SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN N.º 39
FEBRERO DE 1995

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS
DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

ISSN: 1135-0261

La confección de este número ha estado a cargo de J. Fernández Biarge.

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L. - San Pedro, 23 bis - 28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: 611 59 94 - Fax: 611 59 88.

La portada de este número reproduce una fotografía de un eminente científico español, **Blas Cabrera Felipe** (Arrecife, 1878; México, 1945). Con motivo del 50 aniversario de su fallecimiento, este año está previsto celebrar la exposición «Blas Cabrera, vida y obra de un científico» (enero-junio) y el congreso «Blas Cabrera, su vida, su tiempo, su obra» (5 al 12 de noviembre). El boletín de la Sociedad «Puig Adam» ha considerado oportuno dedicarle la portada del primer número correspondiente a 1995.

Toda la correspondencia deberá dirigirse al
APARTADO núm. 9479 MADRID-28080.

ÍNDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

José Javier Etayo Gordejuela

Vicepresidentes:

Eugenio Roanes Macías	(Madrid)
Salvador Herrero Pallardo	(Castilla-La Mancha)
Juan Bosco Romero Márquez	(Castilla-León)

Vocales:

José Vicente García Sestafe	(Actividades y concursos)
José Manuel Martinez Sánchez	(Relaciones institucionales)
Carmen García-Miguel Fernández	(Gestión de publicaciones)
Julio Fernández Biarge	(Redacción de publicaciones)

Secretario:

Francisco González Redondo

Vicesecretario:

Miguel Angel Gallardo Ortiz

Tesorero:

Alberto Aizpún López

Bibliotecario:

Eugenio Roanes Lozano

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 1995

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas correspondiente a 1995 para el día 6 de mayo de 1995, en los locales de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid, edificio «Pablo Montesino», sito en la calle Santísima Trinidad, 37, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos
4. Informe y toma de decisiones sobre la relación de nuestra sociedad con la Federación Nacional de Sociedades de Profesores de Matemáticas
5. Elección de nuevos cargos directivos, si procede
6. Asuntos de trámite
7. Ruegos y preguntas

¡¡Esperamos tu asistencia!!

XIII Concurso de Resolución de Problemas de Matematicas

Convocado por:

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras de Madrid

BASES

PRIMERA

Podrán participar en el Concurso los alumnos de B.U.P., E.S.O. y F.P. en tres niveles:

a) Primer nivel: alumnos de 1.º B.U.P., 3.º E.S.O. y F.P. I
b) Segundo nivel: alumnos de 2.º B.U.P., 4.º E.S.O. y primer curso de F.P. II
c) Tercer nivel: alumnos de 3.º B.U.P., 1.º Bachillerato y segundo y tercer cursos de F.P. II

SEGUNDA

Las pruebas consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles) y se realizarán en Madrid, en un solo dia, el 24 de junio de 1995 a partir de las 10 horas.

TERCERA

Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.

CUARTA

Los Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del dia 24 de mayo de 1995, dirigiéndose por carta sin certificar a esta Sociedad, Apartado de correos núm. 9.479, 28080-MADRID. En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados.

QUINTA

Se comunicará directamente a los centros preinscritos el lugar de realización de las pruebas. Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar el curso en que están matriculados en el año académico 1994-95 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

Febrero de 1995

Este Concurso cuenta con la colaboración de Coca Cola España.

I Reunión Puig Adam

La Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas celebrará una sesión científica bajo el nombre de **«I Reunión Puig Adam»** con el objeto de ir preparando el Congreso del Centenario Puig Adam que se realizará en su momento con el realce debido.

Esta Reunión se desarrollará en el marco del III Simposio «Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra» con el carácter de Jornada Monográfica, dentro de la semana del 24 al 28 de abril de 1995, en el Patronato Municipal de Cultura, Camino de las Huertas, s/n, Pozuelo de Alarcón.

Quedan invitados nuestros socios a participar en esta I Reunión Puig Adam mediante comunicaciones sobre cualquier aspecto que consideren relevante de la actividad de don Pedro Puig Adam o de los campos de interés de éste.

Para cualquier consulta o propuesta en relación con la sesión, pueden dirigirse nuestros socios al Sr. Secretario de esta Sociedad. Se ruega que en caso de desear participar se le haga llegar un resumen del trabajo antes del 1 de abril.

Junta de Gobierno de la Federación

La Junta de Gobierno de la Federación de Sociedades de profesores de Matemáticas celebró una reunión en Madrid el pasado día 22 de octubre de 1994, en la que nuestra Sociedad estuvo representada por el tesorero, Prof. D. Alberto Aizpún.

Haremos a continuación un resumen de los aspectos más relevantes de la reunión.

El representante de la Sociedad Extremeña informó de que ya está editado el libro que recoge los trabajos de las VI JAEM. Se remitirán ejemplares a las Sociedades contra reembolso, que ascenderá exclusivamente a los gastos de franqueo.

Sobre las actividades previstas para el curso 1993/94, el Secretario informó de que no se celebró el Seminario sobre «Psicología y Matemáticas». Tampoco se celebró en abril, pero se esperaba desarrollarlo antes de fin de año, el «Encuentro sobre Formación Permanente del Profesorado», y sí se celebró el Seminario sobre «Lenguaje y Matemáticas», cuyos trabajos se recogieron en el número 16 de SUMA, que tenía carácter monográfico.

En cuanto a publicaciones, ha aparecido la primera, sobre la Olimpiada de Educación General Básica, cuyo coste ha sido de 500.000 pesetas, sufragadas en parte por Texas Instruments que aportó 400.000. El Grupo Anaya ha entregado 200.000 pesetas, que se han empleado en el envío de «ene-ágono».

El tesorero comunicó que la federación tenía en el día de la fecha un saldo favorable de 500.000 pesetas, pero la Sociedad que organizó la última Olimpiada de E.G.B. ha presentado un deficit de 700.000 pesetas.

Por último, la Sociedad Andaluza informó sobre el ICME 8. El plazo de inscripción se ha ampliado hasta el final de las JAEM (septiembre de 1995), y costará 30.000 pesetas a los miembros de las Sociedades federadas, y 40.000 al resto de los participantes.

Título Propio de Experto en Educación Matemática

Diversos grupos de profesionales de la enseñanza se han dirigido en el pasado reciente a autoridades y personas representativas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense exponiendo su interés en que esta facultad tuviese una presencia más activa en todo lo referente al mundo de la Educación matemática.

El curso pasado, el decano convocó a personas interesadas en la cuestión a una serie de reuniones que desembocaron en la propuesta, por parte de la facultad, de un TÍTULO PROPIO DE EXPERTO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA que ha empezado a impartirse el presente curso 1994-95.

El título consta de 25 créditos (250 horas lectivas) distribuidos en materias dirigidas, por una parte, a proporcionar una formación en aspectos de importancia creciente en el campo de la didáctica de la matemática que son de indudable interés para llevar a cabo los objetivos del nuevo ordenamiento educativo y, por otra, a ofrecer una actualización científica, para licenciados no especialistas, en diferentes campos de la matemática que sean de particular interés por sus posibles implicaciones y usos en la enseñanza. Concretamente, se están impartiendo las siguientes materias:

1. *Geometría Proyectiva*
   Juan Tarrés Freixenet
   40 horas (4 créditos)
2. *Resolución de Problemas*
   Miguel Guzmán y María Luz Calleja
   40 horas (4 créditos)
3. *La Construcción del pensamiento matemático: Las estructuras del análisis*
   Baldomero Rubio
   20 horas (2 créditos)
4. *Geometrías No-Euclideas: Una introducción histórica*
   Mariano Martínez Pérez
   20 horas (2 créditos)
5. *La evolución de la noción de integral en el siglo XIX*
   Fernando Bombal
   10 horas (1 crédito)

6. *Probabilidad y Estadística*
Eusebio Gómez Sánchez-Manzano, Javier Montero, Luis Sanz y Juan A. Tejada
20 horas (2 créditos)

7. *El ordenador en la enseñanza de las Matemáticas*
Eugenio Roanes Macías y Eugenio Roanes Lozano
20 horas (2 créditos)

8. *Las matemáticas en la educación obligatoria*
María Paz Bujanda
20 horas (2 créditos)

9. *Teoría de los números*
Carmen Corrales
10 horas (1 crédito)

10. *Introducción a la modelización en matemática aplicada*
Jesús Ildefonso Díaz
10 horas (1 crédito)

11. *Introducción a la teoría general de la relatividad*
Eduardo Aguirre
10 horas (1 crédito)

12. *Los computadores y las matemáticas*
Ricardo Peña
10 horas (1 crédito)

13. *Sistemas dinámicos*
José Manuel Vegas y Carlos Fernández Pérez
20 horas (2 créditos)

Se otorgará el mencionado título de experto a quien complete los 25 créditos, pero es posible matricularse en cualquier número de materias del programa y obtener certificados de asistencia y aprovechamiento en materias sueltas, cuando ello proceda a juicio de los correspondientes profesores.

Carlos Fernández Pérez
Director del Curso del Título Propio.

Noticias sobre Olimpiadas Matemáticas

IX OLIMPIADA IBERO-AMERICANA DE MATEMATICA
Fortaleza (Brasil) - 1994

La *9.ª Olimpiada Ibero-americana de Matemática* se celebró en la ciudad brasileña de Fortaleza, en los días 17 al 25 de septiembre de 1994, a continuación del *Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas en el Nivel Medio.*

Las pruebas de la Olimpiada se realizaron los días 20 y 21 y el día 22 se desarrolló la competición por equipos, formándose éstos con cuatro estudiantes de diferentes nacionalidades. Los cuatro alumnos españoles fueron acompañados por los profesores don Francisco Bellot Rosado y don José V. Aymerich Miralles.

Se propusieron, como de costumbre, **seis** problemas, cuyos enunciados pueden verse en la sección de **Problemas Propuestos** de este Boletín, para resolverlos en dos sesiones, de cuatro horas y media cada una.

Cada problema fue calificado con una puntuación de 0 a 10, por lo que cada alumno podía obtener **un máximo de 60 puntos**. Las medallas de oro se otorgaron a partir de los 43 puntos, las de plata a partir de los 30 y las de bronce de 21 en adelante.

Los estudiantes españoles tuvieron los siguientes resultados:

Antonio ROJAS LEON, de Sevilla	**58 puntos (ORO)**
Javier GARCIA de BRINGAS, de Córdoba	**26 puntos (BRONCE)**
Jerónimo ARENAS GARCIA, de Sevilla	**15 puntos**
Miguel Anxo BERMUDEZ CARRO, de Galicia	**14 puntos**

Debemos destacar el nuevo éxito del estudiante sevillano **Antonio ROJAS LEON**, que con 58 puntos de los 60 posibles (cinco dieces y un ocho), fue el ganador absoluto de la Olimpiada, 8 puntos por encima de sus inmediatos seguidores, representantes de Chile y Brasil. Recordaremos que este alumno obtuvo también medalla de ORO en la

VIII Olimpiada Iberoamericana celebrada en Méjico y medalla de PLATA en la XXXIV Olimpiada Internacional de Estambul, pero este año cumplía los requisitos para concurrir de nuevo a la Iberoamericana. En la Olimpiada Española de 1993 alcanzó el tercer puesto y en la de 1994 participó fuera de concurso obteniendo la máxima puntuación.

El alumno **Javier GARCIA DE BRINGAS,** obtuvo una Mención Honorífica en la última Olimpiada Internacional. Fue el 5.º clasificado en la Olimpiada Española de este año. **Jeronimo ARENAS GARCIA**, que también obtuvo Mención Honorífica en la Internacional, formó parte del equipo ganador de la Prueba por Equipos en esta Iberoamericana.

La **Copa Puerto Rico,** que premia al país con mayor progresión en las tres últimas olimpiadas, fue ganada por Brasil.

XXXI OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA
Primera Fase (Madrid)

Las pruebas de la PRIMERA FASE de la *«XXXI Olimpiada Matemática Española»* correspondientes al curso 1994-95 y a los distritos de Madrid, se han celebrado en los días 2 y 3 de diciembre de 1994.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española*, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*. Podían participar en ella los alumnos matriculados en C.O.U., en el último curso de Formación Profesional de segundo grado, 2.º curso del 2.º ciclo de Bachillerato Experimental (Reforma), tercer curso de B.U.P. y 1.º y 2.º curso del bachillerato L.O.G.S.E.

La Olimpiada se desarrolla en dos fases: la Primera tiene lugar en los distintos distritos, de los que dos de ellos corresponden a Madrid; los tres ganadores de cada uno son propuestos a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio para la concesión de un premio en metálico y son invitados a participar en la Segunda Fase. Los mejores clasificados en ésta, además de recibir los premios correspondientes, servirán de base para formar los equipos que representarán a España en las próximas olimpiadas internacionales.

La mencionada Segunda Fase se realizará en *Castellón de la Plana* los días 24 y 25 de febrero de 1995 (los concursantes de las Islas Canarias la harán simultáneamente en La Laguna).

Como de costumbre, las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de cuatro horas de duración cada una, en las que se propusieron ocho problemas, cuyos enunciados pueden verse en nuestra sección de *Problemas Propuestos* de este mismo Boletín. De ellos, los seis primeros son los mismos que se propusieron esos mismos días en la mayor parte de los distritos españoles.

Las pruebas de los dos distritos que corresponden a todas las Universidades de nuestra Comunidad, se realizaron conjuntamente, y a ellas concurrieron 116 alumnos.

Cada problema se calificó con un máximo de *10 puntos*, por lo que había una posibilidad teórica de obtener *80 puntos*. El nivel medio de preparación de los asistentes ha sido este año muy bajo, ya que las dos terceras partes de ellos no superaron los cuatro puntos en total. No obstante, hubo excepciones notables, lo que permitió al Jurado seleccionar a los seis ganadores, cuyos nombres damos a continuación, por orden de puntuación obtenida:

1. **D. Pedro CASATEJADA HERRERA,**
   del C.O.U. del Colegio de San Viator, de Madrid .... 39 puntos
2. **D. Antonio Jesús MORENO HERNANDO,**
   del C.O.U. del Colegio Santísima Trinidad de Alcorcón .... 38 puntos
3. **D. Félix SALCEDO URESTE,**
   del C.O.U. del Colegio Retamar de Pozuelo (Madrid)...................... 36 puntos
4. **D. Alejandro GARCIA GIL,**
   del C.O.U. del Instituto de Bachillerato «Miguel Delibes» de Madrid .... 31 puntos
5. **D. Fernando REY MARTIN,**
   del C.O.U. del Instituto de Bachillerato «Joaquín Turina» de Madrid .... 28 puntos
6. **D. Alberto PORTAL RUIZ,**
   del C.O.U. del I. de B. «Manuela Malasaña» de Móstoles (Madrid).. 25 puntos

Nos complace señalar que **Pedro Casatejada** fue premiado en nuestro **Concurso de Resolución de Problemas** de 1993, como alumno de 2.º de B.U.P., que **Félix Salcedo** lo fue en 1993 como alumno de 2.º y en 1994 como alumno de 3.º, y que **Alejandro García** quedó campeón como alumno de 3.º en 1994 y **Fernando Rey** campeón como alumno de 2.º en 1993. Una vez más queda probado cómo nuestros Concursos constituyen un aliciente importante en la preparación para las competiciones olímpicas.

Los problemas propuestos han resultado algo más difíciles que otros años, por lo que los resultados han sido bastante malos en general. No apareció ninguna solución totalmente correcta de los problemas 1.º, 6.º, 7.º y 8.º. Damos a continuación las puntuaciones medias alcanzadas (máximo, 10 puntos) por todos los participantes, por los seis ganadores y por los tres primeros:

Problema n.º	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**5.º**	**6.º**	**7.º**	**8.º**
Puntuación media:								
de todos:	0,2	1,0	0,6	0,6	0,4	0,1	0,3	0,4
de los 6 primeros:	1,2	7,8	5,5	7,7	4,2	0,5	2,8	3,2
de los 3 primeros:	0,0	7,0	10,0	9,0	3,3	0,0	3,3	4,3

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADOS EN ESTE BOLETIN

Concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad

Núm.	(Año)	Convocado en Boletín	Crónica/enunciados
I	(1983)	1	2, pág. 11
II	(1984)	3	4, pág. 7
III	(1985)	5	7, pág. 3
IV	(1986)	9	10, pág. 5
V	(1987)	13	15, pág. 3
VI	(1988)	17	19, pág. 17
VII	(1989)	20	22, pág. 9
VIII	(1990)	24	26, pág. 3
IX	(1991)	27	29, pág. 3
X	(1992)	30	32, pág. 3
XI	(1993)	33	34, pág. 9
XII	(1994)	36	38, pág. 3
XIII	(1995)	39	

Olimpiada Matemática Española

Núm.	(Año)	1.ª fase (distritos)	2.ª fase (final)
XX	(1984)	—	3, pág. 77
XXI	(1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII	(1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII	(1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV	(1987-88)	6, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV	(1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61
XXVI	(1989-90)	24, págs. 11 y 67	25, págs. 9 y 73
XXVII	(1990-91)	27, págs. 7 y 77	28, págs. 17 y 79
XXVIII	(1991-92)	30, págs. 19 y 67	31, págs. 11 y 81
XXIX	(1992-93)	33, págs. 5 y 71	34, págs. 17 y 71
XXX	(1993-94)	36, págs. 9 y 75	37, págs. 13 y 109
XXXI	(1994-95)	39, págs.	

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Núm.	(Año)	Lugar	Crónica y enunciados en Boletín n.º
I	(1986)	Colombia	8, págs. 11 y 83
II	(1987)	Paraguay	12, págs. 3 y 75
III	(1988)	Perú	18, págs. 5 y 73
IV	(1989)	Cuba	21, págs. 11 y 63
V	(1990)	España (Valladolid)	26, págs. 13 y 73
VI	(1991)	Argentina	30, págs. 15 y 65
VII	(1992)	Venezuela	32, págs. 11 y 71
VIII	(1993)	Méjico	35, págs. 5 y 65
IX	(1994)	Brasil	39, págs. y

Olimpiada Matemática Internacional

Núm.	(Año)	Lugar	Crónica y enunciados en Boletín n.º
XXIV	(1983)	París	2, pág. 15
XXV	(1984)	Praga	4, pág. 67
XXVI	(1985)	Helsinski	7, págs. 9 y 89
XXVII	(1986)	Varsovia	10, pág. 11
			11, pág. 89
XXVIII	(1987)	Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX	(1988)	Australia	19, págs. 23 y 77
XXX	(1989)	Alemania (R.F.A.)	22, págs. 15 y 73
XXXI	(1990)	China	26, págs. 11 y 71
XXXII	(1991)	Suecia	29, págs. 11 y 79
XXXIII	(1992)	Rusia	32, págs. 9 y 69
XXXIV	(1993)	Turquía	35, págs. 3 y 63
XXXV	(1994)	Hong-Kong	38, págs. 9 y 79

Dos lecciones con DERIVE

Josef Böhm

Nota de los editores:

En este número del Boletín de la Sociedad «Puig Adam», comenzamos una sección fija dedicada a colaboraciones de profesores extranjeros.

Nuestro primer invitado es el profesor Josef Böhm. El profesor Böhm obtuvo un master en Matemática y Geometría Descriptiva por la Universidad Técnica de Viena. Desde 1968 ejerce como profesor de la «Handelsakademie» (centro de enseñanza secundaria) en St. Polzen (Austria).

El profesor Böhm ha utilizado durante varios años, entre otros programas, el sistema de cómputo algebraico «DERIVE» como auxiliar en sus clases.

Fundó en 1991 el «DERIVE User Group» y es el editor de su boletín (y «alma mater», junto con su esposa Noor, de ambos).

Es, en resumen, una autoridad en el uso de DERIVE en el aula.

A continuación incluimos dos lecciones («teaching units»), que nos remite el profesor Böhm, de aplicación de DERIVE en la clase de matematicas. Son acerca del binomio de Newton la primera y sobre MCD y MCM la segunda.

LECCION A
THE BINOMIAL THEOREM

We want to calculate — to expand — higher powers of binomials, like

$(4x^2y - 3xy^3)^8 = ?$ How can we do this with DERIVE?

Edit the expression, then press **E** for **Expand** and the **ENTER-key**, because we don't need any special expansion.

The result is impressive! What is the calculation time? ....

If you press the **Ctrl-key** together with the **→ - key** you are able to shift the expression so that you can see the full result. The **← - key (+ Ctrl)** will bring you back again.

Write down here the 1st term of the expression: ....

the 4th one: .... and the last one: ....

Let now DERIVE expand the powers of $(a + b)$ and note only the coefficients of the terms. (Write down the numbers neatly one beneath the other):

$n = 4$: $(a + b)^4$:

$n = 5$: $(a + b)^5$:

$n = 6$: $(a + b)^6$:

$n = 7$: $(a + b)^7$:

If you believe to recognize a system, then add two lines more (for n = 8 and 9). Check the numbers with DERIVE. If you don't see a system, then don't worry, let DERIVE do the work.

Complete the scheme of numbers upwards ($n = 3, 2, 1$)

How should the prime line (for $n = 0$) look like? ....

Which conclusion can be drawn from this line? Check it!

....

Write down the numbers from the coefficients scheme in form of a triangle:

($n = 0$)				1		
($n = 1$)			1		1	
($n = 2$)		1		2		1
($n = 3$)						
($n = 4$)						
($n = 5$)						
($n = 6$)						
($n = 7$)						
($n = 8$)						
($n = 9$)						
($n = 10$)						
($n = 11$)						

Can you find now (or again) an obvious scheme?

We call this triangle of numbers **Pascal's Triangle** (Blaise Pascal, 1623-1662; but this triangle is found in a Chinese paper from 1303 a.c.)

Form the sum of the numbers in each line!

What can you notice? ....

Are you able to proof this facts? (A hint: substitute a suitable number for a and b!)

....

Look now at the exponents of a and b in the terms of the expansions of the first five powers of $(a + b)$. Do you see a rule?

Try to calculate $(a + b)^8$ using **Pascal's Triangle** and the rule from above:

$(a + b)^8$ = ...

Prove your knowledge once more: $(2x + 3y)^5$ (doing it by hand only!):

$(2x + 3y)^5$ = ...

Expand the terms:

....

Check your result using DERIVE:

Expand $(a + b)^5$, then substitute the values $2x$ and $3y$ for a and b. Do this in the following way:

Highlight the result of $(a + b)^5$, then press **Manage**, **Substitute**. DERIVE asks you to substitute each variable occuring in the activated term. If you don't want to substitute any variable then press ENTER. Otherwise write the substituting value instead of the offered variable.

Here for a: $2x$ and for b: $3y$. Compare the result with your one. Using **Expand** you will obtain a final result. The shorter way would be: **Expand** immediately $(2x + 3y)^5$.

Try with: $(4z + 2u)^6$ = ... =

= ....

Compare with the computers result!!

What is the effect of the changed sign in $(a - b)^n$? Write down your observations in your own words: ....

Exercises: Calculate by hand and check the results using DERIVE:

$(z + 4)^6$ = ... =

= ....

$(4x^2y - 3xy^3)^8$ = ... =

= ....

$(5ab + 2b^2)^9$ the 3rd term is: ....; the 7th term is: ....

$(2u + 1{,}5a)^5 =$ ....

Find a way to expand $(3a^2 - 2ab + b^2)^5$ (without DERIVE)?

....

The rule to expand the powers of binomials is called

the Binomial Theorem

The numbers of Pascal's Triangle have fascinated the mathematicians ever since. On the next pages you will have the opportunity to experiment with these numbers.

Using a felt-tip pen mark all the even numbers in Pascals Triangle. Look at the pattern, which occurs:

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 496 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1
1 17 136 680 2380 6188 12376 19448 24310 24310 19448 12376 6188 2380 680 136 17 1
1 18 153 816 3060 8568 18564 31824 43758 48620 43758 31824 18564 3568 3060 816 153 18 1
1 19 171 969 3876 11628 27132 50388 75582 92378 92378 75582 50388 27132 11628 3876 969 171 19 1
1 20 190 1140 4845 15504 38760 77520 125970 167960 184756 167960 125970 77520 38760 15504 4845 1140 190 20 1
```


Mark all the numbers which are divisible by 3. You will create a new pattern!

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 496 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1
1 17 136 680 2380 6188 12376 19448 24310 24310 19448 12376 6188 2380 680 136 17 1
1 18 153 816 3060 8568 18564 31824 43758 48620 43758 31824 18564 3568 3060 816 153 18 1
1 19 171 969 3876 11628 27132 50388 75582 92378 92378 75582 50388 27132 11628 3876 969 171 19 1
1 20 190 1140 4845 15504 38760 77520 125970 167960 184756 167960 125970 77520 38760 15504 4845 1140 190 20 1
```

Here you can find a fine example of «Self similarity», a property which is an object of many investigations in the very modern «Chaos Theory».

Supported by DERIVE you can create many different pictures originated from Pascal's Triangle.

Load the Utility-file BINOM.MTH (**Transfer Load Utility BINOM**) and use the functions prepared for you. To see as many as possible from the triangle, change the displays settings to obtain small characters:

Option Display; Reso: High, Text: Small, Set: Extended

For DERIVE Version 3:

PASC_DIV3(n,a) — creates the first n rows of Pascal's Triangle; each element divisible by a will be represented by a 0, all the other ones by a 1. (eg: **PASC_DIV(15,2)**). Which n's are fitting onto the screen?

PASC_REM3(n,a,r) — produces n rows too, and returns a «r» on each position where the division by a gives the remainder r. (eg: **PASC_REM3(20,5,2)**).

PASC_REMS3(n,a) — returns the first n rows showing on each position the remainders of the division by a.

With Shift + F9 you can produce a copy on your printer. (Turn on your printer!!) Take a larger triangle and colour same remainders with same colours. You will receive interesting pictures.

For older versions take the equivalent functions (the pictures are nicer, because the character · is needed for special purposes in Version 3).

PASC_DIV(n,a); PASC_REM(n,a,r); PASC_REMS(n,a); you can use the DERIVE 3 - functions, too, but not reverse.

The file Datei BINOM.MTH

```
PASC_DIV3(n, a) := VECTOR([j, [VECTOR(IF(MOD(COMB(j, k), a) /= 0, 1, 0), k, 0, j)]], j, 0, n)
PASC_REM3(n, a, r) := VECTOR([j, [VECTOR(IF(MOD(COMB(j, k), a) = r, r, 0), k, 0, j)]], j, 0, n)
PASC_REMS3(n, a) := VECTOR([j, [VECTOR(MOD(COMB(j, k), a), k, 0, j)]], j, 0, n)
PASC_DIV(n, a) := VECTOR([j, [VECTOR(IF(MOD(COMB(j, k), a) /= 0, ■, ·), k, 0, j)]], j, 0, n)
PASC_REM(n, a, r) := VECTOR([j, [VECTOR(IF(MOD(COMB(j, k), a) = r, r, ·), k, 0, j)]], j, 0, n)
PASC_REMS(n, a) := VECTOR([j, [VECTOR(MOD(COMB(j, k), a), k, 0, j)]], j, 0, n)
```


Here we create the first 25 rows, all coefficients which are not divisible by 3 are represented by a dark spot.

```
PASC_DIV(25, 3)
 0                          [■]
 1                         [■ ■]
 2                        [■ ■ ■]
 3                       [■ · · ■]
 4                      [■ ■ · ■ ■]
 5                     [■ ■ ■ ■ ■ ■]
 6                    [■ · · ■ · · ■]
 7                   [■ ■ · ■ ■ · ■ ■]
 8                  [■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■]
 9                 [■ · · · · · · · · ■]
10                [■ ■ · · · · · · · ■ ■]
11               [■ ■ ■ · · · · · · ■ ■ ■]
12              [■ · · ■ · · · · · ■ · · ■]
13             [■ ■ · ■ ■ · · · · ■ ■ · ■ ■]
14            [■ ■ ■ ■ ■ ■ · · · ■ ■ ■ ■ ■ ■]
15           [■ · · ■ · · ■ · · ■ · · ■ · · ■]
16          [■ ■ · ■ ■ · ■ ■ · ■ ■ · ■ ■ · ■ ■]
17         [■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■]
18        [■ · · · · · · · · ■ · · · · · · · · ■]
19       [■ ■ · · · · · · · ■ ■ · · · · · · · ■ ■]
20      [■ ■ ■ · · · · · · ■ ■ ■ · · · · · · ■ ■ ■]
21     [■ · · ■ · · · · · ■ · · ■ · · · · · ■ · · ■]
22    [■ ■ · ■ ■ · · · · ■ ■ · ■ ■ · · · · ■ ■ · ■ ■]
23   [■ ■ ■ ■ ■ ■ · · · ■ ■ ■ ■ ■ ■ · · · ■ ■ ■ ■ ■ ■]
24  [■ · · ■ · · ■ · · ■ · · ■ · · ■ · · ■ · · ■ · · ■]
25 [■ ■ · ■ ■ · ■ ■ · ■ ■ · ■ ■ · ■ ■ · ■ ■ · ■ ■ · ■ ■]
```

The next «PASCAL picture» shows all the coefficients giving the remainder 2 when divided by 4:

PASC_REST(20, 4, 2)

```
 0                     [ · ]
 1                    [ · · ]
 2                   [ · 2 · ]
 3                  [ · · · · ]
 4                 [ · · 2 · · ]
 5                [ · · 2 2 · · ]
 6               [ · 2 · · · 2 · ]
 7              [ · · · · · · · · ]
 8             [ · · · · 2 · · · · ]
 9            [ · · · · 2 2 · · · · ]
10           [ · 2 · · 2 · 2 · · 2 · ]
11          [ · · · · 2 2 2 2 · · · · ]
12         [ · · 2 · · · · · · · 2 · · ]
13        [ · · 2 2 · · · · · · 2 2 · · ]
14       [ · 2 · · · 2 · · · 2 · · · 2 · ]
15      [ · · · · · · · · · · · · · · · · ]
16     [ · · · · · · · · 2 · · · · · · · · ]
17    [ · · · · · · · · 2 2 · · · · · · · · ]
18   [ · 2 · · · · · · 2 · 2 · · · · · · 2 · ]
19  [ · · · · · · · · 2 2 2 2 · · · · · · · · ]
20 [ · · 2 · · · · · 2 · · · 2 · · · · · 2 · · ]
```


LECCION B
GREATEST COMMON DIVISOR AND LEAST COMMON MULTIPLE (GCD AND LCM)

Using the command **Factor** you are able to factorize (almost) any large number easily into its primes. Let's take for example the nice number 844074000! Edit the number and then press the **F-key** for **Factor**. Note the outcome:

844074000 = ...

(1) Using this tool you can easily find the GCD of 844074000, 4765246200 and 45585540000.

844074000 = ...
4765246200 = ...
45585540000 = ..., hence: GCD = ... = ...

If the number which you have found now should be the GCD then all the quotients of the given numbers and the «may be» - GCD must not have any prime in common. Please proof that now:

844074000 : GCD = ... = ... (factorize!)

4765246200 : GCD = ... = ...

45585540000 : GCD = ... = ...

true ? (yes / no) ....

If your answer is no, then correct your result!

Calculate and check in a similar way the GCDs:

(2) GCD $(328563a^3\, b^4\, c^5\, d^2,\ 247104a^2\, b^3\, c^4,\ 93085200\, a^4\, b^2\, d^6) =$
(For factorizing the coefficient you first have to highlight the number as a subexpression and then factorize!)

....

(3) $\text{GDC}\left(\begin{array}{l} 900\,(a+b)^3\,(a-b)^2\,(a^2-b^2)^2,\ 1000\,(a^2+b^2)\,(a^2-b^2)\,(a^3-b^3), \\ 500\,(a^3+b^3)^2\ (a^3+b^3)\ (a^2+b^2)^2 \end{array}\right) =$

= ....

(Hint: Use Factor Rational!!)

(4) GCD $(36a^6+12a^5b-47a^4b^2-14a^3b^3+12a^2b^4+2ab^5-b^6,$
$54a^8-27a^7b-63a^6b^2+34a^5b^3+8a^4b^4-7a^3b^5+a^2b^6,$
$18a^5b^2-39a^4b^3+20a^3b^4+6a^2b^5-6ab^6+b^7) =$

= ....

But .... DERIVE knows a function called **GCD**.

(5) Let GCD(844074000, 45585540000, 4765246200) be calculated!
(Author: GCD(844.......); then **Simplify)**

= ....

(6) Now try:

$$\mathbf{GCD}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \text{..}$$

$$\mathbf{GCD}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) = \text{..}$$

$$\mathbf{GCD}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{17}{3}\right) = \text{..}$$

Interpret the results:

(7) Our next task is to find the Least Common Multiple of the numbers from (1):
LCM(844074000,.....) = ...

(8) Consider a check similar to that for the GCD! Write down your suggestion:

Find the LCMs for (2), (3) and (4). Check the results!

(9) **LCM**(data 2) = ...

(10) **LCM**(data 3) = ...

(11) **LCM**(data 4) = ...

(12) Using the **Help - Command,** try to find a suitable function. Choose any example and check the function!

....

The function is: ....

(13) Can you find a sense for this function in connection with rational numbers?

(14) I state: the LCM of two terms *a* and *b* - **LCM(a,b)** can easily be obtained from the **GCD(a,b)** together with the expressions *a* and *b*! Try to find the rule!

Work systematically! Begin your considerations with smaller numbers and try to state a conjecture!

a = ...; b = ...; **GCD(a,b)** = ...; **LCM(a,b)** = ...

a = ...; b = ...; **GCD(a,b)** = ...; **LCM(a,b)** = ...

a = ...; b = ...; **GCD(a,b)** = ...; **LCM(a,b)** = ...

a = ...; b = ...; **GCD(a,b)** = ...; **LCM(a,b)** = ...

If you believe that you have found the correct idea, then check it using two examples from sheet 1 or 2:

Notate your idea as a mathematical formula:

LCM (a,b) =

Formulate it in your own words:

Here at last you find space enough for a correct mathematical proof, because some examples dont proof the validity of your conjecture for each case!!

Algunas observaciones sobre las álgebras de Boole (finitas) de partes de un conjunto y proposicional

Luis M. Laita*
Eugenio Roanes Lozano**

* *Dep. Inteligencia Artificial, Fac. de Informática (Univ. Politécnica Madrid)*
***Sec. Deptal. Algebra, Fac. de Educación (Univ. Complutense Madrid)*

Abstract

Las álgebras de Boole que se suelen tratar en Matemática Elemental son el álgebra de Boole de partes y el álgebra proposicional.

Usualmente se define el Algebra de Partes tomando un conjunto referencial finito *E*, y definiendo en *P(E)* dos operaciones binarias (unión e intersección) y una operación uno-aria (complementario). Sin embargo, el Algebra Proposicional se suele definir a partir de las variables proposicionales (un número finito) y sus negaciones. El conjunto de todas las proposiciones, *C*, se genera mediante las operaciones binarias disyunción y conjunción y la operación uno-aria negación.

En un álgebra de Boole se puede definir a partir de las operaciones un orden. El orden en *P(E)* es el contenido no estricto y en *C* la implicación.

* e-mail: laita @fi.upm.es
** e-mail: roanes2@eucmvx.sim.ucm.es

Ambas estructuras no son equivalentes: $(C, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow)$ es isomorfo a un caso muy particular de $(P(E), \cup, \cap, ', \subseteq)$ cuando el número de elementos de E es de la forma 2^n. Ello se obtiene caracterizando los átomos de C,que son 2^n si se define C a partir de n variables proposicionales, consecuencia de lo cual el número total de elementos de C es $2^{(2^n)}$.

La exposición no requiere técnicas sofisticadas.

1. Atomos y elementos maximales de un álgebra de Boole

1.1. Introducción

1.1.1. Definición.—Un *retículo* es una terna $(R, \cup, \cap,)$ donde R es un conjunto, y $\cup$ y $\cap$, son dos operaciones definidas en R, que verifican (ambas) las propiedades conmutativa y asociativa y cada una de ellas es cancelativa respecto de la otra.

Un *álgebra de Boole* es un retículo distributivo y complementario.

1.1.2. Proposición.—A partir de un retículo podemos definir un orden reticular (un orden parcial tal que, dados dos elementos cualesquiera x, y, existe el supremo y el ínfimo de $\{x, y\}$). Recíprocamente, a partir de un orden reticular podemos definir un retículo [*Ro*].

1.1.3. Idea.—Usualmente se define el álgebra de partes tomando un conjunto (finito) E, determinando E por extensión

$$E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$$

(esto es, dando los átomos del retículo —ver 1.2.1 y 1.2.2—) y considerando el álgebra de Boole $(P(E), \cup, \cap, ', \subseteq)$.

Normalmente se define el álgebra de proposiciones dando las variables proposicionales $p, q, ..., r$, a partir de las cuales se construyen todas las proposiciones mediante $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (esto es, dando unos elementos generadores del retículo, pero «intermedios» desde el punto de vista de la ordenación, es decir, que no son átomos ni maximales, salvo en el caso extremo de que exista una única variable proposicional). Se considera entonces el álgebra de Boole: $(C, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow)$ donde C es el conjunto de proposiciones.

Representaremos con $\underline{1}$ la tautología y con $\underline{0}$ la contradicción.

Pues bien, veremos como, de las construcciones anteriores, la primera es más general que la segunda.

1.1.4. Observación.—En el anillo de polinomios $I\!R\,[x]$ hay distintas formas de expresar un mismo elemento, por ejemplo

$$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1) = -1 + x^2 = -1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 = ...$$

Realmente se suele llamar $I\!R[x]$ al cociente $I\!R[x]/=$.

Análogamente, hay distintas formas de expresar un mismo elemento de $P(E)$, por ejemplo

$$A = A \cup \varnothing = A \cup A = A \cap E = ...$$

Usualmente se denomina $P(E)$ al cociente $P(E)/=$.

También hay distintas formas de expresar una misma proposición, por ejemplo

$$a \leftrightarrow a \vee \underline{0} \leftrightarrow a \vee a \leftrightarrow a \wedge \underline{1} \leftrightarrow ...$$

y denominaremos simplemente C a lo que realmente es $C/\leftrightarrow$. Así queda precisado a qué nos referimos cuando hablamos del número de elementos del álgebra proposicional.

1.2. Átomos y maximales

1.2.1. Definición.—Sea $b \in C$, b distinto de la contradicción. Se dice que b es un *átomo syss*.

$$x \rightarrow b \Rightarrow [x \leftrightarrow b] \text{ ó } [x \leftrightarrow \underline{0}]$$

(esto es, si b es un elemento minimal para la ordenación).

1.2.2. Consecuencia.—Definiendo análogamente los átomos de $P(E)$, resultan ser los conjuntos unitarios (el ínfimo del retículo es $\varnothing$).

1.2.3. Definición.—Sea $a \in C$, a distinto de la tautología. Entonces a es un *elemento maximal syss*

$$a \rightarrow x \Rightarrow [x \leftrightarrow a] \text{ ó } [x \leftrightarrow \underline{1}]$$

(esto es, si a es un elemento maximal para la ordenación).

1.2.4. Consecuencia.—Definiendo análogamente los maximales de $P(E)$, resultan ser los conjuntos con un elemento menos que E (que es el supremo del retículo).

1.2.5. Proposición.—i) En C: b es un átomo $\Leftrightarrow \neg b$ es maximal.
ii) En $P(E)$: B es un átomo $\Leftrightarrow B'$ es maximal.

Demostración.—i) $\Rightarrow$) Basta tener en cuenta que $\forall c, d \in C$

$$c \longrightarrow d \Leftrightarrow \neg d \longrightarrow \neg c$$

y por ser b átomo, resulta

$$\forall x \in C, \neg b \longrightarrow \neg x \Rightarrow [\neg x \leftrightarrow \neg b] \text{ ó } [\neg x \leftrightarrow \neg \underline{0}]$$

Como $\forall c \in C$: $\neg(\neg c) \longrightarrow c$, todo elemento es la negación de algún elemento, luego la implicación anterior puede expresarse

$$\forall y \in C, \neg b \longrightarrow y \Rightarrow [y \leftrightarrow \neg b] \text{ ó } [y \leftrightarrow \neg \underline{1}]$$

esto es $\neg b$ es un maximal.

i) $\Leftarrow$ Análogo.
ii) Trivial a partir de 1.2.2 y 1.2.4.

1.3. Caracterización de los átomos y maximales

1.3.1. Definición.—Un *literal* es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

1.3.2. Lema.—En el álgebra de Boole de proposiciones $(C, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow)$, donde C es el conjunto de las proposiciones generadas a partir de las variables proposicionales $p_1, p_2, ..., p_n$ (y sus negaciones), los elementos de la forma

$m_1 \wedge m_2 \wedge ... \wedge m_n$ (donde cada m_i es, o bien p_i o bien $\neg p_i$) son átomos.

Demostración.—Supongamos que

$$a = m_1 \wedge m_2 \wedge ... \wedge m_n; \quad m_i = p_i \text{ O } m_i = \neg p_i$$

Vamos a probar que a es un átomo. Sea d un elemento cualquiera de C. Como d es una proposición generada a partir de las variables proposicionales, por distributividad, se puede escribir en la forma

$$d = b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_r$$

donde las b_i son conjunciones de literales. Entonces

$$a \wedge d \longleftrightarrow a \wedge (b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_r) \longleftrightarrow (a \wedge b_1) \vee (a \wedge b_2) \vee ... \vee (a \wedge b_r)$$

Para cada $a_i \wedge b_i$ hay dos posibilidades:

i) En b_i no aparece ningún literal distinto de los que aparecen en a. Entonces

$$a \wedge b_i \longleftrightarrow a$$

ii) En b_i aparece algún literal distinto de los que aparecen en a. Entonces tendremos algo como

$$a \longleftrightarrow p_i \wedge ...; \; b_1 \longleftrightarrow (\neg p_i) \wedge ...$$

luego

$$a \wedge p_i \longleftrightarrow \underline{0}$$

Y por tanto, como d era la disyunción de las b_i, se verifica

$$a \wedge d \longleftrightarrow a \text{ o bien } a \wedge d \longleftrightarrow \underline{0}$$

En consecuencia, si tenemos $d \longrightarrow a$, entonces $a \wedge d \longleftrightarrow d$, luego debe ser

$$d \longleftrightarrow a \quad \text{o bien} \quad d \longleftrightarrow \underline{0}$$

es decir, a es un átomo.

1.3.3. Lema.—En el álgebra de Boole de proposiciones $(C, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow)$, donde C es el conjunto de las proposiciones generadas a partir de las variables proposicionales $p_1, p_2, ..., p_n$ (y sus negaciones), los átomos son la forma

$$m_1 \wedge m_2 \wedge ... \wedge m_n$$

donde cada m_i es, o bien p_i o bien $\neg p_i$ (es el recíproco del Lema anterior).

Demostración.—Sea a un átomo. Como a es una proposición generada a partir de las variables proposicionales, por distributividad, a se puede escribir en la forma

$$a = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_r$$

donde las b_i son conjunciones de varias variables proposicionales y negaciones de variables proposicionales (y supondremos que ninguna b_i es superflua, e.e., ninguna b_i es $\underline{0}$). Como $\forall c \in C$

$$c \rightarrow c \vee \dots$$

en particular

$$b_1 \rightarrow b_1 \vee \dots$$

luego

$$b_1 \rightarrow a$$

Pero suponemos que b_1 no es equivalente a $\underline{0}$, luego como a es un átomo (por hipótesis), de la definición de átomo

$$a \rightarrow b_1$$

Repitiendo el razonamiento para $b_2, \dots, b_r$, obtendremos que a es una conjunción de literales.

1.3.4. Teorema.—En el álgebra de Boole de proposiciones $(C, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow)$, donde C es el conjunto de las proposiciones generadas a partir de las váriables proposicionales $p_1, p_2, \dots, p_n$ (y sus negaciones), a es átomo syss es de la forma

$$m_1 \wedge m_2 \wedge \dots \wedge m_n$$

donde cada m_i es, o bien p_i o bien $\neg p_i$.

Dualmente: b es maximal syss es de la forma

$$m_1 \vee m_2 \vee \dots \vee m_n$$

donde cada m_i es, o bien p_i o bien $\neg p_i$.

2. Número de elementos de las álgebras proposicional y de partes

2.1. Número de elementos minimales y maximales de las álgebras proposicional y de partes

2.1.1. Proposición.—El número de átomos de las álgebras de Boole de partes de un conjunto puede ser cualquier número natural, mientras que el número de átomos de las álgebras de Boole de proposiciones es de la forma 2^n, donde n es el número de variables proposicionales. Suponemos ambas álgebras de Boole definidas en el modo usual.

Demostración.—En $(P(E), \cup, \cap, ', \subseteq)$ el número de átomos es el número de elementos de E (y por tanto la única restricción es que sea un natural).

Si las variables proposicionales de C son $p_1, p_2, \dots, p_n$ entonces, según el teorema anterior, los átomos de C son de la forma

$$m_1 \wedge m_2 \wedge \dots \wedge m_n; \quad m_i = p_i \quad \text{o} \quad m_i = \neg p_i$$

y son todos distintos entre sí, luego existen, exactamente, 2^n de ellos, y por tanto siempre hay un número par de átomos.

Dualmente, hay 2^n elementos maximales en C.

2.2. Número de elementos de las álgebras proposicional y de partes

2.2.1. Ejemplo.—Consideremos el álgebra proposicional C generada por las variables proposicionales p, q (y sus negaciones). Podemos considerar como modelo del álgebra proposicional C el álgebra de partes $P(E)$ si hacemos $E=\{\alpha, \beta, \gamma, \rho\}$ y llamamos, por ejemplo, $A = \{\alpha, \beta\}$ y $B = \{\alpha, \gamma\}$ e identificamos la proposición p con $[x \in A]$ y q con $[x \in B]$.

Basta para ello tener en cuenta que

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in E: x \in A \vee x \in B\} \\ A \cap B &= \{x \in E: x \in A \wedge x \in B\} \\ A' &= \{x \in E: x \notin A\} \end{aligned}$$

y observar que los átomos (elementos minimales) de $P(E)$ serán

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \rho$$

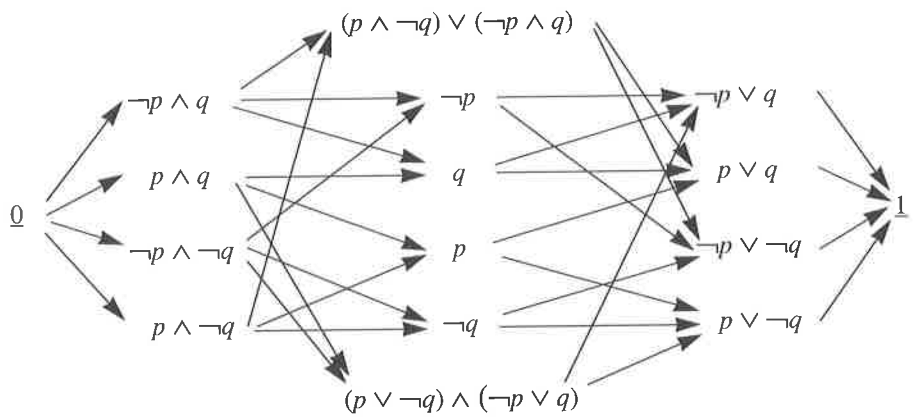
y se corresponden, respectivamente, con los átomos de C

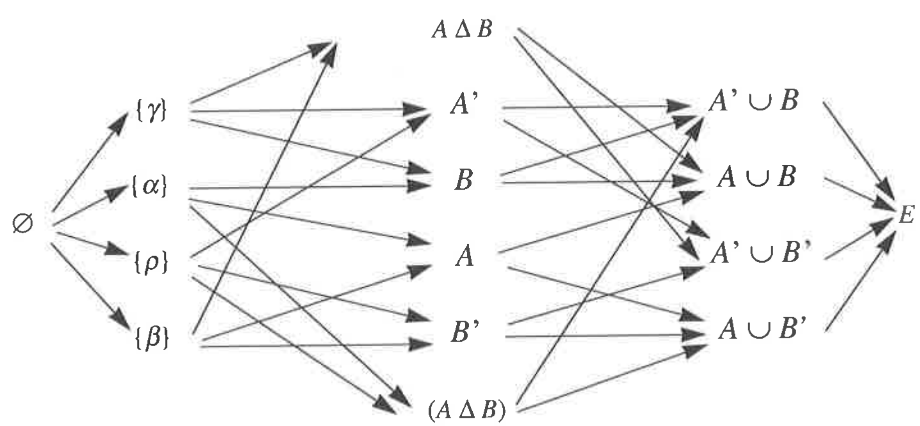
$$p \wedge \neg q, \ p \wedge q, \ \neg p \wedge q, \ \neg p \wedge \neg q,$$

luego se trata de dos álgebras de Boole isomorfas.

Para justificar que se trata de un isomorfismo, basta tener en cuenta que hemos hecho corresponder los átomos de una y otra, que se corresponden las operaciones y que $\subseteq$ se corresponde con $\to$ (pues si $M = \{x \in E: r\}$ y $N = \{x \in E: s\}$ entonces: $M \subseteq N \Leftrightarrow r \to s$).

Los diagramas correspondientes a $\to$ y $\subseteq$ serán, respectivamente





donde con Δ representamos la diferencia simétrica.

Es bien conocido que existen

$$\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$$

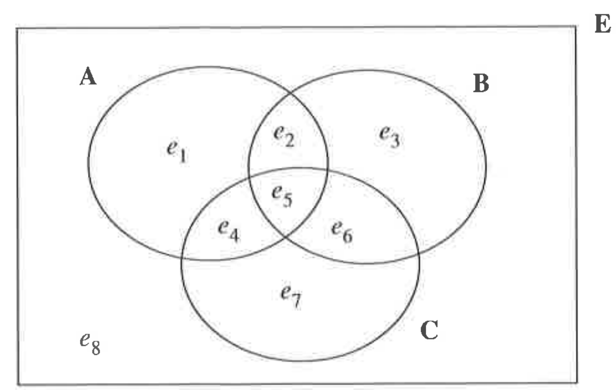
elementos de $P(E)$ de 0, 1, 2, 3 y 4 elementos (respectivamente) y que el número total de elementos es

$$2^4 = 2^{(2^2)}$$

2.2.2. Ejemplo.—Análogamente, como modelo del álgebra C, generada por las variables proposicionales p, q y r *(y sus* negaciones), podríamos tomar el álgebra de partes $P(E)$, donde $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_8\}$, identificando por ejemplo

$$p \text{ con } A = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$$
$$q \text{ con } B = \{e_2, e_3, e_5, e_6\}$$
$$r \text{ con } C = \{e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

(la idea es que si representamos en un diagrama de Venn A, B *y* C en la posición general, haya exáctamente un elemento en cada una de las regiones en que queda dividido E).



Hay

$$\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2}, ... \binom{8}{7}, \binom{8}{8}$$

elementos de P(E) de 0, 1, 2, ...,7 y 8 elementos (respectivamente) y el número total de elementos es

$$2^8 = 2^{(2^3)}$$

2.2.3. Teorema.—El álgebra de Boole de proposiciones generada por las variables proposicionales $p_1, p_2, ..., p_n$ (y sus negaciones) consta, exactamente, de $2^{(2^n)}$ proposiciones distintas.

Demostración.—Sea C el álgebra proposicional generada por las variables proposicionales $p_1, p_2, ..., p_n$ (y sus negaciones). Consideremos un conjunto $E = \{e_1, e_2, ..., e_{2^n}\}$. Entonces el álgebra $P(E)$ posee 2^n átomos (sus subconjuntos unitarios) y, según vimos en 2.1.1, C también posee 2^n átomos, como por eiemplo

$$p_1 \wedge \neg p_2,\ p_3 \wedge ... \wedge p_n$$

Vamos a construir un isomorfismo de álgebras de Boole

$$\varphi\text{: } (P(E), \cup, \cap, ', \subseteq) \to (C, \wedge, \vee, \neg, \to)$$

Para ello haremos corresponder por una biyección (la que deseemos) los átomos de $P(E)$ con los átomos de C,por ejemplo

$$\{e_1\} \to p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n$$

$$\{e_2\} \to p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge ... \wedge p_n$$

......

y para cualesquiera subconjuntos X e Y de E, si $\varphi(X) = x$ y $\varphi(Y) = y$, entonces

$$\varphi(X \cup Y) = x \vee y$$
$$\varphi(X \cap Y) = x \wedge y$$
$$\varphi(X') = \neg x$$

En particular será: $\varphi(\varnothing) = \underline{0}$ y $\varphi(E) = \underline{1}$ (basta tener en cuenta que $\varnothing$ se puede expresar como intersección de un conjunto y su complementario y E como su unión).

Así por ejemplo, p_1 es la disyunción de los 2^{n-1} átomos de la forma

$$p_1 \wedge m_2 \wedge m_3 \wedge ... \wedge m_n; \quad m_i = p_i \text{ ó } m_i = \neg p_i$$

luego cualquier proposición de C se puede expresar como disyunción de conjunciones de átomos y por tanto φ es suprayectiva.

Como el orden P(E) es $\subseteq$,que se puede definir así

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y \Leftrightarrow X' \cup Y = E$$

y el orden en C se puede definir

$$x \to y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow \neg x \vee y = \underline{1}$$

por tanto φ conserva la ordenación.

Como consecuencia de que conserve la ordenación, al ser la relación antisimétrica, debe ser φ inyectiva.

Y el número de elementos de E sí es conocido: $2^{(2^n)}$.

2.2.4. Corolario.— Hay $\binom{2^n}{0}, \binom{2^n}{1}, \binom{2^n}{2}, ... \binom{2^n}{8}$ de cada tipo, esto es

$\binom{2^n}{0} = 1$ ínfimo

$\binom{2^n}{1} = 2^n$ átomos

$\binom{2^n}{2}$ elementos que son disyunción de dos átomos

$\binom{2^n}{3}$ elementos que son disyunción de tres átomos

...

$\binom{2^n}{2^n - 1} = 2^n$ maximales

$\binom{2^n}{2^n} = 1$ supremo

2.2.5. Observación.—Es un resultado conocido que toda álgebra de Boole finita es isomorfa al álgebra de Boole de partes de un cierto conjunto (Teorema de Stone).

Bibliografía

[AL] M. Abellanas, D. Lodares: *Matemática Discreta*. Ed. Ra-Ma, 1990.

[Ha] P.R. Halmos: *Lectures on Boolean Algebras*. Springer-Verlag, 1974.

[He] H. Hermes: *La teoría de retículos y su aplicación a la lógica matemática*. Conf. Mat. VI. Instituto «Jorge Juan». CSIC-Madrid, 1963.

[Mo] D. Monk: *Handbook of Boolean Algebras*. North-Holland, 1989.

[Ro] E. Roanes Macías: *Retículos en la Matemática Elemental*. Boletín de la Sociedad «Puig Adam», núm. 4 (1984), págs. 41-47.

[St] M.H. Stone: *The Theory of Representations for Boolean Algebras*. Transactions AMS núm. 40 (1936), págs. 37- 111.

Nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática

Alfonsa García, Angeles Martínez, Rafael Miñano

Departamento de Matemática Aplicada E.U. de Informática
Universidad Politécnica de Madrid (España)

1. Trayectoria histórica

La preocupación por impartir una docencia de calidad, acorde con la evolución científica y tecnológica, es una constante común a todos los profesores universitarios.

Este interés se centra en dos aspectos: por una parte, la renovación y actualización de los conocimientos teóricos y, por otra, la incorporación de nuevos métodos y herramientas de trabajo.

En este último sentido, hace años que calculadoras y ordenadores relevaron de su papel a las tradicionales tablas de logaritmos y reglas de cálculo, y ocuparon un lugar importante en disciplinas como Análisis Numérico, Estadística o Algebra Lineal.

Sin embargo, en las últimas décadas, el nacimiento y desarrollo de Sistemas de Cálculo Simbólico (SCS) ha dado lugar a nueva forma de entender la creación y la docencia del conocimiento matemático.

La posibilidad de disponer, simultáneamente, de capacidades gráficas, numéricas y simbólicas permite abordar una clase de problemas más reales e instructivos y fundamentalmente ofrece la posibilidad de trabajar de un modo más heurístico y cercano a la investigación .

Desde que aparecieron los primeros SCS (MACSYMA, 1970; REDUCE, 1978; MUMATH, 1979; MAPLE, 1980; MATHEMATICA, 1989; DERIVE, 1989) muchos profesores se plantearon qué tipo de modificaciones se deberían introducir en la enseñanza, tanto desde el punto de vista de los contenidos como de la metodología.

A finales de la década de los ochenta algunos profesores de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) acogimos con entusiasmo estas nuevas tecnologías y nos propusimos su introducción en la docencia, considerando que el conocimiento de este tipo de herramientas refuerza el carácter de la Matemática como disciplina básica.

Al principio realizábamos prácticas usando pequeños laboratorios (12 ó 15 ordenadores personales) y grupos reducidos de alumnos. Las sesiones con ordenador se realizaban fuera del horario lectivo de alumnos y profesores y tenían un carácter totalmente voluntario. A pesar de estos inconvenientes la experiencia tuvo una gran acogida y poco a poco se fue ampliando.

En la actualidad, el uso de SCS en la enseñanza está plenamente asentado en nuestro Departamento. El plan de prácticas de cada asignatura está absolutamente integrado en su planificación docente y en su evaluación.

Al mismo tiempo que la preocupación por incorporar estas herramientas a la docencia oficial, surgió el interés por conocer si en otros lugares se estaban haciendo cosas similares e intercambiar experiencias.

Después de un primer encuentro con otros profesores de la propia UPM, en diciembre de 1991 organizamos las primeras «Jornadas sobre enseñanza experimental de la Matemática en la Universidad» que se celebraron en Madrid y sirvieron para conocer el estado del arte en distintas Universidades españolas.

El gran interés que despertaron estas jornadas motivó nuevos contactos con profesores de otros países y la continuación regular de este tipo de encuentros en España.

En el primer sentido cabe citar nuestra participación en diversos congresos internacionales ([12],[13],[22],[26],[27],[37]) y la creación del grupo español de usuarios de DERIVE, que pretende ser punto de contacto para la difusión e intercambio de experiencias en relación con el uso en la enseñanza de este SCS.

En relación con el segundo punto, aquellas primeras jornadas tuvieron su continuación en un encuentro celebrado en Valencia en abril de 1993, y en el que se celebrará en Barcelona el próximo mes de febrero (Temu 95).

2. Reflexiones sobre el aprendizaje de las Matemáticas

Está comúnmente admitido el beneficio que la formación matemática proporciona al desarrollo de cualidades intelectuales como la intuición, la capacidad de abstracción, de análisis y de síntesis. Por este motivo es peligroso que la atención al cálculo prime sobre la atención al razonamiento formal, situación ésta relativamente frecuente. Si preguntarnos a un estudiante de enseñanza secundaria por algún concepto matemático, por

ejemplo si le preguntamos ¿qué es un límite? o ¿qué es una derivada?, es muy probable que su respuesta comience con una frase del tipo: «es una cosa que se hace....». La relación de este estudiante con los conceptos matemáticos que se le han presentado se limita al dominio, más o menos profundo, de algunas técnicas de cálculo.

Desde luego no es esto lo deseable, aunque tal vez sea un paso necesario. El conocimiento de las técnicas de cálculo se contempla casi como un prerrequisito para poder llegar a la comprensión del concepto. De hecho, esto no es en absoluto ajeno al carácter experimental de la matemática. Para llegar a conocer algo es preciso ensayar, analizar lo que ocurre en diversas situaciones y, en definitiva, experimentar.

Una forma de enseñanza eficiente debería contemplar no solo la presentación de los conceptos y resultados con las correspondientes técnicas de cálculo, sino también un entrenamiento de la intuición, que permita al alumno descubrir propiedades y características de los objetos de estudio a partir del análisis de diversas situaciones. Esto requiere realizar muchos cálculos para poder intuir resultados generales a partir de observaciones particulares y posteriormente disponer de una buena capacidad de razonamiento para contrastar la certeza de las intuiciones.

Generalmente, se alude a la falta de tiempo para madurar suficientemente los conceptos y asimilar las características de los distintos objetos matemáticos.

Las nuevas tecnologías permiten desarrollar procesos de «simulación», que facilitan el estudio de diferentes situaciones y la experimentación a bajo coste.

3. Uso de nuevas tecnologías en la enseñanza

La influencia de los ordenadores en la sociedad actual es innegable. Las siguientes palabras del profesor M. de Guzmán expresan con mucha elocuencia esta situación:

> «El ordenador y el estilo mental que impone va invadiendo nuestra sociedad y nuestra cultura de manera imparable. El ordenador está ahí con todo su influjo, con todo su impacto potencial. Impacto en la visión de la cultura, en la visión de la ciencia, en la visión de la Matemática. Sin duda ofrece unas ventajas de las que no podemos prescindir, de las que no vamos a prescindir aun cuando pudiéramos hacerlo. Más vale que pensemos bien las posibles consecuencias negativas que se pueden presentar para tratar de soslayarlas.»

Estas reflexiones nos sugieren que antes de incorporar una nueva tecnología en la actividad docente es imprescindible analizar las posibles ventajas e inconvenientes que se pueden plantear. En nuestro contexto, estas nuevas tecnologías se refieren básicamente al uso de calculadoras gráficas y software matemático en ordenadores personales. Estas herramientas, que denominamos asistentes matemáticos, no estén diseñadas con fines docentes, sino con el fin primordial de ayudar a resolver los problemas matemáticos que aparecen en cualquier trabajo científico o tecnológico. Por esta razón es necesario buscar la manera más adecuada de trabajar con ellas.

3.1. Ventajas

Del mismo modo que los investigadores matemáticos han encontrado un gran apoyo para su tarea en los ordenadores y los SCS, las recientes experiencias en el campo docente confirman que la enseñanza de las Matemáticas se enriquece con el uso de estas herramientas. Entre las ventajas más significativas de trabajar con SCS, ó en general con cualquier tipo de asistente matemático, se pueden destacar las siguientes:

1. Desde el punto de vista de la formación, el uso de un asistente matemático abre la atractiva posibilidad de experimentar con las Matemáticas. A veces la mejor forma de comprender el verdadero alcance de un teorema o la efectividad de un algoritmo es analizar los resultados que se obtienen al variar las hipótesis, condiciones iniciales, etc.

2. Desde un punto de vista efectivo, el dedicar menos tiempo a la realización de cálculos rutinarios permite primar la reflexión y el análisis de los resultados.

Las posibilidades gráficas permiten la mejor comprensión de muchos conceptos.

La potencia de cálculo obvia las dificultades de muchos alumnos con la operatoria y les permite usar las Matemáticas y llegar más lejos sin el lastre de sus deficiencias de formación.

Es posible presentar una Matemática más próxima a los problemas reales y al trabajo en la actividad profesional, sin necesidad de usar datos preparados para facilitar los cálculos.

3. Desde el punto de vista de la organización docente permiten un proceso de aprendizaje más autonómo del estudiante, que puede adaptar su ritmo de trabajo a su situación personal.

También pueden favorecer el trabajo en equipo.

4. Suele señalarse como ventaja la incidencia positiva en la motivación, pero tal vez esto sea coyuntural, ya que el atractivo del ordenador se debe entre otras cosas a su carácter de «juguete nuevo».

De todos modos resulta sumamente gratificante ver cómo los estudiantes encuentran atractivo y divertido el trabajo matemático ante las posibilidades del sistema, que elimina la labor rutinaria y potencia la parte creativa.

5. Conviene señalar también el reconocimiento de las Matemáticas como soporte de otras ciencias. La posibilidad de utilizar estas herramientas para resolver problemas

en otros contextos (física, química, biología,...) hace que los estudiantes valoren positivamente la relación entre la teoría y la práctica matemática.

3.2. Peligros

La incorporación en la enseñanza de asistentes matemáticos encuentra el rechazo de muchos profesores que, no sin razones, se oponen a ella.

1. Un primer riesgo que se corre al usar ordenadores o calculadoras gráficas en clase, tiene su origen en el propio atractivo de la herramienta: puede que el alumno se centre más en la problemática del ordenador/programa que en la del problema matemático.

A título de ejemplo cabe citar la siguiente experiencia real:

Un profesor está explicando el concepto de integral de Riemann en una clase en la que los alumnos están sentados, por parejas, frente a un ordenador personal.

Siguiendo las indicaciones del profesor los alumnos teclean una expresión e inmediatamente aparece en la pantalla del ordenador la representación gráfica de una suma inferior.

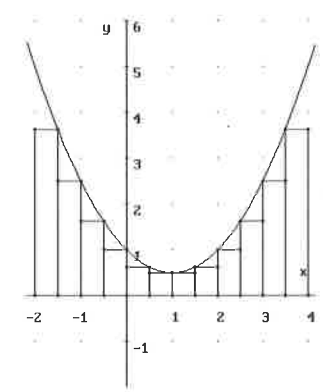


Figura 1

Durante unos minutos nadie está escuchando las explicaciones del profesor. Al notar la falta de atención éste decide dar una vuelta por la clase y ve cómo la mayoría de los alumnos ha conseguido modificar el dibujo inicial (cambiando los colores, el tamaño de la gráfica, etc.). Les apetece más *investigar* el uso del programa que *entender* el concepto matemático.

2. Un segundo riesgo evidente es la pérdida de destrezas básicas. Conviene señalar que los ejercicios de cálculo que suelen llevarse a cabo en un curso de Matemáticas permiten el desarrollo de interesantes capacidades mentales que se vería mermado con el uso de estas herramientas. Algunos profesores son contrarios al uso de ordenadores y calculadoras, justamente porque opinan que es necesario que el alumno calcule para adquirir la necesaria destreza y habilidad.

3. Con el uso de un asistente matemático se pierde además el sentido de la dificultad del problema (la máquina lo hace todo igual de rápido). Se puede llegar a convertir las Matemáticas en algo «mágico» que uno usa sin saber cómo funciona.

4. Por otra parte el alumno suele tener confianza ciega en la máquina, lo que puede favorecer la pérdida del sentido crítico.

3.3. Detalles de implementación

Una posible forma de evitar los innegables riesgos señalados antes, sería tomar lo que podemos denominar «solución del avestruz»: prohibir el uso de ordenadores y calculadoras en la resolución de problemas matemáticos, de modo que el alumno, con la realización de los cálculos, desarrolle su capacidad mental y distinga la dificultad de cada problema.

Pero es evidente lo absurdo de esta solución por su falta de realismo. No podemos obviar la dificultad de evitar que el alumno utilice el ordenador de su casa para realizar esos cálculos, reduciendo así su «ejercicio mental» a pulsar la tecla adecuada.

Los ordenadores existen y hay que aprender a convivir con ellos. ¿Cómo? Es preciso replantearse el enfoque de la enseñanza teniendo en cuenta esta realidad.

Es necesario enseñar a hacer cálculos a mano, pero enfatizando más en las ideas que en las rutinas de cálculo. Hay que seguir enseñando los métodos algorítmicos de resolución de problemas y hay que conseguir que los alumnos los entiendan y sepan usar correctamente. Pero al mismo tiempo, hay que mostrar que precisamente el carácter algorítmico de las rutinas de cálculo es lo que permite relegar esta tarea a un ordenador y que éste no hace más que un subconjunto de nuestra actividad, aunque eso sí, de una manera más rápida y segura.

Algunas de las dificultades que se plantean a la hora de incorporar el uso de asistentes matemáticos en la enseñanza son:

- *¿Qué tipo de herramienta elegir?*

Las características más valoradas en una herramienta que se pretende utilizar en clase son:

— Accesibilidad
— Facilidad de manejo
— Versatilidad y flexibilidad
— Interactividad

De acuerdo con esta valoración las herramientas más populares son calculadoras gráficas y sistemas de cálculo matemático accesibles desde un ordenador personal. Es evidente que no se puede elegir un sistema que resulte adecuado para el estudio de cualquier materia, sin embargo sí parece claro que la filosofía general debe ser optar por sistemas que ofrezcan el máximo de posibilidades con un tiempo mínimo de aprendizaje. Por ejemplo no parece adecuado enseñar a manejar un sistema que incluya posibilidades de programación si el tiempo disponible en la asignatura no va a permitir sacar partido de esta capacidad.

- *¿Qué tipo de problemas proponer?*

Si el alumno dispone con facilidad de acceso a un ordenador y un SCS se complica la tarea de proponer problemas. Una breve reflexión basta para desestimar la forma tradicional de proponer ejercicios como:

— Calcúlense los siguientes límites ...
— Calcúlese la inversa de las siguientes matrices ...
— Obténgase una primitiva para las siguientes funciones ...

La mayoría de los problemas que suelen aparecer en los textos clásicos no sirven, bien porque en su resolución el ordenador no aporta nada, o bien porque ésta se reduce a apretar la secuencia adecuada de teclas. Se plantea pues la necesidad de buscar nuevos problemas que permitan cubrir los objetivos docentes aprovechando la capacidad de la máquina y no compitiendo con ésta. En este sentido parece adecuado proponer problemas más sofisticados en los que los alumnos tengan que combinar sus conocimientos con las diversas técnicas que ofrece el ordenador, o bien cambiar el enfoque de los mismos de modo que el ordenador, utilizado como herramienta de cálculo, favorezca el razonamiento.

- *¿Cómo y en qué casos permitir el uso del ordenador?*

En muchos casos es necesario que el alumno realice «a mano» algunos cálculos rutinarios que podría hacer el ordenador. Carece totalmente de sentido pensar que el alumno no tiene que aprender a derivar, porque esto ya lo puede hacer la máquina.

Una buena solución puede ser que los alumnos utilicen el ordenador no para hacer algo que ellos no saben hacer sino para hacer de forma más rápida, algo que ellos «con paciencia» serían capaces de hacer. De este modo el ordenador puede suponer un refuerzo positivo y no un obstáculo.

- *¿Cómo evitar que la clase de Matemáticas se convierta en clase de «aprender a usar» una herramienta informática?*

Un requisito fundamental de cualquier herramienta novedosa que se pretenda utilizar en clase es el de minimizar (cuando no anular) el tiempo empleado en su aprendizaje.

El profesor deberá preparar las actividades prácticas con todas las instrucciones detalladas con la precisión necesaria para que el alumno no tropiece con dificultades que no sean de Matemáticas.

No debe confundirse el objetivo básico de sustituir parte del tiempo empleado en aprender a calcular *** por aprender qué es *** con el objetivo de aprender cómo calcular *** con una máquina.

- *¿Cómo evitar que los alumnos pierdan interés por aprender las técnicas básicas de cálculo?*

Precisamente se debe intentar usar el hecho de que la máquina sabe calcular una derivada o un límite para incidir en el carácter «algorítmico» de ciertos problemas. En este sentido puede resultar muy interesante mostrar las limitaciones de los sistemas utilizados mediante ejemplos que pongan de manifiesto su incapacidad para resolver algunos problemas. Analizar los fallos de un sistema de software matemático resulta más formativo de lo que parece a primera vista, ya que permite analizar técnicas de cálculo y sus condiciones de validez.

Es preciso tener claro que no se trata de formar personas que sean capaces de usar los ordenadores de hoy sino personas que puedan llegar a diseñar los ordenadores de mañana.

- *¿Cómo evitar que los alumnos pierdan interés por aprender Matemáticas?*

Si a un alumno sólo se le muestran las capacidades de un SCS, puede llegar a creer que el estudio de teorías y conceptos matemáticos está fuera de lugar, ya que todo, o al menos casi todo lo que él va a necesitar en su vida profesional (si se piensa en un ingeniero) lo puede hacer un ordenador.

Ante estas «conclusiones» es necesario mostrar que sólo la riqueza del pensamiento matemático y de la mente humana son capaces de enfrentarse a nuevos problemas elaborando estrategias similares a las que se conocen. El diseño de teorías y técnicas para resolver nuevos problemas ó problemas clásicos de un modo más eficaz puede ser un buen aliciente para estudiar Matemáticas.

- *¿Cómo fomentar el sentido crítico?*

Hay que evitar a toda costa la fe ciega en el ordenador. Para esta tarea se puede sacar partido de los fallos que tiene cualquier programa procurando situaciones contradictorias que obliguen al alumno a analizar la coherencia de los resultados.

También se puede favorecer el desarrollo de la capacidad crítica haciendo resolver un mismo problema mediante diferentes procedimientos (gráfico, numérico, analítico...) y contrastando resultados.

Mucho menos trascendentes son las dificultades debidas a falta de infraestructura, ya que, queramos o no, desaparecerán en un plazo muy breve. En muy pocos años cualquier alumno podrá disponer en su calculadora de bolsillo de un SCS como DERIVE. Conviene pues ir pensando en la forma de afrontar esta realidad.

4. La experiencia del Departamento de Matemáticas de la EUI

El Departamento de Matemáticas de la EUI propone trabajos con ordenador desde el año 1982. Las primeras prácticas consistían en la programación de algunos algoritmos estudiados en Cálculo Numérico y el análisis de datos estadísticos realizando un programa al efecto.

A partir del año 1990 el uso de ordenador se hizo extensivo al resto de las asignaturas del departamento, implementando éste en forma de «prácticas de laboratorio», pasando de ser complemento de algunos temas específicos a parte integrante de todas las materias.

4.1. Organización de las prácticas

En la actualidad el Departamento de Matemáticas imparte ocho asignaturas de las cuales cuatro son obligatorias: Matemática Discreta, Análisis Matemático y Métodos numéricos, Algebra, y Estadística. Todas ellas cuentan con un plan de prácticas con ordenador y los sistemas más utilizados son DERIVE y STATGRAPHICS. En cada caso se ha buscado la herramienta más apropiada al objetivo docente perseguido, y se ha evitado dedicar tiempo a enseñar el uso del programa proporcionando a los alumnos, en cada práctica, todas las instrucciones necesarias sobre la sintaxis del software elegido.

La organización docente es similar para todas ellas. Los alumnos disponen de una guía en la que están redactados todos los problemas que deberán resolver a lo largo del curso y las correspondientes indicaciones para cada uno de ellos. Para cada asignatura, todos los alumnos tienen una o dos horas semanales de clase en el laboratorio, un aula equipada con unos veinte ordenadores personales, donde trabajan por parejas y bajo la tutorización de un profesor. Al final de cada hora de prácticas, o al cabo de varias sesiones si el tema lo requiere, han de rellenar una hoja de respuestas con el resultado de sus observaciones, conclusiones, etc.

En cuanto al contenido de las prácticas, siguen la filosofía general de analizar o conjeturar resultados teóricos desde un punto de vista experimental. Lo que se pretende es que los alumnos descubran resultados que posteriormente se definirán y estudiarán con rigor en las clases de teoría, o bien que reflexionen sobre conceptos y métodos de trabajo vistos en clase, pero a un ritmo más personalizado y con el apoyo gráfico, simbólico y numérico que ofrece el ordenador.

En estas sesiones prácticas el profesor se encarga de guiar el trabajo de cada alumno y de corregir sus errores (en cierto sentido se podría decir que son unas «tutorías activas y en grupo»), y al mismo tiempo explica algunas reglas de cálculo que en una clase tradicional, sin más herramientas que la pizarra y la calculadora, resultarían tediosas y poco claras. Los problemas que no requieren una cantidad excesiva de cálculo, de apoyo gráfico o que tienen un carácter más deductivo se hacen en las clases de problemas tradicionales.

En general, se procura que no haya solapamientos entre los problemas de clase y las prácticas, y en estas últimas se abordan cuestiones en las que el ordenador ofrece una gran ayuda. En algunos casos se usa un algoritmo sobre varios casos particulares para detectar condiciones suficientes y necesarias de convergencia; en otros, se estudian varias funciones de una misma familia para conjeturar sus propiedades comunes, y otras veces se usa el ordenador como una simple calculadora que permite variar datos y obtener soluciones en muy poco tiempo. En definitiva se hacen «experimentos» con el objetivo concreto de aprender Matemáticas.

4.2. Opiniones de los alumnos y resultados académicos

El objetivo fundamental de las prácticas es ayudar a los alumnos a entender y utilizar adecuadamente las Matemáticas, y una forma de saber en qué medida se alcanza este objetivo es consultando su opinión.

En los últimos años, al finalizar el curso, hemos realizado una encuesta a los estudiantes en la que se les pide su valoración sobre el tipo de ejercicios propuestos (interés, dificultad y claridad del enunciado), la utilidad de los mismos para entender mejor los conceptos que se tratan y la organización de estas sesiones: tiempo asignado, calificación, etc.

La opinión de los alumnos, en general, ha sido muy positiva. La valoración media del interés y la utilidad de las cuestiones propuestas es bastante alta (entre 3.5 y 4 sobre 5) y casi todos coinciden en destacar el apoyo que suponen para entender mejor las asignaturas y estudiar con regularidad. En este sentido señalan que son un buen complemento a los problemas de clase, pero que tanto unos como otros son necesarios.

También destacan el hecho de que el apoyo gráfico les ayuda a asimilar mejor algunos conceptos y que lo más positivo de las sesiones con ordenador es la posibilidad de experimentar formas de resolver problemas sin pasar por la fase de los cálculos y con la certeza de que los errores en la solución sólo se deben a planteamientos incorrectos.

En cuanto a los resultados académicos, merece la pena destacar dos hechos: por una parte, la asistencia a clase es cuantitativamente mayor que en los años precedentes y se mantiene más o menos en el mismo nivel durante todo el curso. Y por otra parte, el incremento del rendimiento de los alumnos se ha hecho patente en el número de aprobados, que ha pasado del 30% al 65% en unas asignaturas y del 22% al 50% en otras, aunque es difícil aislar la influencia de las prácticas en esta mejora.

Estos datos permiten medir de alguna manera los resultados de nuestras prácticas, pero tal vez lo más significativo no sean los números, sino las impresiones que hemos ido recibiendo los profesores involucrados en esta experiencia.

La mayoría hemos observado que los alumnos realmente se ponen a hacer problemas y a pensar estrategias de solución cuando se sientan frente al ordenador, que acuden a clase con asiduidad, incluso, a veces, hay que «empujarlos» para que salgan del laboratorio, y tal vez lo más importante sea que algunos han llegado a ver las Matemáticas como algo útil y divertido. Según sus propias palabras: «Las prácticas ayudan a comprender lo dado y es cuando te enfrentas a si realmente lo has entendido o no. Además, hacen que las mates no sean odiosas».

4.3. Opiniones de los profesores

Desde que conocimos los SCS, los profesores del Dpto. de Matemáticas de la EUI asumimos con entusiasmo la tarea de incorporarlos a nuestra docencia y, más por intuición que por conocimiento, apostamos por el éxito de la empresa. No sería honrado ocultar que sin esta voluntad de ánimo las prácticas no habrían llegado a formar parte de los planes de estudio actuales.

Es cierto que desde el primer momento fueron bien acogidas por los alumnos y que su actitud nos animó a seguir trabajando en esta línea, pero no es menos cierto que su desarrollo y puesta en marcha ha supuesto un esfuerzo de creatividad y una inversión de tiempo mucho mayores de lo esperado.

Por una parte, ha sido necesario buscar la manera de enfocar la docencia de los conceptos matemáticos desde un punto de vista totalmente diferente, y por otro hemos tenido que modificar los contenidos de nuestra enseñanza para buscar la vertiente de matemática aplicada que en muchos casos desconocíamos.

Esta tarea ha resultado enriquecedora tanto para alumnos como para profesores y en estos momentos podemos decir que gracias a la aparición de los asistentes matemáticos la enseñanza de las Matemáticas en la Universidad, o al menos la nuestra, ha rejuvenecido.

A grandes rasgos, nuestra valoración global es positiva, aunque a veces el resultado obtenido (número de aprobados y sus calificaciones) nos parece pobre en relación con el esfuerzo realizado.

5. Ejemplos concretos de actividades prácticas

En esta sección se presentan algunos ejemplos concretos que están (o han estado) incluidos en los planes de prácticas de las distintas asignaturas. Sólo se pretende ilustrar un poco las distintas filosofías posibles que se pueden seguir en el diseño de los experimentos matemáticos.

5.1. Los cálculos largos no son problema

Una de las utilidades más inmediatas del sistema es la de actuar como una potente calculadora, de este modo es posible abordar aquellos problemas que, pese a tener interés pedagógico y resultar motivadores para el alumno, se solían rechazar en un curso tradicional por requerir cálculos excesivamente laboriosos. Veamos un ejemplo de uno de estos problemas:

Se quiere diseñar el perfil de un automóvil que se ajuste a las características de la figura.

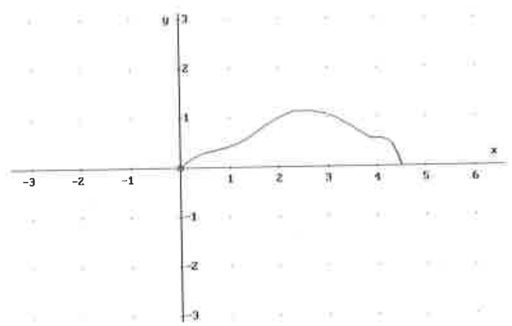


Figura 2

Los datos más relevantes son los siguientes:

- En $x = 0$ la altura debe ser 0 y la pendiente 1.
- En $x = 1'2$ la altura y la pendiente serán 0'5.
- En $x = 2$ la altura será 1, y en $x = 3$, 1'05 (para estos puntos no se dispone de datos sobre la pendiente).
- En $x = 3'8$ la altura debe ser 0'6 y la pendiente –2/3.
- En $x = 4'5$ la altura será 0 y la pendiente –3'5.

Encontrar una función interpoladora apropiada.

Para resolver este problema se va guiando el trabajo del alumno.

La función pedida, que podemos denotar por S, debe ser continua y derivable en [0, 4'5] y ajustarse a la siguiente tabla

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	0	1
1'2	0'5	0'5
2	1	?
3	1'05	?
3'8	0'6	–2/3
4'5	0	–3'5

Con la información de la que se dispone se puede definir una función tipo esplín cúbico, que venga dada por un polinomio de tercer grado en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. En este caso serán 5 polinomios

$$P_1(x) := a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$$

$$P_2(x) := a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2$$

$$P_3(x) := a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3$$

$$P_4(x) := a_4x^3 + b_4x^2 + c_4x + d_4$$

$$P_5(x) := a_5x^3 + b_5x^2 + c_5x + d_5$$

y se obtienen los coeficientes definiendo veinte ecuaciones, a partir de las condiciones dadas y pidiendo «suavidad» en los puntos de unión.

Para cada $i = 1, ..., 5$ se define $DP_i(x)$ como el polinomio derivado de $P_i(x)$ y $D2P_i(x)$ como la segunda derivada. Se deben verificar las ecuaciones

$$P_1(0) = 0,\quad P_1(1'2) = 0'5,\quad P_2(1'2) = 0'5,\quad P_2(2) = 1,\quad P_3(2) = 1,$$

$$P_3(3) = 1'05,\quad P_4(3) = 1'05,\quad P_4(3'8) = 0'6,\quad P_5(3'8) = 0'6,\quad P_5(4'5) = 0,$$

$$DP_1(0) = 1,\quad DP_1(1'2) = 0'5,\quad DP_2(1'2) = 0'5,\quad DP_2(2) = DP_3(2),$$

$$D2P_2(2) = D2P_3(2),\quad DP_3(3) = DP_4(3),\quad D2P_3(3) = D2P_4(3),$$

$$DP_4(3'8) = -2/3,\quad DP_5(3'8) = -2/3,\quad DP_5(4'5) = -3'5$$

Para resolver con DERIVE este sistema en las incógnitas $a_1, ..., a_5, b_1, ..., b_5, c_1, ..., c_5, d_1, ..., d_5$, usamos la instrucción SOLVE ([ecuaciones], [incógnitas]), y se obtienen los coeficientes buscados, con lo que

$$P_1(x) = \frac{25}{54}x^3 - \frac{25}{24}x^2 + x$$

$$P_2(x) = -\frac{11765}{29568}x^3 + \frac{2563}{1344}x^2 - \frac{29049}{1344}x + \frac{7829}{6160}$$

$$P_3(x) = \frac{37}{1056}x^3 - \frac{5105}{7392}x^2 + \frac{8739}{3080}x - \frac{6753}{3080}$$

$$P_4(x) = \frac{18115}{118272}x^3 - \frac{207419}{118272}x^2 + \frac{169713}{28160}x - \frac{1060887}{197120}$$

$$P_5(x) = -\frac{5150}{1029}x^3 + \frac{62035}{1029}x^2 - \frac{83018}{343}x + \frac{111276}{343}$$

La función es

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{si } x \in [0, 1'2] \\ P_2(x) & \text{si } x \in [1'2, 2] \\ P_3(x) & \text{si } x \in [2, 3] \\ P_4(x) & \text{si } x \in [3, 3'8] \\ P_5(x) & \text{si } x \in [3'8, 4'5] \end{cases}$$

Después de haber calculado la función S el alumno usará DERIVE para obtener su representación gráfica y comprobar que se ajusta al enunciado.

Conviene notar que DERIVE resuelve (de modo exacto) el sistema de veinte ecuaciones con veinte incógnitas en muy pocos segundos. Este ejercicio práctico se completa pidiendo al alumno que cambie (a su gusto) el modelo de automóvil, proponiendo las modificaciones necesarias en la tabla de datos, obteniendo a continuación la correspondiente función S y realizando la representación gráfica. En esta parte, que les resulta relativamente difícil, utilizan DERIVE para hacer ensayos con agilidad, pues es relativamente complicado prever la incidencia en el resultado final de las modificaciones en la tabla de datos.

5.2. Modelización de aplicaciones prácticas

Una de las tareas más difíciles para los estudiantes es la modelización matemática de un problema que está formulado en lenguaje natural. Estos problemas suelen provenir de situaciones reales y es razonable que un ingeniero sepa tratarlos y resolverlos. A continuación mostramos dos ejemplos: uno que utiliza conceptos de Algebra Lineal y otro de Análisis Matemático.

Estudio de poblaciones:

Los estudiantes de tres grupos de Algebra de la E.U.I. están eligiendo profesor. Cada día el 5% de los estudiantes del grupo 1 pasan al grupo 2 y otro 5% pasan al grupo 3. De los estudiantes del grupo 2 el 15% pasan al grupo 1 y el 10% al grupo 3. Y de los estudiantes del grupo 3, el 10% pasan al grupo 1 y el 5% al grupo 2.

Para representar estas fluctuaciones se considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{90}{100} & \frac{15}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{75}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{10}{100} & \frac{85}{100} \end{pmatrix}$$

La distribución de estudiantes de cada día se representa por el vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ cuyas coordenadas son los tantos por uno de estudiantes en cada grupo.

a) El primer día la distribución de estudiantes está dada por el vector $v = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$

Calcular $M \cdot v$ ¿Qué representa este resultado?
Calcular la distribución de estudiantes al cabo de tres días.

b) Si un día la distribución de estudiantes es $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál era la distribución el día anterior? Interpretar el resultado.

c) ¿Es posible que haya dos días consecutivos con la misma distribución de estudiantes? Calcular, si existen, este tipo de distribuciones.

d) ¿Es posible que un día lectivo no haya estudiantes en ningún grupo? ¿Cuántos estudiantes habría el día anterior en cada grupo? Interpretar el resultado.
Si M se interpreta como la matriz de una aplicación lineal, ¿qué nombre reciben las distribuciones de estudiantes que «desaparecen» al día siguiente?

e) Estudiar si la distribución de estudiantes tiende a estabilizarse.

INDICACIÓN: *Se puede calcular la distribución de estudiantes al cabo de* 50, 60, ..., 100 *días con la instrucción* **VECTOR** ($M^n \cdot v, n$, 50, 100, 10).

Costes de producción:

En una empresa, el coste de fabricación de n de sus productos viene determinado por la sucesión recurrente

$$a_1 = 10 \qquad a_n = 2n + a_{n-1}$$

El empresario recibe una oferta con la cual es posible la fabricación, en iguales condiciones de calidad, con un coste de la primera unidad fabricada $b_1 = 1000$ y, a partir de aquí el coste del n-ésimo artículo fabricado sería $\log n + \frac{1}{n}$.

Estudiar el interés de la oferta en función del número de unidades fabricadas y escribir las conclusiones justificándolas.

Para ello, seguir los siguientes pasos:

— Primero, hacerse una idea de como van siendo los valores de a_n y b_n al aumentar n. Esto puede hacerse calculándolos para distintos valores de n (por ejemplo, aproximando **VECTOR** ([*n*, *a*(*n*), *b*(*n*)], *n*,1,101,20) que nos da los costes de fabricar 1, 21, 41, 61, 81 y 101 artículos, siendo *a(n)* y *b(n)* funciones que representan a a_n y b_n respectivamente).

— En segundo lugar, estudiar el orden de magnitud de las sucesiones a_n y b_n.

INDICACIÓN: *Para* a_n *se puede resolver la ecuación en diferencias.*

Exponer las conclusiones.

5.3. Experimentando con el método de Newton

Es relativamente frecuente que los alumnos apliquen un teorema sin pararse a comprobar las hipótesis, o que no distingan el carácter necesario del suficiente en una cierta condición.

Con el ejemplo que se presenta a continuación se pretende profundizar en el teorema que proporciona condiciones suficientes de convergencia de la sucesión generada por el método de Newton para la aproximación de una raíz real. El ejercicio propuesto es el siguiente:

a) Comprobar analíticamente que la función $f(x) = \frac{4x-7}{x-2}$ tiene una única raíz (concretamente en el punto $x = 7/4 = 1.75$).

b) Aplicar el método de Newton en [1.6, 1.8], comprobando gráficamente condiciones suficientes de convergencia. ¿En qué punto conviene empezar a iterar?

c) Describir lo que ocurre al aplicar Newton empezando en 1.6 y explicar por qué.

d) Describir lo que ocurre al aplicar Newton empezando en 3 y explicar por qué.

e) Describir lo que ocurre al aplicar Newton empezando en 1.5 e *intentar* explicar por qué.

En un ejercicio previo el alumno ha definido la función

$$NEW(n, x_o) := ITERATES\,(x - f(x)\,/\,dif\,(f(x), x), x, x_o, n)$$

Cuando se pide a DERIVE que aproxime esta expresión, devuelve el resultado aproximado de n iteraciones del método de Newton aplicado a la función f y tomando como valor inicial x_0.

Con los distintos apartados se pretende ver cómo, cuando no se cumplen las condiciones suficientes de convergencia, la sucesión generada puede converger a la raíz buscada, diverger o converger a un valor diferente (concretamente con $x_0 = 1.5$ la sucesión converge a 2).

5.4. El ordenador ayudando a pensar

En el ejemplo que sigue se presenta otra forma de usar el asistente matemático. En este caso con la pretensión de que el alumno razone y sea capaz de «descubrir» propiedades matemáticas.

Uno de los objetivos académicos, presentes en cualquier curso de Cálculo del primer año de Universidad, es conseguir que el alumno asimile la interpretación de las propiedades analíticas de una función sobre su gráfica. Las propiedades más estudiadas son continuidad, derivabilidad, límites, comportamiento asintótico, crecimiento, extremos, etc., y uno de los problemas comúnmente propuestos es el estudio de asíntotas oblicuas.

La forma tradicional de tratar esta cuestión es enseñar a calcular los coeficientes a y b de la recta $y = ax + b$, asíntota oblicua de $f(x)$, y posteriormente utilizar esta información para obtener la gráfica de $y = f(x)$.

Actualmente, las capacidades de un programa como DERIVE permiten abordar este problema con otra metodología: a partir de la gráfica de la función el estudiante puede conjeturar la existencia de asíntotas oblicuas y tantear para calcular el valor de los parámetros a y b.

La práctica que proponemos es la siguiente:

Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x - 5}{3x + 1}$

a) Hallar $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

b) Representar gráficamente la recta $y = ax$. ¿Qué relación tiene con la gráfica de $f(x)$? (Haciendo zoom se puede observar mejor, escala x: 5, y: 5 por ejemplo).

c) Calcular «a ojo» la distancia entre $f(x)$ y la recta $y = ax$ cuando $x \to \infty$. Buscar un valor b tal que la recta $y = ax + b$ «coincida» gráficamente con $f(x)$ cuando $x \to \infty$. (Representar la recta para distintos valores de b hasta encontrar una elección válida.)

d) Calcular $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$

¿Qué relación tiene este valor con el b hallado en c)?
¿Cuál es la asíntota oblicua de $f(x)$?

e) Dada $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{p(x)}$, buscar un polinomio $p(x)$ tal que $g(x)$ tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x - 1$.

f) Calcular los límites necesarios para justificar el resultado anterior y representar conjuntamente la gráficas de la función y la recta.

5.5. DERIVE como ayuda previa al razonamiento analítico

En muchas ocasiones se plantean problemas del tipo:

«Estudiar el comportamiento de...» y a continuación se pone una función, una sucesión, una serie, una integral impropia, etc.

En estos casos el alumno tiene que, en primer lugar, imaginar lo que ocurre y después demostrarlo con un cierto rigor. En esta situación el ordenador puede serle útil para el primer paso, y no sólo por sus capacidades gráficas sino también por su potencia de cálculo. Un ejemplo de esta utilidad se puede ver en un ejercicio práctico sobre sucesiones definidas de modo recurrente, con el que se pretende poner de manifiesto la poca importancia que tienen los primeros términos de una sucesión en el comportamiento de ésta.

Dada la sucesión definida por

$$x_0 = 7; \quad x_n = x_{n-1}\frac{n^2 + 10}{n^2 + n}$$

a) Escribe una función DERIVE, $H(n)$, que determine los n primeros términos de la sucesión (se puede hacer de varias formas distintas).

b) Estudia monotonía y acotación (escribe $H(20)$ para ver qué ocurre).

c) Intenta encontrar una expresión explícita para x_n, ¿Cuánto crees que puede valer el $\lim_{n \to \infty} x_n$?

La sucesión propuesta no es monótona, al principio es creciente, pero a partir del término décimo es decreciente. El alumno deberá explicar la razón de este comportamiento, después de haberlo observado, y posteriormente demostrará, formalmente, que la sucesión es convergente.

Sobre el valor del límite sólo se les pide que lo encuentren de forma intuitiva, por ejemplo representando gráficamente los términos comprendidos entre x_{2000} y x_{3000} de la sucesión, y que justifiquen el resultado obtenido. Una demostración «rigurosa» de que el límite es cero no es accesible a las alturas del curso en que se hace esta práctica que corresponde al primer tema de la asignatura de Análisis matemático de primer curso.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABELLANAS, M.; GARCÍA, A.: *«Laboratorio de Matemáticas»*. Actas de las Jornadas sobre la innovación emergente como medio de mejora de la calidad de la enseñanza en la Ingeniería. Universidad Politécnica de Madrid, 1991. p. 286-292.

[2] ABELLANAS, M.; GARCÍA, A. (Eds): *« Actas de las Jornadas sobre Enseñanza experimental de la Matemática en la Universidad»*. Universidad Politécnica de Madrid, 1992.

[3] AKRITAS, A.G.: *«Elements of Computer Algebra with Applications»*. Wiley, 1989.

[4] BLANCO, G.; de la CRUZ, A.; GARCÍA, A. y otros: *«Prácticas de Matemáticas. Álgebra y Cálculo con Derive y Mizar»*. Escuela Universitaria de Infomática (U.P.M.), 1991.

[5] BROWN, D.P.; PORTA, H.; UHL, J.J.: *«Calculus & Mathematica»*. Addison-Wesley, 1992.

[6] BUCHBERGER, B.; COLLINS, G.E.; LOOS, R.; ALBRECHT, R. (Eds.): *«Computer Algebra. Symbolic and Algebraic Computation»* (2ª ed.). Springer-Verlag, 1983.

[7] DAVENPORT, J.; SIRET, Y.; TOURNIER, E.: *«Computer Algebra. Systems and Algorithms for Algebraic Computation»*. Academic Press, 1988.

[8] DERIVE. *«User manual»*. Version 2.5. Soft Warehouse Inc., 1992.

[9] ELLIS, W.; LODI, E:: *«Maple for the Calculus Student»*. Brooks/Cole Publishing Company, 1989.

[10] EVANS, B.; JOHNSON, J.: *«Uses of Technology in the Mathematics Curriculum»*. Cipher Systems, 1990.

[11] GARCÍA, A.(Ed.): *«Prácticas de Matemáticas con Derive»*. CLAGSA, 1994.

[12] GARCÍA, A.; MIÑANO, R.; RINCÓN, F. *«Using Derive to teach Mathematics for Computer Science Students»*. Actas de International Spring School on the Didactics of Computer Algebra. Krems ,1992.

[13] GARCÍA, A.y otros:*«¿Se entienden mejor las Matemáticas ante el ordenador?»*. Memorias del Congreso Iberoamericano de Infomática Educativa. Computadoras, Educación y Sociedad. Santo Domingo, 1992.

[14] GILLIGAN, L.G.; MARQUARDT, J.F.: *«Calculus and the Derive program: Experiments with the computer»* (2ª ed.). Gilmar Publishing Company, 1990.

[15] GUZMÁN, M.; RUBIO, B.: *«Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático. Estrategias del pensamiento matemático. Vol. 3»*. Pirámide, 1993.

[16] HALMOS, P.R.: *«Is Computer Teaching Harmful?»*. Computers and Mathematics. Notices of the American Mathematical Society, 38, (1991), p. 420-423.

[17] HERMAN, E.A.: *«Mathematica-A Review»*. Notices of the American Mathematical Society, 35 (1988), p. 1334-1344.

[18] HOWARD, J.C.: *«Practical Applications of Symbolic Computation»*. IPC Science and Technology Press, 1979.

[19] HUESO, J.L.; ROCA, A.; TORREGROSA, J.R.: «Matemática Aplicada. Prácticas con Ordenador». U.P. Valencia, 1992.

[20] JAMES, D.A.: *«Computers in Calculus. The Dearbon Project»*. Notices of the American Mathematical Society, 37 (1990), p. 8-11.

[21] LEINBACH, L.C.: *«Calculus Laboratories using Derive»*. Wadsworth, 1991.

[22] LÍAS, A.; MARTÍNEZ, A.:*«Using Derive: an experience in Algebra and Discrete Mathematics»*. Actas de Krems´93 Conference on Teaching Mathematics with Derive. Krems, 1993.

[23] LLORENS, J.L. *«Introducción al uso de Derive. Aplicaciones al álgebra lineal y al cálculo infinitesimal»*. U.P. Valencia, 1993

[24] LORET, G. y PRIETO, M. (Eds):*«Consideraciones acerca de la construcción de sistemas tutoriales inteligentes»*. Departamento de Ciencias de la Computación. Universidad de la Habana.

[25] MARTÍNEZ, M.A.: *«Algebra lineal con Derive»*. Actas sobre nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas en la Universidad. Valencia, 1993.

[26] MARTÍNEZ, M.A.; MIÑANO, R.: *«Limits with Derive»*. Comunicación en First International Derive Conference. Plymouth, 1994.

[27] MARTÍNEZ, M.A.; MIÑANO, R.; RINCÓN, F.: *«Teaching some numerical methods with Derive»*. Comunicación en First International Derive Conference. Plymouth, 1994.

[28] MASON, J.C.; COX, M.G. (Eds.): *«Scientific Software Systems»*. Chapman and Hall. 1990.

[29] MIGNOTTE, M.: *«Mathematics for Computer Algebra»*. Springer-Verlag, 1992.

[30] MORALES, F.: *«Riemann: Un entrenador inteligente para el Cálculo Integral»*. ADIE Jun. 92 p. 32-35.

[31] RAYNA, G.: *«Reduce. Software for Algebraic Computation»*. Springer-Verlag, 1987.

[32] REITER, C.; YUSTER, T.R.: *«Computers in Mathematics at Lafayette College»*. Notices of the American Mathematical Society, 37 (1990), p. 124-178.

[33] RYAN, R.A.: *«Use of MACSYMA and MAPLE in Mathematics teaching UCG»*. IMS Bulletin, 24 (1990), p. 55-58.

[34] SMART, R.: *«Computers in the University of Wisconsin, Madison Mathematics Department»*. Notices of the American Mathematical Society, 36 (1989), p. 545-553.

[35] STEEN, L.A. (Ed.): *«Calculus for a new century. A pump, not a filter»*. Mathematical Association of America, 1990.

[36] VARIOS, *«Prácticas de Análisis Matemático y Métodos Numéricos»*. Departamento de Matemática Aplicada. E.U. Infomática (U.P.M.), 1993.

[37] VILLEN, J. y otros: *«Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad: El laboratorio de Matemáticas»*. Memorias del Congreso Iberoamericano de Infomática Educativa. Computadoras, Educación y Sociedad. Santo Domingo, 1992.

[38] WOLFRAM, S.: *«Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer»*. Second Edition. Addison-Wesley, 1991.

Algoritmos matemáticos y derecho industrial

Miguel Ángel Gallardo Ortiz

Profesor de la Universidad Carlos III

La financiación de la Ciencia siempre ha sido controvertida y difícil, y nada parece indicar que pueda dejar de serlo en el futuro. Tal vez haya sido ésa, precisamente, su mayor nobleza.

Los matemáticos, incluso los que desearíamos considerarnos como muy aplicados, encontramos enormes dificultades para lograr de nuestro trabajo el más mínimo beneficio económico directo, y sólo en muy pocas ocasiones conseguimos ver remunerada cualquier cosa que no sea la docencia, o la publicación de textos para fines casi siempre académicos. Lamentablemente, son muy escasos los estudios puramente matemáticos realmente útiles para la industria, pese a que toda ingeniería, o la misma economía, deban pasar siempre por una modelización formal.

Por otra parte, el explosivo desarrollo de la informática ha dado lugar a una nueva industria, que de una u otra forma tiene que ser alimentada por cantidades ingentes de Matemáticas, si es que éstas pueden contabilizarse mediante alguna econometría. Es curioso observar cómo una de las mayores fortunas del mundo parece ser que se ha amasado, principalmente, gracias a la elaboración y venta de software para microordenadores. Y sin lugar a dudas, el duro marco económico, legal e industrial, ha posibilitado la explotación del anónimo talento de muchos matemáticos, tal vez mal camuflados como programadores.

La enorme capacidad financiera de estas multinacionales informáticas y sus estratégicas inversiones en software, ha hecho evolucionar rápidamente la legislación con la que se intenta proteger a los programas de ordenador, y es previsible que los algoritmos, protocolos y las fórmulas matemáticas, experimenten también varios cambios importantes en sus estatutos jurídicos que sin duda afectarán a la actividad y a los intereses de los matemáticos de todo el mundo.

Sin embargo, no todos los países tienen el mismo grado de compromiso ni marcos legales remotamente homologables. Las diferencias legislativas en relación con la propiedad intelectual y copyright por un lado y el derecho industrial y las patentes por otro, crean unas tensiones internacionales que para algunas tecnologías provocan situaciones injustas e incluso absurdas y que tampoco facilitan el desarrollo del conocimiento ni la protección del interés general, o tan siquiera el particular.

Como principio general, cabe distinguir entre las ideas y su expresión por un lado del análisis tecnico-jurídico, y por el otro, entre lo que es Ciencia y lo que sólo es Tecnología. Lo primero sólo se reconoce, y lo segundo, se protege mejor y se autoriza, dentro de ciertos límites, su explotación exclusiva.

Copyright. La propiedad intelectual y las Matemáticas

Todas las artes y oficios, desde siempre, han guardado celosamente sus más distinguidos secretos. Las leyendas y las tradiciones están repletas de anécdotas entre crípticos maestros y audaces aprendices. Y para cualquier mente cultivada, muy pocas cosas pueden ofender tanto como una pública acusación de plagio.

Pero el cuidado y la estima del buen nombre no bastan para garantizar que el talento, y el esfuerzo de muchos años, no se vean seriamente comprometidos por la avaricia, incluso cuando sólo se trata de atribuir honores y el legítimo derecho al reconocimiento público que todo autor original merece.

Los matemáticos podemos recordar algunas efervescentes y muy controvertidas etapas de la Ciencia, y algunos destacados personajes, que ilustran encendidas disputas por la titularidad de descubrimientos tan fundamentales como sin duda lo es el Cálculo Infinitesimal en la Historia de las Matemáticas. Otra ciencia, hace pocos años, sufrió una importante convulsión por la titularidad de un descubrimiento tan vital para la humanidad como fue el virus del SIDA, pues uno de sus principales investigadores se sintió víctima del lento y complejo proceso de publicación de las revistas científicas internacionales.

En nuestro país, y hoy en día, los matemáticos disponen ya de varios procedimientos con los que reservarse el derecho a reivindicar la titularidad de sus ideas originales.

En primer lugar, encabezar cualquier escrito con una (C), seguida del año en curso y el nombre de su autor, editor u otros titulares, reserva automáticamente todos los derechos asociados al Copyright, según los principios del Convenio de Berna de 1886 y su posterior revisión, en París en 1971. Es una buena costumbre editorial que, lamentablemente, muchas veces se descuida.

Aunque su aplicación puede resultar conflictiva, incluso para la misma Sociedad de Autores, el Copyright obliga explícitamente al pago de derechos de autor, y en especial, prohibe la fotocopia del texto. Eso no significa, ni mucho menos, que no se puedan reproducir partes apreciables de la obra, siempre que se cite la fuente y no se genere con ello un beneficio comercial directo.

Para reivindicar la propiedad intelectual con la máxima formalidad, es necesario haberla solicitado en el Registro de la Propiedad Intelectual, del Ministerio de Cultura. Sólo hay que presentar tres copias del escrito, y pagar una pequeña tasa, que en la actualidad es casi simbólica.

Los artículos 534 y ss. de nuestro viejo Código Penal, y la Ley de Propiedad Intelectual (22/1987 de 11 de noviembre) dan todo tipo de facilidades para que el perjudicado, si consigue probar el dolo y el ánimo de lucro, pueda no sólo conseguir una indemnización, sino también que se condene a importantes penas de cárcel a quienes violen sus derechos.

Pero cuando sólo se busca el lógico prestigio que conlleva el haber divulgado una nueva idea, de la que no se espera ningún otro beneficio directo, muchos investigadores están optando por hacerlas públicas en foros muy conocidos, como congresos y conferencias organizados por prestigiosas instituciones, dando esa primera fecha como la de primera publicación.

Una mención especial merece la publicación de los últimos descubrimientos científicos como noticias electrónicas (news postings) en la red Internet de ordenadores interconectados por el protocolo TCP/IP, a nivel mundial, de la que ya hicimos mención en el Boletín N.º 37 de la Sociedad Puig Adam, pág. 8, «El correo electrónico para matemáticos», donde recomendamos a nuestros lectores el activo grupo de news sci.math, gracias al cual miles de matemáticos de todo el mundo tendrán conocimiento inmediato de cualquier mensaje que se desee divulgar por este rápido procedimiento.

Protección del software

El 23 de diciembre de 1993 el parlamento español aprobó la directriz europea del 14 de mayo de 1991 (91/250/EEC) mediante la cual se protegen jurídicamente los programas para ordenadores, y por lo tanto, también puede llevarse a la cárcel a quien descompile o copie ilegalmente software.

Lo cierto es que sólo grandes multinacionales han conseguido hacer efectivos sus derechos, por lo que los programadores independientes, o las pequeñas empresas, difícilmente pueden costearse las complejas reclamaciones judiciales, en las que, a menos de que se trate de burdas copias piratas, la prueba pericial para demostrar plagios parciales del código puede resultar enormemente dificultosa.

Por otra parte, en algunos casos puede ser más interesante, al menos desde el punto de vista industrial, el utilizar técnicas de protección basadas en criptología, la limitación de la ejecución de las copias no licenciadas, y en cualquier caso, se debe personalizar el software tanto como sea posible.

Tanto para reclamar derechos posteriormente, como para ofrecer garantías permanentes a los usuarios del software, conviene considerar aquí la posibilidad de hacer un depósito notarial del código fuente de los programas.

Las patentes y las matemáticas

Aquí y ahora no es posible patentar ni algoritmos ni fórmulas matemáticas, independientemente de cuál sea su complejidad o su utilidad. Sin embargo, es previsible que esta situación cambie sustancialmente debido a las circunstancias tecnológicas internacionales, y a los poderosos intereses que reclaman un cambio de la política industrial y científica al respecto.

Como se ha mencionado anteriormente, las ideas en sí, y las Matemáticas, en principio, no son otra cosa, no pueden patentarse, sino sólo su materialización en invenciones.

Sin embargo, la legislación norteamericana sí que permite patentar algoritmos, lo cual está originando una curiosa industria, basada en empresas que tienen como única actividad licenciar los algoritmos cuyos derechos adquieren.

Uno de los más conocidos ejemplos es el del algoritmo criptológico para firmas electrónicas RSA, y más recientemente, el algoritmo LZW de Unisys para codificar en el formato de archivos gráficos GIF, pero también existen interesantes ejemplos en compresión, corrección automática de errores, tratamiento digital de imágenes y sonidos, más o menos ingeniosas aplicaciones de la teoría de juegos o la inteligencia artificial, y otras técnicas directamente basadas en algorítmica.

Pero como decimos, sólo pueden protegerse los programas, modems, multimedia y criptosistemas que se construyan con ellos, aunque fuera de los EEUU nada impida todavía el copiar literalmente toda la secuencia de operaciones de cualesquiera de ellos, y luego codificarla como mejor convenga en cada momento y circunstancia.

Esta anacrónica situación puede desequilibrar durante muchos años la productividad matemática europea, ya que existen amplios catálogos de algoritmos cuyos derechos industriales están reivindicados casi exclusivamente por norteamericanos, mientras que, debido a la imposibilidad de explotarlos comercialmente, son muy pocos los europeos que reivindican este tipo de derechos, y muchos menos aún los que consiguen alguna rentabilidad económica.

Desde hace pocos años, el precio total para la concesión de una patente solicitada directamente por el propio inventor en España se ha encarecido sustancialmente puesto

que a las 8.190 pesetas de tasas hay que añadir como mínimo 1.100 para la inserción en el Boletín Oficial de la Propiedad Industrial, dependiendo del número de líneas y los dibujos que se aporten, y lo que finalmente resulta mucho más costoso es el informe sobre el estado de la tecnología, de más de 60.000 pesetas, que en un plazo máximo de 15 meses el mismo interesado tiene que adjuntar al expediente que tramita un examinador, con el objeto de garantizar la novedad mediante esta búsqueda.

Al ser las patentes un tipo singular de contratos entre el Estado y personas físicas o jurídicas, que tienen como fin, dentro de ciertos límites, la explotación en régimen de monopolio de una invención durante un período de 20 años como máximo, los matemáticos españoles no podemos ni debemos renunciar a financiar nuestra actividad, si es que otros consiguen hacerlo así. Y una vez más, en España partimos de una situación muy desventajosa.

Si de verdad acabamos viviendo en una sociedad de la información, cada vez serán más importantes los algoritmos que permitan codificar y analizar los datos, así como los derechos que se tengan que respetar para su explotación mediante licencias, tanto para su transformación e incorporación a sistemas más complejos como para su más simple uso final.

Por todo ello, sería muy recomendable anticiparse a esta problemática, ya que, como ocurrió hace pocos años con la industria farmacéutica, los cambios estructurales y económicos que provocaría un modificación de la legislación en este sentido tendría unos importantes efectos en la actividad de los matemáticos, al margen de la docencia.

Finalmente, conviene no olvidar que cuando el inventor de una patente está trabajando para una empresa o institución, es esta última la que, a menos que exista pacto previo en contrario, tiene los derechos de explotación exclusiva, y en estos casos el inventor sólo mantiene derechos morales.

La historia de la Matemática como recurso didáctico
(1.ª Parte)

Mariano Martínez Pérez

Prof. Universidad Complutense de Madrid

Me es muy grato publicar este modesto trabajo en la revista de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas.

A mediados de los años 50, varios grupos de más de 110 alumnos por aula del Instituto de San Isidro de Madrid esperábamos cada día la llegada de Puig Adam, abrigo gris marengo y bufanda blanquísima, que empezaba enseguida a esparcir por encima de nuestras cabezas las explicaciones, tranquilas pero cálidas y emotivas, sobre no sé qué aventuras que le pasaban a unas rectas y a un plano.

El no podía saberlo (¿o sí?) pero a algunos de aquellos rapaces nos llegaba un claro mensaje de que la matemática encierra una gran belleza (¿quién lo diría?).

A su memoria, difícil de olvidar.

Agradezco a mis alumnos de Historia de 5.º curso de la Facultad de Matemáticas sus comentarios y discusión conjunta de este papel.

1. Introducción y declaración de intenciones

Cuando se puso en marcha el Seminario de Historia de la Matemática en nuestra Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, hace ahora quince años, la historia de la matemática era un campo de conocimiento ignorado por casi todos los matemáticos y, en consecuencia, como casi siempre, desdeñado. La actitud de la mayoría de los matemáticos hacia el pequeño grupo de chalados que se dedicaba a estas rarezas inútiles iba de la indiferencia más condescendiente a la hostilidad manifiesta en algunos casos (pocos, por fortuna) ¡Bueno, el que no vale para otra cosa...!

Con el paso de los años esta actitud ha cambiado esencialmente. La difusión y apreciación de la importancia de la historia de la matemática por parte de muchos profesores e investigadores, al menos en nuestra Facultad, es hoy grande, y confiamos en que haya contribuido a mejorar la enseñanza misma de la matemática en este nivel superior. Una prueba indirecta de este cambio de actitud está en el funcionamiento en la Facultad, desde hace varios años, de los cursos del título propio de Historia de las Matemáticas, para licenciados (profesores la mayoría), excelentemente conducidos y coordinados por el profesor Jesús Fortea Pérez. Otra prueba está en la inclusión en el nuevo plan de estudios a punto de entrar en vigor, de dos asignaturas de historia de la matemática, en primero y segundo ciclo respectivamente.

Al mismo tiempo han ido apareciendo traducidos en el mercado librero español una buena cantidad de textos básicos (y algunos más especializados) sobre el tema, lo que supone una ayuda muy importante a su difusión.

Sin embargo, en los extensos dominios de la enseñanza media, la inmensa mayoría de los profesores de matemáticas, incluso jóvenes, no han recibido en la Universidad prácticamente ningún conocimiento de historia de la matemática (¡y, para más inri todavía, cuando los han recibido han solido ser tópicos archirrepetidos falsos o deformados!).

A pesar de estas malas condiciones, mi experiencia personal impartiendo algunos cursos y conferencias sobre el tema, me ha demostrado que ya hay entre los colegas de enseñanza media un interés bastante extendido, y que crece rápidamente, por conectar con la historia y explorar sus posibles aplicaciones a mejorar la enseñanza de la matemática a este nivel, que se ve aquejada de tantos problemas.

La intención más importante de este trabajo es precisamente la de abundar en ello, defendiendo, dentro de las posibilidades de un espacio muy reducido, la importancia fundamental que tiene para el «enseñante» de matemáticas el conocer, cuanto más a fondo mejor, la historia de esta ciencia que enseña, toda ella, de los antiguos a los modernos. Esta convicción, tan radical aparentemente, me fue ganando a medida que me iba introduciendo cada vez más, tanto en los momentos de brillantez como en los oscuros recovecos de la historia de la matemática.

Dentro de un campo tan extenso, no es casual que, aun siendo importantes los hechos concretos, menudos, los detalles materiales explícitos de la evolución histórica, lo sea mucho más el desarrollo de las grandes ideas, los esfuerzos de siglos y milenios por capturar y dominar conceptos de una profundidad y complejidad insospechadas cuando el hombre los empezó a manejar. Volveremos sobre ésto en el párrafo II.

Declarada brevemente cuál es mi intención, debo añadir enseguida, para evitar confusiones, cuál *no es* mi intención.

No es mi intención, ni mucho menos, dar recetas «prácticas», sino «teórica». Sé que esto decepcionará inmediatamente a algunos lectores, demasiados, que quieren sólo instrucciones prácticas: «*¿Qué tengo que hacer para...?*». La razón para defender mi postura es doble: primero yo no lo sé; yo no tengo experiencia en este nivel de la enseñanza, la cual sería esencial, ni he podido hacer ensayos por lo tanto. Pero lo segundo y mucho más importante es que cada profesor *debe inventar* su propia enseñanza él mismo: éste es el aspecto *creativo* y la grandeza de la enseñanza (y la miseria de la pedagogía «normativa»). El método más maravilloso para enseñar algo concreto y que al profesor A le da resultados estupendos, lo «imita» con todo detalle el B y los resultados pueden muy bien ser desastrosos. El *entusiasmo espontáneo* y otras virtudes de un gran actor (¡buenos o malos, los profesores somos en gran medida actores!) sólo pueden surgir de una labor creativa propia y personal; las «recetas» valen para poco o para nada. Pero basta ya de «antipedagogía» (perdonen, pero ¡es que me lanzo!).

¿Qué es lo que se pretende pues? Muy sencillo: una vez que el profesor comience a explorar la historia de la matemática, y mejor, por supuesto, cuando sus conocimientos vayan siendo más extensos y más profundos, se sorprenderá encontrando aquí y allá cosas interesantes que van a afectar a su enseñanza (¡y no me refiero a las socorridas anécdotas de las que hablaremos más adelante!). Pero debe ser él mismo el que arranque esas perlas y las elija. El recurrir a materiales «precocinados» seguramente conducirá a malos resultados, aparte de privarnos de la parte más entretenida y personal del proceso (también como en la cocina; curioso ¿no?).

II. El hombre, cosa histórica. Y la Matemática, creación cultural histórica de la Humanidad

El hombre es un extraño animal que suele interesarse *espontáneamente* (quiere decirse, incluso sin que le obliguen) por su propia historia, por lo que han hecho sus antepasados más o menos remotos. No todos, evidentemente, pero sí una buena parte de los hombres tiene un interés inmediato por conocer la historia de la humanidad. Hasta tal punto esto es así que una de las primeras grandes figuras de la cultura griega es ya un historiador «profesional»; el gran Herodoto (s. V a. C.).

Este hecho, si uno lo piensa seriamente, no puede dejar de sorprender, porque la historia está dedicada, se la mire como se la mire, al pasado, y el pasado pues está ya irremediablemente «pasado», y nada ni nadie lo podrá cambiar. El pueblo, sabio en refranes, dice a este respecto «Agua pasada no mueve molino» (¡ya veremos si mueve o no mueve molino!).

La explicación más a mano de este interés suele darse en términos de simple «curiosidad». Es innegable que el hombre tiene (o suele tener muy a menudo) curiosidad por saber lo que han hecho otros hombres en épocas pasadas. Pero la pregunta sigue ahí: ¿por qué? El hombre no ha tenido casi nunca una vida demasiado *fácil* (según épocas, claro) y los problemas de supervivencia que le ha ido planteando la vida diaria parecían más que suficientes como para monopolizar su atención y disuadirle de distraerla en evocar el «pasado» que ya no se puede cambiar y no plantea problemas.

La explicación de la «simple y desinteresada curiosidad» por la historia encuentra un apoyo fácil: Cuando leemos los hechos de nuestros antepasados parece claro que, además de vivir nuestra propia vida real y concreta (que puede ser muy anodina), vivimos otras vidas, es decir, enriquecemos nuestra vida, *vivimos más* o de manera más interesante. Nosotros no hemos explorado las fuentes del Nilo, ni hemos conquistado México ni hemos descubierto las leyes de la gravitación universal, pero si leemos la historia de estos hechos, *parece* que en cierto modo los hemos vivido. Y esto «satisface» o colma nuestra «curiosidad».

¡Muy bien, muy bien! Pero eso aún no contesta a la pregunta ¿por qué tenemos esa «curiosidad», ese gusanillo?

Antes de seguir el rastro a esta pregunta fascinante, cabe pararse a considerar lo parecidas que son a este respecto la historia y la literatura. También leyendo una gran novela parece enriquecerse nuestra vida, al vivir «per accidens» otras vidas, las de los personajes de ficción. La diferencia en el caso de la historia está precisamente en que *sabemos* que todo ha sido realidad y no ficción. No cabe duda de que producirá una mayor emoción el sentir el calor de las huellas seguidas de otros hombres tan de carne y hueso como nosotros mismos. Es ya una cuestión de intensidad «emocional».

Planteadas así las cosas, Ortega y Gasset publicó en 1935 su importantísimo ensayo «Historia como Sistema». No voy a privar al lector que lo desconozca del placer de leerlo y ponerse en contacto con las ideas de Ortega en sus propias palabras; al contrario, creo que toda persona medianamente culta debería leerlo. Pero necesitamos y nos basta con un resumen muy breve.

Los griegos inventaron el método racional de conocimiento, la filosofía, para enfrentarse al gran problema del conocimiento del mundo. Con este nuevo método lo que se buscaba era una presunta *realidad verdadera*, inmutable y permanente, siempre la misma, que estaría detrás (o debajo) de las apariencias cambiantes y engañosas del «mundo real». A esta realidad auténtica e inmutable la llamaron el «ser», la «esencia» o la «naturaleza» de las cosas.

Su búsqueda e intento de conocimiento iba a ser la tarea de la «filosofía primera» o «metafísica» de Aristóteles.

De esta filosofía general se irían diferenciando con el tiempo, tanto en su campo concreto de problemas como en sus objetivos, todas las ciencias particulares. Estas ciencias «parceladas», como la física, la química, la astronomía, la matemática, conseguirían avances tan impresionantes en pocos siglos, que a lo largo del siglo XIX la filosofía palidecía de envidia, solía decirse, ante los «éxitos de las ciencias».

Sin embargo, como nos dice Ortega, estas gloriosas ciencias habían fracasado escandalosamente a la hora de explicar un hecho simple y modesto pero que nos es muy próximo: la vida humana, la vida como el quehacer cotidiano del hombre en su globalidad (que no se reduce aparentemente a física, ni a química ni a una biología «racional» que evita y margina cuidadosamente la «vida» concreta y actual).

La razón de tan ruidoso fracaso la encuentra Ortega precisamente en las peculiaridades de esa rara cosa que es el hombre. Quizás el hombre, la cosa más cambiante que en el mundo pueda encontrarse, no tenga eso de una «esencia», «ser» o «naturaleza» inmutables, sino que todo en él sea temporalidad y cambio. (Emilio Lledó nos dice: «estamos hechos de tiempo». La vida es necesariamente tiempo, pero (gran paradoja) el tiempo también es muerte).

En resumen, según Ortega, el hombre no tiene esencia, no tiene naturaleza, *sólo tiene historia, su* historia. Y hablando en sentido estricto hacer antropología es hacer historia del hombre.

Sorprendente: resulta así que el interés «desinteresado» por la historia, por «pura curiosidad», en el fondo no lo es, sino que el hombre *necesita* conocer su historia para *saber de sí mismo*, para conocerse y saber a qué atenerse sobre sí mismo.

Es inevitable y muy ilustrativo el comparar la pura curiosidad por la historia con el hambre. También en una interpretación ingenua y simplista podría pensarse que la finalidad del comer es la de dar «placer» al sentido del gusto y «matar el hambre» únicamente. Evidentemente, la importancia real de alimentarse es mucho más dramática y «necesaria».

El hombre, cosa histórica. El hombre sólo tiene algo propio, su historia; ése es su patrimonio, grande o pequeño. Y *todas* las creaciones del hombre tienen carácter histórico.

La cultura en general, la ciencia, *son inevitablemente históricas*, dependen del tiempo. Son, en definitiva, creaciones vivas.

Y cuando se enseña una ciencia como la matemática (por descender a nuestro tema concreto aquí) de manera a-histórica,se está enseñando algo estático y muerto, que no viene de ningún sitio ni va a ningún otro El integrar en la enseñanza su carácter histórico y cambiante parece una de las pocas cosas que puede hacer fluir por las venas de esa ciencia sangre, vida y calor. Y si el profesor enseña algo *vivo*, los alumnos lo van a notar, y es lo más lógico y natural que, sobre todo a su edad, se interesen más por algo vivo que por algo muerto.

III. Diversos aspectos de la historia de la Matemática, útiles, importantes, incluso necesarios para la enseñanza de la Matemática

Vamos a abandonar por el momento las ideas teóricas generales que acabamos de resumir, por muy importantes que sean, para bajar al terreno concreto que responde al título exacto del trabajo. Se trata, ya lo hemos anunciado, de «demostrar» o justificar concretamente la utilidad que puede tener la historia de la matemática aplicada a mejorar la enseñanza de la matemática misma (y casi lo mismo podríamos decir de las demás ciencias, física, química, astronomía, etc.).

En mi opinión, y limitándonos siempre a los niveles elemental y medio de la enseñanza (como de los 12 a los 18 años o así), hay que empezar por hacer una distinción muy clara entre dos sentidos distintos (y complementarios) del significado que se le puede dar a la expresión «aplicación de la historia de la matemática a la enseñanza»:

1) Un primer sentido indirecto, teórico y general: el que se refiere a los conocimientos generales de historia de la matemática que conviene tenga el profesor, y que, *sin sacarlos directamente al aula* por su generalidad misma, profundidad o dificultad para ser entendidos, van a influir sin embargo decisivamente en su manera de *presentar* y explicar la asignatura en el aula.
2) Un segundo sentido directo, particular y concreto: el que se refiere a los materiales históricos concretos y puntuales que, *utilizados directamente en el aula*, ante sus alumnos, ayuden al profesor a hacer entender mejor (¡si Dios quiere, por supuesto, que todo parece indicar que no!) las ideas matemáticas que les va a explicar a esos alumnos.

Supongo que ante estos dos puntos 1) y 2), la mayoría de los profesores pensarán enseguida que el 2) es mucho más importante que el 1), si no incluso que es el único realmente importante. La razón para ello es, sin duda, la de que la «utilidad» de 2), sea después la que sea, se «entiende» bien sin más, de entrada. En cambio 1) a primera vista parece pertenecer al terreno de los lejanos principios filosóficos, muy importantes ellos, eso sí, pero escasamente útiles en la vida diaria.

En mi opinión, ocurre exactamente lo contrario. La importancia comparativa del aspecto 1) frente al 2) vendría a ser como de 10 a 1 (si hubiera que puntuarlos tan rudamente). Lo que ocurre es que la gran importancia de 1) no es fácil de entender y apreciar cabalmente mientras uno no se ha introducido lo suficiente en la historia de la matemática; no está tan clara, en suma.

Así pues, ¿no veremos la «verdadera utilidad» de la historia de la matemática para nuestro trabajo de enseñantes hasta que estemos bien introducidos en ella? ¿no parece pedirse demasiado? Pues estrictamente hablando así es, y es bastante natural; lo mismo viene a pasar con casi todos los conocimientos: uno no podrá sacarles partido, mucho o poco, mas que si los tiene en alguna medida. Recordemos las palabras de Puig Adam en uno de sus hermosos prólogos, el del *Cálculo Integral*, donde dice, por cierto a continuación de una defensa de la perspectiva histórica: *Los únicos conocimientos que no se aplican jamás son los que no se tienen.* No vamos a saber todos de todo, pero algo más convendría (sería necesario) saber.

Quizás lo que más dificulte en este caso el ver la situación con claridad es el hecho de que *todos* hemos sido víctimas, como recordábamos más arriba, de una enseñanza de la matemática (en todos los niveles) *estrictamente divorciada y separada de la historia* que la ha producido, partiendo del punto de vista aparentemente tan razonable que se expresa en la pregunta: «pero ¿qué tendrá que ver la matemática auténtica, es decir la actual, con su penoso y complicado desarrollo histórico?» Y en la práctica todo se reducía a denominar con nombres de matemáticos (desconocidos) a teoremas conocidos. Eso no es la historia, ni mucho menos, por supuesto.

Permítanme adelantarles ya que algunos de los más *mayúsculos errores*, de los más importantes desde el punto de vista pedagógico por su extensión y profundidad (como en los mares y lagos), que se han producido en la enseñanza de la matemática a mediados de este siglo (en todos los niveles, repito), sólo se han podido producir por culpa de una sólida ignorancia de ese tipo de conocimientos generales acerca del desarrollo histórico de las ideas matemáticas a los que me refiero en 1) (Véase más adelante en el párrafo III - A, apartado β).

Intentaré esmeradamente justificar un poco estas afirmaciones que pueden parecer tan radicales, con unos cuantos ejemplos bastante generales. Se podría dar una «demostración» más cumplida acumulando otros ejemplos como evidencia, pero eso exigiría demasiado espacio, y pienso también que los colegas lectores y curiosos pueden buscar otros muchos ejemplos por sí mismos, *affin de leur laiffer le plaifir de les inuenter*, como decía Descartes en las últimas líneas de su *La Gèométrie*. A ésto estará dedicado el párrafo III - A, que considero el núcleo del trabajo. El párrafo III - B será más breve y estará dedicado al punto 2) anterior; también aquí el problema se introduce pero queda completamente abierto como interrogante para los futuros «usuarios» de la historia en la enseñanza.

III - A. ¿Qué puede enseñar al profesor la historia de la matemática?

Henos ya dispuestos a meterle mano al punto 1) anterior.

Simplificando un poco la situación real por razones de claridad, vamos a clasificar las ideas que constituyen ese gran aglomerado que es la matemática (así, en general, sin más necesidades de precisión por ahora) en dos grandes grupos que, «a fortiori», no van a ser del todo disjuntos (¿le permitiríamos en la vida a uno de nuestros alumnos hacer una «clasificación» tan chabacana?). En el grupo α entrarán las ideas de o sobre los objetos matemáticos en la historia, mientras que en el β las ideas sobre el peculiar método de conocimiento matemático. Esta pseudoclasificación tiene la ventaja de permitirnos plantear por separado las dos preguntas: ¿qué nos enseña la historia sobre α? ¿y sobre β? entendiendo siempre que como respuestas buscamos hechos relevantes para la enseñanza misma.

α) *Los objetos matemáticos en la historia*

1. De las ideas intuitivas básicas... Los orígenes, a veces remotos

La matemática actual maneja una gran cantidad de objetos distintos y de ideas de estos objetos. Cualquiera podrá recordar aún con terror la copiosa granizada de conceptos que le cayó encima a lo largo de su carrera (de los cuales «aprendió» bastantes, pero no «entendió» casi ninguno).

Sin embargo, la situación era muy distinta hasta mediados del siglo XIX, en que comienza la llamada *matemática abstracta*. A lo largo de varios milenios los matemáticos venían estudiando una pequeña cantidad de objetos, que además eran, aparentemente, mucho más sencillos que los que estudia la matemática hoy. Si se examinan las cosas con más detalle, lo que se descubre es que la mayoría de estas ideas nuevas, tan abstractas y generales (piénsese en la multitud de «espacios» distintos o de diferentes estructuras algebraicas «raras») tienen su origen en generalizar *algunos aspectos* concretos de estructuras y objetos clásicos. Los diferentes anillos y cuerpos generalizan propiedades *esenciales* de los números enteros, reales o complejos. Y todos los complicados espacios actuales generalizan las propiedades importantes de ese continuo particular que puede ser la recta o el plano usuales, a través de sus conexiones con los números reales como vía.

Pero lo más notable que nos muestra la evolución histórica es que frente a la larga y penosa elaboración histórica de los conceptos clásicos más importantes (continuidad, número real, límite), su generalización a los tan complicados actuales ha sido, comparativamente, un hecho «esencialmente trivial». Es importante entender bien esta afirmación, que puede resultar extraña. No se trata de que un espacio de Hilbert sea en sí tan sencillo como los números reales, ni que no tenga interés o presente problemas más difíciles o interesantes que éstos. Mucho menos se trata de restar el menor mérito a matemáticos de la talla de Riesz, von Neumann o Hilbert, que los introdujeron y estudiaron. Y algo análogo diríamos de una variedad diferenciable y del plano o el espacio tridimensional usual. Lo que se afirma es que «comparativamente» es mucho más trivial, desde el punto de vista conceptual, pasar de los números reales a los espacios de Hilbert, que de los naturales a los reales. Todas las apariencias que apuntan en sentido contrario se derivan del supuesto equivocado de que *entendemos claramente* y sin misterios la continuidad del espacio, o lo que es un número real (¡no digamos ya el conjunto de todos los reales!). Nada más lejos de la verdad, y el estudio histórico en profundidad de la evolución de estas ideas desde sus etapas iniciales de intuiciones básicas, pasando por las inesperadas dificultades que presentaron, hasta su llamada conceptualización «definitiva», este estudio histórico, digo, lo muestra sin lugar a dudas. Los grandes pasos se dieron antes (o a lo mejor no se han dado todavía, como pone en evidencia el problema de los infinitésimos; véase III - A, α, número 3) y como conclusión resulta que hemos estado tomando como claros y familiares, sin problemas, conceptos sumamente conflictivos y poco claros. ¡Ya va siendo hora de que nos enteremos, porque muchas de estas dificultades las descubrieron ya los griegos hace dos milenios y medio!

Lo que ocurre es que algunas de las ideas matemáticas más importantes tienen un *origen* muy antiguo y han planteado sus dificultades muy pronto. Eso no ha sido obstáculo para que, en una enseñanza «a-histórica» se presentase al alumno solamente la solución que *hoy* se admite a esas *dificultades*, pero *no* las dificultades conceptuales mismas ni *cómo aparecieron* en las ideas intuitivas básicas. Es decir, la solución (una posible solución) a un problema, escamoteándonos y ocultándonos cuidadosamente dicho problema. ¡Fantástico! ¿Se podrá llegar a *entender algo* de esta manera?

Estas ideas matemáticas de larga historia se podrían comparar en su desarrollo a las semillas o esporas de algunas plantas: pueden vivir de una manera latente en su cápsula durante largos años hasta que, a su tiempo y en condiciones favorables, germinan, dan lugar a una planta, flores y semillas-ideas de nuevo.

Cuando hablo de los orígenes *remotos* de algunas ideas matemáticas muy importantes, no me refiero a la antigua Grecia, donde a lo mejor se *conceptualizó* y se *teorizó* ya sobre ella, ni a Egipto o Mesopotamia que pudieron *utilizarla instrumentalmente*, sino a veces muchos miles de años antes, en que, sin saberse aún en qué va a acabar aquéllo, van acumulándose lentamente las intuiciones básicas en la formación de esa semilla de idea. La matemática posterior propiamente dicha ya, *no habría sido posible* sin esa larga acumulación de intuiciones previa.

Vamos a poner ocho ejemplos (aprovechando la feliz circunstancia de que el ocho sea un número primo):

1. El número

Es una tarea imposible, desde luego, la de intentar fijar una fecha en la historia de la humanidad como origen de los esfuerzos del hombre por controlar la respuesta a la importante pregunta «¿Cuántos.....?», para *comunicar* la información en cuestión a otros. Poco esfuerzo de imaginación es necesario para darse cuenta de que esta información podía ser, no ya interesante sino vital para nuestros lejanísimos antepasados.

Se trata, claro está, de *expresar, con todo el detalle informativo que se pueda*, la *medida* de una multitud de individuos (o indivisibles, en algún sentido) (mucho más tarde, los griegos llegarán a formularse la *increíble* pregunta, que aquí ni se concibe: «¿Y qué es, de verdad, de verdad, uno?», pregunta extremadamente compleja). No es muy arriesgado pensar que (como avalan investigaciones desde diversos ángulos) la más antigua respuesta a nuestra pregunta estuviera en dos palabras que representaran la dualidad «Pocos», «Muchos», la cual le suponía ya una información valiosa (aunque pobre y vaga, por supuesto) a nuestros antepasados de hace docenas de miles de años (¿quizás cientos de miles?).

El proceso de diferenciación progresiva del mínimo «Pocos» posible, es decir, «Uno» (¿o quizás «Dos»?) y «Muchos», llevaría, mucho más tarde, a «Uno», «Dos», «Tres» y «Muchos», etc., y a largo plazo se irían decantando las ideas de los números cada vez mayores.

Un punto muy interesante de todo este proceso, que sólo mencionaremos de pasada, es el siguiente: Una de las mayores dificultades que sin duda tuvo el hombre para ir progresando en el concepto de número fue la de *darle nombre* a los distintos números.

La importante idea de *base* de un sistema de numeración es más tardía, pero aún así *nos consta* casi con toda seguridad (cosa excepcional en historia tan antigua) que su aparición data de hace unos 40.000 años o más. Esta idea de base conducirá a lo largo del neolítico a los sistemas de numeración aditivos (aún no posicionales), con un simbolismo artificial inventado «ad hoc», como el de los egipcios. Las dos últimas etapas de este proceso que hemos llamado el de los «orígenes remotos» en el campo de los números, son la de la introducción de los números «fraccionarios» en Egipto y Mesopotamia (véase más adelante, **La medida**) y, por último, la importantísima invención de los sistemas de numeración *posicionales* en Mesopotamia. Este hecho impulsará de una manera imparable el cálculo con números fraccionarios (¡y hasta con los terribles radicales irracionales, a través de sus aproximaciones!) en forma de «fracciones sexagesimales». Más adelante todo ello lo heredarán los «números decimales», única pero poderosa herramienta para el *manejo* y *exploración* hasta de los números irracionales, durante los siglos y siglos que habrían de transcurrir antes de que se diera su definición matemática exacta.

2. El espacio

Si las primeras etapas en la progresiva elaboración de la idea de número han tenido que ser muy remotas, las que se refieren a la fijación de las bases intuitivas de la geometría deben serlo aún mucho más, si de verdad queremos remontarnos a los orígenes.

Desde sus primeros pasos el hombre ha tenido que moverse en el espacio físico que lo rodeaba, e ir explorando sus propiedades intuitivas básicas. Un lento proceso de abstracción comenzaba así, que conduciría al final a los refinados conceptos geométricos de los griegos. Aspectos tan claros e inmediatos como el de la «continuidad» del espacio (que tantos y tan complejos problemas iba a plantear más tarde), el de la «distancia» en el sentido original y completamente cualitativo del contraste «lejanía»- «cercanía», no tuvieron más remedio que formar parte de la concepción por el hombre de la realidad en la que estaba inmerso. Sin estos lejanos pasos nunca se hubiera conquistado el mundo puramente abstracto de nuestra geometría.

El problema de *controlar y expresar* simbólicamente el «alejamiento» de unos lugares a otros, llevará al hombre a la «medida de distancias», como primer intento de controlar esa cualidad y *a la vez* la continuidad del espacio; lo veremos por separado más adelante **(La medida)**. Como ejemplo de una propiedad espacial que tendría gran importancia en el futuro y que nuestro antepasado lejano debió *descubrir* muy pronto (aunque sin formulársela nunca explícitamente, por supuesto), es la que hoy llamamos propiedad arquimediana de la distancia : Si una distancia a es más grande que otra b, entonces sumando la b consigo misma suficiente número de veces, esta suma llegará a superar a a. Se trata de una propiedad tan íntimamente ligada a la experiencia que parece imposible no «dar por descontado» su carácter verdadero. Por cierto, si esto fue así, podría utilizarse esta importante propiedad en la enseñanza elemental con más frecuencia de lo que suele hacerse (que es casi nunca), con la seguridad de su aceptación por parte de los alumnos como «verdad geométrica» completamente natural. Tal como están hoy las cosas en este punto, la propiedad arquimediana y su gran riqueza (bajo las múltiples formas equivalentes que tiene) no se explota en el nivel elemental de la enseñanza de manera adecuada basándose en el prejuicio (completamente equivocado, en mi opinión) de que es muy «abstracta» o «difícil» de entender; pero tampoco se utiliza apenas por sí misma en el nivel superior de la enseñanza, porque aquí aparece ya disimulada e incluida en otras más potentes, como son los axiomas de completitud usual de los reales, o bien los de continuidad espacial.

Como último comentario acerca de esta evolución «prehistórica» de la idea de espacio antes de su racionalización por los griegos, pienso que es muy interesante lo siguiente, pese a que esté casi inexplorado. Resulta muy evidente que la línea central de la evolución de la idea de espacio geométrico de una, dos o tres dimensiones, es «métrica», es decir, la medida de distancias es un elemento antiguo y esencial a la idea de espacio (quizás no la única: piénsese en los ángulos, en el paralelismo, etc., pero sí probablemente la más esencial y de las más remotas).

Sin embargo, hay rastros muy antiguos de «geometrías» en las que se revelan ya en germen (o como decíamos más arriba, en forma de semilla) formas espaciales que en la historia de la matemática *tardarían mucho tiempo* en germinar y *desarrollarse* plenamente. Se trata, por ejemplo, de la geometría de los mapas. De los *mapas* de territorios, bien métricos o bien ordenados y «cuasitopológicos», a los mapas de navegación que, como los futuros «portulanos», nos revelarán un «espacio proyectivo» en germen, pero de características clarísimas, o bien otros de tipo más rudimentario en los que lo «topológico» salta a la vista.

La prehistoria de la geometría es pues, contra lo que sospechaban hace años casi todos los historiadores de la matemática, un campo extraordinariamente interesante (¡y poco explorado aún!).

(Continuará)

Reseñas de libros

EUGENIO ROANES MACÍAS y EUGENIO ROANES LOZANO: *Nuevas Tecnologías en Geometría*, Editorial Complutense, Madrid, 1994. 232 páginas y un disquete de HD de 3,5'.

Es difícil encontrar razones que expliquen el retraso con el que se van aplicando a la enseñanza de las Matemáticas las tecnologías basadas en el uso de ordenadores, mientras tantas actividades humanas las han incorporado con pleno éxito. Ya no valen las excusas del alto costo de los equipos necesarios ni la de la dificultad de manipulaciones gráficas. Los autores de este libro vienen luchando desde hace más de diez años para evitar esta situación, y este mismo Boletín ha publicado algunos de los artículos surgidos de esta lucha.

En este libro se muestran brillantes aplicaciones de los ordenadores a la enseñanza de la Geometría. Con ellos se pueden acometer muchas actividades de caracter geométrico, como la simulación gráfica de problemas, el diseño de construcciones gráficas, la realización de cálculos geométricos, la automatización de relaciones y transformaciones del plano y la demostración automática de teoremas de la Geometría. Algunas de estas actividades son aprovechables desde la enseñanza primaria y otras en niveles sucesivos. A cada una de ellas se dedica un capítulo del libro.

Todos los temas tratados se ilustran con programas suministrados en el disquete que acompaña el libro, y que pueden ejecutarse en un ordenador personal. Algunos de ellos reproducen los que los mismos autores dieron a conocer en artículos o libros anteriores y otros muchos se ofrecen en éste por primera vez.

Cada tema va acompañado de un amplio repertorio de ejercicios para resolver con las herramientas descritas en el libro.

La biblioteca de programas (para cualquier PC con pantalla EGA o VGA, bajo DOS) que contiene el disquete se organiza en ocho directorios:

— DEMO: Programas de demostración ejecutables. Con solo pulsar repetidamente una tecla, ellos mismos generan datos y producen resultados. Es destacable, por su belleza, el relativo a las teselaciones periódicas del plano.

— EJEC: Programas ejecutables de simulación. Funcionan interactivamente, pidiendo datos al usuario y mostrando los resultados. Son notables los relativos al problema de Apolonio y al teorema de Simson.

— ELAB: Modelos de programas para elaborar simulaciones de problemas geométricos. Para construir otras análogas se requiere un programa Turbo-Pascal para PC.

— GEOD: Programas de construcciones geométricas. Permiten manipular interactivamente figuras planas, con insospechadas posibilidades didácticas. Requieren el sistema «The Geometer's Sketchpad», del que dimos noticia en nuestro Boletín n.º 37 (pág. 105).

— GEOS: Programas que muestran secuencialmente el proceso de algunas construcciones geométricas. Requieren el mismo sistema que los anteriores.

— LIBE: Programas de cálculo geométrico automatizado. Requieren el sistema MAPLE y su paquete «Euclidean Geometry». En el disquete se incluye una implementación de la «Turtle Geometry» en Maple V.2.

— MECA: Programas de demostración automática con MAPLE. Contiene los procesos de demostración automática de numerosos teoremas geométricos, por varios métodos: uno basado en seudodivisiones y otros basados en el uso de bases de Groebner. También requieren MAPLE, y algunos de ellos sus paquetes «Euclidean Geometry» y «Groebner».

— PROV: Programas de demostración automática con REDUCE. Otros procesos de demostración automática, utilizando ese sistema. Requiere REDUCE y algunos su paquete «Groebner».

No debe pensarse que el libro es un simple manual para el uso de los programas ofrecidos. Su propósito es, más bien, mostrar, en forma apasionante, una nueva manera de enfocar la enseñanza de la Geometría, ofrecer valiosas herramientas para hacerlo y animar a los lectores a seguir los trabajos que con tanto entusiasmo han dedicado los autores a mejorar esa enseñanza.

J.F.B.

CHEN, CHUAN-CHONG y KOH, KHEE-MENG: *Principles and Techniques in Combinatorics*. World Scientific Publishing Co. (73, Lynton Mead, Totteridge, London N20 82H), 1992. ISBN 981-02-1139-2 pbk. 298 pg.

Los profesores Chen y Koh, de la Universidad Nacional de Singapur, han participado durante varios años en las sesiones de entrenamiento de la Delegación de su país en la Olimpiada Matemática Internacional (en la que Singapur participa desde 1988) y enseñan Matemática Discreta. Su libro *Principles and Techniques in Combinatorics* debería ocupar, por derecho propio, un lugar destacado en una antología de su género, en la que compartiría honores con *Problems in Combinatorics and Graph Theory* de Ioan Tomescu, *Combinatorial Problems and Exercises* de Laszlo Lóvasz, y *A textbook of Combinatorics*, de Wilson y van Lint, por citar únicamente tres ejemplos recientes.

En efecto, en el libro que comentamos, a través de una impresionante colección de 109 ejemplos resueltos con detalle, para que el estudiante pueda seguir todos los pasos, se describen minuciosamente los principios de recuento combinatorio (de adición, de multiplicación, de la biyección, de complementación, del palomar, de inclusión y exclusión, de simetría) y las nociones básicas de esta rama de las matemáticas, incluyendo funciones generatrices y relaciones de recurrencia y una pequeña introducción a la teoría de Ramsey. Además se proponen (con la respuesta numérica al final del libro) otros 489 problemas y ejercicios, muchos de los cuales proceden de Concursos, entre los que hay algunos de la Olimpiada Matemática Española.

Para el lector potencial puede ser útil saber que no se utilizan los términos «variaciones con o sin repetición» ni «combinaciones con repetición», que son comunes en nuestra lengua; igualmente, los autores emplean la notación $N = \{1,2,3,...\}$ y $N^* = \{0,1,2,...\}$ al contrario que la francesa; pero éstos son pequeños detalles que no alteran la magnífica impresión que causa esta obra, de gran utilidad en cursos de Matemática Discreta para alumnos de Matemática Pura, Aplicada e Informática.

F. Bellot Rosado

MARCIN E. KUCZMA: *144 Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition 1978-1993*. The Academic Distribution Center (1216 Walker Road, Freeland, MD 21053, USA), 1994; 157 pgs. ISBN 0-9640959-0-4.

La Competición Matemática austro-polaca es un concurso de problemas para estudiantes preuniversitarios que se desarrolla anualmente, de forma alternativa en Austria y en Polonia, entre equipos de ambos países, formados por estudiantes de Bachillerato que *no* se han clasificado para la Olimpiada Internacional (!).

Tiene lugar a finales de junio o primeros de julio, desde 1978.

El concurso consta de dos partes:una fase individual, similar a la I.M.O. (2 días de examen, 3 problemas cada día; 4 h. 30 m. de duración) y al tercer día, la fase por equipos: 3 problemas en 4 horas; el equipo austríaco y el polaco ocupan aulas separadas, y los estudiantes (6 por cada país) trabajan conjuntamente. Las clasificaciones de ambas fases son independientes.

El libro del Dr. Kuczma recoge todos los problemas propuestos en las 16 primeras ediciones del concurso (algunos de los cuales son originales suyos), con sus correspondientes soluciones, y, si el caso lo requiere, algunos comentarios. Podrá observarse que el nivel de dificultad de los problemas es muy alto, similar —y en algunos casos superior— al de los propuestos en la Olimpiada Internacional. Las soluciones son elegantes, ingeniosas,... y a menudo, artificiosas, lo cual no es extraño dado que se deben en muchos casos al propio Marcin Kuczma, cuya habilidad como problemista es bien conocida, tanto para los lectores de CRUX MATHEMATICORUM, la magnífica revista canadiense de problemas, como para los miembros del Jurado Internacional de la I.M.O., que ha seleccionado en dos ocasiones problemas suyos para proponerlos a los participantes.

A título de ejemplo, veamos algunas muestras de los enunciados de los problemas incluídos en el libro.

3.5: Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo y B_1,B_2,B_3 puntos en los lados A_2A_3, A_3A_1 y A_1A_2, respectivamente (distintos de los vértices). Demostrar que las mediatrices de los tres segmentos A_iB_i *nunca* son concurrentes.

3.8: Sea S un conjunto de 1980 puntos del plano. La distancia entre dos cualesquiera de ellos es mayor o igual que 1. Probar que S contiene un subconjunto T de 220 puntos, tal que dos cualesquiera de ellos distan entre sí al menos $\sqrt{3}$.

8.7: Hallar una cota superior para el cociente.

$$\frac{x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3x_4}{x_1^2+ x_2^2+x_3^2+x_4^2}$$

sobre todas las cuaternas de números reales, con $x_i \neq 0$.

Nota: cuanto menor sea la cota, mejor será la solución.

10.2: (Uno de los problemas más difíciles de la colección). Sea n un cuadrado perfecto tal que todos sus divisores primos tienen un número par de cifras en su escritura decimal. Sea $P(x) = x^n - 1987x$. Demostrar que, para $x,y \in Q$, la igualdad $P(x) = P(y)$ implica $x = y$.
(La solución publicada es del eminente matemático polaco A. Schinzel).

11.3: Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo sin ningún par de lados paralelos. Se consideran los dos ángulos formados por dos pares de lados opuestos de *ABCD*. Sus bisectrices interiores cortan a los lados de ABCD en *P,Q,R,S*, de manera que *PQRS* es un cuadrilátero convexo.

Demostrar que *ABCD* es cíclico si y sólo si *PQRS* es un rombo.

Los aficionados a la resolución de problemas gozaremos con la lectura de este libro, que sin duda se unirá a otras obras similares, ahora ya clásicas, como *The Hungarian Problem book, The USA Mathematical Olympiad o The Canadian Math. Olympiad.*

F. Bellot

Reseña de congresos

The first International DERIVE Conference.

Del 11 al 15 de julio tuvo lugar en la Universidad de Plymouth (G.B.) el congreso arriba mencionado. Asistieron más de 200 congresistas, fundamentalmente procedentes de la Europa comunitaria y los Estados Unidos. Posiblemente era mayor el grupo de profesores de enseñanzas medias que el de profesores universitarios.

Estuvieron presentes y expusieron las novedades de la nueva versión 3 los creadores del lenguaje (Albert Rich y David Stoutemyer). Esta versión está a punto de ser comercializada (ya están en pruebas las primeras beta-version). Presenta muchas novedades y mejoras, manteniendo la filosofía del producto.

Asistió también Josef Bohm, *alma mater* de *The DERIVE Newsletter*, del que acaba de aparecer el número 15.

Hay una nueva revista sobre DERIVE: *The DERIVE Journal*, cuyo editor es John Berry, chairman del congreso.

Se anunció un International Symposium en Honolulú para verano de 1995 (organizado en grupos de trabajo) y el próximo International DERIVE Conference (1996, pues es bianual), posiblemente en ESPAÑA (Valencia).

Españoles que presentaron comunicación fueron Abia/Marijuán/Población (Valladolid), Llorens (Valencia), Roanes/Roanes/Garbayo (UCM Madrid), Rincón/Martínez/Miñano (UPM Madrid), y Miñano (UPM Madrid); siendo el español uno de los grupos más numerosos.

No se publicaron actas pero algunos artículos irán apareciendo en The DERIVE Journal.

Hubo tres clases de sesiones: comunicaciones, grupos de discusión y talleres. Las sesiones fueron, por lo general, muy interesantes y se recogieron los distintos aspectos (desarrollo de aplicaciones, DERIVE en la enseñanza a los distintos niveles,...).

Es de destacar el extraordinario ambiente que hubo durante el congreso y la excelente organización de la Universidad de Plymouth y de Software House.

Maple Summer Workshop and Symposium MSWS'94.

Del 9 al 13 de agosto tuvo lugar en el Rensselaer Polytechnic Institute en Troy (N.Y., USA) el citado congreso. Los asistentes procedían fundamentalmente de Norteamérica, aunque había también numerosos europeos.

Los dos primeros días se dedicaron a cursos, tanto de iniciación como avanzados (por ejemplo *Advanced Programming* y *Algorithms of Computer Algebra*, este último presentado por el propio Keith O. Geddes).

En los restantes tres días, en unas sesiones maratonianas, un día incluso de 8:30 a.m. a 9:45 p.m., alternaron las comunicaciones plenarias con las comunicaciones en sesiones paralelas. En ellas se pudo confirmar la flexibilidad del uso de Maple en las distintas ciencias (Biología, Física, Matemáticas, Robótica,...) tanto a nivel de enseñanza como de investigación.

Michael Monagan presentó las nuevas líneas de desarrollo de Maple (ya está comercializada la versión V.3) y se está trabajando el la próxima versión.

The Maple Technical Newsletter ha entrado en una nueva época y prometen más artículos de aplicación y didácticos.

Españoles que presentaron comunicaciones fueron Roanes/Roanes (UCM Madrid) y Alonso/Gutierrez/Recio (Santander), esta segunda cancelada a última hora por un problema familiar.

Se presentaron también otros productos de Waterloo Maple Software como Theorist (similar a Maple, más reducido, y sólo para Mac) y Scientific Word (procesador de texto científico, con salida LATEX).

Curiosamente, los grupos de discusión sobre Maple en high-schools fueron los más concurridos, teniéndose que improvisar alguna sesión extra.

El próximo año tendrá lugar de nuevo en Estados Unidos, aunque se habla de una posible versión europea.

Las actas han sido publicadas por Birkhauser, con el título *Maple V: Mathematics and Its Applications*, siendo el editor el chairman del congreso (Robert López).

Los medios con que se contó fueron impresionantes (hay, por ejemplo, 650 máquinas Unix en el campus), y la organización, excelente.

Eugenio Roanes Lozano

Problemas propuestos

Problemas propuestos en la IX OLIMPIADA IBERO-AMERICANA DE MATEMATICA celebrada en Fotaleza (Brasil)

Problema 1.º:

Se dice que un número natural n es «sensato» si existe un entero r, con $1 < r < n-1$, tal que la representación de n en base r tiene todas sus cifras iguales. Por ejemplo, 62 y 15 son sensatos, ya que 62 es 222 en base 5 y 15 es 33 en base 4. Demostrar que 1993 no es sensato pero 1994 sí lo es.

Problema 2.º:

Sea un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, cuyos vértices se denotan consecutivamente por A, B, C y D. Se supone que existe una semicircunferencia con centro en AB, tangente a los otros tres lados del cuadrilátero.

i) Demostrar que $AB = AD + BC$.
ii) Calcular, en función de $x = AB$ e $y = CD$, el área máxima que puede alcanzar un cuadrilátero que satisface las condiciones del enunciado.

Problema 3.º:

En cada casilla de un tablero de n por n hay una lámpara. Al ser tocada una lámpara cambian de estado ella misma y todas las lámparas situadas en la fila y la columna que ella determina (las que están encendidas se apagan y las apagadas se encienden).

Inicialmente todas están apagadas. Demostrar que siempre es posible, con una sucesión adecuada de toques, que todo el tablero quede encendido y encontrar, en función de n, el número mínimo de toques para que se enciendan todas las lámparas.

Problema 4.º:

Se dan los puntos A, B y C sobre una circunferencia K de manera que el triángulo ABC es acutángulo. Sea P un punto interior a K. Se trazan las rectas AB, BP y CP, que cortan de nuevo a la circunferencia en X, Y y Z. Determinar el punto P para que el triángulo XYZ sea equilátero.

Problema 5.º:

Sean n y r dos enteros positivos. Se desea construir r subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$ de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ cada uno de ellos con k elementos exactamente y tales que, para cada entero x, $0 \le x \le n-1$, existen x_1 en A_1, x_2 en A_2, ..., x_r en A_r (un elemento en cada conjunto) con

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_r$$

Hallar el menor valor posible de k en función de n y r.

Problema 6.º:

Demostrar que todo número natural $n \le 2^{1.000.000}$ puede ser obtenido a partir de 1 haciendo menos de 1.100.000 sumas; más precisamente, hay una sucesión finita de números naturales $x_0, x_1, \ldots, x_k$ con $k < 1.100.000$, $x_0 = 1$, $x_k = n$, tal que para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, existen r, s, con $0 \le r < i$, $0 \le s < i$ y $x_i = x_r + x_s$.

Problemas propuestos en Madrid en la Primera Fase de la XXXI OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

Problema 7.º:

Sean a, b, c tres números reales distintos y $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si se sabe que

1) $P(x)$ da resto a cuando se divide por $x-a$;
2) $P(x)$ da resto b cuando se divide por $x-b$;
3) $P(x)$ da resto c cuando se divide por $x-c$,

encontrar el resto de la división de $P(x)$ por $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Problema 8.º:

Demostrar que si $(x + \sqrt{x^2+1})\,(y + \sqrt{y^2+1}) = 1$, entonces $x + y = 0$.

Problema 9.º:

Los cuadrados de los lados de un triangulo ABC son proporcionales a los números 1, 2, 3.

a) Demostrar que los ángulos formados por las medianas son iguales a los del triángulo ABC.
b) Demostrar que el triángulo cuyos lados tienen por longitudes las medianas de ABC es semejante al triángulo ABC.

Problema 10.º:

Determinar el menor número natural m tal que, para todo número natural $n \ge m$, se verifique $n = 5a + 11b$, siendo a y b enteros mayores o iguales que 0.

Problema 11.º:

Un subconjunto $A \subseteq M = \{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$ es *majo* si tiene la siguiente propiedad:

«Si $2k \in A$, entonces $2k-1 \in A$ y $2k+1 \in A$».

(El conjunto vacío y M son majos). ¿ Cuántos subconjuntos majos tiene M?

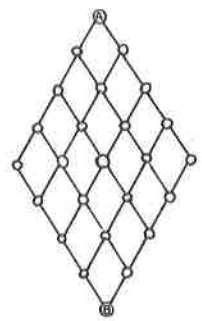
Problema 12.º:

Se consideran las parábolas de ecuaciones

$$y = cx^2 + d \qquad (c > 0,\ d < 0)$$
$$x = ay^2 + b \qquad (a > 0,\ b < 0)$$

que se cortan en cuatro puntos. Demostrar que esos cuatro puntos están en una misma circunferencia.

Problema 13º:



El esquema adjunto representa una red de caminos. Los círculos son plazas y los segmentos que unen cada círculo con sus contiguos son caminos, todos de la misma longitud. En cada plaza hay instalado un dispositivo de alarma, que funciona cuando en la plaza se encueantran simultáneamente dos personas. La alarma de la plaza central funciona siempre que en esa plaza se encuentre al menos una persona.

Para vigilar la instalacion salen, a la vez, dos personas, una de A y otra de B. Ambas siguen trayectorias de longitud mínima, con velocidad constante, y en cada plaza el segmento que toman para seguir lo eligen al azar con probabilidades iguales para las opciones existentes. La velocidad de quien sale de A es 3/5 de la velocidad de quien sale de B.

Resolver las cuestiones siguientes:

1) ¿Cual es la probabilidad de que la alarma no suene?
2) ¿Cual es la probabilidad de que la alarma suene una sola vez?
3) ¿Cual es la probabilidad de que la alarme suene más de una vez?
4) El trimestre próximo se proyecta realizar 3200 inspecciones como la descrita. ¿Cuantas veces es esperable que suene la alarma?

Problema 14.º:

C_1 es una circunferencia de radio R y C_2 es una circunferencia de radio r, tangente interior a C_1 en el punto P. Desde Q, punto de C_1 diametralmente opuesto de P, se trazan las cuerdas QA y QA', tangentes a C_2 respectivamente en T y en T'. La recta PT corta a C_1 en H' y la cuerda PT' corta a C_1 en H'.

1) Calcular el área y el perímetro del hexágono $QHAPA'H'$ para $R = 2r$.
2) ¿Para qué relación entre R y r el hexágono es regular?

Algunos problemas propuestos en otros distritos en la Primera Fase de la XXXI OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

Problema 15.º:

Demostrar que existe un polinomio $P(x)$, con coeficientes enteros, tal que *sen* 1° sea solución de la ecuación $P(x) = 0$.

Problema 16.º:

Un avión de la compaía «Air Disaster» debe realizar un viaje entre dos ciudades con un total de $m + n$ escalas. En cada escala el avión deberá cargar o descargar una tonelada de cierta merancía, realizándose cargas en m de las escalas y descargas en las n restantes. En la compañía nadie ha observado que el avión no soporta una carga mayor de k toneladas ($n < k < m + n$), y las escalas de carga y descarga se han distribuido al azar. Sabiendo que el avión parte con n toneladas de mercancías, ¿Cual es la probabilidad de que llegue a su destino?

Problemas resueltos

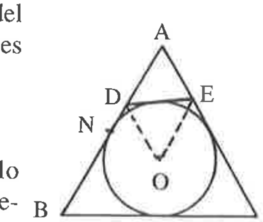
PROBLEMA 10 (BOLETIN n.º 35)

Sea ABC un triángulo equilátero y Γ su circunferencia inscrita. Si D y E son los puntos de los lados AB y AC, respectivamente,tales que DE es tangente a Γ, demuestre que

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1$$

Llamemos, por comodidad, $AD = x$, $AE = y$, r la longitud del radio y a la del lado del triángulo. Se trata de demostrar que es

$$\frac{x}{a-x} + \frac{y}{a-y} = 1 \text{ , es decir, } a^2 = 2a(x + y) - 3xy$$



Para cada tangente a Γ ésta es ex-inscrita al triángulo ADE. Por tanto, el segmento AN es AN= $(x + y + \text{DE}):2$, es decir $x + y + \text{DE} = a$ (I).

Si S(...) representa el área de un triángulo, se tiene

S(DOE) = S(ADO) + S(AEO) – S(ADE), que lleva a DE.r $= xr + yr - xy$ sen60º (II)

Eliminando DE entre (I) y (II) se obtiene $r(a - x - y) = xr + yr - xy$ sen60º.

Como es $a^2 = 12r^2$, sustituyendo y simplificando se llega sin dificultad a $a^2 = 2a(x + y) - 3xy$, como se debía demostrar.

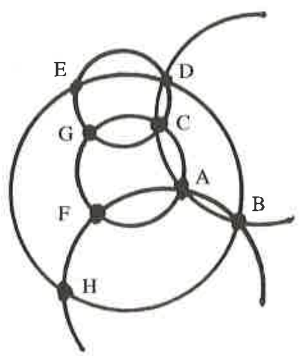
Alberto Aizpún (Madrid)

PROBLEMA 13.º (BOLETIN Nº 35)

Diremos que cuatro puntos de un plano forman una cuaterna concíclica si están sobre una circunferencia o sobre una recta.Si los ocho puntos A,B,C,D,E,F,G,H, del plano,son tales que las cuaternas ABCD, ABFH, ACFG, BDEH y CDEG son concíclicas, probar que la cuaterna EFGH también lo es.

Solución:

El símbolo (YXZ) representará al ángulo *orientado* correspondiente al par de rectas determinadas por los puntos XY, una, y los XZ, la otra. Es sabido que una condición necesaria *y suficiente* para que cuatro puntos, X,Y,Z,T, sean concíclicos,solamente se encuentra considerando ángulos orientados y que tal condición es (YXZ) = (YTZ). Recordamos también que dado el par de rectas XY, XZ, siempre existe una medida de (YXZ), sea α, que cumple $0<\alpha<\pi$ y que entonces el ángulo no orientado de las mismas rectas, o bien mide α, o bien $\pi-\alpha$. Por tanto, el problema exige demostrar que es (EGF) = (EHF).



Partimos de (EGF) = (EGC) + (CGF) (1) y de (EHF) = (EHB) + (BHF) (2)
Por ser concíclicos C,D,E,G, resulta que (EGC) = (EDC)
Por ser concíclicos A,C,F,G, resulta que (CGF) = (CAF)
Por ser concíclicos B,D,E,H, resulta que (EHB) = (EDB)
Y por ser concíclicos A,B,F,H, resulta que (BHF) = (BAF).
Utilizando las dos primeras igualdades en (1) y las dos últimas en (2) quedan

(1') (EGF)=EDC)+(CAF) ; (2') EHF)=(EDB)+(BAF)

Restando (1') y (2') se llega a

(EGF) – (EHF) = [(EDC) – (EDB)] + [(CAF) – (BAF)] =
= (BDC) – [(FAC) – (FAB)] = (BDC) – (BAC).

Pero A,B,C,D, son concíclicos y por tanto el último miembro de esas igualdades es 0. Así que (EGF) = EHF), lo que indica que E,F,G,H, son concíclicos.

Alberto Aizpún (Madrid)

PROBLEMA 14.º. BOLETIN N.º 35

Dados los números naturales n, m, y siendo $1 \leq n \leq m$ hallar el determinante de la matriz A = (a_{ij}), (i = 1,2,...n ; j = 1,2,...,n), siendo $a_{ii} = 1 + \binom{m}{i}\binom{n}{i}$ y, si $i \neq j$, $a_{ij} = \binom{m}{i}\binom{n}{j}$.

SOLUCION: El determinante se calcula mediante una suma de productos.Cada uno de tales productos se forma tomando como factores un elemento de cada fila y uno de cada columna. Distinguiremos dos tipos de productos:

uno) Ningun factor 1 se ha tomado en la diagonal principal de la matriz. Entonces cada término es $\Pi_{i\neq j}\binom{m}{i}\binom{n}{j}$ que, por la conmutatividad, se puede considerar como $\binom{m}{1}\binom{m}{2}\ldots\binom{m}{n}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\binom{n}{n}$. Fijando para las i el orden 1,2,...,n, a cada una de ellas corresponde otra permutación para las j $(j_1, j_2, \ldots j_n)$ y el signo del producto será + o – según sea par o impar el número de inversiones de la permutación de las j. Pero hay $n!$ permutaciones, la mitad pares y la mitad impares, lo que produce que la suma de este tipo de productos sea 0.

dos) Se ha tomado h veces 1 de la diagonal principal (h = 1,2,...,n–2). Pensemos que son los 1 correspondientes a los términos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{hh}$, lo que no restringe el razonamiento, repetible para cualquier otro caso. Entonces, cada sumando del determinante es de la forma $1 \times 1 \times 1 \ldots 1 \times \prod a_{ij}$, para $i = h+1, h+2, \ldots, n$; $j = h+1, h+2, \ldots, n$.

Como hay $(n-h)!$ permutaciones posibles, de las que la mitad son pares y la mitad impares, resulta $\sum\prod a_{ij} = 0$. Para $h = n-1$, se obtiene $\sum_{i=1}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{i}$ y para $h = n$, se obtiene 1.

Así, el determinante pedido es $\Delta = 1 + \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} - 1) = \binom{m+n}{n}$.

Alberto Aizpún (Madrid)

Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.º	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										
		1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	
1	Varios	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	—	—	—	—	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	—	—	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	—	—	—	—	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	—	—	—	—	C
6	Varios	7	7	16	—	—	—	—	—	—	—	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	—	—	—	—	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	—	—	—	—	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	—	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	—	—	—	—	—	—	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	—	—	—	—	C
14	Varios	15	15	15	15	—	—	—	—	—	—	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	—	—	—	—	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	—	—	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	—	—	—	—	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	—	—	—	—	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	—	—	—	—	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	—	—	—	—	—	—	—	—	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	—	—	—	—	—	—	—	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	—	—	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	—	—	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/	32	XX	XX	32	XX	XX	XX	32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	—	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	—	—	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	—	—	—	—	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	XX	XX	33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	—	—	—	—	—	—	
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	XX	XX	XX	35	
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	XX	35	34	—	—	—	—	—	
32	OMI-92-Moscu/	35	XX	XX	XX	XX	XX	38	35	XX	38	
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	—	—	—	—	—	—	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	XX	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	
	/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	—	—	—	—	
35	OMI-93-Turq./	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	39	
	OI-93-Méjico/PNS	XX	XX	39	39	XX	XX	—	—	—	—	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
37	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	
39	OI-94-Brasil/OME-	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
	f1-94/f1-94(v)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	

CLAVES: XX = Pendiente de ublicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 o 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. PNS = Propuestos por nuestros socios.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X los que interesen)

3	4	10	31	32
☐	☐	☐	☐	☐

33	34	35	36	37	38
☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo.
Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 y 30 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Aptdo. 9479 - 28.080 -MADRID.

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION

D. .... Teléf.(...) ....
Dirección particular ....
Ciudad .... Codº Postal ....
Centro de trabajo..

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de la mísma ....
para que cargue en mi cuenta:........./........./......./......................./.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1994-95 y siguientes.

Fecha .... de .... de 1995

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 ptas).
Remítanse ambas partes a
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha .... BANCO: ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de ésta...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta:........./........./......./......................./
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....
Nombre de la cuenta ....

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION (CENTROS)

D. ....

como .... del Centro ....

domiciliado en ....

Ciudad .... Codº Postal...................... Telef. ....

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR

Con esta fecha autorizo al Banco ....

Sucursal o Agencia .... en ....

Dirección de la mísma ....

para que cargue en mi cuenta:........./........./......../......................../.

abierta al nombre: ....

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1994-95 y siguientes.

Fecha .... de .... de 1995

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas (incluida la cuota federativa de 1.500 ptas).
Remítanse ambas partes a
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha .... BANCO: ....

Sucursal o Agencia .... en ....

Dirección de ésta...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta:........./........./......../......................../
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....

Nombre de la cuenta ....