen conceptos más generales, más abstractos, llegando a veces a procesos de abstracción de rapidez insospechada. La percepción y la acción parecen constituir el binomio sobre el que se desarrolla el aprendizaje matemático; con su doble juego el niño y también el adulto —niño, al fin, en tanto aprende— elabora conceptos y relaciones válidas para clases de entes cada vez más generales. Y si en un principio la base concreta parte de las percepciones sobre el mundo físico, los estratos siguientes de elaboración generalizadora parten ya de las primeras idealizaciones, que, si representaron abstracciones resultantes de los primeros procesos, son luego, a su vez, base concreta sobre la que se apoyan los procesos ulteriores.

De aquí se infiere que lo concreto y lo abstracto no son términos absolutos, sino relativos, en función del salto de cada estrato al siguiente; de aquí también que podamos hablar de percepción en un sentido no sólo sensorial, sino también intelectivo. La percepción intelectiva sería así como el alumbramiento de las tomas de conciencia de los sucesivos estratos de abstracción, y lo virtual, que es muchas veces la esencia del pensamiento matemático, pasa a ser, a los efectos de concreción consciente, tan real para el matemático puro como pueda serlo para el físico el mundo experimental.

En los procesos matemáticos de abstracción ha desempeñado un papel decisivo la simbolización. Es la condensación simbólica y la formalización del razonamiento matemático lo que ha hecho posible la rápida y formidable progresión de abstracciones y generalizaciones crecientes, que constituyen la Matemática desde Vieta hasta nuestros días. Expresados los conceptos mediante símbolos y traducidas las relaciones que los ligan mediante leyes formales entre los mismos, puede descansar la mente matemática de los contenidos y operar sobre las simbolizaciones. De su combinación surgen entonces conceptos nuevos, que se expresan mediante nuevos símbolos unidos por nuevas leyes, y así sucesiva e indefinidamente. La forma en Matemáticas ha ido, de este modo, adquiriendo tal preponderancia que, al fin, la ley formal operante ha terminado teniendo más fuerza que los propios conceptos operados. Empezó anticipándose a ellos, en el Renacimiento, con la resolución ciega de ecuaciones cúbicas mediante radicales imaginarios, cuando éstos carecían de todo sentido matemático, y ha terminado dejando reducidos los entes matemáticos a meros ropajes concretos con los que pueden revestirse las estructuras. Pero cada estructura no deja de ser, a su vez, un nuevo concepto, base de ulteriores especulaciones dentro de un cuadro de superestructuras más amplias. El álgebra de Boole, que admite ropajes concretos tan diversos como las clases, las proposiciones, los conjuntos, los circuitos de interruptores y de conmutadores, las conexiones de válvulas de vacío en las máquinas electrónicas de cálculo, no pasa de ser, a su vez, un ejemplo muy singular en el cuadro más general de las estructuras algebraicas con doble ley de composición.

La Matemática, que empezó desnudando al mundo físico de sus atributos sensoriales para edificar sus primeros contenidos matemáticos conceptuales (número, espacio euclídeo, medida, etc.), ha terminado desnudándose a sí misma de estos contenidos, y quedándose en las simples estructuras pragmáticas que los relacionan. Pero este proceso de generalizaciones y de abstracciones no se sabe a ciencia cierta cuándo empezó, ni cuándo terminará. Sólo sabemos que el mundo físico y social que paralelamente evoluciona, estimula de tanto en tanto estos procesos, sugiriendo conceptos abstractos nuevos que el matemático se afana luego en depurar y en combinar para la creación de nuevos conceptos derivados, y que también este mismo mundo físico se beneficia posteriormente de las creaciones abstractas puras, hallando para ellas nuevas e insospechadas adaptaciones; para no citar más que un ejemplo, recuérdese la misma álgebra de Boole, antes referida. Ningún profesor de Matemáticas debe olvidar esta monumental e interminable simbiosis, con la que mutuamente se alimentan la Matemática y la Filosofía natural. Con ello no sólo podrá vivificar los conceptos matemáticos puros, proyectándolos sobre la realidad física, sino que sabrá buscar en ésta los trampolines para nuevos saltos de elevación abstracta.

* * *

Iniciamos hoy las tareas de nuestra oncena Reunión, cuya finalidad es el estudio del material moderno de enseñanza matemática. Este material: modelos, films, filminas, visto por los matemáticos situados desde la elevada perspectiva abstracta, son meras concreciones ilustradoras, simple ropaje conveniente para facilitar momentáneamente comprensiones dificultosas; pero para el educador matemático, que no pierde la perspectiva de los procesos iniciales de abstracción, este material es mucho más: representa algo sustancial en su función educativa. Este material estructurado en forma de modelos, de los que hay abundantes muestras en la Exposición que presentamos, tiene no sólo la función de traducir ocasionalmente ideas matemáticas, sino también de originarlas, de sugerirlas. Hemos de estudiar la manera más acertada pedagógicamente de conseguirlo y también los materiales más dúctiles para su realización.

Pero, puesto que la percepción y la acción son fundamentales en toda educación matemática, hemos de conseguir también que los modelos sean capaces de provocar una y otra, de modo que traduzcan o sugieran, creando situaciones activas de aprendizaje. Para ello habrá que ir sustituyendo los clásicos modelos de vitrina de contemplación pasiva por modelos multivalentes de nueva concepción, manipulados por el propio alumnado y determinantes de una actividad sugeridora del conocimiento que se trate de adquirir. La vida misma, a veces los juguetes, nos los ofrecen insospechadamente; y tanto mejor si esta actividad se manifiesta en la creación de nuevos modelos ideados por el propio alumno, ya que así no sólo ejercitará la concreción de la idea matemática a ilustrar o traducir, sino que también, al presentar su modelo a sus compañeros, tendrá que pensar en que sea capaz de sugerir en ellos la abstracción de la que él partió. Véase por dónde la concepción y confección de modelos puede ser vehículo natural y eficiente para la práctica feliz de las dos actividades, de abstracción y de concreción que, como he dicho, deben formar parte de la integral actividad matemática educativa.

Y ahora aprovechemos intensamente la semana en que estaremos reunidos alrededor de este tema. Trabajemos con fe. Pensemos que de nuestra tarea puede resultar la felicidad de millones de niños para quienes todavía el estudio de la Matemática es un suplicio. Bien merece nuestro esfuerzo la esperanza de su liberación.

APUNTE BIOGRAFICO DE DON PEDRO PUIG ADAM

Por José R. Pascual Ibarra

Con toda sinceridad, y no sólo por obligado deber de cortesía, os doy las gracias, señores académicos, y muy especialmente a mi dilecto amigo el profesor don Sixto Ríos, por haberme hecho el honor de ocupar hoy esta docta tribuna, tan elevada para mis escasos merecimientos. No se me oculta vuestra benévola intención: don Pedro Puig Adam fue una figura egregia del cuerpo de Catedráticos de Instituto, y habéis creído oportuna la presencia en este acto conmemorativo de un representante de este profesorado, porque si brillantes fueron las aportaciones del insigne académico a la ciencia y a la técnica, no fue de menor importancia la tarea que llevó a cabo en la renovación de los métodos y los modos de enseñar la matemática elemental. Me atrevería a decir que a esta misión, la de hacer más deseable y deseado el estudio de la matemática, consagró Puig abnegadamente los mejores afanes de su quehacer académico, consciente como era de la necesidad de cultivar el semillero indispensable para la floración de futuros científicos y técnicos. Debe, pues, ser recordado como el mejor didacta de la matemática habido en nuestra Patria, y, al decir de Fletcher, uno de los más originales del mundo.

Pero de sus trabajos en el campo de la pedagogía de las matemáticas y de sus geniales intuiciones didácticas os hablará a continuación, con mayor autoridad de lo que pudiera hacerlo yo, el doctor Yela Granizo, porque, además de su saber en este dominio, tuvo la fortuna de ser alumno de don Pedro a lo largo de sus estudios de bachillerato, en el Instituto de San Isidro, y, según me consta, por haberlo escuchado de sus propios labios, uno de los más distinguidos y apreciados por el maestro.

Quiso la Providencia que, si no en esa etapa crucial de la enseñanza media en que se forja la personalidad del educando, fuera yo en la madurez discípulo también del eximio profesor: cuando, en 1955, fué encargado por el Ministerio de Educación de encauzar una posible y necesaria reforma -humanización prefería decir él- de la enseñanza de la matemática en el bachillerato. Fueron años febriles de trabajo entusiasta; cinco años inolvidables para mí. Menguada la ayuda que yo le prestara; inmensa mi gratitud por el cúmulo de experiencias vividas a su lado, por tantos consejos que con generosidad sin límites recibí de su magisterio. Y, sobre todo, por haber tenido la dicha de verme honrado con su amistad, relación personal que me permitió desvelar aspectos insospechados de su desbordante humanidad, y no porque hiciera ostentación de ella -su innata modestia, casi rayana en timidez, se lo impedía- sino porque cuando un hombre vive en autenticidad, su vida y su obra son inseparables, y, en el caso de Puig, insuperables. Su alma era transparente -alguien ha dicho como la de un niño- y en todas sus lecciones -se enseña lo que se es, no lo que se sabe- se traslucían, sin pretenderlo, sus excepcionales cualidades humanas.

Afortunadamente para mí, esta relación de amistad se ha prolongado desde su pérdida en las personas de su viuda y de sus hijos. Permítaseme expresarles aquí mi simpatía y emocionada gratitud. Como en nuestras conversaciones surgen siempre los recuerdos del esposo, del padre, del llorado maestro, he podido ampliar mis impresiones con otros hechos de aquella vida admirable. Me detendré, por la brevedad del tiempo, en la exposición de algunos aspectos seguramente menos conocidos de una biografía aún por escribir.

Hijo único de un matrimonio ejemplar, de honda raigambre catalana, nació don Pedro Puig Adam, en Barcelona, el día 12 de mayo de 1900. Sus padres: don Roberto Puig Dalmases y doña Concepción Adam Gaudó. Don Roberto descubrió bien pronto en los juegos infantiles del niño Pedro excepcionales cualidades de observación, habilidad manual y precoz inteligencia (desde pequeñín aprendió el lenguaje mímico de los sordomudos para poder comunicarse con su abuelo materno, Faustino, que lo era), y puso, por ello, especial cuidado en su educación escolar. Comenzó sus estudios primarios en la Escuela Pública de la Barceloneta, y, después de su padre, fué su primer maestro don José Grà, quien se percató enseguida de la categoría intelectual de su pequeño discípulo. De esta época (1907) data, en efecto, el primer diploma concedido a Puig, presagio de los honores que habría de merecer en el futuro. Simpático diploma que guardó siempre don Pedro con singular cariño, como si quisiera simbolizar en él la importancia que otorgaba en la formación de la persona a una esmerada educación escolar, y aún se exhibe en su casa enmarcado junto a los de Doctor, Ingeniero, Académico, Gran Cruz de Alfonso X el Sabio, Comendador de la Orden del Mérito Civil,...

Sin terminar la enseñanza primaria, antes de cumplir los ocho años, su buen padre, no muy partidario del tipo de enseñanza impartida entonces en los centros de su ciudad, convencido también de la importancia de empezar el estudio de los idiomas desde la infancia, no duda en sacrificarse enviando al pequeño a un colegio francés, L'Institution Franklin, de la ciudad de Lyon. Son deliciosamente tiernas las cartas, prodigio de caligrafía y redacción, que desde el colegio escribe a sus padres, primero en castellano y más tarde en francés, idioma que llega a dominar, hablado y escrito, con perfección. Pasados dos años, cursa el bachillerato en el Instituto de Segunda Enseñanza de Barcelona, pero durante otros dos años pasa los veranos en el colegio de Lyon con objeto de perfeccionar su francés e iniciar el aprendizaje del alemán. Sobreviene la primera guerra mundial. Imposibilitado de volver a Francia, era de ver al joven Puig bajar por las ramblas al puerto de Barcelona para practicar el alemán conversando con los marineros de algún barco germano, obligado por azares de la contienda a permanecer amarrado a los muelles sin poder hacerse a la mar.

Durante algún tiempo, su padre, que era Secretario de la Sociedad "Maquinista Terrestre y Marítima", le colocó como aprendiz en la factoría. Puig vistió el mono azul y calzó las espardenyas de obrero metalúrgico. En este trabajo llegó a diseñar y construir complicadas piezas mecánicas, más allá de lo que pudiera esperarse de un mero aprendiz.

Todos estos antecedentes, aptitudes e influencia familiar, parecen señalar inequívocamente el futuro profesional de Puig Adam: la ingeniería. Y, en efecto, ingresa en la Escuela de Ingenieros de Barcelona, en aquel tiempo ubicada en el mismo edificio que la Facultad de Ciencias, feliz circunstancia que le permite simultanear el estudio de ambas carreras, la de ingeniero y la de matemático. La influencia del catedrático de Geometría Proyectiva de la Facultad, don Antonio Torroja Miret (miembro destacado de la saga de los Torroja), que ve en su discípulo "una inteligencia clarísima, una laboriosidad constante y una simpática modestia", coloca a Puig en la encrucijada. Teme -mas sin fundamento- contrariar la voluntad y los deseos paternos, pero más ambicioso de su realización personal que de satisfacciones materiales, toma la decisión de abandonar la iniciada carrera de ingeniero renunciando al seguro porvenir económico que el ejercicio de esta profesión le tenía garantizado. Se siente más atraído por la paz y el remanso que ve -son sus palabras- "*en un estudio desinteresado, sin más finalidad que la alegría del conocimiento en sí mismo, ¡sin prisas!, con todo el plazo necesario para la penetración que le resultaba vedada en un plan de estudios, que, en pocos años, pretendía poner a su alcance toda la técnica industrial*". Gesto heroico el de Puig en el que se manifiesta ya una de las mayores virtudes que adornaron toda su vida: su desinterés, la donación de sí mismo, su constante renuncia a tantas tareas para las que estaba extraordinariamente dotado, para consagrarse con total entrega a aquellas que, bien por fidelidad vocacional, bien por su espíritu de servicio a los demás, a la Sociedad y a la Patria, considera en cada momento de mayor trascendencia. Con

toda justicia pudo, pues, aconsejar a sus alumnos de "San Isidro" como norma de vida: "*tended a ser un poco aprendices de todo para vuestro bien, y, al menos, maestros en algo para bien de los demás*".

Paso por alto los estudios del doctorado en la entonces Universidad Central, de Madrid. Fueron sus profesores don Miguel Vegas, don José Gabriel Alvarez Ude y don José Mª Plans y Freire, este último padrino de su tesis doctoral; pero he de dejar constancia del culto y la gratitud que guardó siempre a sus maestros, parejos del amor que profesó a sus alumnos: "*a los maestros -dice- que me enseñaron a aprender y a los discípulos entre los que aprendí a enseñar*".

Estudiante en Barcelona había entablado relaciones con una dulce y bella tinerfeña, doña María Luisa Alvarez Herrera, inspirada intérprete de los músicos románticos, afición musical compartida con don Pedro, que también había estudiado el divino arte con su padre, don Roberto, consumado pianista, y, por breve tiempo, en la Escuela de Música de Barcelona. Como ha sido nombrado ya Profesor Auxiliar de Geometría Descriptiva y Geometría Superior en la Facultad, al tiempo que enseña Análisis y Cálculo, en el ICAI, consideran llegada la hora de consagrar su unión. La boda se celebra en Barcelona el 13 de abril de 1925. Se instalan modestamente -la poquedad de los ingresos no da para más- en una pensión de la calle de Alberto Aguilera, en la que coinciden con otro ilustre matemático, don Tomás Rodríguez Bachiller, y más tarde en un pisito de la calle de Blasco de Garay. Del felicísimo matrimonio nacerán tres hijos: Emilia, continuadora de la tradición pedagógica del padre; Roberto, que sigue la técnica como arquitecto; y María Luisa, consagrada a la práctica de los idiomas.

En 1926 se produce un hecho decisivo en la vida de Puig: la convocatoria a oposición libre de una de las dos cátedras de matemáticas en el Instituto de San Isidro. Era aquella una época de elevado prestigio social, académico y económico del Cuerpo de Catedráticos de Instituto, y acceder a una cátedra de "San Isidro" suponía la culminación de la carrera docente, aspiración máxima de aquel profesorado. Puig se presenta a las oposiciones, y, caso insólito, en plena juventud obtiene la cátedra frente a renombrados catedráticos con años de docencia y preparación científica, destacando en todos los ejercicios y singularmente en los de carácter didáctico, que solían ser más que nada de puro trámite. Hay que hacer honor al Presidente del Tribunal, don Miguel Vegas, espíritu perspicaz y justo, que supo ver los valores del opositor y superar intrigas y presiones en favor de otros candidatos. Con este sonado triunfo el futuro profesional de Puig está decidido; quedará para siempre prendido en la docencia, sin descuidar por ello su labor investigadora, tareas que estima complementarias. Por eso, cuando reanuda más tarde su interrumpida carrera de ingeniero no le guía ya el propósito de su ejercicio en la industria, sino siempre con las miras puestas en la enseñanza de las matemáticas, a la que aporta, tanto en "San Isidro" como en la Escuela de Ingenieros Industriales, un nuevo aire puro, moderno, renovador de viejas rutinas.

Viene a mi memoria la evocación del recoleto despacho en el piso de la calle de Atocha. Lo preside un Crucifijo. Enfrente el retrato del venerado maestro, don José Mª Plans. Haciendo honor a su consigna, *"cuando se concibe la vida como servicio, el tiempo ya no es caudal propio sino ajeno"*, don Pedro, a todos cuantos acudíamos a él en busca de consejo, en solicitud de algún libro, para pedir ayuda en nuestros problemas, nos recibía gozoso a cualquier hora con desbordante generosidad. Lo hacía sin alardes vanidosos, como ocultando su inmenso saber, con la mayor comprensión y sencillez. La conversación -la clase- se prolongaba durante horas. Recuerdo una tarde en que tan enfrascado estaba en la elaboración de una de sus magistrales lecciones y de su material concreto, que nos vimos encerrados en el Instituto por haber dejado pasar con mucho la hora de cierre del centro. Gustaba don Pedro de ensalzar los trabajos que se le presentaban para solicitar su opinión y siempre prodigaba palabras alentadoras y estimulantes. Si se veía obligado a señalar errores, lo hacía con suma delicadeza. Cuando tenía que defenderse de ciertas críticas e incomprensiones -que no le faltaron- lo hacía siempre sin acritud, poniéndose en el lugar del otro para juzgarle, de igual manera que en el aula sabía penetrar en el pensamiento del alumno equivocado, no para sancionarlo sino para orientarle en su discurso. Le alegraba sobremanera ver sus ideas reflejadas en otros escritos -estamos creando escuela, solía decir-, e incluso se divertía con algunos plagios flagrantes del contenido de sus libros. Dotado de buen sentido del humor, al señalarme uno observado en determinado libro de texto, exclamó: ¡por lo menos podía haberme corregido las erratas!

Ya he mencionado el respeto, el cariño y la admiración, el culto, que rindió siempre a sus maestros. Los más antiguos de esta Casa recordarán seguramente el brillante informe que elaboró y la defensa que hizo para la concesión del primer Premio March, otorgado por la Academia, en favor de don Julio Rey Pastor. Pero, por lo que yo sé, me atrevería a decir que los dos sabios que más influyeron en la vida de Puig fueron don Esteban Terradas y don José María Plans, ambos catalanes y barceloneses como don Pedro. La prematura muerte de sus dos entrañables amigos le sumió en profunda tristeza. Con el corazón dolorido por la pérdida escribió seguramente Puig las páginas más sentidas salidas de su pluma.

A don Esteban Terradas le sucedió en esta Real Academia -¿quién mejor?-, y, en su discurso de ingreso, humildemente confiesa: *"Al acercarme al sillón que se me ofrece, no puedo menos de verle de tamaño proporcionado al talento de su último ocupante, y, por tanto, de anchura tal que no he de alcanzar brazos ni respaldo para apoyarme. Apeteciera, por ello, más firme y ceñida postura en una sillina al pie, desde la que rendir culto al recuerdo del ausente entre tanto llegara a ocupar su puesto sustituto de igual medida"*. Y continda su discurso añorando las felices tardes domingueras pasadas en la casa de Terradas, en las que los dos sabios conversaban (en catalán) sobre los más recientes y acuciantes problemas suscitados por los avances en la investigación matemática y técnica. Estamos asistiendo -decían- al nacimiento de una "era nueva", y se estremecían ante los posibles riesgos que podrían sobrevenir al observar el desequilibrio entre el progreso técnico y el moral, que, a su entender, no corrían parejos en su desarrollo. Entretanto, para no interrumpir el fluir de las ideas, sus esposas permanecían silenciosas esperando pacientemente la hora de poder dedicarse a su pasión favorita: interpretar al piano las melodías inmortales de sus compositores preferidos.

De don José María Plans, don Pedro se consideraba "hijo espiritual". Tan es así, tanto llegó a identificarse con el maestro, que al releer la bellísima semblanza que escribiera con motivo del fallecimiento de don José María, paréceme ahora que Puig, sin quererlo, estuviera escribiendo la suya propia. Permitidme, pues, que supliendo mi torpeza para hacerlo mejor, os lea uno de sus párrafos: *"Era un santo, era un sabio y era un maestro. Diríase que su constante recelo fué el de no ofender, de no molestar a nadie, ni con el gesto, ni con la vista, ni con la palabra; de aquí su media voz, su dulce mirar, su humilde porte. Falto del estímulo de la vanidad, no había otro acicate para su incesante sed de superación que la purísima alegría de saber para enseñar y para engrandecer la Patria. Así fué un enorme maestro y un gran patriota; sano patriotismo en que se fundieron su amor a la patria grande y a la patria chica".*

Y tiene que recurrir a la lírica para mejor expresar su dolor en inspirados poemas:

- *"Inmóvil, sin ruido, mansamente,*
como una ténue luz que se apagara
borrosa la sonrisa de su cara,
cerró los ojos y abatió la frente.

- *Así se fué, tan dulce y suavemente,*
que más que anochecer amaneciera,
como tras dura y fatigosa espera
a través de este mundo y de esta gente.

- *Su llama de bondad dejó encendida,*
semilla de saber dejó sembrada.
Si corta fué su vida,
no por ello su ejemplo quedó en nada.
La lección que nos dió no está acabada.
¡Y el corazón no olvida!

Puig Adam era, es bien sabido, brillante escritor y conferenciante. Su prosa es clara, precisa, elegante. Usa con oportunidad la metáfora. Adjetivaba maravillosamente, y, llegado el caso, sabe conmover al lector con emocionado lirismo. Pero quizá sea menos conocida su vena poética. En las fiestas familiares, además de los juegos de magia realizados con auténtica maestría de prestidigitador, nunca faltaban algunas estrofas suyas alusivas al acto que se celebraba -a menudo humorísticas y hasta burlonas- que amenizaban y alegraban la conmemoración hogareña. Pero también supo plasmar en inspirados poemas sus más íntimos sentimientos, en los que deja traslucir las exquisiteces de un alma plena de religiosidad, de amor, y, ¡cómo no!, de pedagogía. Sirvan de ejemplo estos dos, seguramente inéditos:

SUPERVIVENCIA

- *Por no morir*
el soldado dispara su arma homicida.
- *Por no morir*
la especie despierta el instinto de amor.
- *Por no morir*
se agota ante el lienzo o la piedra el artista.
- *Por no morir*
acorta la vida el investigador.

- Temor a la muerte, temor al olvido,
temor que hace amar y matar y morir.
¡Vana paradoja!... "En verdad os digo
que no morirán quienes crean en Mí".

PIEDRA DE AIRE

- Llamaba un niño al cristal
"piedra de aire".
¡Definición magistral
fué su donaire!

***

- ¡Con qué temblor aletea,
con qué delirio,
sube y baja y se golpea
detrás del vidrio!
La piedra en que te hallas presa,
mariposilla,
como el aire la atraviesa
la luz que brilla.
Y así, en aumento,
creciendo con la esperanza,
va tu tormento.

***

- Fué tu mano compasiva,
mujer y madre,
la que soltó la cautiva
al viento suave.
¿Pensaste que volvería?
¡Di la verdad!
Le diste lo que quería:
¡su libertad!

- ¡Recuerda!... te diré un día.
Ya no es un niño,
abre, pues, la celosía
de tu cariño;
¡Y, entonces, madre,
no seas para tu hijo
piedra de aire!

***

Volviendo al despacho -la celda- en el que don Pedro se concentraba en el trabajo -cuando no lo hacía en período de vacaciones en su casita de El Escorial-, veremos adosados a la pared un piano y un armonium. Después del duro bregar sentíase fatigado, y entonces para remansar su cansancio -"*Descansar*, solía decir, *es trabajar en otra cosa*"- sentábase frente a uno u otro para improvisar alguna melodía. Fijado el tema se apresuraba a trasladarlo al pentagrama, para después, con más sosiego, componer inspiradas piezas. Así, "*aprovechando ratos libres*", dejó escritas buen número de obras: armonizaciones de melodías y villancicos populares catalanes, que gustaba ilustrar con bellas viñetas de payeses vistiendo sus trajes típicos marcando los pasos de la danza; diversas piezas para piano; tres preludios y un "cuarteto de cuerda", cuyo estreno preparaba la Agrupación Nacional de Música de Cámara cuando le sobrevino la muerte. ¡No llegó a escucharlo!

Modestamente se consideraba en música un mero aficionado. No era éste el juicio que de su obra hacían críticos e intérpretes. El Padre Enrique Massó Ribot, musicólogo y catedrático de armonía en el Real Conservatorio de Madrid, la estimaba de extraordinario valor y le apremiaba a dedicarse más intensamente a la tarea de componer. Decía de Puig a este respecto: "*talento de primerísima categoría, autodidacta de penetrante intuición y de finísima asimilación en la órbita romántico-impresionista*". El genial intér prete, Pedro de Lerma, catedrático de piano en el Conservatorio, gustaba de ejecutar sus obras; tiene grabado un disco con *"nuestro querido"* -le escribía a don Pedro- "EL AFILADOR Y LOS NIÑOS". Con motivo de una actuación pública del concertista Leopoldo Querol, también catedrático de instituto, el inspirado pianista escribía en el programa de presentación: *"Puig Adam, más conocido como matemático, es, como aquellos del Renacimiento, hombre de varias facetas, matemático, pintor, algo poeta y filósofo; es también compositor. La obra que se interpreta en este concierto es digna de figurar al lado de las de los maestros consagrados, aunque él, con su modestia, que corre pareja con su simpatía personal, acaso no lo crea"*. La obra en cuestión era el PRELUDIO ISABELINO *"Evocación en la sala isabelina de un palacio abandonado")*. Querol interpretó, junto a la de Puig, piezas de Mozart, Beethoven, Falla, Albéniz, Faure, Ravel, Schumann y Liszt. ELS TRES REIS D'ORIENT es un bello villancico de Puig grabado en disco por la Coral de San Jordi, de Barcelona.

El comienzo de la guerra civil le sorprendió en El Escorial. Pudo, no sin dificultades, venirse a Madrid. Los azares de la contienda le llevaron a convivir una breve temporada con el delicado pintor Serny. Puig, que desde niño había tenido aptitudes para el dibujo, para apaciguar los horrores de la lucha (su vida estuvo en grave peligro), coge los pinceles y de su mano salen espléndidos bodegones y retratos. ¡Cuánta ternura trasciende de los de su esposa, con su dulce mirar -hoy apagado- y de los de sus hijas, Emilia y María Luisa. El de ésta suavemente recostada en un sofá luciendo el bello traje de payesa! Termina la guerra en Barcelona, adonde había sido llamado por el Director del Instituto Escuela de su ciudad natal, el profesor Estalella.

Tal vez alguien pudiera pensar que Puig Adam fuera un hombre encerrado en su propio quehacer, ajeno a los graves problemas que agitaron a nuestra patria en los azarosos tiempos en que trasncurrió su vida. Muy al contrario; si bien celoso de su independencia -nunca perteneció a ningún partido, ni ocupó cargos que no dejaron de ofrecérsele-, tenía, como ahora se dice, un talante liberal, de un sano liberalismo, como corresponde a un hombre recto y justo. Leemos en su "Mensaje de Despedida" -estupenda pieza literaria y doctrinal- a los alumnos del Instituto de la promoción de bachilleres, 1946-47: *"Amad la libertad, amadla mucho. Al extremo que este amor os libre de las peores esclavitudes, que son las que se engendran en el interior de nuestra propia alma. La esclavitud del odio, la esclavitud de los sentidos, la esclavitud de la envidia, la esclavitud de la vanidad. Amad vuestra libertad infinitamente, pero amad también infinitamente la libertad de los demás. Reclamad vuestros derechos con la misma fuerza con que respetéis los derechos de vuestros semejantes, derechos que se convierten en deberes para vosotros"*. En virtud de este principio, si bien la nobleza de su carácter le hacía perdonar y olvidar cualquier agravio personal -que no le faltó- se sentía obligado a reaccionar con prudencia y energía ante cualquier transgresión que atentara contra la dignidad colectiva. Tal fué, por ejemplo, su actitud con motivo de una insidiosa campaña desatada contra la enseñanza oficial por determinados sectores de la sociedad. En aquella ocasión envió a la prensa un ponderado y bello artículo, que, incomprensiblemente, no mereció por ningún periódico el honor de su publicación. Acaso, por su ejemplaridad, merezca la pena recordardo.

MORALIZAR SIN DIFAMAR

(Ante una campaña)

.- *¿Por qué te contraría tanto ver aludidos en la prensa diaria los mismos hechos que repudias en tu relación profesional?*

.- *Porque la difamación me molesta tanto como la inmoralidad; y juzgo difamación toda acusación inconcreta. Acto* de ciudadanía es denunciar al culpable de un delito. Pocas veces se tiene el valor cívico de hacerlo. Pero entonces hay que guardarse de caer en vicio contrario. Y tal es envolver acusaciones personales en veladuras genéricas, proyectando la sombra del deshonor sobre colectividades e instituciones.

.- Pero si tú no eres aludido en tales acusaciones, se entiende que no rezan contigo ni con ninguno de tus compañeros dignos.

.- Sofística contesta. Toda acusación pública no especificada, sobre inconcretos genéricos como "muchos catedráticos", "no pocos jueces", "ciertos militares", "algunos sacerdotes", etc. ... ofende a TODOS los catedráticos o jueces o militares o sacerdotes, y, por tanto, socava el prestigio de las instituciones de que son miembros: Universidades, Judicatura, Ejército, Iglesia,... haciendo inevitable mella en la disciplina del escolar o del soldado, en la fe del ciudadano o del creyente.

.- Entonces... ¿hasta dónde debe llegar la prensa en su misión moralizadora?

.- Debe detenerse en los linderos de la demagogia.

.- ¿Y quién los aprecia?

.- El finísimo sentido de responsabilidad y ponderación que ha de tener, en primer lugar, todo director de periódico, y, en última instancia, el propio Gobierno, que no sólo debe exigir la pureza de sus instituciones, sino también velar por el prestigio de las mismas ante la Nación.

.- De todos modos, hay que evitar el lucro con la coacción.

.- Desde luego, pero sin lucrarse con el vilipendio.

He aquí un diálogo actual entre no sé quienes, no sé dónde. Acaso no sea más que entre dos voces de una misma conciencia, la voz profesional y la ciudadana. Por la transcripción.
P. PUIG ADAM.

Cuando se trata de encontrar el profesor más idóneo para encargarse de la educación matemática de un niño llamado a reinar en España con el nombre de Juan Carlos I, obviamente, sólo hay uno indiscutible: don Pedro Puig Adam. Y, en las Jarillas, aquel muchacho recibe las lecciones de don Pedro. Delicada y honrosa tarea que merece los más cálidos elogios y es reconocida con admiración y gratitud por el padre, S.A.R. el infante don Juan de Borbón.

Aún a riesgo de abusar de vuestra paciencia, no puedo dejar de consignar en este apunte biográfico la religiosidad honda, bien alejada de beaterías y fariseismo, modelo de humanismo cristiano, que iluminó los caminos y las acciones de su vida. Aparte de los testimonios que yo pudiera aportar, quizá sea el más emotivo el que dejara en esta Casa con la bellísima y fervorosa oración contenida en su discurso de ingreso como académico. Reza así: *"Dame, Señor, fortaleza con qué afrontar los nuevos deberes y déjame transferir los honores, que por entero te pertenecen, a todos los seres de quienes tu infinita Bondad me ha rodeado. A padre y madre que en tu nombre me dieron vida y en cuyo sacrificio incalculable asentó mi educación, a la esposa que cuidó de mi fatiga sin medir la suya, a los hijos que alimentaron de esperanza mis desalientos, a cuantos quisieron hacerme bien enalteciéndome o humillándome, y en especial a los maestros que me enseñaron a aprender y a los discípulos entre los que aprendí a enseñar. Haz, Señor, que en estos tres verbos aprender, enseñar y amar, se condense mi vida, y dame laboriosidad con qué continuar mi aprendizaje, rectitud con qué mantener mi magisterio, y sencillez con qué abastecer mi sed de amistad..."*.

Modelo de equilibrio y moderación, en todo menos en el trabajo, aquel corazón, henchido de generosidad y de amor, dejó de latir serenamente, con la serenidad del justo que ha cumplido su camino, el 12 de enero de 1960.

Y permitidme, por último, señores académicos, repetir aquí una definición suya, ya recordada en otro lugar: *"Educar -decía- es, en el fondo, cultivar a un tiempo el conocimiento de lo verdadero, la voluntad de lo bueno y la sensibilidad de lo bello"*, porque en ella, una vez más, se define a sí mismo y se resume la vida del maestro. Don Pedro Puig Adam fué precisamente eso y en grado superlativo: un tenaz buscador de la VERDAD; un hacedor constante del BIEN; un apasionado enamorado de la BELLEZA.....

PEDRO PUIG ADAM, MAESTRO

Por Mariano Yela Granizo
Catedrático de Psicología de la Real Academia de Ciencias Morales y Políticas

Sres. Académicos:

Gracias, por haberme invitado a participar en este homenaje. Pero, gracias, sobre todo, por haberme dado ocasión de avivar mi memoria de D. Pedro Puig. Señores, ¡qué delicia, qué entrañable y reposado gozo, suspender por unas horas los tráfagos diarios y dedicarme a recordar a D. Pedro; a re-cordarlo, a volverlo a pasar por el corazón! D. Pedro: el maestro, mi maestro.

Maestro viene de magister, palabra emparentada con magis, que significa más. Eso era, ante todo, D. Pedro: más. Eso es lo que, ante todo, pretendo explicar en lo que sigue.

Estamos en 1940. En un aula fría y destartalada del Instituto de San Isidro, unos cien muchachos de sexto curso esperamos nuestra primera clase de matemáticas. Entra D. Pedro. Aliño correcto, discreto, un punto descuidado; porte sencillo y distinguido ; actitud concentrada, ensimismada; rostro serio, severo, casi adusto, que, de pronto, se dulcifica y se hace amable cuando empieza a hablar y se ve, tras sus gafas, la mirada chispeante, ingeniosa, acogedora, ingenua, casi infantil.

Se inicia la clase. Primera sorpresa: D. Pedro no explica, no escribe ninguna fórmula en la pizarra. Habla con nosotros, como un amigo mayor. Pregunta a varios qué es la matemática. Pide a algunos que recojan y resuman las contestaciones.

Los demás las revisan y discuten. Poco a poco, la clase se anima; todos intervenimos. Nos olvidamos de que estamos en clase, nos ponemos gozosamente a pensar. De pronto, D. Pedro lanza una pregunta sorprendente: ¿creéis qué hay dos españoles con el mismo número de pelos en la cabeza? Todos queremos hablar. Nos parece que no; algunos creen que podría darse el caso, pero que sería mucha casualidad. Entonces, D. Pedro nos va ayudando a reinventar la matemática, a percatarnos de lo que es y para lo que sirve. Despacio, al principio, vertiginosamente, después, se van proponiendo ideas: se llega pronto a la solución. Demos a cada español un número, del 1 al 30 millones, prescindiendo de sus demás características; si cada uno tiene un número diferente de cabellos, el último tendrá 30 millones. ¿Es posible? Contemos ahora los pelos, sin considerar su tamaño, forma o color. Resulta que en cada centímetro cuadrado hay, a lo más, ciento. Midamos la cabeza: tiene unos mil centímetros cuadrados. Así que cada cual tiene, como mucho, unos cien mil cabellos. No puede haber ninguno con 30 millones. Necesariamente, y no por rara casualidad, existirán dos, y muchos más, con el mismo número de pelos en la cabeza.

La clase continúa. Las contestaciones se precisan cada vez más. ¿Qué hemos hecho?, pregunta D. Pedro. Intentamos expresarlo; nos autocorregimos unos a otros. D. Pedro, al final, repite lo que hemos dicho, lo resume, lo aclara, lo ordena. Conclusión, eso es la matemática: atenerse a la realidad, percibir los problemas que plantea, reducir la complejidad inagotable de lo que nos rodea a lo que al caso importe, elaborar con ello un esquema mental, operar clara e inteligentemente con ese esquema, volver a la realidad para aplicar los resultados, comprobarlos, y, si hemos acertado, resolver el problema. Procesos de percepción y de acción, de esquematización y abstracción, de operación con esquemas mentales más o menos abstractos, de concreción y vuelta a la realidad.

Así nace en la historia de la humanidad y en nosotros mismos la matemática, así la hemos visto y hecho nacer nosotros ahora. Luego, se puede pensar sobre esos esqeumas, imaginar, ver y comprender sus relaciones y desarrollar sistemas simbólicos y numéricos con ellos, prescindiendo de su posible origen psicológico y sin preocuparse necesariamente por su posible aplicación: es la matemática pura.

En los dos casos, más o menos lo mismo: fidelidad a la realidad empírica o ideal; alegría de pensar y descubrir; contacto con el orden, la unidad, la simplicidad y la armonía; encuentro con la verdad; gozo estético de la creación.

Se acaba la clase. ¿Serán todas así? Con mil variantes, así lo fueron. Para muchos fue un curso apasionante, como una espléndida aventura. Para mí fue además el encuentro con D. Pedro como profesor, como pedagogo y como maestro.

Como a muchos , como, en principio, a todos, me ofreció, humildemente, desde su altura, nada menos que su intimidad. Yo era un chico de los barrios bajos de Madrid. Vino a mi casa; habló largamente en la portería con mi madre, que era la portera, y con mi padre, que era un obrero. Me llevó a la suya, donde, con su bondad, increiblemente generosa, me regaló muchas horas de su tiempo, en las que hablamos de todo, de él y de mí, de matemática, de música, de pintura, de poesía, de lo divino y de lo humano. Muchos domingos, compartía la mesa con su familia, que llegó a ser la mía y a la que ahora quiero expresar, una vez más, mi respeto, mi gratitud y mi cariño.

¡Qué insondable y rara fortuna haber encontrado un maestro! Porque eso es lo que fué y es D. Pedro para mi: un profesor que sabe, un pedagogo que me conduce al saber, un maestro que me hace ser más y ser más yo mismo. Tratemos de entender esto con algún rigor.

*****

Profesor viene de profiteri y se relaciona con profeta. Es el que confiesa su saber, el que sabe decirlo y transmitirlo. Para ello tiene que poseerlo, y querer y saber comunicarlo. D. Pedro era, por de pronto , profesor de matemáticas. Podía serlo con plenitud: las conocía, las poseía sobreabundantemente, le apasionaba enunciarlas, confesarlas y transmitirlas.

A este empeño dedicó su vida, animado por una vocación temprana, fundada en la aptitud y el deseo, mantenida por una incesante laboriosidad. Empezó a estudiar Ingeniería Industrial, en Barcelona; pronto acudió también a la Facultad de Ciencias Exactas; en seguida se entregó exclusivamente a la matemática pura, al goce destinteresado -como él dijo- de la verdad por la verdad. Y siguió siempre el mismo camino. Estudió la matemática y, a través de ella, todo lo demás: la matemática pura y la aplicada, su génesis histórica y su génesis psicológica, sus relaciones con la realidad empírica, con las necesidades y anhelos del hombre, con la ciencia y el arte y la ética. Y fué investigador y creador eminente de ciencia y tecnología, como los profesores Jérez y Ríos luego mostrarán.

Pero si estudió e investigó tantas cuestiones matemáticas y lo hizo por el afán de comprender, saber y descubrir, lo hizo también, y tal vez sobre todo, para poder enseñar. "Un investigador -nos dice- puede, acaso despreocuparse de los procesos de enseñanza. Un profesor, en cambio, tiene que haber creado para saber estimular la creación entre sus alumnos" (1).

A despertar y estimular esa creación dedicó lo más de su vida. Desoyendo otras ofertas, igualmente dignas y económicamente más ventajosas, fue, ante todo, profesor. Profesor de Geometría Descriptiva y Geometría Superior en la Facultad de Ciencias, de Madrid, de 1923 a 1926; Profesor de Análisis Matemático y Cálculo Infinitesimal, en el ICAI, de 1923 a 1932; profesor de Cálculo en la Escuela Superior de Aeronáutica de 1931 a 1936; profesor sobre todo, en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, desde 1932, en la que actuó como Catedrático de Extensión de Cálculo desde 1946, y, desde 1926, Catedrático de Matemáticas en el Instituto de San Isidro, en el que cumplió hasta su muerte su más intima vocación.

(1) Puig Adam, 1960, p. 421. Véase la bibliografía final.

*****

Por ser profesor de manera tan entregada y completa, D. Pedro fue, propiamente, más que profesor, pedagogo; más que transmisor de saber, incitador para su descubrimiento.

Recordemos y completemos la cita anterior. "*En el dominio de la estricta creación matemática* -confesaba con esa "simpática modestia" que tan acertadamente supo apreciar D. Antonio Torroja- *debiera ceder esta cátedra a varios de mis colegas de la Academia y de la Universidad. En cambio no la cedo a nadie en preocupación por el problema educativo, sin despreciar por ello la investigación. Un investigador puede, acaso, despreocuparse de los procesos de enseñanza. Un profesor, en cambio, tiene que haber creado para saber estimular la creación entre sus alumnos, ya que enseñar no es transmitir, sino guiar procesos de aprendizaje.*

Los que nos dedicamos a la enseñanza de la Matemática, no hemos de concebirla como un legado a transmitir, sino como una actividad a cultivar para incremento de aquel legado".

Las dos cosas, D. Pedro, le diría yo, prolongando las eternas discusiones que se avenía a entablar conmigo. Enseñar es exponer con competencia y claridad, transmitir el legado de la humanidad precedente , que no debemos olvidar, ni pode mos reinventar en cada instante. Pero, para de verdad transmitir y conservar ese legado, es cierto que no hay otro modo de ayudar a los otros a comprenderlo, a reconquistarlo, a recrearlo, mediante esa actividad personal que el verdadero profesor tiene que despertar y cultivar en el alumno para que éste lo descubra y haga suyo, de algún modo lo renueve y pueda acaso incrementarlo.

Por eso el auténtico profesor no es sólo profesor, es, como quería y era D. Pedro, didacta y pedagogo. Didacta, nos dice (2), es el que sabe transmitir su saber mediante procedimientos que lo hacen comprensible al alumno. Pedagogo es el que fundamenta esos procedimientos en el conocimiento de la psicología de sus alumnos, el que se apoya en la génesis de sus procesos cognoscitivos y afectivos para que el alumno, por sí mismo, anhele ese saber y lo alcance recreándolo.

Se coloca, así, D. Pedro, en el movimiento de renovación pedagógica que se inicia con Pestalozzi y Herbart, que Froebel lleva al Kindergarten, María Montessori a la Casa dei Bambini y Décroly al contacto con la naturaleza. Pretendían todos, en síntesis, fundamentar la enseñanza en la participación activa del niño, en la observación y la experimentación, en la experiencia del paisaje y la naturaleza, en el apoyo de cada nueva adquisición en la "masa aperceptiva" ya lograda previamente por el esfuerzo personal.

Pero este movimiento había renovado la enseñanza preescolar y primaria. No había alcanzado a la Media.

¡Cuánto camino había que recorrer -recuerda D. Pedro- *... hasta llegar a la clase taller, a la cátedra sin estrado, a la cátedra sin cátedra, en la que el profesor, sin lugar especial para sí, está, sin embargo, en todas partes"!* (3).

(2) Puig Adam, 1960, p. 93 y 94.
(3) Puig Adam, 1960, p 97.

D. Pedro recorrió ese camino. Revisó la ciencia contemporánea de autores como Piaget, Dewey, Claparède y Kerschensteiner; Cuisenaire y Gattegno; Hadamard, Polya y Servais; Nicolet y Fletcher. Estudió la génesis psicológica del conocimiento y de la ciencia, la pedagogía de la enseñanza media, la didáctica matemática. Y, sobre estas bases y su experiencia propia, elaboró su conocido método heurístico, que expone en su obra Didáctica Matemática Eurística (4) y en múltiples trabajos recogidos en La Matemática y su Enseñanza Actual (5). Resume el método en su Decálogo de 1955, que figura en la página 157 de este último libro, y que se compara con ventaja con otros célebres, como el que años más tarde ofrece Polya en Mathematical Discovery (6).

Vale la pena reproducir textualmente el Décaologo de la Didáctica Matemática Media

1. *No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso el alumno, observándole constantemente.*
2. *No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.*
3. *Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.*
4. *Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.*
5. *Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.*
6. *Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.*
7. *Promover en todo lo posible la autocorrección.*

(4) Puig Adam, 1956.
(5) Puig Adam, 1960.
(6) Polya, 1967, p. 299.

8. *Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.*
9. *Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.*
10. *Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.*

En esencia, según D. Pedro, enseñar es, primero, enseñar a querer aprender; segundo, enseñar a observar, experimentar, descubrir, crear y autocorregirse, y, tercero, enseñar, en fin, a pensar y a expresarse con rigor.

Tal metodología ha de partir de la realidad cotidiana y adaptarse sin rigidez a cada caso individual y a las características predominantes de cada período evolutivo: de observación, en la edad preescolar; de experimentación, en la escuela primaria; de intuición, en el Bachillerato elemental, y de simbolización lógica y abstracta, en el superior (7).

Es interesante el símil que, como una especie de nueva ley biogenética, se atreve D. Pedro a establecer entre estos períodos del desarrollo cognoscitivo en el hombre y los que se advierten en la evolución histórica de la matemática. "*La Historia misma, en su aspecto genético, más que cronológico, puede ayudarnos* -nos dice- *a perfilar las nuevas unidades funcionales, ya que... el proceso genético de formación de los conocimientos en el individuo guarda indudable relación con el que ha tenido en la especie humana*" (8).

En distintos lugares analiza D. Pedro las fuentes empíricas y los problemas científicos con los que se relaciona la génesis histíoica de la Matemática. Contar, medir y construir,

---

(7) Puig Adam, 1960, p. 119.

(8) Ibidem, p. 207.

en la Aritmética y Geometría, sistematizadas por los griegos; sintetizar y automatizar la resolución de problemas aritméticos y las complicadas cuestiones de herencia, en el Algebra de los árabes y del Renacimiento; estudiar las velocidades y las aceleraciones, en el Cálculo Diferencial; medir áreas y volúmenes, en el Integral; atender a las necesidades de la mecánica y la física, en el Análisis Infinitesimal. Hoy proseguiría el símil, con el examen, al que en su día empezó a contribuir matemáticamente, de las dos nuevas revoluciones científicas: la energética y la informática.

En la aplicación de esta nueva didáctica, D. Pedro fue infatigable. Renovó, con Rey Pastor, los textos de Matemáticas del Bachillerato, lo que, con palabras de Antonio Torroja, "*no es la menor aportación de los autores a la cultura española*" (9). Ideó, recopiló, seleccionó y difundió modelos y juegos didácticos, construidos con instrumentos complejos o compuestos con materiales comunes, desde su "juguete" para la enseñanza activa de la lógica formal, fundado en el isomorfismo entre el álgebra de proposiciones y el álgebra de circuitos, hasta los mil ingenios "dinámicos y multivalentes", elaborados con fichas, mosaicos, bloques, barras, regletas, gomas, plastilina, cartulinas, vidrios, tubos, botes y hasta con varillas de paraguas rotos y con escombros.

En 1955 fue nombrado miembro de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática. Forma parte, en 1956, del comité presidido por Piaget, que redactó las Recomendaciones sobre la Enseñanza de la Matemática, elevadas por la UNESCO y la Oficina Internacional de la Educación a los Ministerios de Educación de los países miembros. En 1957, participó destacadamente en la Exposición Internacional de Material Didáctico Matemático, que se celebró en Madrid. Su didáctica heurística ha sido expuesta en numerosas Revistas y aplicada en múltiples Instituciones extranjeras.

*****

---

(9) Puig Adam, 1952, p. 76.

No hay duda, D. Pedro fue un profesor competente y un pedagogo innovador. A mi juicio y según mi personal experiencia, fue mucho más. Fue, sobre todo, un maestro.

Expresa reiteradamente su agradecimiento *"a los maestros que me enseñaron a aprender y a los discípulos entre quienes aprendí a enseñar"* (10). Pero no sólo anhelaba aprender y enseñar. Cuando quiere expresar su más honda vocación, escribe *"Haz, Señor, que en estos tres verbos, aprender, enseñar y amar, se condense mi vida"* (10). Mas, enseñar amando, es educar, Y *"educar* -nos dijo- *es, en el fondo, cultivar a un tiempo el conocimiento de lo verdadero, la voluntad de lo bueno y la sensibilidad para lo bello"* (11). Es lo que hacía siempre D. Pedro.

Lo podía hacer porque él era más. Ser más es ser autor, poseer el poder de la autoridad, palabras que proceden de augere, que significa aumentar, acrecer, hacer más. El era autor, aumentaba, acrecía, hacía más a los otros. Los hacía más, como hombres. No por la fuerza, ni siquiera por la fuerza de la razón. Los hacía más, porque él era más, porque tenía autoridad propia. Por encima de las dotes e ilusiones, de los procesos y conocimientos del alumno, de los métodos y destrezas del profesor, D. Pedro se elevaba hasta encontrar a la persona, como una realidad capaz de apropiarse de sí misma y de disponer de sí, y se entregaba a ella para que se hiciera cada vez más plena y más plenamente autoposeída, más libre, con más posibilidades de ofrecerse a la libertad de los demás.

Esa entrega, acrecentadora del otro, se reflejaba en su bondad, en la exigencia inexcusable que sentía de aceptar incondicionalmente a los otros. En ésto no se perdonaba el menor desliz. Una vez, llamó a su puerta un niño y le pidió la limosna

---

(10) Puig Adam, 1952, p. 30.
(11) Puig Adam, 1960, p. 4.

de un libro, que le exigían en el colegio y no podía adquirir. D. Pedro le dió una Enciclopedia Escolar, con la que el niño desapareció en seguida, escaleras abajo. D. Pedro se fue tras él para conocerlo y ayudarlo mejor. Pero, de pronto, le paralizó la duda. ¿No le habría engañado el niño?, ¿no resultaría a la postre, un fraude, una desilución más? Y se detuvo -nos dice- cobardemente. *"Solo después supe la profunda amargura que tal cobardía me costó. No me averguenza confesaros que lloré a solas. Acababa de sentir, por vez primera, que algo en mí había envejecido espantosamente"* (12). ¡Tanto hería a D. Pedro dudar de los demás!

El mismo ánimo bondadoso se reflejaba en su sencilla humildad. Tituló "elemental", sin que realmente tuviera justificación (13), su Tesis de doctorado sobre la mecánica relativista restringida. Se ordenó a sí mismo: *"Se humilde hasta conseguir que te perdonen. Sin humildad no es posible amar ni ser amado"* (14). Manifestó su gratitud *"a cuantos quisieron hacerme bien, enalteciéndome o humillándome"* (15).

Y era humilde sólo para encontrarse consigo mismo y con los otros, sin aspavientos, con humor. Ilustraba sus clases y sus ejercicios de diáctica heurística con mil historietas divertidas. Lo hacía incluso en las ocasiones más solemnes. Aquí mismo, en esta Academia, en su discurso sobre Información, entropía, y caos, y para esclarecer las relaciones entre cantidad de información, redundancia y probabilidad, propuso el siguiente ejemplo. Supongamos que nos llega este mensaje: *"Se remunerará espléndidamente al profesorado"*. Sería algo inesperado y sorprendente, algo considerado de antemano como muy im

---

(12) Puig Adam, 1960, p. 458
(13) Puig Adam, 1952, p. 72.
(14) Ibidem, p. 29.
(15) Ibidemn, p. 30.

probable; contendría una gran cantidad de información. Pero si el mensaje rezara: *Se remunerará insuficientemente al profesorado*", nadie se sorprendería, la noticia carecería de interés informativo (16).

Parecía un hombre equilibrado, sereno y en paz, plenamente feliz en el cumplimiento de su vocación, tranquilo marino de agua mansa, como él mismo se llamó (17). Y lo era en la superficie que, por bondad, mostraba a los otros. Y lo era también en el fondo, donde arraigaba su fé viva en Dios y en los hombres, en la última verdad y bondad y belleza de lo real. Pero entre la superficie y el fondo, le agitaban angustiosas inquietudes, las heridas que fácilmente causaban en su temperamento hipersensible las necedades y las injusticias, la conciencia de sus limitaciones, el anhelo insaciable de ir siempre más allá.

"*¡Cuántas vecés he sentido* -confesó un día- *como una envidia... de los siglos aquellos de Grecia, del Renacimiento, en los que, sobre la cuna de la ciencia y el arte, era posible abarcar, en una vida intensa, vastos panoramas de conjunto!*" (18).

En todo ésto consistía el más de D. Pedro. Por eso era maestro. Ni el tiempo relativamente breve que vivió, ni su inagotable sed de verdad y belleza, ni su constante entrega humilde y bondadosa a los demás, le dejaron envejecer. Yo lo recuerdo como un maestro siempre joven.

*****

(16) Puig Adam, 1954, p. 12.
(17) Puig Adam, 1952, p. 28.
(18) Puig Adam, 1960, p. 3.

BIBLIOGRAFIA

POLYA, G. "La Découverte des Mathématiques". Dunod. París, 1967.

PUIG ADAM, P. "Matemática y Cibernética". Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Discurso de Ingreso, y Contestación de Torroja Miret, A. Madrid, 1952.

PUIG ADAM, P. "Información, Entropía y Caos". Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1954.

PUIG ADAM, P. "Didáctica Matemática Eurística". Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral. Madrid, 1956.

PUIG ADAM, P. "La Matemática y su Enseñanza Actual". Publicaciones de la Revista "Enseñanza Media". Ministerio de Educación Nacional. Madrid, 1960.

NOTICIAS BREVES

La Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. de JAEN celebrará, como todos los años, una Semana Cultural que este año tendrá como tema monográfico "Informática y Educación", y tendrá lugar en los próximos días 6 al 10 de Mayo.

La coordinadora de Enseñanza de Asturias (LEA) ha formado un grupo de trabajo específico de Matemáticas orientado hacia el estudio de la Reforma de las Enseñanzas de Bachillerato y F.P., que se muestra deseoso de intercambiar sugerencias y experiencias con otros grupos.

LA EDUCACION SECUNDARIA Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN INGLATERRA

Por Alan G. Kaye

Nota de la redacción

El presente artículo es un resumen en español de las dos conferencias que el Profesor Alan G. Kaye pronunció en los "Coloquios Internacionales Universidad-Enseñanza Media", organizados por la Asociación para la Renovación de la Enseñanza y por la Universidad Complutense, con la colaboración del Consejo Británico, y que se celebraron en Madrid en Octubre de 1983.

El Profesor Alan G. Kaye es Inspector de Enseñanza Media (H.M.I.) de Matemáticas, en el Reino Unido.

****

INTRODUCCION

La organización y el control de la educación en Inglaterra son diferentes de los de otros países europeos en varios aspectos importantes, por lo que será necesario aclarar brevemente esas diferencias antes de comenzar a hablar del curriculum en Matemáticas (contenidos, métodos y procedimientos de evaluación).

El Ministerio de Educación (llamado Secretaría de Estado para Educación y Ciencia) no es propietario, ni responsable del funcionamiento de ninguna escuela, ni emplea ningún profesor ni establece ningún programa. Desde 1902 hay una fuerte tendencia hacia la administración local en colaboración con el Gobierno Central. El Gobierno Central establece niveles mínimos para edificios escolares, administra escalas salariales, previamente acordadas para los profesores, y regula el reconocimiento de las cualificaciones del profesorado. Existen en la actualidad 101 Autoridades Locales de Educación (LEA) en Inglaterra y Gales. Estas LEA planifican la escolarización en sus áreas, tanto en términos de edificios como distribución por edades y habilidad de los alumnos, con la aprobación de la Secretaría de Estado. Emplean y pagan a los profesores y son responsables de proveer y mantener los centros.

La enseñanza secundaria es gratuita y obligatoria para todos los niños hasta la edad de 16 años. Desde 1944 es obligatorio para los LEA el proporcionar enseñanza secundaria de acuerdo con la edad, aptitud y habilidad de cada alumno.

En los primeros años de la posguerra la respuesta parecía ser un sistema de escolarización diferenciado con escuelas académicas selectivas (destinadas a un 20% de la población escolar) llamadas "grammar schools" que preparaban a los alumnos para la entrada en la Universidad y las profesiones y las escuelas secundarias generales, llamadas "secondary modern schools" para el resto de los alumnos que no tenía la capacidad o la intención de seguir estudios universitarios. A diferencia de muchos países europeos con sistemas diferenciados, no se introdujeron los centros politécnicos o de formación profesional a gran escala. Este sistema diferenciado fue objeto de muchos ataques por razones educativas y políticas y comenzó una tendencia hacia un sistema de educación integrada en el que todos los niños de una zona se educan en una misma escuela.

La mayoría de los LEA gestionan sistemas totalmente integrados aunque una minoría sustancial (aproximadamente el 30%) mantienen alguna forma de selección.

Hay varios tipos de educación integrada (comprehensive education) ofrecida por los diferentes LEA e incluso distintos

tipos dentro del mismo LEA. Los tipos principales son los siguientes:

1. Enseñanza primaria: desde los 5 a los 11^+ años en una escuela primaria, y

   Enseñanza secundaria: desde los 11^+ a los 18^+ años en una escuela secundaria.

2. Enseñanza primaria: desde los 5^+ a 8^+ años en una escuela primaria (First School) y desde los 8^+ a los 12^+ en una escuela intermedia (Middle School).

   La enseñanza secundaria: desde los 12^+ a los 16^+ en una escuela secundaria y desde los 16^+ a los 18^+ en un Colegio (Sixth Form College).

EL CURRICULUM (edades 11 a 16 años)

Por ley, las autoridades locales de Educación (LEA) son responsables del curriculum escolar, pero en la práctica delegan esta responsabilidad casi siempre, en cada escuela. Por ello, el curriculum, excepto algunos condicionantes, está en las manos del director y sus colaboradores. En un sistema muy centralizado, como el de Suecia o Francia, aunque el curriculum esté centralmente controlado por medio de programas y manuales de métodos para profesores, siempre hay una distancia entre las disposiciones oficiales y la práctica. Recíprocamente, en Inglaterra, donde el curriculum es nominalmente un asunto local, las presiones sociales y políticas actúan imponiendo conformidad.

Desde que cumple los 11 años y durante tres años el alumno tiene poca o ninguna opción y estudia una serie de asignaturas obligatorias que incluye Educación Religiosa, Inglés, Matemáticas, Ciencias, Humanidades. Un idioma extranjero (normalmente francés) asignaturas de Tecnología, Manualidades y Educación Física.

Cumplidos los catorce años el alumno elige, guiado por sus profesores, aunque siguen siendo obligatorias las asignaturas de Religión, Inglés y Matemáticas. En este nivel los alumnos puede empezar a especializarse escogiendo ciencias o letras. Sin embargo, cada vez es más frecuente tomar una combinación de asignaturas, y las escuelas animan a los alumnos a tomar al menos una asignatura de ciencias, una estética y una creativa. En este nivel también se ofrecen asignaturas nuevas para el alumno como informática, sociología o un segundo idioma extranjero. Es corriente que los alumnos tengan de 7 a 9 asignaturas y pasen exámenes públicos externos de todas ellas a los dieciseis años cumplidos.

Este es el final de la educación obligatoria y los alumnos, o bien permanecen en la escuela durante uno o dos años, o la dejan. Los que la dejan pueden empezar a trabajar (posiblemente combinando con algunos estudios) o van a un Colegio (Sixth Form) para seguir cursos preparativos para la entrada en la Universidad o van a un colegio de Enseñanza Superior para seguir cursos de formación profesional.

LOS EXAMENES A LA EDAD DE 16 AÑOS

Una de las razones de la gran similaridad en los programas de nuestras escuelas es el sistema de exámenes externos (públicos) que limita la autonomía del profesor. Los exámenes públicos se introdujeron en Inglaterra hacia 1850 y durante algo más de un siglo su influencia estuvo restringida al alumno futuro universitario. Pero desde 1964, los exámenes públicos se han extendido a la mayoría de los alumnos.

Los primeros se toman generalmente a los 16 años. Hay dos sistemas de exámenes en esta edad que son complementarios. El más antiguo es el Certificado General de Educación (GCE) nivel ordinario (o nivel '0') destinado al 25% superior de los

alumnos. El GCE puede tomarse en una o más asignaturas y el número de aprobados puede acumularse durante varios años. En la práctica la mayoría de los candidatos para los que el examen es apropiado, lo pasan en siete u ocho asignaturas en una sola convocatoria y sólo repiten aquella asignatura que suspenden y que es requisito para sus estudios o carrera futuros. El Certificado se obtiene en cinco grados, de A a E y U (sin clasificar). Los grados A a C se consideran "aptos". Hay ocho Consejos de Examen GCE independientes, con comités en los que están representados los profesores y todos proporcionan una variedad de programas para que los profesores elijan. Estos Consejos de Examen tienen lazos con las Universidades y sus exámenes se utilizan como criterios para la entrada en la enseñanza superior. Estos mismos Consejos realizan los exámenes que toman los alumnos académicamente capacitados después de dos años más de estudios. Estos exámenes, llamados GCE nivel Avanzado (nivel 'A') se toman normalmente a los 18 años y la mayoría de los candidatos los toman en sólo 3 asignaturas.

El segundo sistema de exámenes introducido en 1964 es el Certificado de Enseñanza Secundaria (CSE). En principio estaba destinado para alumnos de habilidad comprendida entre el 20 y el 60 percentil. En la práctica, como todos los alumnos tienen que permanecer en la escuela hasta la edad de 16 años, una mayor proporción que ésta sigue los cursos y toma los exámenes. (En matemáticas el 85% de los alumnos del país toma uno u otro de estos exámenes externos). El Certificado, igual que el GCE se da por asignaturas, y se concede con cinco grados de 1 a 5. Un grado 1 se considera equivalente al grado C del GCE nivel '0'. En general, en matemáticas, el examen de GCE nivel '0' consiste en dos exámenes escritos con tiempo limitado, conteniendo cuestiones de respuesta cerrada y algunas preguntas cortas de respuesta abierta. También hay cuestiones más largas y complicadas que contienen muchas partes. Los exámenes de CSE normalmente tienen el 50% de la calificación total asignado a las calificaciones obtenidas por el alumno en los últimos dos años (de los 14 a los 16 años) con un procedimiento moderador externo. Es frecuente que el restante 50% de la calificación se obtenga mediante un examen escrito con tiempo limitado que se toma al final del curso..

EL CURRICULUM DE MATEMATICAS (11 a 16 años)

Contenidos

El movimiento internacional para modernizar el contenido de las matemáticas secundarias que comenzó hacia 1960 afectó a Inglaterra como a los demás países. Este movimiento estaba basado en la creencia de que los programas existentes eran matemáticamente inadecuados y que los nuevos contenidos permitirían no sólo el logro de objetivos nuevos y más relevantes, sino a la vez la consecución de los antiguos objetivos. Así, se pensó que el énfasis en las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva ayudaría a eliminar errores en aritmética y álgebra y facilitaría la adquisición de técnicas esenciales. Además, el trabajo con conjuntos, relaciones, matrices y funciones se esperaba que contribuiría a unificar el estudio de las matemáticas. Importantes matemáticos apoyaron este movimiento que llevó entre otras cosas al proyecto SMSG en USA, al trabajo de Papy en Bélgica, las reformas de Lichnerowicz en Francia, y en Inglaterra, entre otros, al School Mathematics Project (SMP).

Existieron diferencias entre los países; en Francia y Bélgica, las matemáticas modernas significaban el estudio del plano afín antes que el plano euclídeo y significaban una insistencia en las estructuras algebraicas, axiomatización y rigor. En Inglaterra, aunque hubo un aumento en algebra abstracta, el cambio se produjo en el sentido de un mayor énfasis en las aplicaciones, por ejemplo, estadística, probabilidad y procesos iterativos.

Dos características peculiares de Inglaterra influyeron mucho en el modo de implementar las reformas: en primer lugar, las reformas estuvieron estrechamente relacionadas e influidas por la reorganización del sistema educativo. En segundo lugar, los profesores tienen gran influencia en la toma de decisiones educativas y son considerados con competencia para decidir en cuestiones de métodos y contenidos. Estos dos factores están hasta cierto punto en oposición, y se llegó a un compromiso. El Estado proporcionó el marco organizativo dentro del cual el trabajo de reforma iba a ser llevado a cabo por los profesores.

La intención de los promotores de la reforma en el Reino Unido fue introducir cambios tanto en el contenido de los programas para alumnos capaces y también en los métodos y estrategias a utilizar. Se crearon estrategias para motivar la investigación, poner de relieve las aplicaciones de las matemáticas. El material de enseñanza que se creó daba por supuesto el hecho de que los profesores que lo iban a usar tendrían suficientes conocimientos y experiencia para conseguir estos objetivos.

Al principio, la mayoría de los profesores que querían introducir un programa moderno podían asistir a cursos de perfeccionamiento en los cuales se exponían los objetivos y se discutían los métodos a seguir. Sin embargo, la inesperada y rápida expansión de los cursos de matemáticas modernas significó que pronto muchos profesores se vieron obligados a enseñar esos cursos sin preparación previa.

Otro acontecimiento, también muy rápido fue la extensión de los cursos de matemáticas modernas a los alumnos menos capaces y la introducción de programas modernos en los exámenes CSE. Cuando ésto se hacía, normalmente se conseguía simplemente omitiendo las ideas más difíciles así como la mayoría de las aplicaciones. Por tanto, con frecuencia se perdía por completo el "espíritu" del tema. No todos los profesores tenían conocimientos matemáticos suficientes para permitirles apreciar las intenciones subyacentes a los cursos que estaban enseñando.

Por consiguiente, el material incluido en los cursos modernos, con frecuencia no se presentaba como parte de una estructura unificada sino como una colección de temas inconexos cuya relevancia con respecto a la asignatura no resultaba evidente para los alumnos. Los temas han tendido con frecuencia a degenerar en el aprendizaje de vocabulario y de las pocas técnicas necesarias para entendérselas con un limitado número de ejemplos. Por ejemplo, alumnos de capacidad media en muchas de nuestras escuelas están sumando y multiplicando matrices, pero no se les pueden enseñar aplicaciones útiles de estas técnicas a su nivel. Se intenta mostrarles como las matrices 2 x 2 pueden utilizarse para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales, pero el método matricial es a veces menos eficaz que otros métodos tradicionales. Otro ejemplo, es el modo en que los distintos sistemas de numeración se han convertido en un tema de estudio por sí mismos. Se introdujeron para ilustrar cómo funciona el sistema decimal, pero muchos de nuestros alumnos gastan tiempo practicando las cuatro operaciones aritméticas en bases de numeración diferentes en la convicción -errónea- de que esta habilidad tiene algún valor.

Se había supuesto también que el trabajo con las propiedades del algebra ayudaría a la adquisición de técnicas operatorias. Los resultados empíricos parecen sugerir que la "comprensión" y la "habilidad operatoria" se desarrollan con relativa independencia y en Inglaterra -como en todas partes- hubo algunos errores de cálculo en lo referente al tiempo requerido para adquirir y practicar las técnicas.

La mayor parte del algebra abstracta y la geometría no ha conseguido afirmarse en el Reino Unido. Por ejemplo, los intentos para introducir la noción de grupo y el concepto de isomorfismo en GCE nivel '0' han sido infructuosos. Los programas actuales pueden describirse como compromisos entre las matemáticas modernas y tradicionales.

Con el paso del tiempo se ponen de relieve muchas ventajas: mucha gente ve como beneficiosa la atención prestada al trabajo con gráficas, el uso de coordenadas y vectores y el aumento de la estadística elemental. La introducción de trabajo basado en las ideas geométricas de reflexión, rotación y simetría también se considera valiosa. Pero esto no es cierto para otros temas de álgebra, como el álgebra de conjuntos y de matrices que se han demostrado difíciles de entender pos los alumnos y cuyo propósito y usos no les resulta evidente. Es significativo que el SMP que ha sido líder del desarrollo de los curricula en matemáticas desde los años 60 ha cambiado el contenido de sus materiales para el alumno. En sus nuevos materiales a punto de ser publicados, para alumnos de 11 a 16 años, la idea de conjunto no se menciona ni se usa y las matrices se presentan sólo para los más capaces al final del curso.

ORGANIZACION DE LAS CLASES Y METODOS DE ENSEÑANZA

Lo más frecuente para los alumnos de enseñanza secundaria, es agrupar en clases por niveles de habilidad en matemáticas. Por tanto, es posible para un alumno bueno en matemáticas estar en un grupo de gran habilidad en esta asignatura y, sin embargo, estar, por ejemplo, en un grupo intermedio en Inglés.

Las escuelas y profesores ingleses pueden elegir los libros y material escolar que prefieran dentro de una amplia selección disponible en el mercado. Los textos y el material son gratuitos para los alumnos.

El método de enseñanza utilizado en las matemáticas secundarias está fuertemente basado en el texto y es muy expositivo. Los mejores textos sugieren actividades exploratorias e investigaciones a realizar por el alumno. Por desgracia, estos se ignoran muchas veces; la excusa es que la presión del sistema de exámenes (que no mide ni la creatividad, ni la habilidad para estudiar situaciones matemáticas abiertas) no deja tiempo para estas actividades.

Todos nuestros centros secundasrios tienen ahora al menos un microcomputador, y muchos tienen varios. Existe una tendencia, tanto en los grupos de profesores locales como regionales y nacionales, a desarrollar el software específico para enseñar algunos aspectos de las matemáticas.

MATEMATICAS EN EL SIXTH FORM (16 a 18 años)

Antes de la implantación de la escuela integrada, la gran mayoría de los alumnos que seguían en el centro después de los 16 años habían pasado los exámens GCE nivel '0' y habían aprobado en ellos cinco o más asignaturas. Estos alumnos normalmente elegían tres asignaturas (a veces dos o cuatro) y las estudiaban durante dos años en preparación para el GCE, nivel avanzado. El éxito en estos exámenes les permitía el ingreso en la Universidad o el acceso a algunas profesiones.

El curriculum incluía muy poca cosa además del estudio de las asignaturas elegidas -quizás algo de Educación Religiosa, temas de actualidad o un idioma extranjero-. En general, sin embargo, se le daba poca importancia a estos "estudios periféricos" en la mayoría de los colegios.

Con la llegada de la educación integrada, no sólo ha aumentado el número de alumnos que permanecen en el centro después de los 16 años sino que también ha ocurrido un cambio en el tipo de alumno que se queda.

Los cursos para alumnos mayores de 16 años se llaman tradicionalmente "sixth form" (sexto año de secundaria) en Gran Bretaña.

El número de alumnos que en la actualidad permanecen en la escuela pasados los dieciseis años, al menos por un año, varía mucho según las regiones, pero probablemente se acerca al 30% para todo el país. Un 60% de estos alumnos de "sixth form" estudian algún tipo de curso de matemáticas.

En todo el país, cada año pasan el GCE nivel avanzado en matemáticas entre un 5 y 6% del grupo de edad. Las calificaciones consisten en una escala de 5 puntos de A a E y son utilizadas por las universidades y otras instituciones de enseñanza superior para seleccionar sus alumnos. Los requerimientos mínimos nacionales para cualquier carrera universitaria son aprobados en dos asignaturas en el GCE nivel avanzado (además de algunos aprobados en el nivel '0'). En la práctica, el mero aprobado es con frecuencia insuficiente y las universidades exigen mejores calificaciones. Es corriente en algunas facultades pedir más que aprobado en las tres asignaturas. En la actualidad (la demanda de puestos en la universidad afecta a los requisitos de acceso), para ser admitido a una carrera de matemáticas se requiere una 'B' en matemáticas y dos "C" en las otras asignaturas.

Las matemáticas son la única materia que se ofrece en dos asignaturas separadas en el GCE nivel 'A' Matemáticas puras y Matemáticas aplicadas (mecánica y/o estadística) o bien Matemáticas (puras y aplicadas) y Matemáticas superiores (puras y aplicadas). Por ello es posible que un alumno dedique 2/3 de su tiempo de los 16 a los 18 años, a estudiar matemáticas.

Los centros tienen que decidir si seguir un programa de matemáticas puras o uno que incluya mecánica o estadística, o ambos. Además tienen que decidir si ofrecerlo como dos asigna turas separadas para el pequeño número de alumnos para el que sería apropiada esta selección (en todo el país, el 55% de los alumnos de la carrera de matemáticas han tomado dos asignaturas de matemáticas en el nivel avanzado).

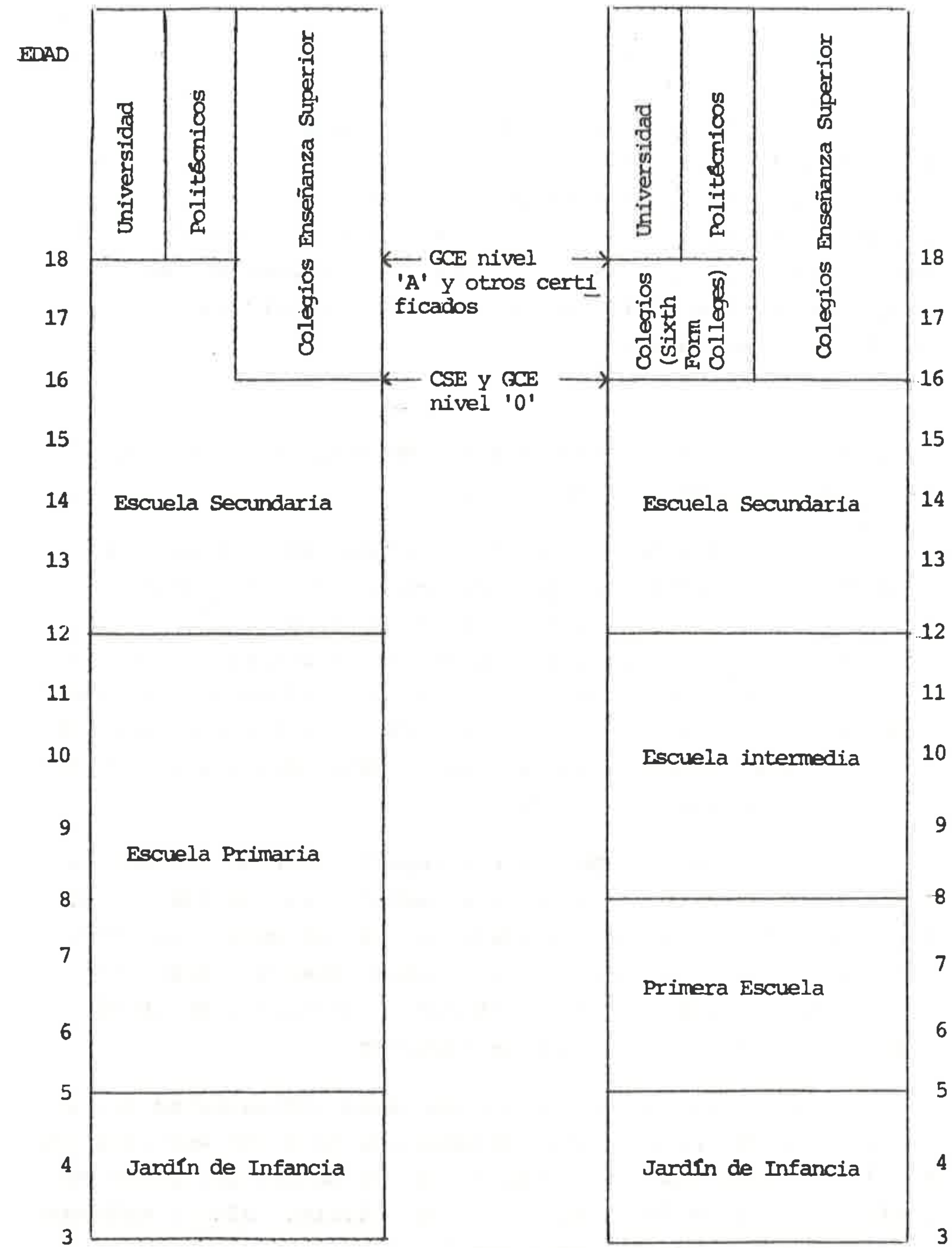
Un centro puede adoptar un programa que contenga o bien un cierto número de temas modernos, o una amplia selección de aplicaciones matemáticas, o ambos. Los programas, como en el caso del GCE nivel '0' han tendido por lo tanto a ser conocidos como tradicionales, intermedios o modernos, según el contenido, aunque las distinciones son cada vez más confusas.

Un gran número de centros ofrecen unos cursos modernos o intermedios para el nivel '0' y luego siguen con cursos tradicionales para el nivel 'A', en la creencia de que los cursos tradicionales son más aceptables en la educación superior (particularmente en ciencias o ingeniería) y que además son algo más fáciles de pasar.

Antes, las matemáticas a este nivel se estudiaban casi siempre con asignaturas de ciencias (lo típico era matemáticas, física y química). Ahora esto está cambiando ya que cada vez más carreras y ocupaciones requieren preparación matemática.

Las Matemáticas constituyen una asignatura muy solicitada en el nivel Avanzado, debido probablemente a que se le atribuye un gran valor en la universidad y en el mundo del trabajo. Sin embargo, se ha comprobado que a los alumnos en general no les gusta y que pocos alumnos disfrutan estudiando matemáticas a este nivel.

Muchos creemos que esto es así debido a que la enseñanza está muy orientada hacia los exámenes. Lo más frecuente es que el profesor presente un tema en la pizarra, pone un ejemplo y luego, mientras los alumnos hacen ejercicios basados en ese tema, va ayudándoles individualmente. La enseñanza es monótona y ajustada a una audiencia pasiva y poco crítica.



En 1978 el Gobierno nombró a un Comité para considerar la enseñanza de las matemáticas y hacer recomendaciones. Los miembros del Comité procedían de los círculos de la política, la empresa, la industria, el comercio y la educación y su Informe se publicó en 1982. Una de las principales conclusiones fue que la educación matemática que están recibiendo muchos alumnos no es satisfactoria por dos razones principales: i) los cursos no son adecuados para las necesidades de los alumnos, y ii) muchos profesores carecen de los conocimientos y cualificaciones necesarios.

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN INGLATERRA: ESTUDIO CRITICO Y SUGERENCIAS PARA EL CAMBIO

Las discusiones sobre el curriculum se centran en el tema de si es cierto que las experiencias de los alumnos son tan diversas y si puede existir algún curriculum válido para todos los alumnos hasta los 16 años. Si se acepta la necesidad de un gran tronco común, el problema está en diferenciar, tanto el contenido como la presentación de todas las materias de este tronco común, a la vez que se mantienen los elementos importantes accesibles a todos.

El sistema de exámenes externos ha sufrido ataques en los últimos años. El sistema de exámenes para los alumnos de 16 años está a punto de ser radicalmente reformado. La intención, en general, es suprimir el sistema dual GCE nivel '0' y CSE y sustituirlo por exámenes por asignaturas, destinados a alumnos en el 60% superior de capacidad.

Los métodos de evaluación han sido radicalmente revisados y los exámenes en muchas asignaturas no serán escritos. Entre las sugerencias están añadir más evaluación por parte del profesor, evaluación continua en los 2 últimos años y exámenes prácticos en muchas más materias.

Aunque la mayoría aplaude estos cambios, hay muchos sectores decepcionados porque el 40% inferior en capacidad aún no tiene ningún sistema reconocido para evaluar sus logros en 5 años de enseñanza secundaria.

El alto grado de especialización de los alumnos de "sixth form" (alumnos de alta capacidad entre 16 y 18 años) ha sido muy discutido en los últimos años. Un informe, publicado en 1978 recomendaba aumentar el número de materias a estudiar y necesariamente reducir el contenido de los cursos. La resistencia a esta propuesta ha sido enorme, por parte de los que temían que significaría un descenso de nivel (lo que en un sentido sería cierto) y también por parte de muchos en las Universidades que no querían aceptar alumnos más ampliamente educados a costa de menos conocimientos en sus especialidades. Las propuestas de reforma del sistema de exámenes a los 18 años han sido por tanto abandonadas y no es probable que resuciten en el futuro próximo. Sin embargo, muchos educadores lamentan el alto grado de especialización que resulta de nuestro sistema.

CONTENIDOS

En ese momento los programas de matemáticas de la mayoría de los alumnos de secundaria están fuertemente influidos por el contenido de los programas del GCE nivel '0' que están destinados únicamente para el 25% superior de los alumnos en capacidad para las matemáticas. Hace 20 años había grandes diferencias en los cursos de matemáticas que se ofrecían en los distintos colegios. Había pocas escuelas integradas y la mayoría de los alumnos estaban en una escuela de tipo preparatorio (grammar school) con cursos de matemáticas para el exámen GCE nivel '0' con un programa que incluía aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, o bien estaban en una escuela secundaria "moderna" cuyo programa consistía en aritmética y algo de geometría. Estos alumnos no se presentaban a ningún examen nacional.

El sistema CSE se introdujo en 1964 para ofrecer un examen a los alumnos de 16 años cuya capacidad en la asignatura que se trate está entre el 60% superior de la población. Por ello, muchos alumnos de las escuelas secundarias "modernas" que antes sólo estudiaban aritmética, pasaron a un programa más amplio.

Como la calificación 1 en el CSE se acepta como pase en el GCE nivel '0', desde el principio se han mantenido contenidos muy similares en los programas de CSE y GCE '0'. El crecimiento de la educación integrada significa que en cada centro hay alumnos preparando el GCE '0' y otros el CSE. En algún momento el alumno tiene que decidir y muchas escuelas prefieren posponer la decisión y permitir al alumno cambiar de curso si se ha equivocado. El resultado es que ambos programas contienen esencialmente los mismos temas. Además han aumentado ciertos temas de álgebra de cierta dificultad conceptual. Por tanto tenemos a un 80% de nuestros alumnos siguiendo programas parecidos en extensión y dificultad conceptual a los que seguían hace veinte años sólo el 25% de los alumnos.

Esto ha significado en muchos casos una enseñanza que en vez de facilitar la comprensión se concentra en ejercitar procesos rutinarios para resolver preguntas de examen. Los alumnos tienen que seguir programas con exceso de contenido y poco adecuados para su nivel. El resultado es que muchos alumnos carecen de seguridad en su uso de las matemáticas y no consiguen siquiera dominar las partes del programa que les son accesibles.

Muchos creemos que construir programas de "arriba a abajo" omitiendo unos cuantos temas y quitando profundidad a otros no es un buen sistema. Se debería construir de abajo a arriba a partir de lo que es apropiado para los menos capaces y extendiendo la amplitud y el nivel para los más capaces. Un principio fundamental debería ser el de no incluir ningún tema si no es posible mostrar aplicaciones que el alumno comprenda. Debería haber por tanto semejanzas y diferencias en los cursos de matemáticas seguidos por alumnos de distintos niveles de aptitud. Las semejanzas estarían en el núcleo común de matemáticas de las que todos tenemos experiencias y la estrategia de enseñanza. Las diferencias estarían en contenido adicional, profundidad de tratamiento, evaluación y distintos objetivos.

El Comité antes mencionado estableció una lista básica de temas que podrían constituir el programa para los alumnos en el 40% inferior de aptitud en matemáticas.

Reduciendo el contenido de los cursos para los niveles inferiores y diferenciando a partir de esta base como hemos visto, pensamos que se tendrán cursos con contenidos más adecuados para el nivel del alumno. Este no sólo tendrá más seguridad en el estudio de las matemáticas sino que conseguiría dominar el contenido que estudia. Por esto se espera que contribuya a mejoras en actitudes y nivel de confianza y por tanto elevará los niveles en general.

EL SISTEMA DE EXAMENES A LOS 16 AÑOS

Las propuestas para el nuevo sistema de exámenes a los 16 años se basan en el esquema antes mencionado de curriculum diferenciado.

En el nuevo sistema se adjudican siete calificaciones. La equivalencia con los sistemas existentes es esta:

Sistema Antiguo			Sistema Nuevo
GCE nivel '0'	A		1
	B		2
	C — CSE	1	3
		2	4
		3	5
		4	6
		5	7

Si se admite que el curriculum debe ser diferenciado, entonces no todos los alumnos tienen que tomar los mismos exámenes. La respuesta, en espera de aprobación por el ministro es ofrecer 3 tipos distintos de exámenes "orientados" hacia distintas calificaciones. Los mejores alumnos realizarían los exámenes A y B orientados al grado 2 (que sería apropiado para los alumnos que obtendrían 1,2 ó 3). El siguiente grupo tomaría los exámenes B y C, orientado al grado 4 (para alumnos que podrían obtener 3, 4 ó 5 aunque con la posibilidad de obtener 2). El nivel más bajo para el que estos exámenes son apropiados tomaría los exámenes C y D orientados al grado 6 (donde los alumnos podrían obtener 5, 6, 7).

Los exámenes escritos en matemáticas no pueden evaluar la capacidad para llevar a cabo trabajos prácticos o investigadores, etc. No pueden evaluar habilidades de cálculo mental, ni habilidad para discutir sobre matemáticas, ni perseverancia, ni creatividad. Esto sólo puede evaluarse en la clase y a lo largo de mucho tiempo. Además, los exámenes escritos animan al profesor a poner de relieve en sus clases el tipo de trabajo que se presenta en los exámenes. Por tanto se espera, aunque no con seguridad, que haya un elemento de evaluación del profesor en los exámenes nuevos.

Este nuevo sistema deja todavía al 40% de los alumnos sin un examen nacionalmente reconocido. Muchos creemos que los exámenes escritos incluso acompañados por un importante elemento de evaluación del profesor serían inadecuados para estos alumnos. Una sugerencia es darles una serie de tests que puedan intentar sucesivamente a partir de los 14 años. Cada nivel de test estaría relacionado con la comprensión de conceptos definidos y la habilidad para aplicarlos en problemas apropiados. El Gobierno está promoviendo un proyecto de investigación en este tema.

LOS METODOS DE ENSEÑANZA

Los resultados de la investigación muestran que en la enseñanza de las matemáticas se distinguen tres elementos: hechos y habilidades, estructuras conceptuales y estrategias generales y apreciación. Los "hechos" son muestras de información que son casi siempre arbitrarios y no conectados entre sí; por ejemplo, el convenio de que '34' significa tres decenas y cuatro unidades. Las "habilidades" incluyen no sólo los procesos usuales de cálculo en aritmética y álgebra, sino cualquier otro proceso bien conocido que, siempre es posible efectuar mediante una rutina. Estos no sólo deben ser comprendidos e incorporados a la estructura conceptual sino también ser traídos al nivel de recuerdo inmediato y buen funcionamiento mediante práctica constante.

Las "estructuras conceptuales" son conocimientos muy interconectados, constituyen la esencia de conocimientos matemáticos almacenados en la memoria central. Son básicos para el funcionamiento de las habilidades y su presencia se muestra en la habilidad de remediar un fallo de memoria o adaptar un proceso a una nueva situación.

Las "estrategias generales" son procedimientos que guían la selección de las habilidades a usar o el conocimiento a traer en cada estudio de la resolución de un problema o al llevar a cabo una investigación. Permiten acercarse a un problema con seguridad y con la convicción de que es posible una solución. Con ellas se asocia la "apreciación", que significa un reconocimiento de la naturaleza de las matemáticas y las actitudes hacia ella.

La enseñanza efectiva de las matemáticas a todos los niveles tiene que atender a estos tres aspectos. No es posible, ni recomendable, definir un determinado estilo para la enseñanza de las matemáticas, pero si esta enseñanza va a ser efectiva tiene que tener presentes ciertos elementos.

i) Exposición del profesor. Esto ha sido un ingrediente fundamental en las clases y debe ser así. Pero debería existir diálogo entre alumnos y profesor. Hay que tener en cuenta y responder a las preguntas que surgen.

ii) Discusión. La habilidad de "decir lo que piensas y pensar lo que dices" debería ser uno de los resultados de la buena enseñanza de las matemáticas. Esto se desarrolla mediante oportunidades de hablar sobre matemáticas, discutir resultados obtenidos y probar hipótesis. Los alumnos necesitan ayuda para establecer relaciones entre los distintos temas en matemáticas.

iii) Trabajos prácticos. No sólo son recomendables para alumnos de bajo nivel: todos los alumnos se benefician con la experiencia práctica. La diferencia está en qué tipo de actividad, duración, repetición, etc.

iv) Práctica. Todos los alumnos necesitan oportunidades para practicar los algoritmos y rutinas aprendidos para tenerlos a punto en la resolución de problemas o trabajo investigativo. La cantidad de práctica depende del alumno.

v) Resolución de problemas. Es la habilidad para aplicar las matemáticas a una variedad de situaciones. La solución de un problema no puede empezar hasta que está traducido en términos matemáticos, y esto es lo más difícil para los alumnos. El profesor tiene que ayudar en cada momento a comprender cómo se aplican los conceptos que se están aprendiendo y cómo se usan para resolver problemas.

vi) Trabajo investigador: No es necesario que las investigaciones sean largas o difíciles. Lo importante es que el profesor esté dispuesto a proseguir el camino cuando el alumno pregunta "¿podríamos hacer esto mismo con números distintos?" o "¿qué pasaría si...?". Lo esencial es que los alumnos sean motivados para pensar así. El profesor podría seguir alguna de estas pistas falsas en lugar de decir al principio que no llevan a ningún sitio.

MATEMATICAS PARA LOS 16 A 18 AÑOS

En los últimos años han influido dos factores en la composición del alumnado que sigue en el centro después de los 16 años. Uno es el aumento de aspiraciones educativas de la población y de la importancia que la industria y el comercio da a las cualificaciones educativas. El otro factor es el desempleo juvenil. Las matemáticas resultan afectadas por estos cambios ya que se considera una valiosa disciplina.

Los cursos menos adecuados son los de repetidores del GCE nivel '0' o del CSE. Los niveles previos de los alumnos pueden ser muy variados. Se está intentando desarrollar un curso en el que las matemáticas estén integradas con estudios de la comunicación, ciencias sociales y formación profesional. Creemos que este curso tendrá más éxito con los alumnos de bajo nivel. Estos alumnos no han decidido en general qué ocupación prefieren (si no fuera así habrían dejado el centro y estarían en Formación Profesional o Further Education).

Los actuales cursos de nivel 'A' son demasiado fuertes para algunos alumnos que quisieran seguir estudios de matemáticas más allá del nivel '0'. Estos alumnos pueden necesitar más matemáticas para estudiar otras materias. Se ha propuesto un nivel 'I' (Intermedio) entre el '0' y el 'A' que duraría dos años y que ocuparía la mitad del tiempo de un curso normal del nivel 'A'. Aunque la propuesta ha sido bien acogida hay dificultades para decidir el contenido más apropiado para la diversidad de alumnos que lo seguirían.

El curso avanzado de dos años tiene muchos problemas difíciles. Los centros pueden elegir de entre un gran número de programas distintos, aunque su número está actualmente decreciendo. Se están difuminando las diferencias entre los cursos "tradicionales" y "modernos" y aumenta el número de cursos "compromiso". El curso de nivel A tiene que cumplir dos requisitos difíciles de reconciliar. Tiene no sólo que proveer la base de estudios superiores en matemáticas y otras disciplinas pero además tiene que ser coherente y equilibrado y ofrecer adecuados "puntos finales" para aquellos que, al menos por ahora no van a seguir más allá. En la tradición inglesa, es importante que todos los cursos de nivel 'A' tengan un gran elemento de "matemáticas aplicadas". Así, todos los que estudian la asignatura, sea por si misma o por su utilidad en el estudio de otras materias, pueden tener una visión equilibrada de las matemáticas.

La dificultad que se presenta en los centros es el escoger un programa que contiene mecánica o estadística, o ambas. Esto puede resultar extraño a otros europeos pero el estudio de la mecánica en matemáticas, además de en física, tiene una larga tradición en Gran Bretaña. Se considera no sólo valioso para futuros ingenieros, sino atractivo para los alumnos -especialmente los chicos-.

La elección del área de aplicación a escoger se hace en función de la competencia del profesor y de las necesidades futuras de los alumnos. Como éstas son muy diversas, no resulta satisfactorio. Lo más conveniente sería incluir mecánica y estadística.

Los últimos intentos para hacer esto han llevado a programas excesivamente recargados para los alumnos. Esto es una

queja frecuente en todos nuestros programas de nivel 'A'. La presión para cubrir el programa lleva a muchos alumnos a la confusión y a ver las matemáticas como una serie de técnicas inconexas para responder preguntas de examen. Lleva a métodos de enseñanza que dependen demasiado en la exposición y a estilos de aprendizaje muy pasivos.

Dado que el tamaño de las clases en este nivel es pequeño (de 10 a 15 alumnos es lo normal) podrían desarrollarse técnicas de resolución de problemas, seguir investigaciones, discutir y comunicar ideas. Pero los profesores dicen que la amplitud de los programas lo impide.

Los centros tendrían que hacer más para preparar al alumno para el estudio independiente, mediante el desarrollo de técnicas de estudio.

Las matemáticas son un buen tema para hacerlo y tiene algunas técnicas que le son propias. Una lista de técnicas de estudio importantes en matemáticas incluiría: uso de libros de referencia y estudio, revisión y búsqueda eficiente de información, aprender de los fallos y enfrentarse al fracaso, hacer abstracciones y desarrollar hipótesis, diseñar estrategias para resolver problemas; descubrir el modelo subyacente y la estructura lógica, desarrollar un estilo conciso de expresión escrita usando símbolos y notación; apreciar y cultivar la elegancia en el argumento y el análisis.

PROFESORES DE MATEMATICAS

Los resultados de una encuesta del Gobierno de 1977 indicaban que el 21% de los que enseñan matemáticas en nuestras escuelas secundarias no tenían cualificaciones en la materia y 17% tenían poca cualificación. Esto significa que casi el 40% de la enseñanza de las matemáticas en nuestras escuelas estaba en manos poco apropiadas en aquel momento. Estas cifras son preocupantes. Significan que en todo el país faltan unos 5000 profesores de matemáticas y habría que apartar de la enseñanza de las matemáticas a otros 4000 cuyas cualificaciones en la asignatura son "escasas" de modo que el total es que faltan 9000 profesores de matemáticas cualificados. Ningún esfuerzo para mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas va a tener éxito si no se dispone de un número suficiente de profesores bien cualificados. En 1938 el 75% de los licenciados en matemáticas se dedicaban a la enseñanza. En 1964 este porcentaje era de 30% y en la actualidad del 10%. Esta situación no va a mejorar a no ser que se tomen medidas apropiadas ya que la demanda de licenciados en matemáticas por parte de la industria y el comercio está aumentando.

La baja proporción de licenciados en matemáticas que se dedican a la enseñanza podría deberse en parte a los salarios y a las posibilidades de promoción. Se han sugerido varios modos de mejorar el incentivo económico para llevar a la enseñanza a los licenciados en matemáticas, incluido el pagar más a los profesores de matemáticas que a los de otras asignaturas. Pero hasta el momento ninguna propuesta ha tenido aceptación.

FORMACION DEL PROFESORADO

De todo lo anterior resulta que cualquier mejora en la enseñanza de las matemáticas en nuestros centros debe basarse esencialmente en los esfuerzos de los profesores que ahora están en activo. Esto tiene implicaciones en la formación y perfeccionamiento del profesorado, que a su vez requiere un apoyo económico y de personal.

Los cursos son caros y no son el único medio de perfeccionamiento . Ahora estamos experimentando un tipo de perfeccionamiento en el centro, en el que los profesores de matemáticas de un centro son motivados para cooperar y ayudarse en el desarrollo profesional. En el futuro próximo espero conseguir que un pequeño número de excelentes profesores puedan dejar sus centros durante dos años e incorporarse a otras escuelas donde puedan actuar como catalizadores del cambio.

CONCLUSION

Se requieren cambios importantes para poder mejorar la enseñanza de las matemáticas. Los factores esenciales para efectuar estos cambios son la respuesta activa de los profesores, las autoridades locales y centrales, los consejos de exámenes y las institutciones de formación de profesorado. Existe una demanda reconocida de una población culta en el aspecto numérico y una creencia generalizada de que cada niño necesita desarrollar la comprensión de las matemáticas y confianza en su uso. Esto solo ocurrirá como resultado de una buena enseñanza de las matemáticas por parte de profesores preparados para su trabajo y que reciben un apoyo continuado de perfeccionamiento.

LAS MATEMATICAS EN EL BACHILLERATO ITALIANO

Por Paz Lucas Padín
I.B. Calderón de la Barca. Madrid.

Presentamos a continuación una breve síntesis de las orientaciones y contenidos que caracterizan hoy día las enseñanzas de Matemáticas en el Bachillerato italiano.

Comenzaremos por advertir que hace pocos años los programas eran bastante diferentes: se adaptaban a una orientación de origen francés, con marcada tendencia al formalismo. Al observar un aumento del fracaso escolar, se introdujo una nueva reforma, dando lugar al sistema actual.

Resaltaremos a continuación algunos de los datos que figuran implícitos en lo que sigue.

La disciplina de Matemáticas figura en los cuatro cursos, con una media de cuatro horas y media semanales. En todos los años hay una parte dedicada a la Geometría, incluyéndose así temas como la semejanza de polígonos, diversos lugares geométricos, sección aúrea, poliedros, etc. El estudio de los límites y el de la combinatoria se inicia a los 17 años, en el último curso; en cambio, el concepto de función se inicia, en forma clásica, a los 14 años, poniendo especial interés en conseguir un cierto adiestramiento en el manejo de las funciones elementales y las representaciones gráficas. No se encuentra ya una preocupación dominante por la construcción formal de la disciplina ni por la demostración detallada de todos los pasos, buscando más bien el desarrollo de las destrezas que necesita el alumno para enfrentarse a los problemas prácticos y en el de su intución, sin olvidar el apoyo instrumental al estudio de la Física.

Las orientaciones metodológicas oficiales se resumen en lo siguiente:

- La enseñanza de la Matemática tiene una incidencia fundamentalmente formativa para afinar y disciplinar la capacidad intelectiva.

- En el comienzo el profesor debe conciliar la tendencia a la indeterminación propia de los adolescentes con la síntesis y la precisión de la disciplina. No se debe agostar en un período inicial la iniciativa de los alumnos en aras de introducir un formalismo en un tiempo excesivamente breve.

- El ritmo del proceso del aprendizaje debe procurarse hacer para toda la clase y no sólo para unos pocos. El método a seguir será el de las aproximaciones sucesivas para lograr que el concepto sea perfectamente entendido poniendo de manifiesto toda su extensión. Se propondrán problemas de dificultad progresiva.

- Es conveniente mantener siempre vivo el interés y para ello debe jugar un papel preponderante la intuición. En las explicaciones se pondrán ejemplos de datos empíricos y de la realidad física evitando las nociones estáticas y rígidas o puramente lógicas que lesionan la intuición del alumno.

- El método intuitivo - dinámico está en estecho contacto con el proceso histórico y debe ser patrimonio del aprendizaje en la escuela secundaria reforzándose en la superior.

- Todo esto no significa que se deje en segundo plano el procedimiento analítico, deductivo e inductivo; la intuición y el análisis son complementarios. Una solución por vía intuitiva es bueno que venga comprobada con el método analítico.

Los cuestionarios oficiales para los cuatro cursos de Matemáticas son los siguientes:

1ª CLASE (14 años, 5 horas semanales)

ALGEBRA: Operaciones con números. Monomios: operaciones. Polinomios: adición y sustracción; producto y potencia; cociente de dos polinomios. Regla de Ruffini. Descomposición en factores. Fracciones algebraicas. Igualdades y desigualdades. Ecuaciones e inecuaciones de primer grado. Sistemas lineales. Referencia cartesiana ortogonal en el plano. Coordenadas cartesianas ortogonales. Concepto de función. Diagrama de una función. Representación gráfica y significado analítico de una ecuación lineal y de un sistema de ecuaciones lineales.

GEOMETRIA: Conceptos fundamentales. Triángulos: criterio de igualdad; propiedades principales. Rectas perpendiculares y paralelas. Polígonos, paralelogramos, circunferencias y relaciones. Equivalencia. Teoremas de Euclides y Pitágoras. Postulado de continuidad. Proporcionalidad. Semejanza de triángulos y polígonos Sección aúrea. Area de un polígono.

2ª CLASE (15 años, 5 horas semanales)

ALGEBRA: Números reales. Radicales: números complejos. Ecuaciones de segundo grado y de grado superior reducibles a éste. Sistemas de segundo grado y los reducibles a éste. Ecuaciones paramétricas. Sistemas mixtos. Inecuaciones de segundo grado y sistemas. Resolución de problemas con aplicaciones del Algebra a la Geometría. (Estas resoluciones proseguirán hasta el final del curso).

GEOMETRIA ANALITICA DEL PLANO: Método de las coordenadas cartesianas ortogonales, concepto general. La recta. Las cónicas. La elipse, la hipérbola y parábola. La circunferencia.

3ª CLASE (16 años, 4 horas semanales)

ALGEBRA: Potencias con exponente real. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Progresiones.

GEOMETRIA ANALITICA: Resumen de los conceptos fundamentales y de las cónicas en particular. Lugares geométricos. Funciones exponencial y logarítmica.

TRIGONOMETRIA: Funciones circulares; propiedades y representación gráfica. Ecuaciones trigonométricas. Identidades. Fórmulas para la adición y sustracción. Fórmulas para la multiplicación y teoremas del ángulo mitad. Inecuaciones trigonométricas. Resolución de triángulos planos. Aplicaciones de la trigonometría a la geometría analítica.

GEOMETRIA RACIONAL EN EL ESPACIO: Rectas y planos perpendiculares y paralelos. Angulos. Diedros y Poliedros.

4ª CLASE (17 años, 4 horas semanales)

ANALISIS MATEMATICO: Límites. Números reales. Límites de sucesiones y funciones. Teoremas sobre límites de funciones. Operaciones con límites. Función continua. Aplicaciones.

Derivada de una función. Concepto. Derivada de alguna función y teorema sobre la derivada de una función compuesta. Derivada de la función inversa. Operaciones con derivadas. Teoremas de Rolle, Cauchy, Lagrange y L'Hôpital, diferencial de una función. Estudio local.

Cálculo integral: integral definida, significado geométrico. Teoremas relativos a la integral indefinida. Casos simples de integración. Cálculo de áreas y volúmenes (de cuerpos en rotación) mediante la integración.

Cálculo combinatorio. Binomio de Newton. Aplicación de los elementos de geometría analítica y de trigonometría estudiados a la resolución y discusión de problemas.

GEOMETRIA RACIONAL EN EL ESPACIO: Equivalencia de sólidos. Sólidos de rotación.

CUESTIONARIOS OFICIALES DE LAS MATEMATICAS QUE SE IMPARTEN EN LOS "GYMNASIUM" DE LA REPUBLICA FEDERAL ALEMANA

Nuestro compañero Ochoa Mélida ha recopilado los cuestionarios de Matemáticas vigentes en la Enseñanza Media de la República Federal Alemana, que ofrecemos a continuación. Después de cada tema, entre paréntesis, se expresa el número de horas de clase que se le destinan (total en el curso). Los alumnos de la Clase 5 tienen normalmente de 10 a 11 años.

CLASE 5: Números naturales (52). Experiencias geométricas fundamentales (24). Medidas, cálculos (28). Exámenes (16). Total, 120 horas.

CLASE 6: Divisibilidad de números naturales (20). Números fraccionarios (44). Números fraccionarios en forma decimal (20). Cálculo de magnitudes (20). Angulo y círculo; congruencia (30). Exámenes (16). Total, 150 horas.

CLASE 7: Proporcionalidad (30). Construcciones fundamentales de la Geometría (28). Números racionales (30). Variables y ecuaciones (16). Exámenes (16). Total, 120 horas.

CLASE 8: Variables, ecuaciones e inecuaciones (45). Congruencias y figuras (45). Funciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales (30). Probabilidades (14). Exámenes (16). Total, 150 horas.

CLASE 9 (CIENCIAS): Números reales (25). Funciones cuadráticas y raiz cuadrada (15). Ecuaciones cuadráticas y con radicales (27). Areas y teorema de Pitágoras (27). Semejanza (25). Tema electivo: Vectores en forma in tuitiva o Elementos de Informática (15). Exámenes (16). Total, 150 horas.

CLASE 9 (LETRAS): Números reales (16). Ecuaciones cuadráticas (22). Areas y teorema de Pitágoras (20). Homotecia (10). Elementos de Informática (10). Exámenes (12). Total, 90 horas.

CLASE 10 (CIENCIAS): Función potencial (34). Funciones exponencial y logarítmica (20). Longitudes y áreas de figuras circulares (10). Representación y cálculo de áreas de sólidos (30). Funciones trigonométricas (40). Exámenes (16). Total, 150 horas.

CLASE 10 (LETRAS): Función potencial (25). Funciones exponencial y logarítmica (12). Longitudes y áreas de figuras circulares (7). Areas de sólidos (9). Funciones trigonométricas (25). Exámenes (12). Total, 90 horas.

CLASE 11 (CIENCIAS): Rectas, segmentos y ángulos en sistemas cartesianos (10). Funciones (12). Límites, continuidad, derivadas (30). La problemática de las funciones en los ejemplos de las funciones racionales (28). Tema electivo: Algebra de Boole, o bien Números Complejos, o bien Cónicas (28). Exámenes (12). Total, 120 horas.

CLASE 11 (LETRAS): Rectas, segmentos y ángulos en sistemas cartesianos (10). Funciones (12). Límites, continuidad, derivadas (30). La problemática de las funciones en los ejemplos de las funciones racionales (28). Complementos, repaso y ejercicios (28). Exámenes (12). Total, 120 horas.

CLASE 12 (CURSO BASICO): Análisis.- Introducción al cálculo integral (20). Continuación del cálculo diferencial e integral en el dominio de las funciones racionales y exponenciales (40). Repaso de análisis (5). Exámenes (6). Total análisis, 71 horas.

Optativo para el profesor: Geometría Analítica o Estocástica

Geometría Analítica.- Vectores (10). Recta y plano en forma paramétrica (14). Forma normal de la recta y del plano (14). Circunferencia y esfera (19). La elipse como transformada afín de la circunferencia (19). Exámenes (6). Total Geometría Analítica, 82 horas.

Estocástica.- Probabilidades (28). Distribución binomial (29). Estadística inductiva (muestras) (19). Exámenes (6). Total Estocástica, 82 horas.

Total clase 12 (curso básico), 153 horas.

CLASE 12 (CURSO DE CAPACITACION): Análisis.- Introducción al cálculo integral (18). Continuación del cálculo diferencial e integral en el dominio de las funciones racionales, irracionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas (71). Métodos de iteración(10). Repaso de análisis (10). Exámenes (9). Total análisis, 110 horas.

Optativo para el profesor: Geometría Analítica y Estocástica o Estocástica y Geometría Analítica

Geometría Analítica y Estocástica.- Sistemas de ecuaciones lineales (10). Espacio vectorial (10). Geometría afín en el espacio intuitivo (20). Geometría métrica en el espacio intuitivo (26). Aplicaciones afi nes del plano euclídeo (33). Probabilidades (14). Distribución binomial (15). Exámenes (9). Total Geometría Analítica y Estocástica, 137 horas.

Estocástica y Geometría Analítica.- Probabilidades (28). Variable aleatoria (15). Distribuciones especiales (23). Estadística inductiva (muestras) (33). Geometría analítica en el espacio intuitivo (29). Exámenes (6). Total Estocástica y Geometría Analítica, 134 horas.

Total clase 12 (curso de capacitación), 244 ó 247 horas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Invitamos a nuestros socios a que nos envíen sus soluciones a los siguientes problemas propuestos en diversas Olimpiadas Matemáticas Internacionales:

PROBLEMA 1ª

En una sucesión finita de números reales, la suma de siete términos consecutivos cualesquiera es negativa y la suma de once términos consecutivos cualesquiera es positiva. Determinar el número máximo de términos de la sucesión.

(Propuesto en 1977).

PROBLEMA 2ª

Sea $f(n)$ una función definida sobre el conjunto de los enteros positivos y que toma sus valores sobre ese conjunto. Demostrar que si $f(n+1) > f(f(n))$ para todo n, es $f(n) = n$.

(Propuesto en 1977).

PROBLEMA 3ª

Se da un prisma cuyas bases son los pentágonos $A_1A_2A_3A_4A_5$ y $B_1B_2B_3B_4B_5$. Cada lado de esos pentágonos y cada uno de los segmentos rectilíneos A_iB_j, para todos los $i,j = 1,2,\dots, 5$ recibe uno de los dos colores rojo o verde. Todos los triángulos cuyos vértices son vértices del prisma y cuyos lados han sido coloreados, tienen dos lados de diferente color. Demostrar que los diez lados de las dos bases tienen el mismo color.

(Propuesto por Bulgaria en 1979).

PROBLEMA 4ª

Dos circunferencias de un plano se cortan. Sea A uno de sus puntos de intersección. Dos puntos se mueven partiendo simultáneamente de A, con velocidades constantes, cada uno sobre una de las circunferencias, en el mismo sentido. Los dos puntos regresan a A a la vez, después de una revolución. Probar que existe un punto P fijo en el plano, tal que en todo momento las distancias de P a ambos puntos permanecen iguales entre sí.

(Propuesto por U.R.S.S. en 1979).

PROBLEMA 5ª

Sea $1 \leq r \leq n$ y consideremos todos los subconjuntos de r elementos del conjunto $\{1,2,\ldots, n\}$. Consideremos también el mínimo número de cada uno de esos subconjuntos. Representemos con $F(n,r)$ la media aritmética de esos números mínimos. Probar que

$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}$$

(Propuesto por R.F. Alemana en 1981).

PROBLEMA 6ª

Probar que toda partición del espacio tridimensional en tres subconjuntos disjuntos tiene la siguiente propiedad: por lo menos en uno de los tres subconjuntos se realizan todas las distancias; es decir, para todo $\underline{a} \in R$, existen en dicho subconjunto dos puntos M y N tales que la distancia de M a N es igual a $\underline{a}$.

(Sugerido por U.R.S.S. para 1983).

PROBLEMAS RESUELTOS

CORRIGENDA

En las tres primeras líneas de la página 64 del número 4 de este Boletín se deslizaron dos erratas. Deben decir:

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x+y+z)$$

Esta desigualdad se puede escribir en la forma

$$(xy^3 + yz^3 + zx^3)\ (x+y+z) \geq [\sqrt{xyz}(x+y+x)]^2$$

SOLUCIONES RECIBIDAS CORRESPONDIENTES A PROBLEMAS DE LA XXV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS (PRAGA, 1984) QUE FUERON PROPUESTOS EN NUESTRO BOLETIN Nª 4

PROBLEMA 1ª

x,y,z son números reales no negativos, tales que $x+y+z = 1$. Demostrar que

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

- ▪ - ▪ - ▪ -

Solución:

1ª) $xy + yz + xz - 2xyz = xy(1-z) + yz(1-x) + xz \geq 0.$

2ª) Uno de los tres números x,y,z, ha de ser menor o igual a $\frac{1}{3}$. Supongamos que sea z. Entonces

$$xy + yz + xz - 2xyz = xy(1-2z) + z(x+y) \leq$$

$$\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (1-2z) + z(x+y) =$$

$$= \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 (1-2z) = \frac{1}{4}(-2z^3+z^2+1) = F(z)$$

Ahora bien, $F'(z) = \frac{3}{2}\, z(\frac{1}{3} - z) > 0$ para $0 < z < \frac{1}{3}$, y por tanto, $F(z)$ es creciente en todo el intervalo $(0,\frac{1}{3})$, alcanzándose el valor máximo de $F(z)$ para $z = \frac{1}{3}$. En consecuencia,

$$xy + yz + xz - 2xyz \leq F(\tfrac{1}{3}) = \frac{7}{27}$$

Carlos Ueno Jacue
Alumno de 3ª de B.U.P. (Instituto "Cervantes"). Madrid

Otras soluciones a este problema de:

Anastasio Gonzáles del Mazo.- Mota del Cuervo.
Salvador Calvo-Fernández Pérez.- Ciudad Real.
Vicente Mendiola.- Ciudad Real.

PROBLEMA 2ª

Encontrar un par de enteros estrictamente positivos (a,b) que verifiquen las condiciones:

i) El producto ab(a+b) no es divisible por 7.
ii) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ es divisible por 7^7.

Justifica la respuesta.

- ■ - ■ - ■ -

Solución

La expresión $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ se puede escribir en la forma:

$$(a+b)^7 - (a+b).(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 + b^6) =$$

$$= (a+b).(7a^5b + 14a^4b^2 + 21a^3b^3 + 14a^2b^4 + 7ab^5) =$$

$$= 7ab(a+b).(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) =$$

$$= 7ab(a+b).(a^2 + ab + b^2)^2$$

Como este producto es múltiplo de 7^7 y ab(a+b) no lo es, $(a^2+ab+b^2)^2$ será múltiplo de 7^6, y en consecuencia a^2+ab+b^2 será múltiplo de 7^3 (= 343); el problema se reduce a resolver la ecuación

$$a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{343}$$

pero como $342 \equiv -1 \pmod{343}$,

$$a^2 + ab + b^2 \equiv (a + 19b).(a - 18b) \pmod{343}$$

Ahora bien,

$$(a + 19b).(a - 18b) \equiv 0 \pmod{343} \quad ,$$

sí uno de los dos factores es $\equiv 0 \pmod{343}$, o si el producto de ambos es múltiplo de 343; es decir;

A) $a+19b \equiv 0 \pmod{343}$, da lugar a las soluciones:

$$a = -19b + 343k \text{ con } k \in Z,\ b > 0,\ b \not\equiv 0(7) \text{ y } k > \frac{19b}{343}$$

B) $a-18b \equiv 0 \pmod{343}$; da lugar a las soluciones:

$$a = 18b + 343h \text{ con } h \in Z,\ b > 0,\ b \not\equiv 0(7) \text{ y } h > \frac{-18b}{343}$$

C) $a+19b = 7m + 343k$ y $a-18b = 7^2n + 343h$; restando da,

$$37b = 7(m + 49k - 7n - 49h)$$

con lo que habría de ser $b = \dot{7}$, en contra de lo supuesto.

D) $a+19b = 7^2m + 343k$ y $a-18b = 7n + 343h$; tampoco conduce a soluciones, por la misma razón.

Las soluciones del problema son, por tanto, las dadas en A) y B). Una de ellas es (utilizando B, con $b=1$, $h=0$):

$$a = 18 \ , \quad b = 1$$

(En realidad, A) y B) dan los mismos pares de números, intercambiando a por b).

Salvador Calvo-Fernández Pérez
Ciudad Real.

Otra solución a este problema de:
Carlos Ueno Jacue.

PROBLEMA 4ª

En un cuadrilátero convexo A B C D, CD es tangente a la circunferencia de diámetro AB. Demostrar que la recta AB es tangente a la circunferencia de diámetro CD si y sólo si BC y AD son paralelas.

- ▪ - ▪ - ▪ -

Solución

El cuadrilátero A B C D de la Fig. 1 cumple las condiciones del enunciado.

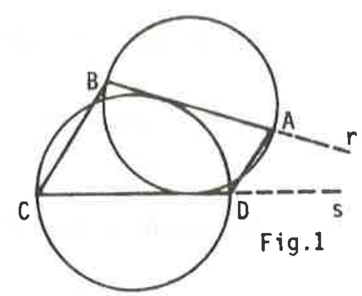


Fig.1

Consideremos en general dos semirrectas r, s, que contienen los

diámetros AB y CD de sendas circunferencias que sean tangentes a la otra (Fig. 2). Las figuras formadas por ambas semirrectas y cada una de las semicircunferencias son semejantes, pues una se obtiene de la otra mediante una simetría respecto a la bisectriz del ángulo formado por las semirrectas, seguida de una homotecia. De esa semejanza se infiere que

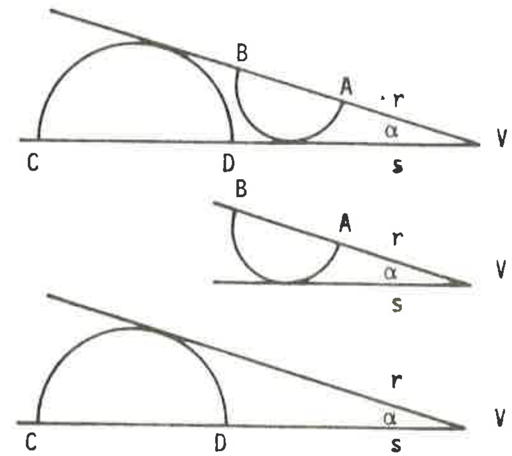


Fig. 2

$$\frac{VA}{VD} = \frac{VB}{VC}$$

y, en consecuencia, por el teorema de Thales, el paralelismo de AD y BC.

Recíprocamente, del paralelismo de esas rectas, se deduce la proporción, y la circunferencia simétrica respecto a la bisectriz de la homotética de la de diámetro AB con razón VD/VA (tangente a s) será tangente a r, c.d.d.

David Corbella Barrios

Otra solución a este problema de:
Anastasio González del Mazo.- Mota del Cuervo.

¡¡ESPERAMOS VUESTRAS SOLUCIONES

A LOS PROBLEMAS

3, 5 Y 6!!