BOLETÍN 3

Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas

B O L E T I N de la Sociedad Castellana de Profesores de Matemáticas "PUIG ADAM"

nº3 (1984)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

  Ronda de Atocha 2 (INBAD)
  Madrid (5).

- La confección de este número ha estado a cargo de:

  ELORRIAGA, Javier López de
  PACHECO, José Miguel (Coordinador)
  PALANCAR, Fernando
  VELAZQUEZ, Enrique

- La correspondencia deberá dirigirse a la sede de la Sociedad, con la indicación "Para el Boletín".

- Este Boletín se publica tres veces a lo largo del curso académico.

- La portada de este número es Don Julio Rey Pastor, visto por P. Puig Adam. (Cortesía de doña Mª Luisa Alvarez Herrera, Viuda de Puig).

INDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: José Ramón Pascual Ibarra

Vicepresidentes:

Julio Fernández Biarge (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Joaquín Gómez Rey (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: Enrique Rubiales Camino

Vicesecretario: Vicente Riviere Gómez

Tesorero: Agustín Miguélez Posada

Bibliotecario: Angel Martínez Losada

- VIDA DE LA SOCIEDAD -

- Por iniciativa de la Sociedad, se celebraron en los días 25 y 26 de enero dos sesiones sobre "La Reforma de las Enseñanzas Medias e Informática", en colaboración con el ICE de la U.A.M Tuvieron lugar en el I.B. -San Mateo" y estuvieron dirigidos por los Profesores Colera y Aguado, miembros de la Sociedad.

- El día 15 de marzo, el profesor Pascual Ibarra, dirigió un seminario didáctico en el I.B. "Conde Orgaz".

- La Junta Directiva se reunió el día 15 de febrero, tomando el acuerdo de organizar este curso el II Concurso de Resolución de Problemas, cuya convocatoria se incluye en la sección de Informes de este número del Boletín.

- El día 28 de abril, con motivo de la jubilación del catedrático don Juan Martino Casamayor, tendrá lugar en Cuenca una sesión científica de la Sociedad, en la que pronunciará una conferencia el profesor don Julio Fernández Biarge.

- La asamblea general anual de la Sociedad será convocada para el día cinco de mayo próximo.

***
*****

-1. INFORMES -

SEGUNDO CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS ENTRE ALUMNOS DE PRIMERO Y SEGUNDO DE BACHILLERATO

---

1. - La Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, organiza, en el ámbito de actuación de la misma (provincias de Madrid, Toledo, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara y Segovia), el Segundo Concurso de resolución de problemas de Matemáticas, entre alumnos de los cursos primero y segundo de B.U.P.

- Para participar en el concurso se precisa obtener la calificación final de sobresaliente en la asignatura de Matemáticas en el presente curso 1983-1984.

- Los centros que deseen presentar a alguno o algunos de sus alumnos (hasta un máximo de dos por primer curso y dos por segundo curso), deberán realizar la preinscripción antes del 5 de mayo próximo, dirigiéndose por carta al domicilio de la Sociedad, Ronda de Atocha 2, (INBAD), Madrid 5.

- La Sociedad comunicará directamente a los centros preinscritos las fechas de realización del concurso

2. Actividades del ICE de la UAM.

1º) De Octubre a Diciembre de 1983 la profesora Dª Camino Cañon ha impartido un "Seminario sobre Filosofía de la Matemática".

2º) Durante los meses de Enero y Febrero de 1984 el profesor D. Ceferino Ruiz Garrido ha explicado unas sesiones sobre "Rosáceas, frisos y mosaicos".

3º) A mediados de Febrero (días 14, 15, 16) el profesor François Pluvinage, de Estrasburgo, dictó tres conferencias sobre Didáctica y Prospectiva de las Matemáticas.

3. La Sociedad "Isaac Newton" se reunió los días 16, 17 y 18 de Marzo en el I.B. "Isabel de España" de Las Palmas para su sesión anual, que estuvo dedicada fundamentalmente a la preparación de las IV JAEM que tendrán lugar en Tenerife los días 10 al 14 de Septiembre de 1984.

Información más completa puede recabarse de la SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMATICAS, Aptdo. 329, La Laguna (Tenerife).

4. Los días 28, 29 y 30 de Mayo de 1984, la Subdirección General de Formación del Profesorado convoca unas Jornadas Didácticas de Matemáticas, con participación de Profesores españoles y extranjeros, entre ellos el profesor Santaló.

5. El grupo "Puig Adam" de Barcelona organizará unas jornadas didácticas en homenaje a D. Pedro Puig Adam en el próximo mes de Mayo.

6. SS.MM. Los Reyes presidieron, en la R.A. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, la presentación del "Vocabulario Científico y Técnico, elaborado por tan alta institución.

***
*****

-2. ESTUDIOS Y DOCUMENTOS-

EN EL ANIVERSARIO DE EULER

Por Enrique Linés
De la Real Academia de Ciencias

DOS SIGLOS DESPUES

La figura clave del mundo matemático en el siglo XVIII, y el físico más importante durante este período, es Leonhard Euler. Del nuevo Cálculo de los infinitesimales, todavía en el claro-oscuro entre una intuída realidad y una ficción, hace Euler el instrumento adecuado y potente para el descubrimiento, en la llamada "edad heróica" de la Matemática. Pasados dos siglos el desarrollo de esta ciencia se presenta como una avalancha incontrolable.

En su autobiografía cuenta el matemático S. Ulam de la incrédula sorpresa del público, que asistía al acto del 25 aniversario de la construcción del computador de von Neumann en Princeton, cuando dió cien mil como número de los nuevos teoremas que se descubren anualmente. Al día siguiente dos jóvenes investigadores le corregían, ya que después de cuidadoso examen daban dos cientos mil como el número de teoremas publicados anualmente.

Es evidente que esta masificación de los resultados tiñe de uniformidad el progreso y dificulta el juicio sobre su importancia. Queda latente la pregunta de si ese caudal de comunicaciones científicas, es efectivamente vehículo de transmisión de realidades o puros espejismos mentales. Ante esta situación el hombre de ciencia defiende su personalidad aislándose en su parcela de conocimiento, y busca en su experiencia intelectual el sentido profundo y personal del descubrimiento de la verdad. En cierta forma se revive en la intimidad el placer de descubrimiento de épocas pasadas, cuando el cultivo de la Matemática era aventura personal y muchas veces solitaria; y se clama por un nuevo humanismo científico en el que la reflexión y el descubrimiento sean actos plenos de sentido.

Seguramente en este contexto la figura de Euler, adquiere un relieve extraordinario, no sólo en su valoración matemática, sino también en su dimensión personal y humana. Euler es el genio dotado de aptitudes singulares para la invención matemática y para el examen e interpretación de los fenómenos naturales, y por otra parte se encuentra en posesión del más poderoso método de penetración en la esencia de los procesos variables que es el nuevo Cálculo. No hay situación que, con la maestría de Euler, resista el uso de las nuevas técnicas, que se perfeccionan al aplicarlas. La Opera Omnia de 74 volúmenes (cuando se termine su publicación), es testimonio de su habilidad en el manejo del método infinitesimal y de su impar optimismo creador.

EN UN CRUCE DE CULTURAS

A principios del siglo XVIII, Basilea conocía una época de serena prosperidad. La ciudad, siempre celosa de su identidad, está situada en la frontera de tres países, a orillas de un Rin que olvida su imagen doméstica y dirigiéndose hacia el norte se abre a la navegación. Por su situación fué siempre centro en el que se cruzaban las corrientes culturales, religiosas y comerciales. Basilea era una ciudad europea marcada por un contraste de tradición y progreso; es decir, una estación en la que reposta la Historia. La familia basilense de los Bernoulli fué ejemplo representativo de esa inquietud, y también de esa continuidad, entre los que fluctuaba el pensamiento europeo.

LA DINASTIA DE LOS BERNOULLI

La universidad de Basilea es la más antigua de Suiza (1460), y en ella estudió Jacobo Bernoulli (1654-1705), el primero de la dinastía. Se trataba de una formación escolar de Humanidades, en la que predominaba la Filosofía y la Teología dentro del estilo de la Reforma. Pero una corriente de interés por la Matemática se extendía por Europa, avivada por la disputa entre los discípulos de Newton y los de Leibniz, y los ataques al método infinitesimal desde posiciones filosóficas tradicionales. Sorprende la rapidez con que se propagó, en un ambiente de controversia, una teoría sobre entidades infinitamente pequeñas, ignorante del concepto aristotélico de un continuo cuyos puntos sólo existen en potencia; y sin embargo, la teoría era eficaz. En el esquema rígido docente de las universidades no podía tener cabida una doctrina tan perturbadora, pero la curiosidad de Bernoulli le mueve a entrar en contacto con los matemáticos que la cultivan. Después de visitar París, los Países Bajos y Londres, vuelve a su ciudad natal en donde se incorpora a la docencia universitaria. A partir de 1686 enseña Matemáticas inspirándose en las obras de Descartes, Wallis y Barrow entre otros, y poco a poco, familiarizándose más con el pensamiento de Leibniz, recrea y sistematiza el nuevo Cálculo.

El segundo de la dinastía es Juan Bernoulli (1667-1748), hermano de Jacobo, cuyos estudios universitarios fueron los usuales humanísticos completados con Matemáticas, sin excluir el Cálculo infinitesimal que su hermano directamente le transmitía. Durante su estancia en los Países Bajos accede a la docencia matemática en la universidad de Groninga, donde permanece hasta la muerte de su hermano en 1705, fecha en que le sucede en la universidad de Basilea. En los retratos que se conservan de Juan Bernoulli, revestido de la convencional elegancia de la época, aparece con gesto altivo y seguro de sí mismo. Sin duda que se benefició de los descubrimientos de su hermano Jacobo, lo que después originaría una viva discusión sobre prioridades, pero su larga vida le permitió presenciar activamente la consolidación del Cálculo infinitesimal, como uno de los logros más brillantes de la cultura occidental.

Daniel Bernoulli (1700-1782) nacido en Groninga, cuando su padre Juan profesaba en la universidad de esta ciudad, es el tercero de la dinastía y en él se personifica al científico atento al descubrimiento múltiple de la realidad verdadera. La figura renacentista del hombre, actor en un saber universal, se recuerda en Daniel. Después de dos años de estancia en Venecia (1723-1724) marcha a San Petersburgo atendiendo a la invitación de la Academia rusa. Su curiosidad científica no conoce barreras, pues enseña Botánica, Medicina y finalmente Física. En 1733 vuelve a su ciudad. Seguramente la nostalgia y el frío le facilitaron el retorno a la ciudad de los Bernoulli, tan atenta a la cotización mercantil como a la de las ideas. En su vieja universidad Daniel Bernoulli continuó su magisterio múltiple, dando prueba de su genialidad en el tratamiento matemático de los fenómenos físicos.

Al lado de estos tres grandes, y completando el cuadro familiar, están los dos matemáticos de igual nombre Nicolás Bernoulli. Uno (1695-1726), el hermano de Daniel, muere joven; y el otro (1687-1759), queda eclipsado por la brillantez de sus tios Jacobo y Juan, y es el habilidoso calculador y estudioso discrepante.

NOTICIA DE UNA VIDA EXTRAORDINARIA

La saga de los Bernoulli es la historia de una familia, reflejo de un ambiente de inquietud científica en una época de transición y en una ciudad sensible y receptiva a las nuevas ideas.

Precisamente en las proximidades de Basilea, hijo de un ministro de la Iglesia reformada, nació en 1707, Leonhard Euler en un ambiente piadoso y tradicional. Era natural el deseo del padre de que su hijo siguiera estudios teológicos. A los 15 años había terminado esta formación en la universidad de su ciudad natal, pero su interés ya se orientaba hacia las Matemáticas. De Juan Bernoulli aprendió el Cálculo infinitesimal y compartió los estudios con Daniel y Nicolás, hijos del maestro, con los que inició una amistad duradera. Con 18 años comienza a publicar trabajos matemáticos, y a los 19 consigue un premio de la Academia de Ciencias francesa por un trabajo sobre "Las arboladuras de los barcos". A lo largo de su vida participa Euler frecuentemente en concursos de esta clase, y considera como ingresos normales los premios recibidos.

Durante la estancia de Daniel Bernoulli en Rusia consigue para Euler una invitación de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, que aceptó. En 1733 está al lado de Daniel como ayudante, pero pronto le sucede como profesor. Aunque algunos años de su estancia (1733-1741) fueron penosos por sus diferencias con el gobierno autocrático, Euler desarrolló una asombrosa actividad investigadora, cuyos resultados fueron apareciendo publicados por la Academia de San Petersburgo, institución con la que, a lo largo de su vida, siempre estuvo en contacto amistoso. Por otra parte, durante su estancia en Rusia ayudó al Gobierno en distintas cuestiones de carácter técnico, pues sin duda Euler compartía la sensata opinión de que la Matemática sirve para resolver problemas.

Llamado por Federico el Grande, en 1741 se traslada Euler a Berlín, entonces corte del refinamiento cultural y artístico a la manera francesa, y permanece en esta ciudad hasta 1766.

Tal vez sorprenda esta frecuente invitación de los Príncipes reinantes y de las Academias científicas a los más célebres matemáticos de la época. Aparte de que el mecenazgo real siempre enriquece a una corte, no era desinteresada la presencia de hombres de ciencia que actuaban como consejeros técnicos en problemas de gobierno. Las dudosas distinciones entre Matemáticas puras y aplicadas son posteriores, y tampoco estaban diferenciadas las aplicaciones técnicas de los planteamientos físico-matemáticos. En Berlín, Euler dedica parte de su tiempo a resolver problemas que le plantea el gobierno prusiano, como son los relativos a seguros, a planificación de canales, a obras públicas, entre otros; pero no cesa en su investigación matemática y física. Durante sus 24 años berlineses fue director de la clase de Matemáticas y envió centenares de trabajos a la Academia de San Petersburgo, con la que siempre se mantuvo en contacto.

Hay un episodio de la vida de Euler en Berlín, que ilustra un momento cultural europeo, brillante y contradictorio. Se trata de la invitación real al matemático más grande del siglo para dar lecciones a la princesa de Anhalt-Dessau, sobrina del rey de Prusia. Euler aceptó este encargo del que, como bello testimonio, queda el libro "Cartas a una princesa germana", en el que se recogen las lecciones de Matemáticas, Astronomía, Física, Filosofía y Religión, que hoy todavía se leen con gusto.

En 1766 vuelve Euler a San Petersburgo, atendiendo a la llamada de Catalina la Grande. Durante su última época berlinesa había tenido dificultades con el rey de Prusia, y aunque preocupado por el delicado estado de su vista (hacía 31 años que ya había perdido la visión con un ojo), decidió revivir tiempos lejanos cuando empezó como profesor al lado de Daniel Bernoulli. Sus temores se confirmaron, pues el rigor del clima perjudicó de nuevo a su deteriorada vista y al poco tiempo quedó ciego.

AÑOS EJEMPLARES

La nobleza de espíritu de Euler se manifiesta de forma ejemplar ante la adversidad de la pérdida de la visión, precisamente cuando se encuentra en el cenit de su fama. El estudioso que siga la obra de Euler a través de sus trabajos de investigación y textos matemáticos, no encontrará diferencia de estilo entre los publicados antes y después de 1767, año en el que quedó totalmente ciego; y, sin embargo, la realidad de su Matemática, próxima al mundo sensible, se había trasladado y situado en un universo de ideas alejado del visual.

Los 17 últimos años de su vida, fueron tan fructíferos como los precedentes. Algunos de sus libros y más de 400 trabajos de investigación fueron dictados después de su ceguera total. A su sereno optimismo unía una memoria prodigiosa, que le permitía realizar los desarrollos y cálculos más complicados.

EL METODO MATEMATICO EN EL ESTUDIO DE LA FISICA

Escribe Euler: "*Aunque no se nos ha concedido penetrar en los misterios íntimos de la Naturaleza, y desde allí conocer las verdaderas causas de los fenómenos, puede ocurrir que una hipótesis ficticia baste para la explicación de algunos de ellos*". Euler conocía, pues, las limitaciones de la Matemática en el estudio y descripción de los fenómenos físicos, pero no duda en su aplicación, y continúa en la "matematización" de la Física, que transformaría en ciencia moderna.

Es posible que la universal admiración que se tiene del matemático Euler haya oscurecido su presencia en la aplicación del método matemático en el amplio campo de la Física. Sin embargo, es el creador de la Mecánica analítica y el investigador de la Dinámica del sólido. Calculó las perturbaciones de las órbitas planetarias por efecto de otros cuerpos celestes, y las trayectorias de los proyectiles en los medios resistentes. En su "Scientia Navalis" (1749) y en "Théorie complète de la construction et de la maneuvre des vaisseaux" (1773) desarrolla esta teoría de forma sobresaliente. Estudia la curvatura de vigas y las cargas de seguridad de columnas. En Acústica trata de la propagación del sonido, y dedica tres volúmenes a la construcción de instrumentos ópticos. Es el único físico que en el siglo XVIII defiende la teoría ondulatoria de la luz, y estudia los fenómenos de refracción y dispersión. Da las ecuaciones fundamentales del movimiento de los fluidos ideales, que aplica a la circulación sanguínea. Con Daniel Bernoulli desarrolla la teoría cinética del calor, y ganó un premio con su "Essay on Fire" (1738). En su época rusa también se interesó por la Cartografía, trazando un mapa del país.

Estos y otros muchos estudios realizó Euler en el campo de la Física. Es posible que no conociera "las verdaderas causas de los fenómenos", pero una fina intuición matemática le permitía imaginar los modelos teóricos que los explicaban.

TRANSFORMACION DE LA MATEMATICA

"Yo presento el Análisis superior como era en su infancia, pero tú lo estás llevando al estado adulto", escribía Juan Bernoulli en carta a Euler.

La aportación euleriana a la descripción y estudio del mundo físico es impresionante, y, sin embargo, Euler era un matemático, pero que no concebía su ciencia como mera satisfacción estética, a lo Hardy, o maravilloso entretenimiento lógico en el juego de "la no contradicción". La novedad de esta Matemática es su dinámica creadora, alejada tanto de un clasicismo estático como de un automatismo programado por las reglas de la Lógica.

De la ingente obra de Euler quedan aportaciones en todas las ramas de la Matemática entonces concocidas, y fue precursor en otras vías de investigación en áreas nuevas. Dedicó particular interés al Cálculo y ecuaciones diferenciales a la Geometría analítica y diferencial de curvas y superficies, a la Teoría de números, a la Teoría de series y al Cálculo de variaciones. Para muchas de estas disciplinas escribió textos que fueron verdaderos hitos en la enseñanza de la Matemática. En los dos volúmenes de la "Introductio in Analysim Infinitorum" (1748), se desarrolla de forma coherente el Cálculo y el Análisis elemental. Con más amplitud y profundidad se tratan estas materias en las "Institutiones Calculi Differentialis" (1755) y sobre todo en los tres volúmenes de las "Institutiones Calculi Integralis" (1768-1770), que vieron la luz cuando el autor ya estaba ciego. Todos los libros de Euler contienen resultados nuevos y presentan aspectos muy originales, y su interés no ha disminuido desde la época de su lejana aparición. Sería recomendable que toda biblioteca matemática de aficionado o profesional tuviera en lugar preferente estas tres obras de Análisis citadas, pues su consulta es siempre provechosa. Ya decía Abel: *"Me parece que si uno desea hacer progresos en Matemáticas, debería estudiar a los maestros y no con los discípulos"*.

MATEMATICAS "EULERIANAS"

La herencia de Euler ha enriquecido a las universidades durante más de un siglo; y después, fragmentada en teoremas o fórmulas con el calificativo "euleriano" unas veces, y otras subyacente en los resultados de célebres maestros, ha mantenido su benéfica influencia.

Es aleccionador recorrer la producción euleriana, e ir descubriendo la procedencia de muchos conceptos y proposiciones que se leen en los textos de hoy. Aunque la relación es incompleta se citan algunos (con la fecha de su publicación):

El número e, el más importante de la Matemática (1728). Logaritmos de los números negativos (1747). Descomposición en factores lineales y cuadráticos de un polinomio con coeficientes reales (1742), después reencontrada por Gauss en 1799. Concepto euleriano de función. Teoremas de adición y multiplicación para funciones elípticas, llamados de Euler (1750), que después fueron recogidos por Legendre en 1786. Principio de la mínima acción (1744). Ecuación fundamental del Cálculo de variaciones (1736), conocida como de Lagrange. Enunciado de las condiciones, después llamadas de Cauchy-Rieman (publicado 1793). Coordenadas de Euler (1748).

Ecuación diferencial de 2ª orden de Euler (1728). Ecuaciones del movimiento oscilatorio (1739). Estudio general de la ecuación con coeficientes constantes (1739-1750). Sobre la ecuación de la membrana vibrante, después llamada ecuación de Bessel (1764). Ecuación hipergeométrica, llamada de Gauss (1769). Ecuaciones de propagación de ondas (1748). Ecuación de continuidad de los fluidos (1738). Ecuación llamada de Laplace y polinomios de Euler (1738). Ecuaciones eulerianas del movimiento de los fluidos (1756).

Teoría fundamental de las superficies (1760). Radio de curvatura, plano osculador, indicatriz esférica (1765). Ecuación de las geodésicas (1728) y líneas de Euler.

Una de las ramas de Cálculo que sugestionó a Euler fue la teoría de series, en cuyo manejo fue un virtuoso. Algunos de sus resultados fundamentales son: Desarrollo en producto infinito de la función sen x (1734). Suma de la serie de las potencias enteras de los inversos de los números naturales (1740), uno de los resultados más espectaculares. Constante de Euler (1734). Fórmula de sumación de series, llamada de Euler-Mac-Laurin (1732), otro resultado famoso. Desarrollo formal de una función en serie, después llamada de Fourier, con cálculo de los coeficientes (1737).

Para cerrar esta relación se eligen dos gemas de la Teoría de números: La noción de indicador de un número, con la congruencia de Fermat generalizada (1760), y la primera exposición de la posteriormente llamada ley de reciprocidad de Legendre (1772).

No sin razón escribía Laplace: *"Leed a Euler, leed a Euler, él es el maestro de todos nosotros"*.

<u>DISCIPULOS TODOS LOS MATEMATICOS DE EUROPA</u>

La obra de Euler llena de admiración, no sólo por su magnitud sino también por su trascendencia. Al final de su vida pudo considerar discípulos a todos los matemáticos de Europa. Por otra parte, sus cualidades humanas le granjearon general admiración y respeto. Rodeado del afecto familiar, con la serenidad del creyente, trascurrieron sus últimos años.

Se ha escrito que el matemático ha de creer en su trabajo, y ha de compartir sus descubrimientos. La primera cualidad es la honestidad del investigador, y la segunda cualidad es la generosidad del Maestro. Es posible que quién lo escribiera pensara en Euler.

El 7 de septiembre de 1783, después de haber tratado de los asuntos del día y comentado la noticia del descubrimiento de Urano, con la tranquilidad de coronar una vida ejemplar, moría a los 76 años de edad un genio de la talla de los Arquímedes, Newton y Gauss.

RETORNO A LOS CLASICOS

La Matemática de los tiempos de Euler con frecuencia carecía de un soporte lógico suficiente. Los matemáticos se adentraban en el descubrimiento descuidando en esta empresa una base lógística, por lo que se denominó "edad heroica" a este período. Sin embargo los progresos de Matemática en esta época fueron espectaculares, y transcurridos dos siglos, muchos de los resultados tienen plena vigencia, lo que confirma la realidad de los mismos y la genialidad de sus descubridores.

Naturalmente que no es admisible un menosprecio lógico en el desarrollo de la Matemática, pues, ya decía H. Weyl *"La lógica es la higiene que precisa el matemático para mantener sus ideas sanas y vigorosas"*. Pero cuando se corre el peligro de que el juego de "la no contradicción" sea guía y programa de una ciencia, conviene volver la vista a los clásicos, pues al fin y al cabo se trata de la Matemática, que es ciencia deductiva, pero que no existe sin intuiciones y sin el ejercicio de la imaginación.

UNA SUGERENCIA

La recomendación de contar con la "Introductio", o con las "Instituiones" en las bibliotecas privadas, no es fácil de cumplimentar. Aunque renace el interés por la Historia de la Matemática, faltan ediciones de las obras básicas en este campo.

¿No sería uno de los frutos más apreciados del centenario de Euler el orientar y estimular la publicación de traducciones de clásicos notables?

La preparación de ediciones castellanas de las Introductio e Institutiones citadas, con un estudio comparativo de sus contenidos con la actualidad matemática, tendría gran aceptación y sería de gran valor científico y educativo.

RASGOS HUMANOS DE DON ESTEBAN TERRADAS

Por Sixto Rios García
De la Real Academia de Ciencias

- Nota de la Redacción -

(Si preguntáramos a un madrileño por la situación de la calle de Esteban Terradas, incluso tratándose de un taxista, muy probablemente nos contestará que no la conoce, tan escondida y modesta es la vía que Madrid le tiene dedicada, y no por iniciativa de su Ayuntamiento, sino por la Empresa Nacional de Electricidad, de la que en 1945 era Presidente, cuando en aquellas fechas construyó un bloque de nuevos edificios donde la empresa estaba radicada. Y, si además, tratáramos de indagar si sabe algo de este personaje es casi seguro que lo ignore totalmente. Incluso, y esto sería más penoso, es probable que esto mismo acontezca con bastantes de los profesores de matemáticas de las nuevas generaciones. Y, sin embargo, don Esteban Terradas e Illa, matemático, físico, ingeniero industrial e ingeniero de caminos, académico de la Real Academia de Ciencias y de la Lengua, ha sido una de las más preclaras figuras de la Ciencia, la Técnica y la Cultura, que ha tenido España en este siglo. Nada menos que el genio de Einstein le consideraba *"como uno de los seis primeros cerebros mundiales de su tiempo"*.

Recientemente, con motivo del centenario de su nacimiento, la Real Academia de Ciencias, en solemne sesión, rindió merecido homenaje a su memoria. Glosaron la ingente personalidad del sabio, en sus vertientes científica, profesional y humana, tanto en España como en Hispano-América, tres ilustres académicos, los tres discípulos suyos, los profesores Laffita, Ríos y Santaló. El profesor Ríos, atendiendo nuestro ruego, nos ha enviado el texto de su discurso que publicamos a continuación. Reciba por ello la expresión de nuestra sentida gratitud).

*****

1. Está bien grabada en mi memoria visual la imagen de don Esteban Terradas, al entrar a las ocho de la mañana, uno de los primeros días de octubre de 1930, en aquella aulita contigua al Decanato de la Facultad de Ciencias, para dar la primera clase del curso de Ecuaciones Diferenciales, entonces en tercer año de las carreras de Ciencias Exactas y Físicas.

Cuando, puestos en pie los 12 ó 14 alumnos, como era costumbre en aquella época, recibimos al Profesor Terradas, quedamos un poco sorprendidos por su porte, bastante distinto del que nos parecía común en los Profesores Universitarios. Vestido correctamente, incluso con elegancia, no encajaba en la imagen tradicional del Profesor con expresión un poco fatigada, movimientos nada deportivos e indumentaria más bien descuidada.

Sin duda don Esteban se había movido en otros ambientes que imprimieron en él un aspecto peculiar, nuevo para nosotros sus alumnos.

Y a decir verdad, que de esta primera valoración no resultó un juicio completamente favorable de la clase. Al paso de los días no acababa tampoco de convencer su estilo de enseñanza, basado en la lectura sistemática y comentarios del II tomo del Cours d'Analyse de Goursat, en aquella época uno de los mejores tratados de Análisis. Para nosotros tal modo de enseñanza, en que el Profesor no brillaba ante la pizarra, repitiendo con elocuencia demostraciones elegantes de una composición tomada de 3 ó 4 textos, más o menos depurada, pareció que no estaba en línea con la fama de sabio matemático de que venía precedido don Esteban Terradas. Y como éramos alumnos jóvenes, en una coyuntura española de cambio (los albores del año 31), una comisión se encargó de decírselo con sinceridad, aunque quizá con menos tacto del que hubiera sido deseable con un eminente profesor.

Con gran parsimonia, modestia y sencillez, sin dar la menor muestra de contrariedad, nos indicó las diversas formas en que según él, se podría explicar un curso de Licenciatura de Matemáticas y cómo, tras bastantes ensayos, había llegado a la conclusión de que la iniciada con nosotros era sin duda menos brillante para el Profesor, pero mucho más eficaz para los alumnos. A lo largo del curso nos fuimos convenciendo todos los discentes de que con tal método se conseguían mejores resultados que con otros, siempre más en boga, que suelen conducir a que cada alumno gaste la mayor parte de su tiempo en tomar y redactar unos malos apuntes de unas explicaciones con lagunas y lapsus. Mucho antes de los exámenes la clase sintonizaba perfectamente con el Profesor reconociendo sus grandes dotes docentes y su autoridad científica.

En el curso 31-32 volvimos a tener como Profesor, ahora de Estadística Matemática, a don Esteban Terradas. Siguió también el sistema de texto, eligiendo esta vez para probabilidades el magnífico libro de Von Mises y para Estadística el entonces casi único de Darmois, pero como era un tema, que empezaba a nacer y le apasionaba, dedicó una hora semanal a un seminario opcional sobre "muestras", teoría que se estaba creando por aquellos años y aún no había pasado a los tratados. Los trabajos de Pearson, Student, Fisher, que aparecieron entonces en Revistas y Congresos, le eran perfectamente familiares y los explicaba en el curso, dándole nivel de doctorado, lo que nos obligaba a manejar Revistas inglesas y alemanas, sumergiéndonos en la ciencia viva del momento, y haciéndonos ver claramente que si algún día queríamos contribuir, en la medida de las posibilidades de cada uno, a incrementar el acervo en una especialidad no había más camino que estudiar a fondo las memorias recientes, si no se trataba de hacer simple gimnasia mental y quizá descubrir mediterráneos.

Quiero con esto destacar, basándome en mi conocimiento directo del maestro Terradas, algunas de sus cualidades, que le califican como un profundo y revolucionario innovador de las costumbres didácticas de su época, como un auténtico precursor del curso de las corrientes científicas que a nivel internacional predominarían en los años siguientes.

Yo que pertenezco a una época puente, me doy cuenta de la dificultad de los estudiosos de hoy para comprender un período como aquel en que llega Terradas a la Universidad española, con Bibliotecas formadas por unos cuantos tratados y algunas pocas revistas viejas y polvorientas, con unos Profesores que, en su mayoría, repetían año tras año el mismo curso cual compendio perfecto y cerrado, al que nada había que añadir; sin becarios ni profesores visitantes, que trajeran novedades para mejorar el aire de nuestras vetustas Cátedras. Son éstas mis primeras impresiones del Terradas Profesor, que podría haber tomado de mi diario escrito cuando tenía unos 17 años. Con ellas he querido comenzar precisamente para reflejarme yo mismo y que se puedan entrever los posibles sesgos subjetivos del biógrafo por su confesión inicial.

2. Los datos que resumiré de la infancia de Terradas han llegado a mí a través de conversaciones con sus grandes amigos coetáneos, Julio Rey Pastor, Pedro Puig Adam, José Mª Plans, y el Rvdo. P. Enrique de Rafael (S.J.), también amigos admirados por mi y los tres primeros maestros siempre recordados.

Creo que nunca ha sido escrita y yo, al menos, la recuerdo por tradición verbal, una curiosa anécdota, que significa una primera muestra representativa del comportamiento de Esteban Terradas y del entorno que le rodeó en algunas fases de su vida.

Parece que en una ocasión Esteban, niño de corta edad, fue obsequiado con una magnífica bicicleta, con la que se convirtió en pocos días en agilísimo ciclista. Y había en su vecindad otro niño amigo, que nunca borraría de su insconsciente, la impresión de celos, que en él despertó, sin proponérselo, el Terradas ciclista, al ganar una carrera en que el amigo, futuro filósofo, llevó el farolillo rojo.

Esta increible facilidad innata, se hace patente en todas sus actividades posteriores: así vemos que Terradas llega a hablar seis idiomas como un nativo, a obtener sobresalientes en 15 asignaturas al hacer en un mismo año sendos cursos de la Facultad de Ciencias y de la Escuela de Ingenieros industriales, a realizar en dos convocatorias la carrera de Ingeniero de Caminos, calificada entonces como la más difícil, a obtener dos premios extraordinarios de Doctorados en Exactas y Físicas en el mismo día, a ganar dos oposiciones de Cátedras de Facultad (Mecánica racional, Acústica y Optica) en dos años.

Con todas estas hazañas que Terradas acumuló con la mayor naturalidad, aunque con enorme esfuerzo, a pesar de sus dotes naturales, se fue convirtiendo en lo que ahora se llama un "superman", monstruo sagrado, mito.

Y ésto en aquel mediocre ambiente Universitario, fue quizá la causa de sus mayores dificultades posteriores. Como dijo Rey Pastor "*fue a la vez su gloria y su desgracia. Durante medio siglo no ha sido el hombre que sabía mucho, sino el hombre que tenía la obligación de saber lo que entre todos saben y saberlo mejor que todos juntos*".

Pero el español medio no perdona esa facilidad de algunos espíritus escoteros para llegar destacados a las cumbres. Esta envidia como defecto racial, aparece insuperablemente reflejada en la poesía de Antonio Machado, Campos de Castilla"

> "*En los ojos siempre turbios de envidia o de tristeza*
> *guarda su presa y llora lo que el vecino alcanza,*
> *ni pasa su infortunio ni goza su riqueza,*
> *le hieren y acongojan fortunas y malandanzas*".

El triste episodio de las oposiciones de Terradas a la Cátedra de Ecuaciones Diferenciales, tiene su iniciación al anular, a propuesta de algunos de sus colegas, el nombramiento de Catedrático extraordinario que se había hecho dos años antes, como consecuencia de una triple propuesta por votación acorde de la Facultad de Ciencias, de esta Real Academia y del Consejo de Instrucción Pública.

Pero las oposiciones se realizan y el tribunal, elegido con sesgo ministerial, le niega la mayoría, y debe dejar la Cátedra, que con tal alto prestigio y eficacia había desempeñado durante dos años. No es necesario recordar las indignadas palabras de Palacios, Rey Pastor y otros en varios escritos.

Pero la reacción de Terradas no puede ser más ponderada y llega a unos límites de comprensión inigualables, al aceptar al curso siguiente el encargo de la cátedra de nueva creación

de Estadística Matemática, en la que vuelve a demostrar su competencia y dotes singulares explicando el primer curso de alto nivel universitario que se había dado de esta disciplina en España.

Sus quejas son suave y benévolamente expresadas en su discurso de ingreso en esta Real Academia en 1933.

"*Por singulares motivos he venido ocupándome en la preparación de un curso de ecuaciones diferenciales*". "*Va a ser primera y última lección de un curso que no llegó nunca a explicarse, pero en cuya preparación puse cuanto estaba de mi parte esperando pudiera aprovechar a la selección de estudiosos que lo siguiera*".

"*Por agravio de la suerte adversa se va a perder en el vacío; las nuevas generaciones exigen, según parece, otro piloto y diverso rumbo. Me holgará verlas conducidas a parajes donde hallare mayor gloria el genio de la raza y a ello he de contribuir esforzadamente, sino fuere en el timón de gobierno, en la dura maniobra, o siquiera en la fábrica del nuevo navío, varado en dique de arena, pronto a botarse a la mar*".

Pero no se deduzca de estas frases que Terradas era insensible a la injusticia y tolerante con la indignidad. Capaz era de conservar las formas externas de una admirable cortesía, compatible con expresar sus opiniones arrogantes y sinceras de la más alta moralidad en el selecto círculo de sus auténticos amigos. Círculo más reducido que el de sus enemigos, como suele ocurrir con los hombres de superior valía que no conceden todos los favores que de ellos se esperan.

Enérgico cuando se trata de una causa justa que llevaba contra viento y marea hasta sus últimas consecuencias, escucha las observaciones de las personas que aprecia, atento a tomarlas en consideración y modificar sus decisiones.

3. Hemos dado un gran salto, para comparar uno de los más graves episodios de la vida científica de Terradas con un curioso suceso de su niñez, y parece que debemos completar nuestro propósito inicial de hablar de su adolescencia y juventud.

Especialmente el P. Rafael escribió una serie de notas que reflejan con gran sencillez e ingenuidad su admiración y afecto por don Esteban, al que conoció mejor que nadie por haber compartido durante los años de Licenciatura el mismo cuarto de una modesta pensión de la madrileña calle del Desengaño.

Reproduzcamos algunos párrafos de su biógrafo, Enrique de Rafael: ..."*nuestra vida se resumía en una frase: estudiar siempre, no había domingos ni fiestas. La única distracción que me permitía las tardes de los domingos o días festivos era ir a la Moncloa con él, cada uno con un libro bajo el brazo y estudiar sentados en los bancos cercanos a la Escuela de Agricultura*".

"*¡Cinco horas de sueño un joven de 21 años! Esto puedo yo certificar que fue su norma de vida los doscientos y pico de días que vivimos juntos...*".

Sigamos con otros párrafos de la misma biografía:

"*Terradas necesitaba para el estudio un silencio absoluto; el ruido de las calles, sobre todo el vocear de los vendedores y los organillos, muy frecuentes en aquella época, le molestaba lo increíble; mucho más el olor del tabaco. Ya se puede conjeturar las cohibiciones que esto me proporcionaba*". "*Pero lo peor era al llegar la época de exámenes, cuando no se trataba de reflexionar sino de fijar en la memoria, él necesitaba canturrear continuamente y moverse sin cesar. Entonces era yo el que protestaba ante estas manifestaciones de lo que los psicólogos llaman tipo motor*". "*Hay que reconocer que el método era eficaz para él; aunque parezca increíble afirmo que de esta manera llegaba a fijar en la memoria trescientas páginas y aún más en un solo día*".

"*No se crea que la ciencia le secara el corazón o le agostara la emoción estética*", dice Puig Adam. "*Lo mismo en artes plásticas que en poesía o en música su cultura era tan elevada como exquisita su sensibilidad. Conocía el gótico con primores de especialista, poseía una extensa colección de lienzos y se extasiaba escuchando el repertorio de los románticos como Schubert y Schumann*".

Una de las sorpresas que recibió el P Rafael de la profunda amistad con Terradas fue saber que éste tenía relaciones formales desde los 19 años con la bellísima señorita Mª Luisa Vía, con la que pocos años más tarde se casaría y constituiría una excelsa familia que tuvo cuatro hijos.

Finalmente anota el P. Rafael su gran alegría al comprobar la sólida formación religiosa de su amigo, consecuencia en parte de que el niño Esteban, al quedar huérfano de padre, a los dos años de edad, había sido dirigido y educado por su tío el culto sacerdote D. José Terradas.

A éste debe también Esteban Terradas, su primera orientación para situarle, durante su infancia, en Charlotemburgo y procurarle una gran preparación en idiomas, para los que siempre tuvo extraordinaria facilidad y después constituirían una de las piezas auxiliares básicas para su sólida formación cultural y científica.

Al regresar de su estancia en Alemania y Francia a los 13 años, liquida en dos cursos el Bachillerato español e ingresa a los 17 en la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona a la vez que estudia Física en la Universidad. Poco después concibió el plan de conducta para el futuro de su vida: tras con templar la triste situación de la ciencia patria al medirla con patrones universales, que él había adquirido en sus viajes y estancias foráneas, se asignó a si mismo la colosal empresa de renovación de nuestra cultura físico-matemática, que generaciones precedentes no habían podido o sabido realizar. Rey Pastor ha analizado detenidamente con su fino y profundo estilo esta labor señera, tanto en sus aspectos de investigador profundo, en difíciles problemas de Mecánica racional, iniciados en su tesis doctoral, de director de tesis y trabajos de investigación en la Universidad de Barcelona y en el Laboratorio Matemático de la Junta para ampliación de Estudios, así como su trabajo ingente de cursos, libros y monografías sobre los más diversos temas de la Física matemática y de la Matemática aplicada.

Dice D. Julio Palacios: "*Si Cabrera es indiscutiblemente el introductor en España de los métodos experimentales para la investigación física, y a él se debe cuanto se ha hecho o se haga en este terreno, Terradas debe ser considerado como nuestro primer maestro de Física teórica*".

A esta tarea, básica para nuestro progreso científico, dedica fundamentalmente el resto de su vida, pero muy especialmente los años que trascurren hasta el comienzo de nuestra guerra civil. Al acabar ésta, que pasa en Argentina, trabajando por el prestigio de España en más arduos problemas, regresa a Madrid y se encarga en 1941 de la Cátedra de Física Matemática en la Universidad Central y de la de Mecánica Racional en la Escuela de Ingenieros aeronáuticos. En ambos Centros, así como en el Instituto Nacional de Técnica aeronáutica, concentra su labor con cursos de alto nivel, que culminan en la organización y dirección del Seminario de Física y Matemática de la Universidad Central, en la que creó una verdadera escuela de Física Teórica, con preclaros colaboradores y discípulos, lo que constituye quizá la faceta más importante de su colosal actividad.

Simultanea esta labor con sus actividades como Ingeniero, como diplomático en las Conferencias Internacionales de Aviación de Chicago (1943) y Montreal (1947) y obtiene los mejores homenajes de su vida académica: Miembro de la Real Academia de la Lengua, Doctor Honoris Causa por la Universidad de Toulouse, Miembro de la National Geographical Society de U.S.A., Miembro Correspondiente de la Bayerische Akademie der Wissenschafche de München,...

Parece claro que para compaginar con rendimiento óptimo tan importantes, numerosas y diversas actividades, las escalas ordinarias de medida del trabajo y del tiempo carecían de sentido para él.

Pero seguía siendo, a pesar de toda esta apariencia, un aristócrata solitario: "*en el seno de sus dos grandes amores: la familia y los libros*", que diría Rey Pastor en su necrología.

En la contestación a su discurso de ingreso en la Real Academia Española dijo el Dr. Marañón: "*Dondequiera que ha estado ha llenado de honor a su Ciencia y a su Patria. En la Conferencia de Chicago, no hace mucho, en días difíciles para España, él que es políglota, consiguió con esa fina diplomacia que no siempre poseen los diplomáticos, incorporar el castellano como lengua oficial*".

Y en esta total entrega de sus facultades a las más diversas actividades al serivicio de su patria, le sorprendió la muerte el 9 de mayo de 1950.

Ese mismo día dijo su discípulo Puig Adam:

"*En él se extinguió un cerebro prodigioso, el de más extenso y universal alcance, que en materia mixta de ciencia pura y aplicada jamás naciera en tierras de España. Una sed insacia-*

ble de saber, unida a una rapidez vertiginosa de asimilación y a una voluntad de superación capaz de vencer toda fatiga, concentraron en esa prodigiosa vida una suma de conocimientos y de actividades que rebasa los límites de toda explicación humana".

CUADRADOS MAGICOS CON NUMEROS PRIMOS

Por J.M. Martínez Sánchez
Catedrático de Matemáticas de Instituto
Inspector de Bachillerato del D.U. de Madrid

En este artículo se presentan varios ejemplos de cuadrados mágicos con números primos indicando los métodos seguidos para su construcción.

Se enuncian distintos criterios que, bajo ciertas condiciones, facilitan la búsqueda sistemática o el reconocimiento inmediato de los números primos adecuados en cada caso y se incluye, como resultado de la aplicación de uno de ellos, un ejemplo de cuadrado mágico de orden 8 formado por 64 primos distintos.

Finalmente, en relación con estos tópicos, surgen algunas cuestiones no resueltas que planteamos como problemas abiertos.

1. De antiguo proviene el conocimiento de las configuraciones numéricas a las cuales se les ha venido dando el nombre, por otro lado sintomático, de cuadrados mágicos. El primero del que se tiene noticia apareció, posiblemente, unos 2000 años a.C.; siendo estudiados con cierto detalle en los siglos XVII y XVIII principalmente.

Después de un tiempo durante el cual quedaron relegados a simples curiosidades aritméticas, siendo pocos los autores que trataron de ellos, estamos asistiendo desde hace unos años a un reflorecimiento del asunto con la aparición de diversos trabajos y publicaciones relacionados con los cuadrados mágicos.

Este hecho se debe, en parte, al interés despertado por los nuevos enfoques dados al tema bajo consideraciones de tipo combinatorio, algebraico y algorítmico, junto al desarrollo de poderosos medios de cálculo que permiten abordar aspectos del problema no considerados en épocas anteriores; pero también, y conviene destacarlo aquí, por su utilización en el terreno didáctico y de divulgación como pretexto introductorio o motivador para la exposición de otros capítulos de la Matemática.

Actualmente se dispone de una bibliografía relativamente abundante y reciente en este campo. No ocurre así cuando se trata de cuadrados mágicos construidos con números primos, las referencias son escasas y los resultados, si los hay, poco conocidos.

En [1], Sièrpinski presenta dos cuadrados mágicos con primos, de órdenes 3 y 4 respectivamente, citando la existencia de otro formado por 169 primos distintos publicado, octubre de 1961, por "Recreational Mathematics Magazine".

De este último ejemplo desconocemos, por no haber podido consultar el original, si el notable logro alcanzado es el resultado de un hecho aislado, como parece indicar su dimensión y época de aparición, o es fruto de un cálculo sistemático lo cual haría más lamentable aún la escasa difusión conseguida por este trabajo.

También es extraño que en [2], donde se hace referencia a muchos aspectos de los c.m., ni siquiera se apunte el tema.

No tenemos, pues, noticia que desde la citada fecha y hasta el momento actual haya habido nuevos avances en la materia.

2. C.m. de primos: órdenes 3 y 4

A) La construcción de cuadrados mágicos de primos de orden 3 se consigue con relativa facilidad. En principio es utilizable el método clásico de construcción a partir de las progresiones aritméticas, pues se conocen p.a. de primos con nueve, y más, términos.

Cada sucesión de nueve primos en p.a. permite la construcción de un c.m. de orden 3, así por ejemplo:

La p.a. de primos $a_1 = 23.143$ con $d = 30.030$ permite obtener:

I.

53.173	203.323	173.293
263.383	143.263	23.143
113.233	83.203	233.353

cuya suma constante o número mágico es 429.789.

La p.a. de primos $a_1 = 8.521$ y diferencia $d = 25.410$ da lugar a:

II.

84.751	211.801	33.391
59.341	110.161	160.981
186.391	8.521	135.571

de número mágico 330.483.

Las progresiones utilizadas en estos ejemplos fueron obtenidas por V.A. Golubev en 1958 y E. Karst en 1967 con ayuda de ordenador, [3].

Pero no sólo con números en p.a. es posible la construcción de cuadrados mágicos, esta condición suficiente no es necesaria, basta que los términos de la sucesión se diferencien en ciertas cantidades igualmente distribuídas respecto del valor central para obtener una nueva condición suficiente más amplia que la anterior.

Esto permite extender el campo de las posibles sucesiones utilizables y nos suministra un primer criterio que facilita su búsqueda. Así, por ejemplo, ya entre los primos menores que 100 podemos encontrar la sucesión:

1, 7, 13, 31, 37, 43, 61, 67, 73

cuya secuencia de diferencias entre términos consecutivos es 6, 6, 18, 6, 6, 18, 6, 6, la cual permite formar el c.m. de primos siguiente:

III.

7	61	43
73	37	1
31	13	67

cuyo número mágico es 111.

De este tipo es el ejemplo de orden 3 presentado por Sierpinski en [1].

Otro caso viene dado por la sucesión:

7, 37, 43, 67, 73, 79, 103, 109, 139

que nos proporciona el c.m. de primos

IV.

37	79	103
139	73	7
43	67	109

de constante mágica 219.

En este último ejemplo su reconocimiento como sucesión utilizable entraña más dificultad debido quizá a la mayor variedad de sus diferencias y, principalmente, a que la secuencia natural en que se presenta la sucesión no es la más adecuada para la construcción del c.m. por el método tradicional.

Observamos, en estos dos ejemplos, que de ambas sucesiones se pueden extraer ternas de primos en p.a. cuyos términos correspondientes están a su vez en progresión aritmética. En efecto, de la sucesión de III se tiene:

1	7	13
31	37	43
61	67	73

o su transpuesto, y de IV obtenemos:

7	37	67
43	73	103
79	109	139

que además tiene la ventaja adicional de indicarnos la secuencia adecuada:

7, 37, 67, 43, 73, 103, 79, 109, 139

para la construcción del cuadrado mágico ya señalado en IV.

Es inmediato probar que toda sucesión de este tipo permite construir un c.m. de orden 3, lo cual proporciona un segundo criterio práctico y eficaz en todos los casos, si bien más restrictivo que el anterior no siempre válido, para reconocer sucesiones de primos utilizables.

Estas sucesiones, fáciles de encontrar con ayuda de una tabla de números primos, son relativamente abundantes; he aquí dos ejemplos más:

V.

67	151	199
271	139	7
79	127	211

con valor de la constante 417.

VI.

47	191	173
263	137	11
101	83	227

de suma constante igual a 411.

Para todos estos casos es válido, y hemos utilizado, el método de construcción para c.m. de orden impar ya conocido en 1612 por C.G. Bachet de Mèziriac (1581-1638) [2] y, también [4].

La situación es teóricamente aplicable para órdenes impares superiores 3; la dificultad radica, como es obvio, en encontrar sucesiones de primos, que satisfagan la doble condición de p.a. entre sus términos, al ir aumentando el tamaño y número de las sucesiones.

B) Para los c.m. de orden 4 el método de los p.a. limita su aplicación al único caso conocido de 16 primos en progresión aritmética (Root, 1969; véase [3]) y, en consecuencia, hasta el momento sólo es posible construir un único c.m. de orden 4 bajo estas condiciones. En [3], como nota del editor, figura dicho cuadrado mágico.

Tampoco es utilizable el sistema seguido con los c.m. de orden 3, válido solamente para los órdenes impares. Sin embargo, para n = 4, tenemos una propiedad que nos va a permitir formular un nuevo criterio aplicable también, bajo ciertas condiciones, a c.m. de orden superior.

En efecto, las cuadrículas de orden 4 son las primeras con las que se pueden formar cuadrados latinos que tengan distintos todos los elementos de sus dos diagonales principales.

A los c.l. que tengan esta característica les denominaremos "cuadrados (latinos) completos", abreviadamente c.l.c., y así como para todo natural $n \geq 1$ existe, al menos, un cuadrado latino de orden n, no ocurre lo mismo con los c.l.c. Por ejemplo, para $n = 3$ no existe ningún cuadrado (latino) completo.

Obviamente al cambiar filas por columnas, en un c.l.c., permanece invariante la diagonal principal y la diagonal secundaria contiene los mismos elementos transformados por simetría. En consecuencia: el transpuesto de un c.l.c. es un c.l.c.

En el cuadrado (latino) completo de orden cuatro:

VII.

a	b	c	d
c	d	a	b
d	c	b	a
b	a	d	c

su transpuesto, como es fácil verificar, es un c.l.c. ortogonal al dado. Ambos forman un par de cuadrados latinos completos ortogonales; siempre que dos c.l.c. sean ortogonales les diremos "cuadrados latinos completamente ortogonales" o, simplemente, "cuadrados completamente ortogonales".

La propiedad de VII sospechamos que es cierta para todo cuadrado (latino) completo de orden n, pero ni hemos conseguido encontrar una demostración general de la misma, ni conocemos un contraejemplo que la invalide. Por consiguiente, y de momento, solo podemos formular la siguiente conjetura:

"Todo c.l.c. y su transpuesto forman un par de cuadrados completamente ortogonales, es decir, los c.l.c. de cualquier orden n son autoortogonales".

Sí existen, en cambio, pares de cuadrados latinos completamente ortogonales que no son transpuestos uno del otro.

De cualquier manera, como para $n = 4$ tenemos pares de cuadrados completamente ortogonales, nos encontramos de nuevo con una condición suficiente y un criterio para caracterizar colecciones de primos aptas, en este caso, a nuestros fines.

En efecto, teniendo en cuenta que con dos cuadrados latinos ortogonales se obtiene un c.m., si dados cuatro primos cualesquiera $p_1, \ldots, p_4$ existen tres constantes k_1, k_2, k_3 tales que:

$$p_1+k_i, \quad p_2+k_i, \quad p_3+k_i, \quad p_4+k_i, \qquad i = 1,2,3$$

son también números primos distintos, entonces los cuadrados latinos ortogonales formados a partir de p_1, p_2, p_3, p_4 y 0, k_1, k_2, k_3 permiten construir un c.m. de primos de orden 4.

Las casillas del c.m., se forman como un cuadrado greco-latino clásico, contienen la suma de los valores situados en las casillas correspondientes de los cuadrados latinos de partida.

Así, por ejemplo, la sucesión de números primos

1, 3, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 41, 43, 47, 53, 101, 103, 107, 113 que se obtiene sumando a los primos 1, 3, 7, 13, los valores constantes 16, 40, 100, permite construir el cuadrado mágico de primos:

VII.

1	43	107	29
23	113	41	3
53	7	19	101
103	17	13	47

de número mágico o constante 180.

Este cuadrado se ha obtenido sumando las casillas correspondientes en los cuadrados completamente ortogonales:

1	3	7	13
7	13	1	3
13	7	3	1
3	1	13	7

y

0	40	100	16
16	100	40	0
40	0	16	100
100	16	0	40

formados con los números 1, 3, 7, 13 y los valores 0, 16, 40, 100.

Análogamente, los números primos:

1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 37, 41, 43, 47, 97, 101, 103, 107

que se obtienen sumando a los cuatro primeros los números 12, 36, 96, permiten construir este otro c.m. de primos:

IX.

1	17	43	107
103	47	13	5
23	7	101	37
41	97	11	19

de número mágico 168, aún menor que el anterior.

Por supuesto, que por permutación de líneas, filas o columnas, se pueden obtener otros c.m. pero en cuanto c.m. de primos todos ellos son idénticos. Dos c.m. de primos los consideramos distintos cuando difieran, al menos, en uno de los números primos que los constituyen.

El procedimiento usado conserva su validez para valores de $n > 4$, siempre que para ese orden existan pares de cuadrados completamente ortogonales. Naturalmente también aquí la limitación sigue siendo encontrar $n - 1$ números y n primos tales que las sumas sean, a su vez, números primos.

La práctica indica que para $n = 4$ estas condiciones se verifican todavía con cierta abundancia, lo cual permite construir numerosos c.m. de este tipo.

Así tenemos el ejemplo siguiente:

X.

131	197	307	199
193	313	191	137
233	167	163	271
277	157	173	227

de suma constante igual 834, y formado con primos mayores que 100 y menores que 1000.

O este otro con primos comprendidos entre 1000 y 10.000:

XI.

2129	3361	4229	2803
2801	4231	3359	2131
3373	2141	2791	4217
4219	2789	2143	3371

con valor de la constante 12.522.

En particular, con series de primos en progresión aritmética, no necesariamente con 16 primos en progresión aritmética, también podemos construir cuadrados mágicos de orden 4.

El siguiente ejemplo se ha construido con parte de algunas de las p.a. de primos encontradas por V.N. Serediuskij (Moscú; 1963,1966) y E. Karst (Tucson; 1969), citadas en [3].

XII.

4.943	769.387	1.343.491	1.042.577
983.131	1.402.937	365.303	409.027
1.222.757	802.951	589.207	545.483
949.567	185.123	862.397	1.163.311

de constante mágica el número 3.160.398.

Como es natural, si las series de primos en p.a. son superiores a cuatro, tanto en el número de series, como en los términos de cada serie, las combinaciones posibles en la elección de los 16 primos nos proporcionan otras tantas formas de obtener c.m. distintos. Es el caso de este último ejemplo, donde el c.m. presentado es uno de los varios que se pueden formar, pues los p.a. elegidas tienen más de cuatro términos.

3. C.m. de primos: órdenes 5 y 6

A) Los métodos utilizados con los c.m. de órdenes 3 y 4 también son válidos para $n = 5$ ya que este orden, además de ser impar, permite la construcción de pares de cuadrados latinos completamente ortogonales.

En efecto, el cuadrado latino:

a	b	c	d	e
c	d	e	a	b
e	a	b	c	d
b	c	d	e	a
d	e	a	b	c

y su transpuesto forman un par de cuadrados completamente ortogonales.

El criterio formulado para $n = 4$ es más amplio y, para n impar, comprende como caso particular al utilizado en la construcción de los c.m. de tercer orden.

Será, pues, suficiente, análogamente a lo visto para $n = 4$, la existencia de constantes que sumadas a cinco primos den como resultado para cada constante otros tantos números primos.

Esta situación no es tan frecuente como en el caso anterior y, en consecuencia, el criterio agota rápidamente su valor práctico. Sin embargo, aún es posible encontrar ejemplos de c.m. de orden 5 por este método.

La sucesión 1, 31, 61, 181, 241 de números primos y los valores 0, 10, 306, 616, 910 permiten formar el cuadrado mágico de orden 5:

XIII.

1	41	367	797	1.151
677	1.091	241	11	337
251	307	647	971	181
941	61	191	547	617
487	857	911	31	71

con 25 primos distintos y suma 2,357.

También con la sucesión 7, 181, 349, 2.053, 3.313, y los números 0, 10, 30, 60, 100 podemos construir el siguiente cuadrado de suma constante 6.103.

XIV.

7	211	449	2.063	3.373
359	2.113	3.313	37	281
3.343	107	191	409	2.053
241	349	2.083	3.413	17
2.153	3.323	67	181	379

Otros ejemplos nos los proporcionan los números primos extraidos de las p.a. que figuran en [3]. Así, eligiendo los números:

53.173, 65.003, 1.498.141, 188.677.831, 805.344.823

las constantes 0, 60.060, 120.120, 180.180 y 240.240 nos proporcionan este otro c.m. de primos de orden 5:

XV.

53.173	185.123	1.738.381	188.737.891	805.525.003
1.558.201	188.858.011	805.344.823	173.293	305.243
805.464.943	293.413	125.063	1.678.321	188.677.831
245.183	1.498.141	188.797.951	805.585.063	113.233
188.918.071	805.404.883	233.353	65.003	1.618.261

cuya suma constante es el número 996.239.571.

Si tenemos un c.m. de orden 5 las distintas combinaciones con los primos de base, y con las respectivas constantes, suministran colecciones de números primos aptas para construir c.m. de orden 4; no así para los de orden 3 en los que el método usado no es válido.

En general, dado un c.m. de orden n, construido por el procedimiento indicado, si existe un orden $h < n$ para el cual

también sea válido el método, es decir, si el orden h posee pares de cuadrados latinos completamente ortogonales, entonces podemos construir, al menos, $\binom{n}{n-h}^2$ c.m. de orden h.

B) La situación cambia completamente para $n = 6$; este orden no sólo carece de pares de cuadrados completamente ortogonales, sino que ni siquiera posee un par de c.l. ortogonales.

Tampoco sabemos si existen c.l.c. de orden 6, aunque todo apunte a dar una respuesta negativa.

Entre los problemas que periódicamente aparecen en el Boletín de la A.P.M.E.P., y con el nº 83 (AUQUE, Clermont-Ferrand), figura el siguiente enunciado:

¿De cuántas maneras se pueden colocar los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 en un cuadrado de 6×6, de manera que cada número aparezca una vez en cada fila, en cada columna y en cada una de las dos diagonales? [5].

Hasta la fecha no se ha publicado ninguna solución a este problema.

También hay un juego para micro-ordenador, comercializado en España como "software" para el VIC-20, que se encuentra en el mercado con el nombre de "Trenzador" ("Twister", en versión original); dicho juego consiste en formar c.l. con letras o colores en número variable entre 3 y 10, caso de no acertar, el micro suministra las soluciones. Existe una versión más sofisticada, y se supone que más cara, pues las ventajas de la informática no se limitan sólo a las que se derivan de su uso, ingeniosamente llamada "Supertrenzador" que consiste en lo mismo pero con c.l.c.; sintomáticamente aquí el programa ya no ofrece las soluciones.

Para n = 3 no existen c.l.c.; parece que para n = 6 tampoco. Supuesta cierta la conjetura formulada en 2B, la demostración de este hecho es inmediata pues en caso contrario existiría un c.l. autoortogonal de orden 6, lo cual es falso.

Conocemos la existencia de c.l.c. cuando el orden es un número primo; esto posiblemente también sea así cuando n sea de la forma 2^{α}, $\alpha>1$, donde un método de construcción vendría dado por la descomposición reiterada del cuadrado en bloques de cuatro.

Nos encontramos pues que, de momento, el único método que conocemos para la construcción de un c.m. de primos de orden 6 es el de las p.a. Como no sabemos de ninguna progresión aritmética de primos con 36 términos, nos vemos en la imposibilidad de construir un c.m. de primos de este orden.

4. C.m. de primos: órdenes 7 y 8

A) De nuevo para n = 7 el método utilizado anteriormente es válido y nos permite construir c.m. de primos. Pero el criterio utilizado deja de ser práctico para encontrar colecciones de primos adecuados; nosotros hemos conseguido un solo ejemplo de c.m. de primos de orden 7 en estas condiciones; dicho ejemplo es el que se presenta a continuación:

XVI.

1	43	809	1609	1733	1861	9091
719	1459	1873	1801	8971	101	223
1753	1901	9151	11	73	859	1399
9001	151	13	739	1499	1933	1811
113	919	1409	1783	1951	8941	31
1549	1723	1831	9041	211	23	769
2011	8951	61	163	709	1429	1823

construido a partir de la sucesión de primos:

1, 13, 709, 1399, 1723, 1801, 8941

y las constantes 0, 10, 30, 60, 100, 150, 210, la suma de cada línea del cuadrado es 15,147.

Así mismo, dado que se conoce un c.m. de orden 8, las observaciones del final de 3A permitirán formar, al menos, 64 c.m. de orden 7; uno de ellos es el que figura en la página siguiente, cuya suma es 1.205.869.913 y está construido usando parte de los números primos del c.m. que se presenta al final de este apartado.

XVII.

11	15.760.097	25.658.453	93.626.011	182.403.493	226.449.529	661.972.319
25.658.443	93.625.999	182.403.509	226.449.521	661.972.307	23	15.760.111
182.403.497	226.449.533	661.972.321	13	15.760.099	25.658.459	93.625.991
661.972.309	29	15.760.091	25.658.447	93.626.003	182.403.511	226.449.523
15.760.103	25.658.461	93.625.993	182.403.499	226.449.539	661.972.301	17
93.626.009	182.403.491	226.449.527	661.972.313	31	15.760.093	25.658.449
226.449.541	661.972.303	19	15.760.109	25.658.441	93.625.997	182.403.503

B) Para $n = 8$, el criterio que hemos venido usando pierde su valor práctico. Usando unas tablas de número primos, [6], no ha sido posible encontrar un conjunto de los mismos que verifique las condiciones; sin embargo, el criterio ha mostrado su utilidad al permitir reconocer inmediatamente una sucesión de primos adecuada para la construcción de cuadrados mágicos de este orden.

En [7:a], Martin Gardner afirma: "*R.E. Crandall ha llamado la atención sobre la pauta exhibida por el octeto 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 y 37. Seguramente existirán otros ejemplos de de este mismo modelo, pero hasta ahora no se ha encontrado ninguno*".

El mismo autor en [7:b] referido a lo anterior dice: "*John C. Hallyburton, hijo, que trabaja para la Digital Equipment Corporation, ha encontrado siete secuencias más del mismo tipo. Los números iniciales de cada serie son:*

15.760.091, 25.658.441, 93.625.991, 182.403.491,

226.449.521, 661.972.301, 910.935.911".

¡Eureka!, aunque no sepamos quien es R.E. Crandall, ni por qué ha llamado la atención sobre la pauta exhibida por el octeto primero, y supuesto que el hijo de John C. Hallyburton no se haya equivocado con los números citados, ni nosotros en la transcripción, tenemos una colección de primos apta para nuestros propósitos.

En efecto, con los datos anteriores podemos construir el cuadrado mágico (página siguiente) de orden 8 y 64 primos distintos, cuyo número mágico es 2.116.805.850.

A pesar del fracaso inicial nos parece asequible, aunque muy laborioso, la confección a mano no ya de un c.m. de orden 8 sino también de orden 11.

Para valores mayores habría que buscar otro método, quizá basado en la descomposición por bloques.

XVIII.

11	15.760.103	25.658.461	93.625.997	182.403.499	226.449.547	661.972.319	910.935.913
182.403.493	226.449.539	661.972.327	910.935.919	17	15.760.111	25.658.453	93.625.991
661.972.307	910.935.931	182.403.503	226.449.521	25.658.443	93.626.009	37	15.760.099
25.658.449	93.626.017	29	15.760.093	661.972.301	910.935.923	182.403.511	226.449.527
93.626.003	25.658.441	15.760.097	31	910.935.937	661.972.309	226.449.523	182.403.509
910.935.929	661.972.303	226.449.529	182.403.517	93.626.011	25.658.447	15.760.091	23
226.449.541	182.403.497	910.935.911	661.972.313	15.760.109	13	93.625.999	25.658.467
15.760.117	19	93.625.993	25.658.459	226.449.533	182.403.491	910.935.917	661.972.321

5. Algunas cuestiones abiertas

La primera cuestión, relacionada con el criterio usado y generalizando lo apuntado por Martín Gardner en [7:a], la podríamos formular de la siguiente manera:

a) Para un $n \in \mathbb{N}$ dado, existen n primos p_i, $i=1,\ldots,n$, y n-1 números k_j, $j=1,\ldots,n-1$, tales que:

$$p_i+k_j, \quad i=1,\ldots,n; \quad j=1,\ldots,n-1$$

sean números primos?

Alternativamente, las siguientes cuestiones:

a') Dados n primos cualesquiera p_i, $i=1,\ldots,n$, ¿existe siempre un número par $k \in \mathbb{N}$, tal que p_i+k, $i=1,\ldots,n$, sean primos?

a") Dados n primos cualesquiera p_i, $i=1,\ldots,n$, ¿existen n-1 números k_j, $j=1,\ldots,n-1$, tales que p_i+k_j, $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,n-1$ sean, a su vez, números primos?

a"') Dados n números pares ¿existen n+1 primos tales que las sumas respectivas también sean números primos?

b) Sea n un orden para el cual existen cuadrados latinos completamente ortogonales, la existencia de un sistema de n primos y n-1 constantes que sumados den, a su vez, números primos es una condición suficiente para la construcción de c.m. de primos de orden n. ¿Esta condición es también necesaria?

c) ¿Para qué valores de n existen c.l.c.? Si existen, ¿cuántos?

d) Si la conjetura formulada en 2B fuera falsa ¿para qué valores de n existen cuadrados latinos completamente ortogonales?

e) Análogamente, si la conjetura es falsa y existen cuadrados latinos completamente ortogonales para un orden dado ¿existen necesariamente cuadrados latinos completos autoortogonales para ese orden?

REFERENCIAS

[1] SIERPINSKI, W.- "A Selection of Problems in the Theory of Numbers". PWN: Polish Scientific Publishers.- Pergamon Press. Nueva York, 1964.

[2] BELOUZE, B. y otros.- "Les Carrès Magiques". Publicaciones de la A.P.M.E.P. París, 1975.

[3] KARST, E.- "12 to 16 Primes in Arithmetical Progression". Journal of Recreational Mathematics, 2 (1969), pag. 214-215.

[4] CALLANDREAU, E.- "Célèbres Problèmes Mathématiques". Ed. Albin Michel. París, 1949.

[5] BULLETIN DE L'APMEP, nª 329, junio 1981, pág. 493.

[6] LEHMER, D.H.- "List of Prime Numbers form 1 to 10.006.721". Carnegie Institute of Washington. Washington, 1914.

[7] GARDNER, M.- "Juegos Matemáticos". Rev. Investigación y Ciencia. [a] 2(1981), pág. 104; [b]: 6(1981), pág. 141.

UN PROBLEMA ABIERTO

Por José R. Pascual Ibarra

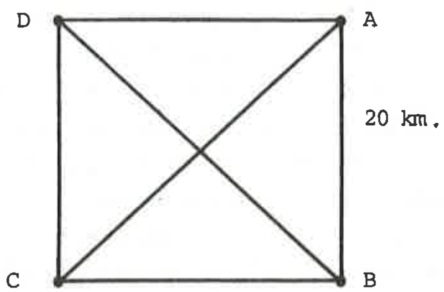
En matemáticas decir que un problema es abierto, o está abierto, hace referencia a una conjetura que no ha sido todavía demostrada. No es éste el sentido que damos aquí al término, sino a problemas incompletos en su planteamiento, y que, por lo tanto, pueden admitir varias soluciones -algunas triviales- dependientes de otros factores que completen el enunciado. Este tipo de problemas se presentan casi siempre en la vida de cada día y el análisis de estos factores nos indicará cuál de las distintas soluciones que puede admitir el problema es la que se adapta mejor a las posibilidades reales de ejecución según los medios disponibles. Si queremos hacer una enseñanza de la matemática, en conexión con la realidad, incluso cuando tratemos de llegar a formulaciones puramente teóricas, será seguramente conveniente partir de situaciones concretas que permitan desarrollar en el alumno el sentido de la utilidad cultivando un tipo de razonamiento teórico-práctico, sin que por ello deje de conducirle gradualmente al descubrimiento de propiedades puramente matemáticas.

Un ejemplo conocido que nos lleva al conocimiento de un bello teorema de la geometría -tan olvidada- puede ser el siguiente problema:

"Cómo construir una red de carreteras para enlazar cuatro ciudades situadas en los vértices de un cuadrado de 20 km. de lado?"

Naturalmente la respuesta depende de muchos factores: los posibles accidentes del terreno, la densidad de tránsito en tre las poblaciones, el presupuesto disponible, etc. Prescindiremos de los dos primeros.

Primera solución:

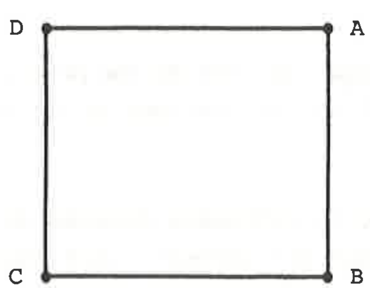


Es la solución óptima si se quiere que la distancia entre dos ciudades cualesquiera sea la más corta posible. La longitud total de la red, es:

$$4 \times 20 + 2 \times 20 \times \sqrt{2} \simeq 136{,}568 \text{ km.}$$

Segunda solución:

Si el presupuesto para la construcción es insuficiente, no nos sirve la solución anterior. Habrá que adoptar otra más económica. Se prescinde, por ejemplo, de los trayectos diagonales:

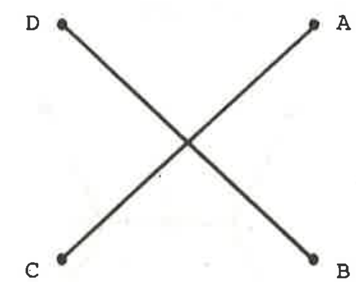


Inconveniente.- Ahora la distanica entre dos ciudades opuestas es doble que entre dos contiguas, pero la longitud total de la red es más corta,

$$4 \times 20 = \underline{80 \text{ km.}}$$

Tercera solución:

Se conservan sólo las diagonales

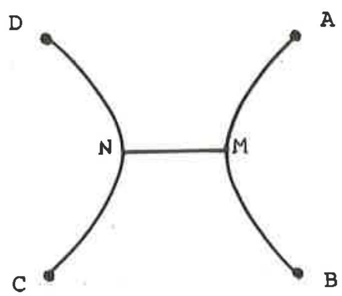


En esta solución cada dos ciudades cualesquiera son equidistantes y disminuye notablemente la longitud de la red:

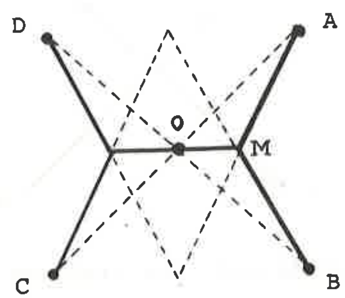
$$2 \times 20 \times \sqrt{2} \simeq 56{,}568 \text{ km.}$$

Cuarta solución:

Si, a pesar de esta reducción, todavía no llega el presupuesto para cubrir los gastos de la construcción, se puede preguntar a los alumnos si serían capaces, caso de existir, de encontrar una solución más económica aún. Los alumnos dudan de su existencia; pero, curiosamente, siempre que he realizado la experiencia ha habido alguno que ha propuesto (¿por qué) curvar la carretera entre A y B y de C a D, y unir los arcos entre sí:



Enseguida se dan cuenta de que es más corto el camino que sustituye los arcos por segmentos:



En esta posible solución se pierde la equidistancia; pero ¿será de menor longitud total que en la solución anterior? El problema es comprobar si se verifica la desigualdad:

$$\overline{OM} + \overline{MA} + \overline{MB} < \overline{AO} + \overline{OB} = 20\sqrt{2} \simeq 28{,}284 \text{ km.}$$

Para que el cálculo de las longitudes sea fácil, hemos elegido el punto M alineado con A y con el punto medio de BC. Se obtiene

$$\overline{OM} + \overline{MA} + \overline{MB} = 5 + 10\sqrt{5} \simeq 27{,}360 \text{ km},$$

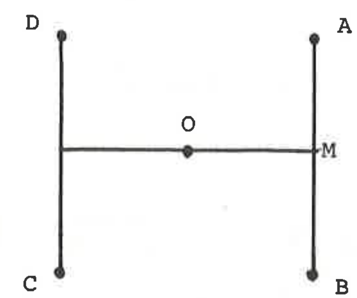
que es menor, en efecto, que $\overline{AO} + \overline{OB}$.

La red completa tiene en esta solución una longitud de:

<u>54,721 km.</u>

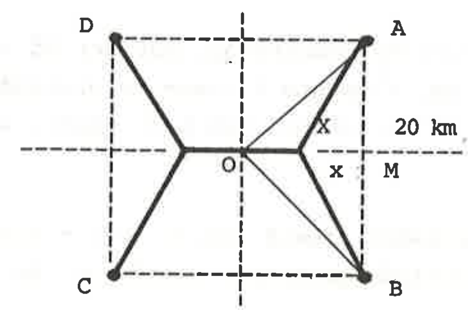
<u>Ultima solución:</u>

Se observa, pues, que la longitud de la carretera depende de la posición del punto M, longitud que disminuye al desplazarlo desde O hacia la derecha, pero en el extremo, esto es, alineado con A y B,



mide 60 km. Por tanto, entre O y M, habrá un punto X, en el que la longitud de la red será mínima.

Para encontrar la posición de X, podemos recurrir a la vía analítica. Sea X la posición de mínimo:



La función cuyo mínimo buscamos, es:

$$10 - x + 2\sqrt{100 + x^2}$$

Igualando a cero la derivada,

$$-1 + \frac{2x}{\sqrt{100 + x^2}} = 0$$

se obtiene:

$$2x = \sqrt{100 + x^2}$$

esto es,

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{3} \quad , \quad \sqrt{100 + x^2} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

y, por tanto, la longitud de la red de carreteras mínima posible, es:

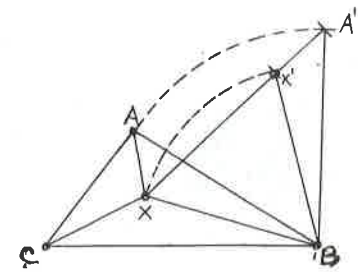
$$20 - 2x + 8x = 20 + 20\sqrt{3} \simeq \underline{54{,}641 \text{ km.}}$$

******

En la solución encontrada, por ser $\overline{AX} = 2\overline{XM}$, el ángulo AXB = 120°, esto es, el punto X tiene la propiedad que desde él se ven los lados del triángulo AOB bajo ángulo iguales, cada uno de 120°.

Esta propiedad, ¿será válida para cualquier triángulo? Volvamos a la "olvidada" geometría sintética. Sea ABC un triángu-

lo cualquiera y X el punto que buscamos, es decir, que la suma de distancias a los vértices, $\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}$, sea mínima



Un giro de 60°, con centro en B, nos da:

$$\overline{CX} + \overline{XB} + \overline{XA} = \overline{CX} + \overline{XX'} + \overline{X'A}$$

distancia que será mínima, cuando los puntos C, X, X', A estén alineados. Para ello es necesario que:

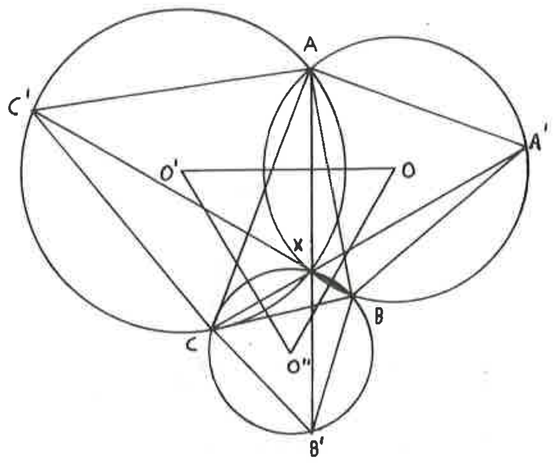
$$\widehat{A'X'B} = \widehat{AXB} = 120°$$

y análogamente

$$\widehat{BXC} = \widehat{AXC} = 120° \quad \text{c.q.d.}$$

Es el teorema de Steiner.

La forma más sencilla para encontrar X es la construcción de los triángulos equiláteros ABA' y ACC'.



Las rectas A'C y BC', se cortan en X. La recta AB' es concurrente con ellas.

<u>Consecuencias</u>.- Los círculos circunscritos a los tres triángulos equiláteros ABA', BCB' y CAC', pasan por X, y el triángulo OO'O" que une los centros de estos círculos es equilátero, propiedad que en algunos textos se conoce con el nombre de "problema de Napoleón". (Se cuenta que Laplace dijo en una ocasión al emperador: *"Sire, esperábamos de V.M. cualquier cosa extraordinaria, menos que nos enseñara matemáticas"*, como recordaba Etayo en su artículo del Boletín nº 2).

******

Hemos dicho que el triángulo ABC es un triángulo "cualquiera", pero ¿qué acontece si uno de sus ángulos mide 120°? ¿Y si es mayor que 120°? Ver: "<u>Qué es la Matemática</u>", de Courant y Robbins. Ed. Aguilar.

******

SUGERENCIA

Por J. Ochoa

Desde un punto de vista algebraico, el problema de construir gráficamente los puntos de intersección de dos cónicas está totalmente resuelto, pero, en lo que yo sé, dicho problema no está sistemáticamente tratado desde un punto de vista puramente geométrico. La exposición de los problemas de construcciones gráficas suele hacerse de acuerdo con el método geométrico, traslación, giro,..., que permite resolverlos, sin hacer mención de la naturaleza, lineal, cuadrática,..., del problema. Mi sugerencia consiste en invitar a los lectores a que envíen al Boletín, para su publicación, enunciados de problemas de intersección de cónicas, que sean resolubles con regla y compás, acompañados, naturalmente, de la correspondiente justificación de su cuadratura. Como muestra, damos:

TEOREMA

Dadas las elipses E_1, E_2, de centros C_1 y C_2, sean $\check{a}_1$, $\check{a}_2$ los semidiámetros de dichas elipses situados sobre la recta C_1C_2.

Si se verifica,

$$\frac{\text{área de } E_1}{\text{área de } E_2} = \frac{\check{a}_1}{\check{a}_2} \qquad (1)$$

el problema de hallar los puntos de intersección de las dos elipses es cuadrático.

El enunciado del teorema es cuadrático, ya que lo son los problemas siguientes: a) determinar los centros C_1, C_2 de las dos elipses. b) Determinar los semiejes (a_1, b_1), (a_2, b_2) de ambas elipses. c) Hallar la intersección de la recta $C_1 C_2$ con las elipses y, por tanto, los segmentos $\check{a}_1$, $\check{a}_2$. d) Comprobar que se cumple la relación

$$\frac{a_1 \, b_1}{a_2 \, b_2} = \frac{\check{a}_1}{\check{a}_2} \qquad (2)$$

equivalente a la (1).

DEMOSTRACION DEL TEOREMA

Sean $\check{b}_1$, $\check{b}_2$ los semidiámetros conjugados de los $\check{a}_1$, $\check{a}_2$. $\phi_1 = \text{ang}(\check{a}_1, \check{b}_1)$, $\phi_2 = \text{ang}(\check{a}_2, \check{b}_2)$. Por el teorema de Apolonio, la relación (1) puede escribirse en la forma

$$\frac{\check{a}_1 \cdot \check{b}_1 \cdot \text{sen}\ \phi_1}{\check{a}_2 \cdot \check{b}_2 \cdot \text{sen}\ \phi_2} = \frac{\check{a}_1}{\check{a}_2} \Longrightarrow \check{b}\ \text{sen}\ \phi_1 = \check{b}\ \text{sen}\ \phi_2 \qquad (3)$$

La relación (3) expresa que las elipses E_1, E_2, son transformadas, una de otra, exactamente, E_2 de E_1, en una homología afín en la que C_1, C_2 son un par de puntos homólogos, $\check{a}_2/\check{a}_1$ es la razón de afinidad y las rectas soportes de los segmentos $\check{b}_1$, $\check{b}_2$, son un par de rectas homólogas, con lo que el eje de dicha homología afín está determinado. Dicho eje, por ser recta doble de puntos dobles, es una de las rectas componentes de una de las cónicas degeneradas del haz definido por E_1 y E_2. Conocida una de las rectas componentes de la cónica degenerada, la determinación de la otra recta componente es problema cuadrático

elemental y conocidas las dos componentes de una de las cónicas degeneradas del haz, la determinación de los puntos de intersección de las E_1, E_2, se reduce a determinar la intersección de una de las elipses, digamos E_1, con cada una de las dos rectas componentes de la cónica degenerada del haz.

LEXICO MATEMATICO Y LEXICO POLITICO: UNA INTERSECCION

Por Enrique Velázquez
Profesor del Colegio "Raimundo Lulio"

Dícese que la política es el arte de lo posible; nada más lejos, pues, de la matemática, comúnmente considerada arte de lo exacto o, al menos, de lo probable. No obstante tienen cosas en común, al menos en lo que respecta al léxico. En el presente artículo vamos a hacer un breve recorrido por la terminología política que parecerá un viaje al interior de la matemática.

La política, al igual que la matemática, trata de problemas: problemas planteados, problemas resueltos, problemas fáciles y problemas difíciles; infinitos problemas, no se sabe si el infinito numerable o el continuo. El quid de la cuestión reside en determinar el conjunto de soluciones.

Se comienza fundando un partido, es decir, una parte de la sociedad (en España hay $2^{37.000.000}$ partidos potenciales) y se procura que no se divida, por los avatares políticos, en fracciones; esto se logra buscando un común denominador: el consenso de sus "integrantes" (y no subrayo ésto para que no se enfaden Riemann y compañía).

Más la fundación de un grupo (que no me decido a llamar conmutativo porque no siempre a A le agrada estar en el lugar de B, y viceversa, vistas las luchas internas que hay) debe concluir en la elaboración de unas tesis políticas que se demuestren útiles para una progresión de sus objetivos. Tal progresión será geométrica en cuanto a deseos, y aritmética en lo tocante a realidades.

Ese partido, mediante la unión de sus afiliados y abrigando las más rectas intenciones, iniciará una curva ascendente hacia el poder, que es el máximo relativo. Y digo relativo porque, al poco, debido a la "alternancia en el poder", es decir, a la negatividad de la derivada segunda, se iniciará una curva descendente hasta llegar al mínimo, también relativo, pues se recomienza ese eterno camino democrático desde el poder a la oposición y viceversa, que son las elecciones, leyes recurrentes del sistema parlamentario.

Al respecto, conviene detenerse en los factores que explican la llegada al poder de un determinado grupo político. Al mismo no le basta un análisis abstracto de objetivos, sino que debe, extrapolando los deseos concretos de los ciudadanos y expresándolos según unos parámetros como la vivienda, el empleo, la paz, la seguridad ciudadana, etc., delinear en los límites de un programa electoral, la convergencia de unas voluntades. Por ello hay que sumar aliados a ese programa, y procurar que desde diversos sectores no se le resten apoyos. En definitiva, se trata de ensanchar el espacio político.

Geométricamente, el espacio político es función del ángulo abarcado en el hemiciclo (que así se llama impropiamente a esa "semicircunferencia" de ángulo central superior a los dos rectos). ¿Y cuándo se obtiene la mayoría? Cuando el ángulo abarcado por un grupo es mayor qué (no basta el igual, pues habría inestabilidad parlamentaria) el de los demás juntos. Haya o no mayoría, todos los diputados saben -haciendo uso de los cuantificadores- que para todo asunto, existe una ley que le es aplicable, si no existiera, la harían inmediatamente.

En política, voces autorizadas opinan que la solución está en el centro, y que se trata de aislar a los radicales, cual si se tratase de una ecuación irracional. Sin embargo, personas de no menor cualificación razonan de distinta forma: hay que elegir entre los dos extremos del espectro político, para despejar la incógnita del modelo de sociedad que quieren los electores.

Como es sabido, el paro es uno de los mayores problemas del país. Pues bien, el político, al comentar las cifras del paro, hace auténticos malabarismos con los conceptos de primera y segunda derivada, y explica a los ciudadanos que, aunque el desempleo sigue creciendo, lo hace con una inflexión a la baja. Y puestos a usar el lenguaje de los números con fines disuasorios, el gobernante -en acto o en potencia- no vacila en intimidar a su auditorio con estadísticas: medias cogidas por los pelos, incrementos de turistas en igual período que el año anterior, decrementos de dólares en la balanza de pagos, porcentajes del producto interior bruto, correlaciones con países del Mercado Común, e índices de todos los pelajes. Mas, si el auditorio no se acoquina e inquiere respuestas más concretas, a no dudar que el político se saldrá por la tangente.

La lucha política requiere no sólo defender las propias ideas, sino también criticar las del contrario, a ser posible por el método de la reducción al absurdo. Se propone un ejemplo: ¿Es posible dar más servicios (X) al ciudadano, y pedirle menos impuestos (Y)? ¿La ecuación es $Y = k \cdot X$ ó $Y = k/X$?

Y hablando de economía, todos sabemos que la española depende de variables exteriores, y que un giro positivo en la economía norteamericana simplificará nuestros problemas. No obstante, el Gobierno, lógicamente, impulsa las relaciones bilaterales (¿binarias?) con una multiplicidad de países, sobre todos los del entorno europeo, y concurre a los foros internacionales para que el binomio tensión-distensión se resuelva por éste último. En todo caso, no debe olvidar que nuestras condiciones de contorno están en el mundo occidental, y éste es un conjunto,... casi totalmente ordenado.

***
*****

- 3. PROBLEMAS -

PROBLEMAS RESUELTOS

SOLUCIONES RECIBIDAS A TRES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA XXIV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS. PARIS, 1983. (Ver Boletín nº2)

EJERCICIO Nº 1

Hallar todas las funciones f, definidas en el conjunto de los números reales estrictamente positivos, que toman valores reales estrictamente positivos y que satisfacen las condiciones:

i) $f(xf(y)) = yf(x)$, para $x,y > 0$, y

ii) $f(x) \to 0$, cuando $x \to +\infty$.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Solución:

$f(x) = \frac{1}{x}$ es la única función que verifica ambas condiciones.

Demostración

Por la condición i), $f(xf(1)) = 1\,f(x)$. Aplicando f de nuevo queda $f^2(xf(1)) = f(1f(x)) = xf(1)$. Obtenemos así las dos relaciones siguientes:

$$f^2(xf(1)) = xf(1)$$

$$f(1f(x)) = f^2(x) = xf(1)$$

La primera nos dice que:

a) f^2 = identidad, y este hecho y la segunda implican que:

b) $f(1) = 1$

También tenemos $f(f(x)\ f(y)) = yf^2(x) = yx$, e iterando de nuevo: $f^2(f(x)\ f(y)) = f(x)\ f(y) = f(xy)$, es decir,

c) f es un endomorfismo del grupo multiplicativo $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

Otra propiedad obvia es:

d) $f(xf(x)) = xf(x)$. Y como lo que se trata de probar es que $xf(x) = 1$ queda claro que basta ver que el 1 es el único punto fijo por f.

Veámoslo:

Supongamos primero $\alpha > 1$. Por ser f un homomorfismo de grupos, debe tenerse $f(\alpha^n) = [f(\alpha)]^n$; y como $\alpha^n \xrightarrow{n} +\infty$ la condición ii) dice que $f(\alpha^n) = [f(\alpha)]^n \xrightarrow{n} 0$, luego necesariamente $f(\alpha) \neq \alpha$.

Si fuera $\alpha < 1$ tendríamos $\alpha^{-1} > 1$ y por lo anterior $[f(\alpha)]^{-1} = f(\alpha^{-1}) \neq \alpha^{-1}$, es decir tenemos de nuevo $f(\alpha) \neq \alpha$.

Así pues, hemos probado que el 1 es el único punto fijo por f y el problema está resuelto.

Gabino González Díez
Profesor Agregado de I.N.B.

Han sido recibidas otras soluciones al Ejercicio nº 1 de:

- Francisco Lorenzo Miranda, y
- Juan Lobo.

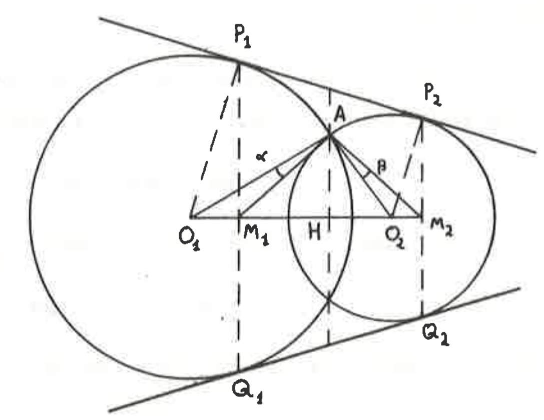
EJERCICIO Nº 2

En un plano hay dos circunferencias secantes C_1 y C_2 de radios distintos y centros O_1 y O_2, respectivamente. Una de las tangentes comunes a las dos circunferencias toca a C_1 en P_1 y a C_2 en P_2, mientras que la otra toca a C_1 en Q_1 y a C_2 en Q_2. Sea M_1 el punto medio de P_1Q_1 y M_2 el punto medio de P_2Q_2. Demuestre que los ángulos O_1AO_2 y M_1AM_2 son iguales. A pertenece a las dos circunferencias.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Solución:

Sean $r_1 = O_1A = O_1P_1$ y $r_2 = O_2A = O_2P_2$ los radios de las dos circunferencias dadas y S_1 y S_2 las áreas de los triángulos O_1M_1A y O_2M_2A, respectivamente.



Los triángulos $O_1M_1P_1$ y $O_2M_2P_2$ son semejantes, y por tanto

$$\frac{O_1M_1}{O_2M_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad (1)$$

La recta HA es mediatriz del segmento M_1M_2, luego es

$$M_1A = M_2A \qquad (2)$$

Se tiene:

$$2S_1 = O_1M_1 \cdot HA = M_1A \cdot r_1 \cdot \text{sen}\ \alpha$$

$$2S_2 = O_2M_2 \cdot HA = M_2A \cdot r_2 \cdot \text{sen}\ \beta$$

Dividiendo estas dos igualdades miembro a miembro, y teniendo en cuenta (1) y (2), resulta

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta} = 1,$$

de donde

$$\alpha = \beta.$$

Francisco Lorenzo Miranda

Otra solución ha sido enviada por J. Lobo.

EJERCICIO Nº 3

Dados los enteros estrictamente positivos a, b y c que son primos entre sí, dos a dos; demostrar que:

$$2abc - ab - bc - ca$$

es el mayor número entero que no puede expresarse en la forma

$$xbc + yca + zab$$

con x, y, z enteros positivos o nulos.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Solución:

Puesto que la relación $2abc - ab - bc - ca = xbc + yca + zab$ equivale a la relación $2abc = (x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab$, resolver el ejercicio equivale a probar que 2abc es el mayor número entero que no puede expresarse en la forma

$$xbc + yca + zab$$

con (ahora) x, y, z enteros ≥ 1.

Dividiremos la demostración en dos partes:

1) zabc no puede expresarse en la forma requerida:

Si fuera $zabc = xbc + yca + zab$ con x, y, z ≥ 1, tendríamos $zabc - yca - zab = xbc$, y puesto que el primer miembro de la igualdad es múltiplo de a y bc es primo con a debe-tenerse

$$x = n_1a \quad , \quad n_1 \geq 1$$

y análogamente

$$y = n_2b \quad , \quad n_2 \geq 1$$

$$z = n_3c \quad , \quad n_3 \geq 1$$

Pero entonces

$$xbc + yca + zab \ \text{sería}\ >2abc. \quad (\text{Contradicción}).$$

2) Cualquier $m > 2abc$ ya puede expresarse en la forma requerida:

Puesto que m.c.d. (bc, ca, ab) = 1 no hay duda de que podemos encontrar x, y, z enteros (no necesariamente positivos) tales que

$$m = xbc + yca + zab$$

además al ser $m > 0$, alguno de estos enternos, digamos z, es mayor que cero.

Ahora, si al dividir z entre c obtenemos $z = nc + z_0$, $z_0 < c$ podemos poner $m = xbc + yca + z_0ab + ncab = (x+na)bc + yca + z_0ab$. En otras palabras, podemos encontrar una expresión de m:

$$m = xbc + yca + zab$$

con x, y, z enteros y con $0 < z < c$.

En esta última expresión, o bien $\underline{x}$ o bien $\underline{y}$, son ≥ 1 pues de lo contrario se tendría $m \leq zab < cab$, contradiciendo el hecho de que $m > zabc$. Supongamos por ejemplo que se tiene $y \geq 1$.

Razonando como antes llegaríamos a una expresión:

$$m = xbc + yca + zab$$

con x, y, z enteros y con $0 < y < b$, $0 < z < c$. Pero en esta expresión debe tenerse $x > 0$, pues de lo contrario se tendría $m \leq yca + zab < bca + cab = zabc$, lo que contradice de nuevo el hecho de que $m > zabc$.

El ejercicio está ahora resuelto.

Gabino González Díez
Profesor Agregado de I.N.B.

Otras soluciones al Ejercicio nª 3 han sido enviadas por Juan Lobo y Francisco Lorenzo Miranda.

ESPERAMOS SOLUCIONES A LOS OTROS TRES

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA FASE FINAL DE LA XX OLIMPIADA MATEMATICA ORGANIZADA POR LA R. SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA. 24/25 FEBRERO 1984

PROBLEMA 1º

En una posición 0 de un aeropuerto de campaña está emplazado un cañón que puede girar 360°. Dos tanques atacan dicho lugar siguiendo trayectorias rectilíneas AB y CD, dadas. Hallar gráficamente el alcance del cañón sabiendo que la suma de los trozos de trayectorias de ambos tanques en los cuales éstos quedan bajo el fuego del cañón es una longitud conocida $\underline{l}$.

PROBLEMA 2º

Determinar un número de 5 cifras tal que su cuadrado termine en las mismas 5 cifras colocadas en el mismo orden.

PROBLEMA 3º

Dados dos números reales positivos $\underline{p}$ y $\underline{q}$ tales que $p+q = 1$, y sabiendo que todo par x, y de números reales positivos verifica $(x-y)^2 \geq 0$, se pide demostrar:

a) $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$

b) $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

c) $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

PROBLEMA 4º

Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \cos\frac{x}{2^3} \cdots\cdots \frac{x}{2^n}\right)$$

PROBLEMA 5º

Llévense arcos iguales AB = A'B' = x sobre dos circunferencias iguales a partir de sendos puntos A y A' fijos en ellas.

Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos BB' al variar x:

1º. Cuando los arcos se llevan en igual sentido.
2º. Cuando se llevan en sentidos opuestos.

PROBLEMA 6º

Se considera la circunferencia $\underline{c}$ de centro (3,0) y radio 3, y la recta $\underline{r}$ paralela al eje OX y que dista tres del origen. Se traza por el origen una recta variable que corta a $\underline{c}$ en M y a $\underline{r}$ en P. Determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las paralelas a OX y a OY trazadas por M y P respectivamente.

PROBLEMA 7º

Se consideran los números naturales escritos del modo usual en base 10. Se pide:

a) Encontrar el menor número que al suprimirle la primera cifra quede reducido a su quinta parte. ¿De qué forma son todos los números que poseen este propiedad?

b) Demostrar que no existe ningún número que al suprimirle su primera cifra quede reducido a la duodécima parte.

c) Formular un criterio general que nos permita afirmar cuando un número queda reducido $\underline{k}$ veces al suprimir su primera cifra.

PROBLEMA 8º

Hallar el resto de la división por x^2-1 del determinante:

$$\begin{vmatrix} x^3+3x & 2 & 1 & 0 \\ x^2+5x & 3 & 0 & 2 \\ x^4+x^2+1 & 2 & 1 & 3 \\ x^5+1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

***
*****

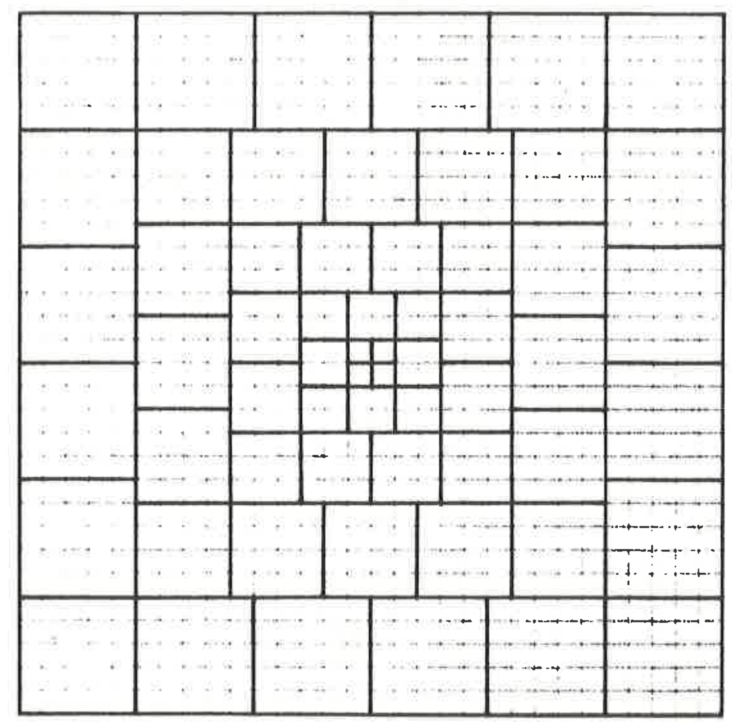
- 4. PEQUEÑAS IDEAS -

En esta sección del Boletín nª 2, figuraban algunos ejemplos de utilización de la intución geométrica para obtener relaciones algebraicas. M. Rico mostraba uno muy sugestivo para encontrar la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales. Hay otro ejemplo interesante para hallar la suma de los cubos.

La igualdad

$$(n+1) \cdot n - 2n = n(n-1)$$

permite por reiteración descomponer un cuadrado de lado n+1 segmentos de n unidades cada uno, en la siguiente forma (por claridad partiremos de un cuadrado cuyo lado mide 6 × 5; pero el razonamiento es general):



El área del cuadrado, es:

$$S = 4(1+2+3+4+5)^2 \qquad (1)$$

Pero también podemos obtenerla como suma de los cuadrados interiores que forman cada orla:

$$S = 4\cdot 1^2 + 8\cdot 2^2 + 12\cdot 3^2 + 16\cdot 4^2 + 20\cdot 5^2 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3) \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1+2+3+4+5)^2$$

Y, en general,

$$\boxed{\sum_1^n i^3 = \left(\sum_1^n i\right)^2}$$

Consecuencia: Todo cubo de n cualquiera es diferencia de dos cuadrados:

$$\boxed{n^3 = \left(\sum_1^n i\right)^2 - \left(\sum_1^{n-1} i\right)^2}$$

***
*****

-5. VARIA -

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Leonhard Euler (1707-1783)

Cuadrado mágico.- La suma de filas y columnas es 260; formado por cuatro cuadrados mágicos en que dicha suma es la mitad, 130.

Es más notable aún que por saltos de caballo, partiendo de la casilla 1, y siguiendo la sucesión natural de los números se llega a la 64, después de recorrer todas las casillas del tablero de ajedrez.

(Ejemplo tomado de la obra "Matemática", Libro Time Life).

LA CONJETURA DE MORDELL , DEMOSTRADA

En 1922, el matemático británico L.J. Mordell publicaba su trabajo "On the rational solutions of the indeterminate equations of the 3rd and 4th degrees". (Proc.Camb.Phil.Soc., 21, 179-192). En él establecía, sin probarla, su famosa conjetura, según la cual una curva definida sobre el cuerpo de los números racionales, de género mayor que uno, sólo posee un número finito de puntos de coordenadas racionales.

En una reunión de matemáticos celebrada el pasado año en Salzburgo en memoria de Kurt Gödel, un joven matemático alemán de la Universidad de Wuppertal, Gerd Faltings, sorprendió a los profesores asistentes con una comunicación titulada "Einige Satze zum Thema Abeische Varietäten uber Zahlkörper", en la que lograba establecer, utilizando resultados diversos y recientes de la Geometría Algebraica, la validez de la conjetura de Mordell. Habían pasado sesenta y un años.

Para analizar la demostración de Faltings, que no es constructiva, han tenido lugar numerosas reuniones de matemáticos y asimismo ha sido objeto de entrevistas y comentarios en la prensa y revistas no profesionales. Michael Artin del Instituto de Tecnología de Massachusetts, en respuesta a un periodista, ha calificado el descubrimiento de Faltings como "*el teorema del siglo, por lo menos en el campo de la Teoría de Números*". Y Spencer Bloch, de la Universidad de Chicago, comentaba que "*se había encontrado la respuesta a lo que parecía incontestable*".

La demostración de Faltings abre, en efecto, nuevas vías de investigación en problemas nuevos de la Geometría Algebraica y de la Teoría de Números, que ya están siendo objeto de

estudio en seminarios especializados. En particular, supone un progreso y un nuevo enfoque para ver de desvelar el enigma de la demostración del último teorema de Fermat, pues, en efecto, puesto que la ecuación $x^n + y^n = z^n$, equivalente a $u^n + v^n = 1$, por ser esta curva de género mayor que uno, para $n > 2$, el teorema de Faltings, demuestra que si la ecuación de Fermat, para un cierto valor de n admitiera soluciones, el conjunto de éstas es un conjunto finito.

***
*****