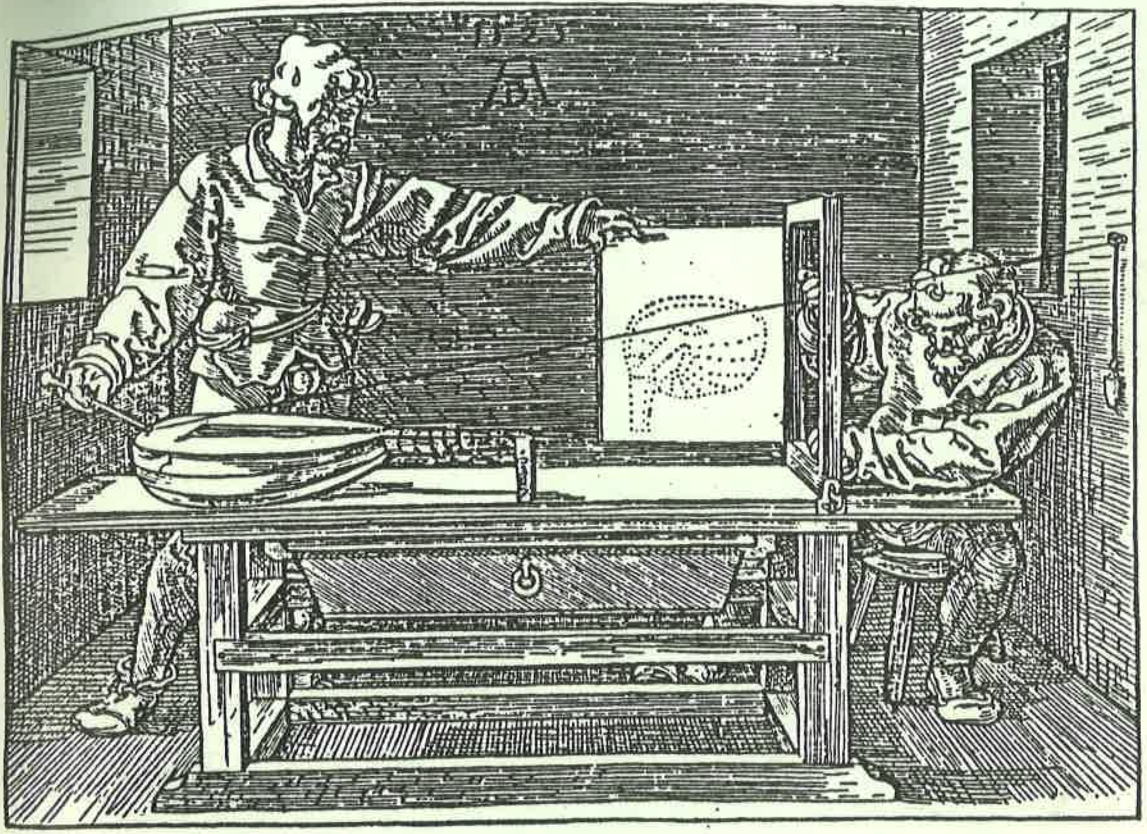


sociedad castellana

PUIG ADAM

de profesores de matemáticas

febrero 1987

boletín número 12

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Febrero de 1987 nº 12 (1986 - 87)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

Ronda de Atocha, 2 (INBAD)
MADRID

- La correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

PASCUAL IBARRA, José Ramón
FERNANDEZ BIARGE, Julio

- La portada reproduce un grabado de Alberto Durero, fechado en 1525, sobre el "dibujo de la perspectiva de un laud", en el que se aprecia el ingenioso dispositivo que permitía obtener, punto a punto, esa perspectiva, al no disponer de los simples métodos que nos ofrece la Geometría Descriptiva.

INDICE Pág.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: José Javier Etayo Miqueo

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardó (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: José Francisco Carballido Quesada

Vicesecretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

BRILLANTE PARTICIPACION ESPAÑOLA EN LA II OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICA

Esta II Olimpiada se ha celebrado en las ciudades uruguayas de Salto y Paysandú, entre los dias 23 y 31 de Enero. Han participado en ella once paises: Argentina, Bolivia, Brasil, Colombia, Cuba, Chile, España, Paraguay, Puerto Rico, Perú y Uruguay.

En las pruebas, se propusieron 6 problemas (en dos sesiones de cuatro horas y media cada una) que permitían obtener hasta 60 puntos en total. Publicamos sus enunciados en nuestra sección de Problemas Propuestos de este mismo Boletín. Se otorgaron 3 medallas de oro (a los que alcalzaron 55 puntos o más), 7 de plata (de 49 a 54 puntos) y 10 de bronce (de 23 a 46 puntos).

El equipo presentado por España, con cuatro participantes, ganó dos medallas de oro y otras dos de bronce. Los jóvenes españoles que han alcanzado tan brillantes resultados son los siguientes:

1) D. Carlos Ueno, con 60 puntos (única puntuación máxima), obtuvo medalla de oro, como primer clasificado; se formó en el Instituto de Bachillerato "Cervantes" de Madrid y actualmente cursa el primer año de Ciencias Matemáticas en la Universidad Complutense.

2) D. Fernando Galve, con 55 puntos, obtuvo otra medalla de oro, clasificándose en tercer lugar; es estudiante del C.O.U. en un Instituto de Bachillerato de Zaragoza.

3) D. Alberto Garrido, con 34 puntos, obtuvo una medalla de bronce, compartiendo el lugar 14° con el cuarto español y un colombiano; se formó en el Instituto de Bachillerato de Cantalejo (Segovia) y actualmente cursa el primer año de la E. T. S. de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid.

4) D. Salvador Villegas, también con 34 puntos, obtuvo medalla de bronce, empatado a puntos con el anterior; Es estudiante del C. O. U. en el Instituto de Bachillerato "Angel Ganivet" de Granada.

Es de resaltar el brillante resultado obtenido por los jóvenes participantes Galve y Villegas, que están todavía cursando el C. O. U. y han acudido a la Olimpiada sin apenas experiencia en ese tipo de competiciones.

Los otros dos participantes tienen un magnífico historial que hacía previsible su triunfo en la Olimpiada.

- Ueno , en 1984 se colocó en el 4° puesto en el Concurso de nuestra Sociedad, como alumno de primer curso del B.U.P. En 1985 logró el segundo premio de ese Concurso, como alumno de segundo; en 1986 fué campeón de la XXII Olimpiada Matemática Española, ganó una medalla de bronce en la I Olimpiada Iberoamericana de Matemática, en Bogotá y participó en la XXVII Olimpiada Matemática Internacional celebrada en Varsovia, donde solo le faltaron dos puntos para obtener una de las medallas.
- Garrido, en 1985 fué campeón en el Concurso de Problemas de nuestra Sociedad, como alumno de 2° de B.U.P.; en 1986 fué subcampeón de la XXII Olimpiada Matemática Española, obtuvo una medalla de bronce en la I Olimpiada Iberoamericana, en Bogotá y consiguió uno de los terceros premios en la XXVII Olimpiada Matemática Internacional, en Varsovia.

Nuestra Sociedad celebra el gran triunfo alcanzado y felicita a sus protagonistas.

Se espera que la III Olimpiada Iberoamericana pueda celebrarse el próximo año en Perú.

N O T I C I A S

NOTICAS DE LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA

En el pasado año 1986 se ha celebrado el 75 aniversario de su fundación. Con ese motivo se nombró Presidente de Honor a S.A. el Príncipe de Asturias don Felipe de Borbón y Grecia, recogiendo así un precedente histórico al que la Sociedad debe el título de Real.

Se está programando también la edición de un libro conmemorativo en el que se recojan trabajos expresamente solicitados para esta celebración de relevantes matemáticos españoles y extranjeros.

La Junta Directiva de la R.S.M.E. ha acordado el relanzamiento de la revista "Gaceta Matemática", que había quedado interrumpida al dedicar sus esfuerzos a la nueva serie de la "Revista Matemática Iberoamericana", actualmente ya en circulación.

XXIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

La FASE FINAL de esta Olimpiada tendrá lugar los próximos dias 27 y 28 de Febrero, en los locales de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid. En ella participarán los ganadores de la Primera Fase en cada uno de los distritos en que se celebró. El dia 27 se comenzarán las pruebas a las 16 h. y el 28 a las 9 h.

ICME 6

CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACION MATEMATICA

La IMU (International Mathematical Union), que agrupa sociedades matemáticas de numerosos países, entre ellos España, viene organizando con una periodicidad de cuatro años sus famosos Congresos Internacionales de Matemáticos, con asistencia de millares de matemáticos del mundo entero. Los últimos celebrados fueron los de Cambridge (1962), Moscú (1966), Niza (1970), Helsinski (1974), Vancouver (1978), Varsovia (1983) y Berkeley (1986).

Aneja a la Unión Internacional de Matemáticos, existe una Comisión consagrada especialmente a los problemas relacionada con la educación matemática, y esta comisión organiza también cada cuatro años, no coincidentes con los primeros, sus propios congresos: ICME (International Congress on Mathematical Education); Lyon (1969), Exeter (1972), Karlsruhe (1976), Berkeley (1980) y **Adelaida** (1984). El ICME-6, se está ya preparando para su celebración en Budapest, del 27 de julio al 3 de agosto de 1988. Se espera una asistencia de unos 2000 matemáticos y profesores. La Comisión ha decidio elegir e invitar especialmente a cuatro países miembros para que presenten este año su modo de proceder en lo relativo a la educación matemática. Estos países son: Argentina, Bulgaria, España y Malawi.

Para coordinar la presentación española ha sido requerido el profesor don Miguel de Guzmán Ozámiz, Catedrático de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, de Madrid, que ya ha iniciado los primeros contactos con diversos grupos de trabajo en educación matemática, con objeto de poder aportar una presentación digna en Budapest.

El plazo para la pre-inscripción en el Congreso termina el 30 de marzo de 1987.

Hasta ahora las sesiones previstas para el Congreso, son:

ACTION GROUPS

A 1. Early childhood years (ages 4-8).

A 2. Elementary school (ages 7-12).

A 3. Junior secondary school (ages 11-16).

A 4. Senior secondary school (ages 15-19).

A 5. Tertiary/post-secondary/academic institutions (age 18+).

A 6. Pre-service teacher education.

A 7. Adult, technical and vocational education.

THEME GROUPS

T 1. The professions of teaching. (To include the proffesional development and the status of teacher).

T 2. Computer and the teaching of mathematics. (To include calculators and graphics).

T 3. Problem solving, modelling and applications.

T 4. Evaluation and assessment. (To include a full range of evaluation of students, teachers and programs).

T 5. The practice of teaching and research in didactics.

T 6. Mathematics and other subjects. (To include particular reference to mathematics as a service subject).

T 7. Curriculum towards the year 2000.

PROPOSED TOPIC AREAS

To 1: "Video, film".

To 2: "Visualization".

To 3: "Competitions".

To 4: "Problems of handicapped students".

To 5: "Comparative Educations".

To 6: "Probability theory and statistics".

To 7: "Proofs, justification and conviction".

To 8: "Language and Mathematics".

To 9: "Distance Education".

To 10: "Students of high ability".

To 11: "Mathematical games and recreation".

To 12: "School-University interface".

To 13: "Women and mathematics".

To 14: "Learning difficulties".

To 15: "Theory of mathematics education".

Para sede del ICME-7, correspondiente a 1992, una candidatura altamente probable es la de Sevilla, de acuerdo con la propuesta de la Sociedad andaluza Thales, que cuenta con el apoyo de las principales organizaciones matemáticas del resto del país.

XII JORNADAS LUSO-ESPAÑOLAS DE MATEMATICA

En la Universidad del Miño de Braga (Portugal) se van a celebrar las XII Jornadas Luso-Españolas de Matemática , los días 4 al 8 de Mayo de 1987. Las conferencias y comunicaciones de que constará el programa se distribuyen en las siguientes secciones:

I. Algebra, Lógica y Topología de Números.
II. Análisis.
III. Geometría y Topología.
IV. Probabilidades y Estadística.
V. Análisis Numérica e Investigação Operacional
VI. Ciencias de la Computación.
VII. Mecánica y Física-Matemática.

Para participar en estas Jornadas debe efectuarse la inscripción antes del 31 de Enero de 1987, dirigiéndose a:

Comisión Organizadora
XII JORNADAS LUSO-ESPAÑOLAS DE MATEMATICA
Area de Matemática
Universidad del Miño
4719 Braga Codex (PORTUGAL)

CONGRESO DE POLINOMIOS ORTOGONALES Y APLICACIONES

En el presente año, este Congreso se va a celebrar en LAREDO (Cantabria) del 7 al 11 de Septiembre de 1987. Para inscribirse u obtener información sobre el mismo, dirigirse a:

Jaime Vinuesa Tejedor
Apartado 1021
39080 SANTANDER

NOTICIAS DE LA REAL ACADEMICA DE CIENCIAS

Se va a conmemorar el 250 aniversario de la medición del arco del meridiano con unas conferencias según el programa siguiente:

- 26 de febrero

J.M. Torroja.- "El problema de la figura de la Tierra".

M. Catalán .- "El observatorio de San Fernando, una consecuencia científica de la medición del arco de meridiano".

- 3 de marzo

A. Orte .- "La medida del arco en Perú".

Juhani Kakkuri.- "La medición del arco de meridiano en Laponia".

XXVIII OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL

La Olimpiada Matemática Internacional se celebrará este año en Cuba, en la primera quincena del próximo mes de Julio.

Esperamos que España pueda presentar a esa competición un equipo en el que figurarán los ganadores de nuestra XXIII Olimpiada Matemática Española. Los alentadores resultados obtenidos en años anteriores nos hacen confiar en que conseguirán la brillante actuación que todos deseamos.

Más noticias en la página 22.

EL SENTIR CAMBIANTE DE LOS MATEMÁTICOS MODERNOS SOBRE EL QUEHACER MATEMÁTICO

por Miguel de Guzmán Ozámiz
de la Real Academia de Ciencias

Este artículo forma parte del libro "FRAGMENTARIEDAD DE LAS CIENCIAS" (*) de A. Dou (editor) y nos ha sido cedido amablemente por su autor para su publicación en nuestro Boletín.

A lo largo de la historia del pensamiento ha habido momentos de espectacular euforia de los matemáticos sobre el alcance de su propia ciencia.

La matemática habría de ser LA CIENCIA, el saber por antonomasia donde no caben discusiones, incertidumbres, donde todo es diáfano y luminoso en sí mismo, intocable por el ir y venir de la opinión, de la moda, de la mera apariencia. El verdadero saber del hombre está en el mundo perenne de la matemática y desde esta cumbre esplendente la luz habrá de irradiar sobre todas las demás cuestiones hasta ahora ensombrecidas por la ignorancia o la duda. Los misterios ocultos del mundo serán iluminados por la matemática y así el hombre se hará dueño de los inmensos po-

---

(*) Ediciones Mensajero, Bilbao, 1985.

deres que permanecen escondidos en la naturaleza. Las oscuridades de la filosofía darán paso a una luminosidad incontestable en cuanto la filosofía se deje iluminar por la benefactora luz del pensamiento matemático. La matemática será así la luz del pensamiento humano y esta luz será la llave para abrir las demás puertas de la sabiduría y del poder.

No exagero. Este sentimiento está presente desde la misma cuna pitagórica del pensamiento matemático. Así se expresa uno de los inmediatos seguidores de Pitágoras, Filolao, del siglo v a. de C., en uno de los pocos fragmentos que, por su rotundidad, por su carácter de himno sagrado, se ha conservado a través de los siglos: «Grande, todopoderosa, todoperfeccionadora y divina es la fuerza del número, comienzo y regidor de la vida divina y humana, participante en todo. Sin el número todo carece de fronteras y es confuso y oscuro. Porque la naturaleza del número proporciona conocimiento y es guía y maestra para todos en todo lo que es dudoso o desconocido. Porque nada de las cosas nos sería claro ni en su mismo ser ni en sus relaciones mutuas si no existiera el número y su esencia. Este es quien armoniza en el alma las cosas con su percepción, haciéndolas cognoscibles y congruentes unas con otras según su naturaleza, proporcionándoles corporeidad» (Diels, B. 11).

Este entusiasmo pitagórico por el número, traducido en términos más sobrios en la posibilidad de análisis racional, con racionalidad matemática, del universo, constituye sin duda la impronta más característica del pensamiento filosófico occidental.

Se hace patente en Platón, donde la teoría de las ideas ha sido inspirada probablemente por una comprensión matematizadora del universo, siguiendo los pasos de su misma creación matematizada. Según cuenta Plutarco, Platón afirmaba que «*ton theon aeis geometrein*» (el dios siempre geometriza) y tal vez en esta idea haya que ver el origen de la inscripción a la entrada de la Academia «*medeis eisito ageometretos*» (ningún ageómetra entre).

Esta misma convicción llega, saltando sobre los siglos, a la Edad Moderna, en que Kepler, utiliza la idea de la creación geometrizante de Dios para aventurar, colocado él mismo en lugar del Dios creador, la estructura del sistema planetario, basándose en la perfección geométrica de los cuerpos platónicos, los únicos cinco poliedros regulares.

La época de la razón desentroniza a Dios, pero no destrona el pensamiento matemático. Así se expresa Fourier en el prólogo de una de las obras maestras de la ciencia moderna, *La Teoría Analítica del Calor* (1822): «Las ecuaciones analíticas... no se restringen a las propiedades de las figuras y a las que son objeto de la mecánica racional; se extiende a todos los fenómenos generales. No puede haber un lenguaje más universal ni más simple, más exento de errores y de oscuridades, es decir más digno de expresar las relaciones invariables de los seres naturales. Considerado bajo este punto de vista, el análisis matemático es tan extenso como la naturaleza misma; define todas las relaciones sensibles, mide el tiempo, los espacios, las fuerzas, las temperaturas,... su atributo principal es la claridad; no tiene en absoluto signos para expresar nociones confusas. Relaciona los fenómenos más diversos y descubre analogías secretas que los unen. Si la materia se nos evade, por su extrema tenuidad, como la del aire y de la luz, si los cuerpos están situados lejos de nosotros, en la inmensidad del espacio, si el hombre quiere conocer el espectáculo de los cielos en épocas sucesivas que un gran número de siglos separa, si las acciones de la gravedad y del calor se ejercen en el interior del globo sólido a profundidades que nos serán siempre inaccesibles, el análisis matemático puede, con todo, dominar las leyes de estos fenómenos. El nos los hace presentes y parece ser una facultad de la razón humana destinada a suplir la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos; y, lo que es aún más notable, sigue el mismo camino en el estudio de todos los fenómenos; los interpreta con el mismo lenguaje como para atestiguar la unidad y la simplicidad del plan del universo, y hacer aún más patente este orden inmutable que preside en todas las causas naturales».

También Kant mismo afirma en el prólogo de su *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften* que «en cada una de las disciplinas de la naturaleza solamente se puede encontrar tanto de auténtica ciencia cuanto se encuentra en ella de matemática».

El final del siglo XIX, siglo de consolidación y revisión profunda de las matemáticas clásicas, trajo consigo convulsiones intensas en el terreno de su fundamentación básica. Los esfuerzos intelectuales aventurados de Cantor por lograr un nuevo dominio de los procesos infinitos y su teoría de conjuntos pronto pusieron de manifiesto grietas amenazadoras en la base misma del edificio matemático. Con todo, la confianza de los matemáticos no cejaba y trabajaron por décadas con la profunda convicción de que no habría nada irreparable en ellas.

Hilbert, en 1925, en su artículo famoso *Ueber das Unendliche,* se expresa de esta manera proponiendo su teoría finitista de demostración a fin de poner fuera de toda duda los fundamentos de la matemática: «el objetivo de mi teoría consiste en establecer de una vez para todas la certeza de los métodos matemáticos». Y un poco más adelante expresa así la convicción imperante entre los matemáticos sobre la solidez imbatible de su ciencia: «En cierto sentido la matemática se ha convertido en una corte de arbitraje, un tribunal supremo para decidir cuestiones fundamentales sobre una base concreta en la que todos puedan concordar y donde cada afirmación sea controlable,... Un ejemplo del tipo de cuestiones fundamentales que pueden ser tratadas de este modo es la tesis de que todo problema matemático es soluble. Todos nosotros estamos convencidos de que realmente es así. De hecho uno de los principales atractivos para atacar un problema matemático es que siempre oímos esta voz dentro de nosotros: Ahí está el problema, encuentra la contestación, siempre la puedes encontrar puramente pensando, pues en matemáticas no hay ningún ignorabimus».

El ambiente contemporáneo es el del neopositivismo del Círculo de Viena que mantiene aún como uno de sus dos pilares de certeza el de la matemática. Así se expresa Carnap

en 1930 en su famosa conferencia de Königsberg: «cualquier incertidumbre en los fundamentos de 'la más cierta de todas las ciencias' es en extremo desconcertante» (Carnap, 1930).

Pero también a lo largo de los siglos ha habido voces que han pretendido introducir un contrapunto en este andante maestoso de la sinfonía matemática. Zenón de Elea con sus paradojas ante el espíritu ingenuamente pitagórico, Pascal, con sus elucubraciones sobre el espíritu de finura, probablemente apuntadas contra el cartesianismo del espíritu geométrico.

Un poco anterior a la constitución del Círculo de Viena, y también él mismo vienés, surge en 1821 Wittgenstein, con su sibilino *Tractatus Logico-Philosophicus,* una especie de espada de dos filos, que si, por una parte abogaba por un radical análisis del lenguaje, a la hora de hacer ciencia cierta, por otra parte manifiesta bien explícitamente cómo incluso «cuando todas las posibles cuestiones científicas han sido respondidas, nuestros problemas vitales aún no han sido tocados en absoluto». Wittgenstein es, en el aspecto que más me interesa considerar ahora, el gran adelantado de vanguardia, en toda su concepción intelectual y vital. El itinerario seguido por Wittgenstein, en trazos no tan radicales, es, si no típico, sí al menos fuertemente significativo como corriente de pensamiento que se ha repetido en muchos de los pensadores contemporáneos que se han ocupado de desentrañar el sentido profundo del quehacer matemático, como veremos enseguida. Wittgenstein llega primero desde el riguroso análisis lógico del raciocinio y del lenguaje para enmarcar sus limitaciones, a la convicción de la inutilidad de tal construcción a la hora de enfrentarse con los auténticos problemas del hombre. Su silencio consiguiente por décadas («wovon man nicht sprechen kann, darüber, muss man schweigen») y su reaparición con la teoría de la matemática como juego en muchos pasajes de su *Philosophische Untersuchungen* representa como un renacer en él con ojos nuevos del pensamiento matemático.

Como veremos son muchos los matemáticos de primera línea en nuestro siglo que han experimentado un trayecto intelectual semejante, e incluso en cierto sentido más radical, pues han pasado de la arrogancia hilbertiana del *kein ignorabimus in der Mathematik* a la actitud humilde de pedir para la matemática al menos un satus científico semejante al de las teorías físicas.

Bertrand Russell afirmaba en 1901 que «el edificio de las verdades matemáticas se mantiene inconmovible e inexpugnable ante todos los proyectiles de la duda cínica». En 1924 ya había cambiado considerablemente de opinión. Para él, la lógica y la matemática, al igual que, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell «son aceptadas debido a la verdad observada de algunas de sus consecuencias lógicas». En 1959, en la descripción de su itinerario filosófico, afirma: «La espléndida certeza que siempre había esperado encontrar en la matemática se perdió en un laberinto desconcertante».

El mismo Carnap al que en 1930 hemos oídos ponderar «la más cierta de todas las ciencias», señala en 1958 como una de las analogías principales entre la física y la matemática: «la imposibilidad de certeza absoluta».

Hermann Weyl, uno de los matemáticos más profundos de nuestro siglo, se percató, incluso antes de que Gödel publicara su contribución fundamental sobre los fundamentos, de que la matemática era «irremisiblemente falible». Y en 1949 presenta lo que para él debe ser la adecuada interpretación de la matemática como ciencia: «Ningún Hilbert será capaz de asegurar la consistencia para siempre; hemos de estar satisfechos de que un sistema axiomático simple de matemáticas haya superado hasta el presente el test de nuestros elaborados experimentos matemáticos... Una matemática genuinamente realista debería concebirse, en parangón con la física, como una rama de la interpretación teorética del único mundo real y debería adoptar la misma actitud sobria y cautelosa que maniesta la física hacia las extensiones hipotéticas de sus fundamentos».

Johnn von Neumann afirma asímismo en 1947 que «la matemática clásica, aunque nunca más se pudiera estar absolutamente seguro de su fiabilidad... se sostiene sobre un fundamento al menos tan firme como, por ejemplo, la existencia del electrón. En consecuencia, si se está dispuesto a aceptar las ciencias, se puede aceptar también el sistema de la matemática clásica». Y confiesa también cómo experimentó el mismo itinerario mental común a tantos matemáticos de nuestro siglo: «Yo mismo reconozco con qué humillante facilidad cambiaron mis puntos de vista respecto a la verdad absoluta matemática... y cómo cambiaron tres veces sucesivas».

Quine, uno de los lógicos matemáticos contemporáneos más importantes afirmaba ya en 1958 desde su perspectiva: «lo más razonable es considerar la teoría de conjuntos, y la matemática en general, como consideramos las porciones teóricas de las ciencias naturales; en cuanto que contienen verdades o hipótesis que han de ser vindicadas menos por la pura luz de la razón que por la contribución indirecta y sistemática que hacen a la organización de los datos empíricos en las ciencias naturales».

Son voces que se expresan de modo sorprendentemente distinto a lo que los matemáticos de los siglos anteriores hubieran esperado e incluso de modo muy diferente a lo que piensa hoy día la mayor parte de los matemáticos enfrascados con el quehacer de sus técnicas particulares. Tratemos de analizar un poco más de cerca algunos puntos concretos en los que la visión de la matemática ha cambiado hasta poder causar una transformación de actitud general hacia ella como el que a través de tales declaraciones se pone de manifiesto.

Ante todo aparece bien claro que el vuelco espectacular en la consideración de la matemática como ciencia privilegiada en lo que se refiere a la naturaleza del grado de certeza que le es propio ha sido causado por los resultados de Gödel sobre la imposibilidad de demostrar la ausencia de contradicción de cualquier sistema formal en que al menos se pueda desarrollar la aritmética clásica. Si la ausencia de contradicción es indemostrable, el edificio matemático se sostiene sobre un acto de aceptación semejante al que está en la base de todas las otras ciencias y son criterios de congruencia y adecuación más o menos evidente de este edificio a una cierta realidad previa o posterior los que nos impulsan a realizar dicho acto de aceptación. Es la experiencia de los siglos, en último término, el criterio básico que nos conforta en el pensamiento de la solidez de la matemática. Así lo expresa lacónicamente Bourbaki, en un famoso artículo sobre La Arquitectura de las Matemáticas en 1948: «Creemos que la matemática está destinada a sobrevivir y que jamás tendrá lugar el derrumbamiento de este edificio majestuoso por el hecho de una contradicción puesta de manifiesto repentinamente, pero no pretendemos que esta opinión se base sobre otra cosa que la experiencia. Es poco, dirán algunos. Pero desde hace 25 siglos los matemáticos tienen el hábito de corregir sus errores y de ver así su ciencia enriquecida, no empobrecida. Esto les da el derecho de arrostrar el porvenir con serenidad».

La raíz de esta situación debe buscarse en la incapacidad radical de la matemática para dominar totalmente el reto fundamental con que se ha enfrentado desde el principio de su existencia: el señorío de los procesos infinitos del pensamiento. Lo más característico de la aritmética clásica, lo que más claramente separa a la matemática de ser una inmensa tautología, es la aceptación de algún tipo de proceso infinito. Con el infinito matemático sucede algo parecido (o lo mismo tal vez) que con el ser de las consideraciones metafísicas. En la apertura inicial de la mente al conocimiento intelectual (a cualquier conocimiento intelectual) está yacente, como horizonte, condición de posibilidad de cualquier conocimiento concreto, el ser en su infinitud, en su inconcreción. En este horizonte debe destacarse el ser concreto y este horizonte es el que da la posibilidad de cualquier otro conocimiento. No nos lo planteamos como objeto. Es el horizonte, el fondo de nuestra visión cognoscitiva que, de no estar ahí no habría nada en ella.

La mente está por su propia naturaleza abierta a este horizonte y cualquiera de sus actividades lo pone de manifiesto. Es como constitutivo de su forma de ser. El ser concreto se destaca en ella precisamente de modo negativo, mostrando su limitación, su modo de ser particular que niega el modo de ser de otros muchos, afirmando así implícitamente que el ser importante es el que no tiene modo.

El infinito está en el principio de todo quehacer matemático. Del uno al dos... y ya está ahí el infinito presente, y aun en el simple uno con la conciencia de que no lo llena todo y de que es repetible.

No es de extrañar, pues, que el enfrentamiento con el infinito sea la gran fuente de fecundidad del pensamiento matemático, pero al mismo tiempo la causa de las frustraciones más profundas en aquéllos que han pensado en algún momento en tenerlo aferrado entre sus manos. Los momentos más fecundos y al mismo tiempo los más profundos de la historia de la matemática han tenido lugar precisamente en los instantes de audacia matemática hacia un nuevo tipo de comprensión del infinito: pitagóricos, descubrimiento del irracional, Zenón, cálculo infinitesimal, dominio de los procesos infinitos de paso al límite, series, integral,... por Cauchy, Weierstrass, teoría de conjuntos de Cantor, teorema de Gödel,... teorías de conjuntos no cantorianas,... El infinito se ha escurrido de entre los dedos después de cada intento y esta vez, después de los resultados de Gödel, parece que de forma bastante más profunda, radical y definitiva...

Junto a este conocimiento actual de sus limitaciones intrínsecas, la matemática de nuestros días presenta otros aspectos más extrínsecos que están operando cambios profundos en sus rasgos fundamentales.

La matemática de los siglos pasados era una matemática a la medida del individuo. Sus resultados, desde el principio hasta el final, eran asequibles por una sola mente e incluso, hasta comienzos del siglo actual, han existido personas, como Poincaré y Hilbert, capaces de abarcar con su saber prácticamente la totalidad de las matemáticas de su tiempo. La matemática de hoy en cambio se va convirtiendo más y más en un saber de colectivos altamente especializados, cada elemento de los cuales domina tan sólo una porción relativamente pequeña del conjunto, y su saber está basado fundamentalmente en lo que otros han hecho y él mismo no ha analizado y a su vez es base para lo que otros hacen. Un ejemplo claro de este tipo de tarea lo constituye el de la clasificación de todos los grupos simples finitos. Tras 150 años de trabajo desde que se comenzó la tarea de clasificación el año 1980 se pudo demostrar que, aparte de los grupos simples finitos cíclicos de un número primo de elementos y de las 16 familias de grupos simples finitos asociados con los grupos de Lie, sólo existen los 26 grupos esporádicos cuyo orden se ha podido identificar exactamente. Para presentar todas las demostraciones necesarias en el estilo conciso de las revistas matemáticas se necesitarán un total de unas 10.000 páginas. Por supuesto que esto constituye un trabajo de equipo que muy posiblemente no podrá ser dominado por la mente de un único matemático. La verdad matemática adquiere así una dimensión social con connotaciones de cierto tipo de fe en la competencia y fiabilidad de la comunidad matemática que uno no pensaría que habría de configurar la matemática del presente.

Por otra parte, el aspecto social de la matemática interviene hoy más que nunca, en la filtración de los productos innumerables de la creación de los matemáticos. Los criterios de rigor, cambiantes con el tiempo, son fijados por el colectivo matemático, que filtra por criterios no siempre intrínsecos y objetivos, la matemática que se considera aceptable por la comunidad. Como dice René Thom en un polémico artículo de 1970 sobre el sentido de las matemática modernas, una noción que no resulta inaceptable de rigor consiste en lo siguiente: «una demostración es considerada como rigurosa si los mejores especialistas en la materia no tienen nada que objetar».

Otro aspecto característico de la matemática actual que va conformando con rasgos muy distintos de los hasta ahora predominantes la evolución hacia el futuro de la matemática lo constituye el impacto del computador. Este se ha hecho notable en los últimos años con la demostración del teorema de los cuatro colores. Una demostración que no puede hacerse vivencia en el mecanismo raciocinante del hombre, por razón de la lentitud de éste, ha sido construida mediante el

auxilio del computador. Con ello se ha obtenido lo que muchos piensan que es una categoría diferente del teorema. Tal vez otros muchos problemas matemáticos, hoy aún abiertos, esperan una solución semejante mediante la asistencia esencial del computador. El matemático actual, por el influjo del avance de su propia ciencia, desciende también aquí de su podio majestuoso y consiente modestamente en dejarse ayudar por sus propias máquinas, incluso en las exploraciones que parecerían más propias del puro «ojo del alma», como diría Platón, tales como la teoría de números.

CONSTITUCION DEL SEMINARIO DE MATEMATICAS EN EL CENTRO DEL PROFESORADO DE CIUDAD REAL

El pasado 28 de Enero, en el Centro del Profesorado de Ciudad Real, quedó constituido un SEMINARIO DE MATEMATICAS con objeto de permitir la actualización y puesta a punto del profesorado adscrito a él en cuanto a tecnología, objetivos y directrices metodológicas y de estudiar y experimentar las aportaciones que lleguen al CEP relacionadas con la Enseñanza de las Matemáticas.

En este Seminario participan profesores de Matemáticas de EGB, de Bachillerato, de Formación Profesional y de la Escuela Universitaria del Profesorado de EGB.

Como coordinador de este Seminario ha sido elegido el Profesor de la E. U. del Profesorado de EGB, Don Gabriel Fernández García, y en él participa activamente el Vicepresidente por Ciudad Real de nuestra Sociedad, D. Salvador Herrero Pallardo.

Esperamos una fructífera colaboración entre ese Seminario y nuestra Sociedad "Puig Adam", dada la afinidad existente entre los objetivos de ambos, y le deseamos que alcancen brillantes y eficaces resultados en la mejora de la enseñanza de las Matemáticas.

AKADEMIA NEOPLATONICA

Esta AKADEMIA celebrará sus Tertulias de Geometría VI y VII los dias 19 y 20 de Febrero sobre los temas "La Geometría y el Tiempo" y "La Geometría y la Naturaleza", a las 18 h. 30 m. en el Salón de Actos del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Almagro, 42. Madrid).

A VUELTAS CON CASANOVA

Por Hixem

¡Ya lo tenemos aquí!: Paso al caballero veneciano, al dieciochesco donjuán, al mismísimo Giacomo Casanova. ¿Y qué pintará un hombre así en una revista matemática? Pues parece que sí, que aparte de aquellas aficiones, probablemente más deleitables, por las que es conocido y recordado, no dejó de tener también alguna veleidad por los problemas matemáticos, siquiera con aquella suerte de dilettantismo propia de su época.

Consta, por ejemplo, que se interesó por cuestiones probabilísticas aplicadas al juego; en realidad, a demostrar que la Bança gana. Aunque quizá se limitara a volcar su facundia y aplomo en la presentación de argumentos matemáticos ajenos hasta convencer a los financieros, asesorados por d'Alembert, de las ventajas de la implantación de la lotería en Francia. Lo que, aparte de una pensión sobre ella, le supuso la concesión de seis administraciones. ¡Insigne precedente de situaciones hoy tan aireadas!

Pero no es de ésto de lo que quería hablar, sino de la duplicación del cubo. Que también Casanova creyó haber resuelto. Intentó con gran empeño hacer triunfar su Solución al problema de Delos, ratificándola con el Corolario a la duplicación del exaedro y la Demostración geométrica de la duplicación del cubo, que dirigió a todas las academias científicas europeas; escribió al mismo tiempo insistentes cartas a los más notables geómetras, astrónomos y profesores de la época... para al final reconocer que se había equivocado.

Así lo cuenta una biografía de nuestro héroe, La vie à plaisir, escrita por Ned Rival y publicada en español bajo el título Casanova: Una vida de placer. No habría traído esto aquí si no fuera por la interpretación que el libro da del fracaso de Casanova. Después de explicar el nacimiento de la cuestión ("*Para conseguir que se detenga una epidemia de peste, el oráculo de Delos recomienda a los atenienses que doblen el altar cúbico de Apolo, muy a sabiendas de que el problema no puede ser resuelto de manera absolutamente matemática y, en consecuencia, tampoco prácticamente*") -explicación que también tendremos luego que comentar-, escribe lo siguiente:

El científico Charles Henry, que estudió la solución propuesta por el matemático aficionado, concluye: "Casanova creyó al principio haber dado la solución exacta; sólo podía darla aproximada... Pero no hay que mostrarse demasiado severo con él. La mayoría de las soluciones propuestas en la antigüedad y en los tiempos modernos al problema de la duplicación del cubo suponen el empleo de la regla y el compás. Ahora bien, esos dos instrumentos que se consideraban como exactos, con una exactitud análoga a la exactitud geométrica, no son instrumentos exactos...".

¡Hombre, pues muchas gracias! ¡Pobres geómetras, lo difícil que se nos está poniendo la vida! Ahora, ya, ni siquiera vamos a poder hallar con la regla y el compás el punto medio de un segmento. ¿Que digo?: ni el punto de intersección de dos rectas o el simple trazado de una recta que pase por un punto, si hemos de hacer caso al argumento de ese despiadado científico Sr. Henry. Con él es con quién hay que mostrarse severos, y muy severos, y no con el pobrecito Casanova que no tuvo más pecado, al menos en ese terreno, que intentar resolver un problema aún abierto por entonces y, eso sí, resolverlo mal.

Y lo resolvió mal porque, como después se sabría, el problema no tiene solución. Este, como los otros problemas clásicos griegos, están propuestos para ser resueltos con la regla no graduada de un sólo borde y el compás, instrumentos sólo aptos para los problemas lineales y cuadráticos o reducibles a ellos. Pero el de la duplicación del cubo es un problema de tercer grado, ya que, en efecto, se trata de encontrar la arista x de un cubo cuyo volumen sea doble del de un cubo de arista a. La ecuación que la da, $x^3 = 2a^3$, es cúbica y no reducible a otras de menor grado y ésa es la razón de que el problema no sea resoluble con regla y compás, no la falta de exactitud de esos instrumentos.

"*Cuando se trata de construcciones geométricas* -dicen Courant y Robbins en ¿Qué es la matemática?- *no hay que olvidar nunca que el problema no es el de dibujar figuras en la práctica, con cierto grado de exactitud, sino el de demostrar que, sin otra ayuda que la regla y el compás, la solución puede hallarse teóricamente, suponiendo que nuestros instrumentos tienen una precisión ideal... Su teoría nada tiene que ver con el método más sencillo de realizarlas efectivamente o con los artificios que permitan simplificar y acortar el número de pasos necesarios; esta es una cuestión de importancia teórica mucho menor*". Desde un punto de vista práctico, ninguna construcción resultaría seguramente tan satisfactoria como la obtenida con el uso de una regla graduada o un buen transportador de ángulos, pero no es ese el problema. "*El de no entender adecuadamente* -siguen diciendo- *el carácter teórico de la cuestión de las construcciones geométricas y la obstinación en querer desconocer los hechos científicos bien establecidos son los responsables de la persistencia de los innumerables trisectores de ángulos y cuadradores de círculos*".

Todavía más: es que por otros métodos los griegos sabían ya resolver estos problemas. Concretamente, el de la duplicación del cubo es resoluble por lo menos mediante la cisoide de Diocles, una cúbica plana ya estudiada hacia el siglo II a. de J.C. Recordemos brevemente su definición. Se toma una recta r y un punto O distante de ella la longitud $a = |OA|$, y se traza la circunferencia c de diámetro $|OA|$. Cada recta s trazada por O corta a c en el punto C y a r en el R: se toma entonces en s el punto X tal que $|OX| = |CR|$ en longitud y sentido. La cisoide es el lugar de los puntos X.

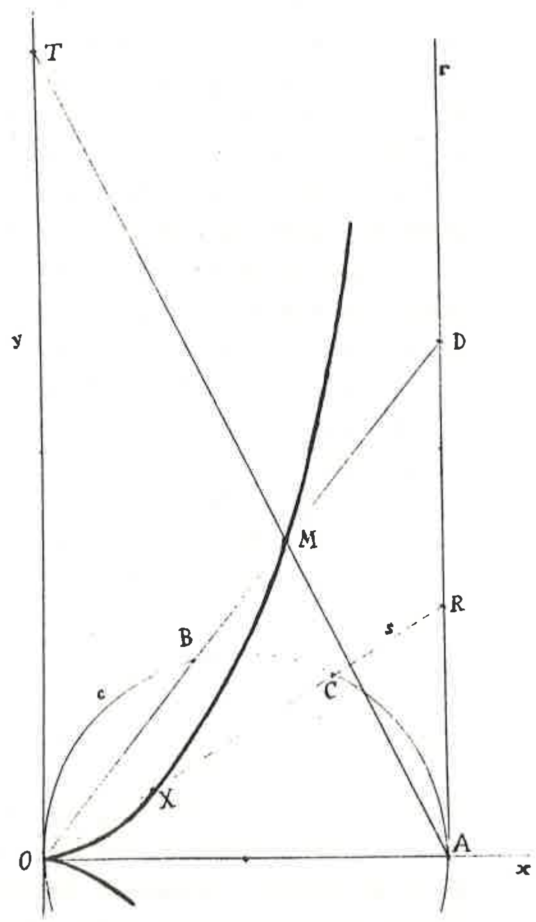
Construída la curva, nuestro problema queda resuelto: En la paralela por O a r se toma el punto T tal que $|OT| = 2a$, es decir, el doble de la arista del cubo dado; la recta TA corta en M a la cisoide; uniendo entonces O con M, esta recta corta a r en el punto D. Pues bien, $|AD|$ es la longitud de la arista del cubo de doble volumen. "Así de fácil", que se dice en política.

La demostración, supongo, sería más complicada para los coetáneos de la cisoide que para nosotros, que conocemos la geometría de Descartes. Hallemos primero la ecuación de la curva. Si se toman OA y OT como ejes x e y, las ecuaciones de r y c son, respectivamente,

$$x = a, \qquad x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Una recta s que pasa por O es de ecuación $y = tx$, y corta a r en el punto R(a, at) y a c en el C($a/(1+t^2)$, $at/(1+t^2)$). El punto X tendrá las mismas coordenadas que el vector $[CR]$, esto es:

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1+t^2}$$



Eliminando en ellas el parámetro t se tiene la ecuación de la cisoide:

$$x(1+t^2) = at^2, \quad y/x = t \implies x(x^2+y^2) - ay^2 = 0$$

ecuación cúbica, como se había anunciado.

Pues bien, si t_0 es el valor del parámetro para la recta OM, las coordenadas de M serán: $(at_0^2/(1+t_0^2),\ at_0^3/(1+t_0^2))$. y las de D, $(a,\ at_0)$. Pero M está en la recta AT, con A $(a, 0)$, T $(0, 2a)$, es decir, en la recta $2x + y - 2a = 0$, luego.

$$2at_0^2/(1+t_0^2) + at_0^3/(1+t_0^2) - 2a = 0 \implies t_0^3 = 2$$

así que el punto D es de coordenadas $(a,\ a\sqrt[3]{2})$, lo que dice que está ordenada $|AD| = a\sqrt[3]{2}$ es, efectivamente, la arista de un cubo de volumen $2a^3$, doble del que tenía el cubo dado.

Así que, contra lo que decía nuestro biógrafo, no es que las soluciones sean inexactas por hacerse, desde la antiguedad a los tiempos modernos, con regla y compás; aquí tenemos una que no es así y, por cierto, tan inexacta como las otras según su apreciación, absolutamente exacta según la nuestra. Lo que ocurre es que no es una solución del problema ya que éste pide el uso exclusivo de la regla y el compás. Y observemos también cómo el oráculo de Delos debía de estar, efectivamente, inspirado por los dioses puesto que, según el comentarista, propuso el problema "muy a sabiendas de que no podía ser resuelto", cosa que los pobres humanos, aún los muy sabios, tardaron siglos en descubrir.

Pero, insistamos una vez más, tanto este problema como los de la trisección del ángulo o la cuadratura del círculo, son irresolubles con regla y compás en el sentido que hemos dado a esa resolución. Dice Rodríguez Vidal: "*Parece innecesario advertir que se trata de problemas teóricos: desde un punto de vista práctico, la solución, con tanta aproximación como se juz* *que necesaria, está al alcance de cualquier artesano de cualquier tiempo".*

Pues claro que debería ser innecesario, aunque mucho me temo que no siempre lo sea, a la vista de lo que hemos ido encontrando. Todos seguramente tenemos, por otra parte, la experiencia de los solucionistas artesanos, es decir, de los que no lo resuelven. Si Vds. han leído Bearn, la novela de Lorenzo Villalonga, habrán encontrado un párrafo muy fino y oportuno en el que refiere cómo la señora de Bearn llega a afirmar que había resuelto la cuadratura del círculo:

"Eso os parece tan difícil? A mí me parece que no es necesario ser ningún sabio de Grecia. Se hace un círculo de hilo encima de una tabla y después, con cuatro alfileres, se va estirando hasta convertirlo en cuadrado".

La escena resulta hasta candorosa porque la pobre doña María Antonia, ya al final de sus días, comenzaba a chochear. Pues hay muchos que traen soluciones igual de convincentes que ésa, sólo que revestidas de todo un ropaje tan presuntamente científico como inadecuado; y encima se enfadan si no se les admite. Ahí va una muestra que apareció hace años en un periódico y que de ningún modo resulta insólita ni excepcional.

Encuentra la solución de la cuadratura del círculo

PARIS, 8. (Efe.)—"He encontrado la solución al problema de la cuadratura del círculo." Con esta afirmación, un profesor de tecnología comercial y de lengua fracesa de Dijon, Ives Pirat, de treinta y nueve años, ha dejado sorprendidos hoy a numerosos franceses.

Ives Pirat, padre de una familia numerosa de nueve hijos, afirma que su solución es sencilla y que "en una hora he logrado hallar la fórmula partiendo de una construcción geométrica"

El hombre está convencido de su hallazgo: "Estoy dispuesto a someterme al juicio de los más expertos matemáticos o geómetras."

Con una regla graduada y un compás, el profesor de Dijon ha hallado dar salida a su solución de uno de los más importantes problemas de las matemáticas modernas

¡Con una regla graduada, oye! Así, cualquiera. ¿Cuándo se nos pasará la manía de intentar resolver problemas sin conocer el enunciado? Otra cuestión, que nos llevaría muy lejos, es la de por qué los griegos se interesaban tanto por los problemas a resolver con la regla de un solo borde y el compás. Por hoy, y concretándonos a la duplicación del cubo, nos limitamos a recoger un bello episodio que recuerda R. Vidal: *"Cuando mucho tiempo después alguien preguntó a Platón qué interés pudieran tener los dioses en que se satisficiese condición tan difícil, la respuesta fué que a los dioses no les interesaba el tamaño del altar, pero sí querían proponer a los hombres cuestiones en las que pudieran ocupar con dignidad su inteligencia".* Respuesta no muy diferente de la de Jacobi cuando le interpelaban por la poca utilidad práctica de las matemáticas que cultivaba: *la matemática se hace "por el honor del hombre".* ¡Qué pensará de ello una sociedad materialista y pragmática como la actual!

Nos hemos ido muy lejos. No sé qué diría Casanova si viera las secuelas que surgen de su modesta afición. En realidad de donde surgen es de las extrañas interpretaciones de sus comentaristas. Que a ésos sí que hay que ponerles un cero, pero un cero muy gordo y muy redondo. En cambio a nuestro galante aventurero quizá convenga únicamente recomendarle lo contrario que a su contemporáneo Rousseau. De quien se cuenta que estaba en cierta ocasión distrayéndose con una señora, Julieta de nombre, y con tan poca fortuna, por lo visto, que hubo ella de decirle: *"Zanetto, lascia le donne e studia la matematica".* A Casanova podríamos decirle, pues, invirtiendo los términos: Tú sigue dedicándote a las señoras, que eso parece que se te da bien, y olvídate de las matemáticas.

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corrien te, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de ins cripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que man- tenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congre- sos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro bo letín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enun ciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el conteni do de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuer da que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

MEZCLAS APARENTEMENTE ALEATORIAS

Por J.M. Martínez Sánchez

¿Qué ocurre cuando mezclamos entre sí las cartas de una baraja? Aparentemente, las cartas se mezclan unas con otras en una disposición aleatoria, pero, en general, se puede afir- mar que las relaciones iniciales que las ligan no son fuerte- mente alteradas.

En realidad, que la relación final, no predecible, parezca aleatoria se debe en mayor medida al desconocimiento del orden relativo inicial que al aparente desorden que intro- duce el proceso de mezcla o barajadura.

Nos referimos, como es natural, a los procedimientos corrientes, y más usuales, de barajar los naipes; los cuales pueden ser clasificados en mezclas "por deslizamiento", "por bloques" y "por imbricación" o una cierta combinación de los mismos.

En la práctica se da la paradoja de que una mezcla es tanto más aleatoria cuanto más imperfecta sea. Este hecho, co- nocido y utilizado, aunque con fines distintos, por prestidigi tadores y jugadores de ventaja, es el que permite, mediante una mezcla "suficientemente perfecta", controlar la situación en la baraja de una o varias cartas, e incluso del mazo completo, dan do la ilusión justamente de todo lo contrario.

Martin Gardner, en su libro "Carnaval Matemático" (ver sión castellana de Alianza Editorial), resalta lo anterior y ha ce una interesante exposición sobre una barajadura conocida co mo "mezcla a la americana". Nosotros, en este artículo, estudiamos un tipo de mezcla por deslizamiento, que los profesionales y aficionados llaman precisamente "mezcla matemática"(*), de la que es fácil dar una expresión análitica y establecer un modelo matemático de la misma.

Sin entrar en el interés que puede tener el estudio en sí mismo, queremos, no obstante, resaltar las posibilidades didácticas que nos ofrece la utilización de estos modelos en clase; no sólo, y ya sería suficiente, como medios para despertar la curiosidad y motivar el interés de nuestros alumnos, sino también como iniciación al planteamiento, análisis e investigación de situaciones nuevas cuyo contenido matemático permite, a la vez que ejercitarse en el razonamiento crítico, utilizar y clasificar conceptos tanto matemáticos como de la vida corriente.

1. LAS MEZCLAS

Con un mazo o paquete de m naipes, que en principio lo podemos imaginar materializado mediante una baraja española de 40 cartas, las mezclas que vamos a considerar se realizan de la siguiente forma: teniendo los naipes en la mano izquierda, figuras boca abajo, con la otra mano se retira la carta superior del mazo y a continuación, tomando las cartas de una en una, se colocan, alternativamente, una por encima y otra por debajo de las que vamos teniendo en la mano derecha. Al final, se han pasado todas las cartas de la mano izquierda a la derecha, cambiando el orden en que se encontraban al principio.

Con cierta práctica, y algo de habilidad, la barajadura puede realizarse tomando las cartas en la posición normal para mezclarlas, es decir: sujetando los naipes por sus cantos cortos con los dedos pulgar y medio de la mano derecha y dejando deslizar las cartas, de una en una y como ya se ha indicado, sobre la mano izquierda que recoge al final todo el mazo reconstruído en un orden distinto del inicial.

(*) Véase P. Wenceslao Ciuró: "Más de 200 juegos de manos con la baraja". Instituto Editorial Reus. Madrid, 1952, pág. 794.

El proceso puede reiterarse un número cualquiera de veces; también es posible, en determinados casos, pasar las cartas de dos en dos, de tres en tres, etc., lo cual permite abreviar el tiempo total de mezcla.

En cualquier caso el proceso real con una baraja completa de 40 ó 52 cartas es excesivamente largo, y se prolonga abusivamente con las reiteraciones sucesivas, por lo cual en la práctica este método de mezcla no es de aplicación general; su uso queda restringido a la realización de algunos juegos de salón, basados precisamente en las particularidades de la mezcla, para los que basta el empleo de un número de cartas sustancialmente menor.

Después de efectuar h mezclas de este tipo, el orden inicial de las cartas está notablemente alterado y pocos observadores serían capaces no ya de predecir el orden o disposición en que quedan las cartas, sino ni siquiera de sospechar que las mezclas realizadas no son mezclas realmente aleatorias.

Ahora bien, ¿este procedimiento de mezcla altera efectivamente el orden inicial de todas las cartas? Es decir, ¿cambia la posición relativa de todas y cada una de las cartas?

Designemos por B_0 la distribución inicial o de partida, que en principio es una distribución cualquiera de las $40!$ posibles que pueden adoptar los 40 naipes de una baraja española; dicho de otra forma por B_0 designamos una sucesión o conjunto ordenado de 40 términos, donde la carta superior del mazo, figuras boca abajo, sería el primer término; la carta inmediatamente siguiente, el segundo, etc.; y la última carta de la baraja, primera por abajo, vendría representada por el término cuadragésimo.

Si B_0 representa la distribución de las cartas en la baraja antes de comenzar las mezclas, C_{0i}, $i=1,\ldots, 40$, representa cada una de las cartas, según un orden relativo en B_0, donde los subíndices indican la distribución considerada, el lugar de orden i que ocupa la carta en esa distribución.

Efectuada la mezcla una vez, tenemos una nueva distribución de las cartas, que representaremos por B_1, y cada carta, representada ahora por C_{1j}, ocupa el lugar j en B_1. Esta nueva posición de cada carta puede, o no, coincidir con el lugar de orden que tenía la misma carta en B_0; si coincide, $C_{0i} = C_{1j}$, se verifica que $i=j$ y diremos que la posición i de la carta $C_{0i} = C_{1j}$ es <u>invariante</u> por la mezcla.

En caso contrario, la carta $C_{0i} = C_{1j}$, que ocupaba el lugar i en B_0 ha cambiado de posición al mezclar y está ahora en el lugar j de B_1 con $i \neq j$.

Análogamente, después de <u>h</u> mezclas, se pasa de B_h a B_{h+1} por la h+1 - mezcla; es claro que si una carta permanece invariante al efectuar una mezcla, permanece invariante al efectuar <u>h</u> mezclas sucesivas. La recíproca no es cierta, como veremos más adelante.

Sea S la mezcla que transforma B_0 en B_1, tenemos que $S: C_{0i} \rightarrow C_{1j}$ o también, si designamos por i y j los lugares que ocupa una misma carta antes y después de la mezcla, podemos escribir $S(i) = j$ con lo que indicamos el paso de la carta que ocupaba el lugar i en B_0 al lugar j en B_1. Se trata, ahora, de encontrar una expresión operativa de S; es decir, escribir o describir j en función de i.

¿Qué hace realmente la mezcla considerada? Examinado el proceso de mezcla, vemos que las cartas se separan, según su paridad, de manera que las cartas que ocupaban una posición par

en B_0 pasan a ser las veinte primeras cartas del mazo B_0, y las impares pasan a ocupar los veinte últimos lugares; además el orden es decreciente para las cartas pares y creciente para las impares. Dicho de otra forma, la mezcla distribuye las cartas alrededor de la 1^{a} de B_0, colocando por encima, o antes, las cartas pares a partir de la segunda de B_0; y las cartas impares se colocan por debajo, o después, a partir de la tercera.

Esto se puede representar esquemáticamente así:

$$\begin{array}{l} B_0:\ 1, 2, 3, \ldots, 19, 20, 21, 22, 23, \ldots, 38, 39, 40 \\ S \downarrow \\ B_1:\ 40, 38, 36, \ldots, 4, 2, 1, 3, 5, \ldots, 35, 37, 39 \end{array}$$

donde las cartas en la distribución B_1 se han representado por el lugar que ocupaban en B_0; así, la primera carta de B_1 es la 40^{a} de B_0; la vigésima carta de B_1 es la 2^{a} de B_0; la primera de B_0 es ahora la carta vigesimoprimera de B_1, etc.

Ahora podemos fácilmente dar una expresión para S. Tendremos:

$$S(i) = \begin{cases} 21-k & \text{si} \quad i = 2k \\ 21+k & \text{si} \quad i = 2k+1 \end{cases}$$

Para la h+1-mezcla, que transforma B_h en B_{h+1}, tenemos la ley de recurrencia dada por:

$$C_{h+1,21-k} = C_{h,2k} \qquad \text{ó} \qquad C_{h+1,21+k} = C_{h,2k+1}$$

y las cartas cuya posición permanece invariante, por la realización de una mezcla, son aquellas cuyos subíndices verifiquen: $i = S(i)$, es decir, $21-k = 2k$ ó $21+k = 2k+1$ de donde $k=7$ ó $k = 20$, según la carta ocupe lugar par o impar, por consiguiente $i = 14$ ó $i = 41$, tenemos que

$$C_{h+1,14} = C_{h,14} \quad ó \quad C_{h+1,41} = C_{h+1,41}$$

si la mezcla se realiza con una baraja española de 40 cartas, la primera igualdad nos dice que la carta decimocuarta es invariante por la mezcla y la segunda igualdad indica que dicha invariancia es única pues la invarianza dada es solución extraña al supuesto, ya que $i \leq 40$.

Generalizamos los resultados anteriores suponiendo ahora que, en lugar de 40 cartas, el mazo consta de un número $\underline{m}$ de cartas. ¿Cuáles son las invarianzas en este caso?

Distingamos entre $\underline{m}$ número par o número impar.

a) $m = 2p, \quad S(i) = \begin{cases} p+1-k, & \text{si } i = 2k \\ p+1+k, & \text{si } i = 2k+1 \end{cases}$

las invarianzas vienen dadas por:

$$p+1-k = 2k \quad ó \quad p+1+k = 2k+1$$

tenemos, pues, que:

$$k = \frac{p+1}{3} \quad ó \quad k = p$$

luego,

$$i = \frac{m+2}{3} \quad ó \quad i = m+1$$

la segunda igualdad nos dice que, para $\underline{m}$ par, ninguna carta que ocupe posición impar permanece invariante por la mezcla; mientras que la primera igualdad indica que habrá una invariancia si $m+2$ es múltiplo de 3 y ninguna en caso contrario. O sea que hay una invariancia si $m = 2p$ y $m = 3q+1$, es decir, si $m = 6t+4$ y, en este caso, la carta invariante es la que ocupa la posición $i = 2t+2$; y no hay invariancia si $m = 6t$ ó $m = 6t+2$.

b) $m = 2p+1, \quad S(t) = \begin{cases} p+1-k, & \text{si } i = 2k \\ p+1+k, & \text{si } i = 2k+1 \end{cases}$

análogamente, en este caso, las invariancias vienen dadas por los valores de i que verifiquen las igualdades:

$$2k = p+1-k \quad ó \quad 2k+1 = p+1+k$$

es decir,

$$k = \frac{p+1}{3} \quad ó \quad k = p$$

luego,

$$i = \frac{m+1}{3} \quad ó \quad i = m$$

aquí, la segunda igualdad nos dice que, si $\underline{m}$ es impar, siempre hay, al menos, una invariancia ya que la última carta del mazo no cambia de lugar al realizar una mezcla; la primera igualdad indica que además hay otra invarianza, para $\underline{m}$ impar, si $m+1$ es múltiplo de 3 y sólo en ese caso.

Todo lo anterior se puede resumir en el siguiente cuadro que expresa las invariancias en función del valor de $\underline{m}$:

$m = 6t$, $m = 2p$ y $m = 3q$, no hay invariancias

$m = 6t+1$, $m = 2p+1$ y $m = 3q+1$, una invariancia: $i = m$

$m = 6t+2$, $m = 2p$ y $m = 3q+2$, no hay invariancias

$m = 6t+3$, $m = 2p+1$ y $m = 3q$, una invariancia: $i = m$

$m = 6t+4$, $m = 2p$ y $m = 3q+1$, una invariancia: $i = \frac{m+2}{3}$

$m = 6t+5$, $m = 2p$ y $m = 3q+2$, dos invariancias: $i = \frac{m+1}{3}$, $i = m$

2. LOS CICLOS

Estudiemos, ahora, las alteraciones que se producen en la baraja al efectuar varias mezclas seguidas; se trata de responder a la cuestión: ¿cuál es la disposición en que quedan las cartas depués de h mezclas?

El orden inicial de los naipes, que hemos designado por B_0, es una cualquiera de las 40! permutaciones posibles que se pueden formar con las 40 cartas de la baraja; la mezcla S transforma B_0 en otra permutación B_1, que consta de los mismos elementos en otro orden, y, en consecuencia, la transformación realizada es una sustitución.

La sustitución definida por S viene determinada por el proceso de mezcla descrito al principio o, lo que es equivalente, por el par de permutaciones (B_0,B_1), donde B_1 es la permutación que sustituye a la permutación de partida B_0.

Podemos escribir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 19 & 20 & 21 & 22 & \dots & 38 & 39 & 40 \\ 40 & 38 & 36 & \dots & 4 & 2 & 1 & 3 & \dots & 35 & 37 & 39 \end{pmatrix}$$

donde los elementos de la permutación inferior sustituyen a los correspondientes de la permutación superior que es la inicial.

Realizar h mezclas sucesivas es componer S consigo misma h veces: $S \cdot S \cdot \overset{h}{\dots} \cdot S = S^h$, de manera que la permutación resultante, B_h, viene determinada por la igualdad $S^h(B_0) = B_h$.

Es decir, cada carta C_{0i} de B_0 es sustituída por la carta $C_{h,S^h(i)}$ de B_h o, expresado de otra forma, la carta que ocupa el lugar i en B_0, después de h mezclas, ocupa el lugar $S^h(i)$ de B_h. Esto se indica mediante las relaciones:

$$S^h(C_{0i}) = C_{h,S^h(i)}, \quad i=1,2,\dots,40; \quad S^h(i) \in 1,2,\dots,40$$

que ligan los pares componentes de la sustitución.

Haciendo variar h, tenemos todas las potencias de S; las cuales forman el grupo cíclico engendrado por S.

El orden g de este grupo es el grado de S, es decir $S^g = S^0$, donde S^0 representa la sustitución idéntica.

Para determinar el grado de S se descompone en producto de sustituciones circulares sin elementos comunes. En nuestro caso, la descomposición de S en ciclos es la siguiente:

$$S = (1\ 40\ 39\ 37\ 33\ 25\ 9\ 24\ 7\ 28\ 15\ 12\ 18\ 6\ 30\ 19\ 4\ 34\ 27\ 13\ 16\ 10\ 22\ 3\ 36\ 31\ 21) \cdot (2\ 38\ 35\ 29\ 17\ 8\ 26\ 11\ 20) \cdot (5\ 32\ 23) \cdot (14)$$

donde se ve que S es el producto de cuatro ciclos sin elementos comunes de grados 1, 3, 9, 27 respectivamente. El ciclo (14) de grado 1, que proporciona la invarianza para una sola barajadura, no suele incluirse explícitamente al escribir la descomposición en ciclos de una sustitución; si aquí lo hemos incluído no es sólo para mayor claridad, sino para resaltar, precisamente, el resultado obtenido en el apartado anterior.

Teniendo en cuenta que el grado de S es el mínimo común múltiplo del grado de sus ciclos, grad (S) = m.c.m. (3,9,27), se obtiene que, para una baraja de 40 cartas, el grado de la mezcla es g = 27. Es decir, $S^{27} = S^0$ y los valores de las potencias de S se reparten periódicamente: $S^{27\cdot k+h} = S^h$, $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$, $h < 27$.

Para determinar como quedan distribuídas las cartas en la baraja, después de h mezclas sucesivas, se hallan las potencias h-ésimas de cada uno de los ciclos o, lo cual es equivalente, se desplazan hacia la izquierda h posiciones los elementos de cada ciclo (en realidad queremos decir: los elementos de la permutación inferior de cada ciclo), se yuxtaponen para reconstruir la sustitución y se ordenan las nuevas fases componentes según el orden inicial dado por la permutación superior que es la de partida.

Se obtiene así S^h como producto de las h-ésimas potencias de sus ciclos componentes, por ejemplo: para $h=5$, tendríamos:

$$S^5 = \begin{pmatrix} 1 & 40 & 39 & 37 & 33 & 25 & 9 & 24 & 7 & 28 & 15 & 12 & 18 & 6 & 30 & 19 & 4 & 34 & 27 & 13 & 16 & 10 & 22 & 3 & 36 & 31 & 21 \\ 25 & 9 & 24 & 7 & 28 & 15 & 12 & 18 & 6 & 30 & 19 & 4 & 34 & 27 & 13 & 16 & 10 & 22 & 3 & 36 & 31 & 21 & 1 & 40 & 39 & 37 & 33 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 28 & 35 & 29 & 17 & 8 & 26 & 11 & 20 \\ 8 & 26 & 11 & 20 & 2 & 38 & 35 & 29 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 32 & 23 \\ 23 & 5 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix}$$

reordenando los pares componentes en el orden inicial, dado por la permutación superior y que en este caso es el orden natural, tenemos finalmente:

$$S^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 \\ 25 & 8 & 40 & 10 & 23 & 27 & 6 & 38 & 12 & 21 & \ldots & 11 & 39 & 7 & 26 & 24 & 9 \end{pmatrix}$$

donde vemos que, después de cinco mezclas sucesivas, la que ahora es la primera carta del mazo era antes la vigésimaquinta; la segunda carta es la que ocupaba el octavo lugar en la permutación inicial, etc.

Siempre que $\underline{h}$ sea múltiplo de 3, las cartas que ocupen los lugares 5°, 14°, 23° y 32°, en la posición de partida, vuelven a ocupar esos lugares después de las $\underline{h}$ mezclas. Análogamente, si $\underline{h}$ es múltiplo de 9 permanecen invariantes las cartas que están situadas en los lugares que determinan el ciclo de grado nueve; finalmente, si $h = 27 \cdot k$, $k \in N$, todas las cartas retoman la posición inicial.

Aunque la mezcla queda, de este modo, completamente caracterizada, la laboriosidad del proceso y su excesiva duración hacen que, como ya indicábamos anteriormente, este procedimiento de barajadura no sea de aplicación general. No obstante, sí se puede utilizar con éxito en aquellos casos que requieran un número de cartas, o de mezclas, relativamente pequeño.

En la tabla siguiente se dan los valores del grado S, según el número de cartas que forman el paquete o mazo de naipes que se mezclan; también se indica, para cada caso, el número y grado de los ciclos en que se descompone la mezcla.

Nª de cartas del paquete	Grado de la mezcla	Número de ciclos	Grado de los ciclos
2	2	1	2
4	3	2	1,3
6	6	1	6
8	4	2	4,4
10	6	3	1,3,6
12	10	2	2,10
14	14	1	14
16	5	4	1,5,5,5
18	18	1	18
20	10	2	10,10
40	27	4	1,3,9,27
48	24	2	24,24
52	12	8	1,2,3,4,6,12,12,12

Vemos, en la tabla, que con 8, 10 ó 16 cartas son necesarias 4, 6 ó 5 mezclas, respectivamente, para volver a tener el orden inicial de las cartas. Estos valores son, por consiguiente, adecuados para la realización de juegos de ilusión y entretenimiento pues constan de suficientes cartas, ni muy pocas, ni muchas, y el número de mezclas necesario para completar los ciclos es pequeño.

En la tabla solo figuran los datos relativos a paquetes con un número par de cartas ya que los paquetes impares, debido a la invariancia de la última carta, se reducen a los anteriores.

3. LOS EFECTOS

Se comprende que si controlamos el orden o disposición de las cartas, los efectos que se pueden conseguir basados en este principio sean numerosos y todos ellos intrigantes. En este sentido, también son aprovechables las distintas presentaciones ya existentes para otros juegos con cartas ordenadas, trucadas, etc., pues la mezcla estudiada permite, en algunos casos, sustituir con ventaja tales técnicas.

El presentador tiene que crear el clima apropiado, y saber elegir el momento oportuno, para la realización de los juegos de manera que sus efectos no queden en un simple pasatiempo y su utilización sirva, como se pretende, para encauzar el interés inicial del alumno hacia metas más amplias. Conviene distinguir el fin perseguido de los medios empleados, dejando claro, desde el principio, la diferencia entre ambos aspectos.

Por consiguiente, en la presentación de los juegos se debe tender a un equilibrio entre la seriedad de nuestro propósito, estimular el estudio racional y completo de una situación, y el desenfado e intranscendencia con que se tratan los efectos sorprendentes que dicha situación provoca.

Las charlas y comentarios que acompañan el desarrollo de un juego forman parte de la "puesta en escena" y ayudan a crear un clima de expectación. No sólo permiten matizar la diferencia entre el juego como medio y el estudio reflexivo como fin, si no que contribuyen de manera directa e importante al éxito de los efectos presentados; las cartas no crean ilusión, las palabras sí.

Aunque para la realización de la mayor parte de los juegos basados en la mezcla no se requiere habilidad especial, sí es una medida de prudencia no presentarlos en público hasta que sean dominados sin dudas, ni titubeos , que distraigan la atención y desluzcan el resultado final. Antes de presentar cualquier juego se debe ensayar su efecto y repetirlo varias veces hasta estar seguros de realizarlos con total soltura y precisión.

Como ilustración práctica se exponen tres ejemplos, extraídos de la citada obra de W. Ciuró, adaptados a nuestros propósitos y que requieren para su realización paquetes de 8, 9 y 10 cartas respectivamente.

En los ejemplos se describen los efectos y su fundamento con unas ligeras indicaciones sobre el desarrollo del juego y sus aplicaciones posteriores. No se detalla la presentación de los juegos, ni las charlas que acompañan su desarrollo, por considerar que, al ser varias las posibilidades en estos aspectos, cada uno habrá de encontrar las que considere más adecuadas o interesantes y adaptarlas a su particular manera de hacer.

A) ..., ocho y nueve

De una baraja española completa, 48 cartas, se toman los cuatro ochos y los cuatro nueves formando con ellos un paquete figuras boca abajo. Se mezclan las cartas y se van pasando, de una en una, de arriba a abajo del paquete, contándolas; al llegar a ocho se enseña la carta que es precisamente un ocho, y lo mismo al decir nueve, que también es un nueve, dejando estas dos cartas aparte. Se vuelve a empezar el contaje, con el mismo efecto al llegar a ocho y nueve, hasta que no queda ninguna carta en las manos.

Esto se ejecuta dos o tres veces, la cosa parece fácil pero entregando las cartas a los alumnos. (Conviene disponer de varios juegos de cartulinas numeradas con 8 y 9), no consiguen hacer lo mismo o, caso excepcional, tardan mucho en encontrar la disposición inicial correcta, ¡que se deshace después de barajar y tampoco sirve! Se impone buscar un método para encontrar la solución y dar una explicación general del proceso.

El orden de partida de las cartas se consigue fácil y disimuladamente al separar los ochos y nueves de la baraja, colocando como al azar primero un nueve, luego dos ochos, tres nueves y los otros dos ochos, se juntan las cartas y se mezclan cuatro veces, empezando a contar con el paquete dorsos hacia arriba.

Este juego presenta dos aspectos cuyo estudio podemos plantear: primero, encontrar el orden inicial de los naipes para producir el efecto y generalizarlo a otros números o a otras cartas, para ello se parte de la situación final y se razona a la inversa reconstruyendo el proceso hasta llegar a la posición de partida; segundo, es el tema que hemos tratado en el artículo y es común a todos los ejemplos que presentamos, estudiar la invarianza del orden después de las mezclas.

B) El número previsto

Se dispone un sobre grande, cerrado y lacrado, cuyo interior contiene un folio, tarjetón o cartulina donde se ha escrito en caracteres amplios y "artísticos": "EL NUMERO ELEGIDO ES EL 15".

Llegado el momento de realizar el juego, separamos de la baraja nueve cartas cualesquiera numeradas del 1 al 9, que después de mezcladas se distribuyen en un cuadrado de 3 filas por 3 columnas (poniéndolas boca abajo sobre una mesa o, si es posible, pegadas a la pizarra o panel adherente). Pedimos a un alumno que elija una fila cualquiera, la que desee, o columna, o, si lo prefiere, cualquier diagonal; otros alumnos retiran las cartas de la línea designada, diciéndoles que sumen los puntos obtenidos y anuncien el resultado, a continuación se procede a abrir el sobre y se enseña lo escrito. Naturalmente, se de-

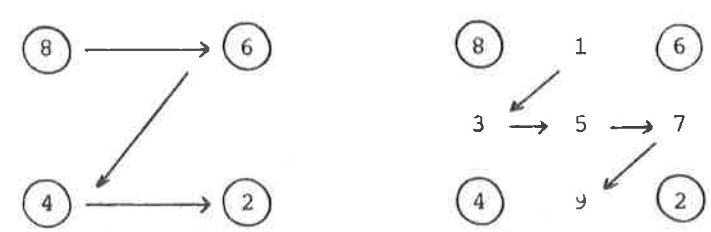
berá dar alguna explicación sobre nuestra particular capacidad de "previsión".

El efecto se basa, como se habrá comprendido, en las propiedades de los cuadrados mágicos. Al separar las cartas de la baraja se van colocando descuidadamente sobre la mesa, en fila y boca abajo, primero el 9 y finalmente el as, se juntan en un paquete y se mezclan una o cinco veces (se puede mezclar dos veces y enseñar las cartas en abanico, mezclar otras dos veces y decir: "¿Ya es suficiente?", sin esperar respuesta añadir: "¿No?" y mezclar una vez más diciendo al final: "Bueno, ya vale. Supongo que estarán bien mezcladas").

Terminadas las cinco mezclas, o la primera, la distribución de las cartas es:

8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9

que permite formar el cuadrado rápidamente colocando los cuatro primeros vértices y a continuación las cinco cartas restantes, según el siguiente esquema:



Esto más que un juego en sí mismo, es un principio general para forzar un número y sirve de base para otros muchos efectos distintos. Por ejemplo: conocida la decimoquinta carta de la baraja, o colocando en ese lugar una carta conocida, se pide a los alumnos que sumen los puntos de las cartas elegidas del cuadro y miren la carta que ocupa el lugar indicado, enunciada ésta se abre el sobre donde previamente habíamos escrito el nombre de la carta.

Otra variante curiosa es decir que se quiere preguntar el próximo día a tal alumno, que será el décimoquinto de la lista (veremos más adelante que esto no es necesario, puede ser cualquiera de ellos), pero, no deseando hacer creer que se tiene una especial "mania" ó "predilección" por ese alumno, lo mejor es que sean los propios compañeros quienes elijan a quien hay que preguntar a través de un procedimiento "objetivo" como es la "elección al azar" por medio de las cartas.

Si sustituímos los naipes por cartulinas, de contextura y tamaño similar, en las cuales se escriben números convenientemente elegidos de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, podemos conseguir que el número obtenido sea cualquiera prefijado de antemano.

Esta última posibilidad brinda numerosas ocasiones para ejercitarse con las operaciones de los distintos campos numéricos, especialmente con irracionales cuadráticos o con números complejos, pero el juego también puede servir como punto de partida para el estudio de las propiedades algebraicas de los cuadrados mágicos o problemas combinatorios basados en éstos y en la mezcla estudiada.

C) Adivinación de carta y número

De una baraja de póquer, 52 cartas, se toman diez cartas numeradas del 1 al 10, el 1 primero o encima, el 10 debajo o al final. Se mezclan rápidamente extendiéndolas a continuación en fila, figuras boca abajo.

Luego puede darse la siguiente explicación: "Normalmente no es posible conocer ninguna carta sin volverla. No obstante, en este caso y debido a una "especial facultad", si me nombráis un número cualquiera del 1 al 10, puedo hallar la carta que lleva dicho número y si me señalais una carta por el dorso, también puedo indicar el número que lleva dicha carta pero para esto último necesito la ayuda de algún instrumento que potencie la "facultad especial". Un péndulo es muy apropiado pues

recoge y amplia cualquier vibración que se produzca en el transcurso del experimento: una simple tiza atada a una cuerda puede servirnos".

Dicen el número o señalan la carta, se pasea el péndulo por encima, dramatizando el acto, y se acierta lo que se pide. Al final pueden volverse las cartas que aparecen en cierto desorden.

Para conseguir el efecto, procedemos del siguiente modo: al seleccionar las cartas se ordenan como ya se ha indicado. Realizamos seis mezclas, después de la segunda y quinta mezcla pueden abrirse las cartas en abanico y enseñarlas para que se vea que están bien barajadas.

Terminada la sexta mezcla, se extienden las cinco primeras cartas de encima sobre una mesa en fila horizontal, figuras tapadas, dejando entre cada una un intervalo; las cinco siguientes se colocan por orden en los intervalos, con lo cual las diez cartas quedarán en un cierto desorden que permite, al finalizar el juego, volverlas de cara dando la sensación de estar colocadas al azar.

En esta disposición las dos primeras cartas por la izquierda son el 1 y el 6, lo cual debe tenerse presente, siguiendo a continuación los demás valores que van alternándose en la fila.

Ahora, si nos dan un número menor que 5 empezamos a contar desde 1, comenzando por la primera carta, y pasando las cartas de dos en dos; si el número es mayor que 5, se hace lo mismo pero empezando la cuenta en 6 y contando a partir de la segunda carta de la fila.

Cuando señalen una carta debemos fijarnos si ocupa un lugar par o impar. Si ocupa lugar impar, se cuenta desde 1 pasando, como antes, dos cartas en el contaje; si ocupa lugar par, se cuenta igual pero empezando por 6 y partiendo, al contar, de la segunda carta de la fila. El número que contemos al llegar a la carta señalada es el que corresponde a la misma.

Una variante del juego, que permite reducir a cinco el número de mezclas, se obtiene siguiendo el mismo procedimiento anterior pero cuidando de colocar las cartas, al seleccionarlas de la baraja, con las figuras visibles en la siguiente disposición:

5, 4, 3, 2, 1, 6, 7, 8, 9, 10

de modo que, después de recogerlas formando un paquete y darle la vuelta para barajar, la posición de partida tenga el 10 encima, luego el 9, etc., y, finalmente, el 5.

De esta manera, concluídas las mezclas, podemos extender las cartas en fila sin necesidad de dejar intervalos, con lo cual la presentación gane en rapidez y naturalidad.

Aunque la disposición de las cartas es fácil de recordar, al no coincidir con el orden usual, se requiere alguna práctica para colocarlas con seguridad y soltura. Conviene ensayar los dos procedimientos y utilizarlos según las circunstancias.

En cualquier caso, el profesor interesado siempre intentará buscar nuevas y mejores formas de hacer que le faciliten el planteamiento de cuestiones o problemas, interesantes y asequibles a los alumnos, donde la matemática puede aportar respuestas y contribuir a la solución de los mismos.

¿ FRACASO ESCOLAR ? ¿ FRACASO DOCENTE ?

Por Julio Fernández Biarge

Esta ponencia fué presentada en una mesa redonda organizada por el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad Politécnica de Madrid, en 1975. A pesar del tiempo transcurrido y de estar referida específicamente a esa Universidad, creemos que muchos de sus análisis y conclusiones mantienen su vigencia hoy día y pueden ser de interés para nuestros socios.

***

Se habla de fracaso cuando los resultados obtenidos tras el esfuerzo previsto para la consecución de un objetivo, no corresponden a los esperados. En cualquier caso, un juicio sobre la existencia de un fracaso, y mucho más un análisis de sus causas, debe basarse en la existencia de unos objetivos prefijados y en la realización de un esfuerzo planificado que se creyó adecuado para conseguirlos. Si no se realizó el esfuerzo, no se puede hablar de un plan fracasado sino de un plan no intentado, o realizado sólo parcialmente; a veces, el esfuerzo requerido no figura explícitamente en los planes o no ha de ser hecho por los mismos interesados en conseguir el objetivo; entonces el plan comprende tan sólo un sistema de motivaciones que se supone darán lugar a que el esfuerzo se produzca espontáneamente; en este caso, el fracaso puede tener lugar tanto porque ese esfuerzo no llegue a realizarse como porque no sea adecuado al fin propuesto.

Aclarados estos conceptos, resulta difícil hablar del fracaso escolar de nuestra Universidad, dada la disparidad de objetivos y de planificaciones de esfuerzos o motivaciones con que nos encontramos. Si acaso, habría que hablar de una serie de fracasos diferentes, dentro de una situación caracterizada por una gran confusión en los objetivos, y por la casi total ausencia de planificación de medios.

La labor docente-discente es, por esencia, una labor de equipo, y requiere un cierto consenso de todos los que la realizan acerca de los objetivos perseguidos; pero ni siquiera sobre los objetivos globales de la Universidad hay ideas que gocen de general aceptación; el objetivo de un centro universitario puede consistir en llegar a ser:

a) Matriz donde se geste el saber y depósito donde se guarde.

b) Vehículo de transmisión del saber universal a los jóvenes.

c) Escuela de formación de profesionales eficientes.

d) Filtro de selección de élites que han de regir la sociedad futura.

e) Ocasión para que maestros y discípulos se encuentren e intercambien libremente sus ideas.

Puede llegar a ser también varias de esas cosas a la vez; sólo la aceptación de unos u otros objetivos nos permitirá juzgar si la labor del centro está conduciendo al éxito o al fracaso; no debería hacerse un sólo juicio sobre este resultado, sobre la oportunidad de una medida académica, sobre el coste de la enseñanza, o sobre la calidad de un sistema de evaluación, sin hacer referencia a cuales de esos objetivos se debe servir.

Un ejemplo más visible todavía de la falta de claridad en los objetivos se da en el actual C.O.U. Este curso podría ser:

1. Exposición panorámica de los contenidos y métodos de algunas disciplinas superiores, con finalidad orientadora.

2. Estudios humanísticos, nuevos para el alumno, pero ajenos, en general, a los que después cursará en la Universidad.

3. Revisión sistemática de las materias ya conocidas por los alumnos, aprovechando su mayor madurez.

4. Curso práctico de aplicación de conocimientos ya adquiridos (problemas, composiciones, ensayos, críticas, etc.).

5. Ensayo de introducción a las mismas materias fundamentales que después han de volver a estudiarse seriamente, para hacerlas familiares.

6. Curso de materias fundamentales, nuevas para el alumno, cuyo conocimiento se dará por supuesto al comenzar otros estudios.

Es utópico pensar que puede ser todas esas cosas a la vez; pero ni de la legislación relativa al C.O.U., ni de la relativa a las pruebas de acceso que tratan de evaluar su rendimiento, ni de los usos establecidos, es posible deducir cual de los mencionados pudo ser el objetivo seleccionado por los planificadores; los mismos delegados y coordinadores de cada Universidad muestran al respecto los más dispares pareceres; que yo sepa, nunca se ha tratado de abordar ese problema de base, mientras se han multiplicado las discusiones acerca de si un tipo de cuestionario era adecuado o no, cuando no se sabía a que objetivo debía de adecuarse.

A esa disparidad de criterios se une el hecho de que gran número de alumnos, a los que no se ha motivado para otra cosa mejor, tienen como único objetivo el de superar la prueba de selectividad, y asímismo el de muchos profesores es conseguir que la supere el mayor número posible de sus alumnos; todo lo cual no sería grave si la perfección técnica de las pruebas fuese tal, que la conducta encaminada a su superación coincidiese con la idónea para alcanzar los objetivos precisados, pero eso no suele ocurrir.

Con todo lo anterior queda bien sentada la ambigüedad del término "fracaso escolar"; no obstante, cuando se habla de él, lo más frecuente es referirse al hecho de que un elevado número de estudiantes que comienzan sus estudios universitarios, tras varios años de intentos fallidos, han de abandonarlos, sin obtener otro fruto que amargura y frustración, del esfuerzo realizado. Vamos a limitarnos al estudio de este fenómeno.

No incluiremos en este estudio a los casos, también numerosos, de alumnos que no llegan a realizar el esfuerzo que razonablemente cabe exigir, pues en ellos, más que fracaso escolar se da una simple equivocación en el acto de matricularse. Centraremos nuestra atención en el caso de aquellos que tampoco consiguen éxito escolar a pesar de realizar un gran esfuerzo. Limitar el estudio a este fenómeno equivale a señalar como objetivo la simple superación de las pruebas establecidas en las distintas asignaturas, confiando en que la experiencia y el buen sentido de los docentes habrá establecido esas pruebas de acuerdo con un sistema coherente de objetivos, aunque éstos no se hayan declarado explícitamente; es un análisis muy parcial, pero interesante siempre que no se olvide la limitación de su planteamiento.

Las causas de este fracaso escolar tan frecuente son sin duda complejas, pero cabe señalar algunas de sus componentes más importantes. Prescindiendo de las imputables a defectos individuales de algunos alumnos (falta de inteligencia, indolencia, errores vocacionales, etc.) que no deberían presentarse después

de un mínimo proceso de selectividad, las principales causas del fracaso escolar pueden clasificarse en la siguiente forma:

1) Falta de preparación de los alumnos.
2) Falta de motivación vocacional.
3) Interferencia de la función evaluadora en la docente.
4) Defectos de planificación de la enseñanza.
5) Defectos de realización de la función docente.

Las iremos examinando una por una: nos referiremos fundamentalmente a lo que ocurre con las Matemáticas, no sólo porque es el campo en el que tengo más experiencia, sino también porque es aquel en que da la mayor cantidad de los fracasos que tratamos de estudiar.

1. FALTA DE PREPARACION DE LOS ALUMNOS

Las deficiencias en la preparación obtenida en estudios anteriores se hacen especialmente sensibles en Matemáticas y Física; se trata de una falta de preparación que no puede subsanarse tan sólo con un aumento de intensidad en el estudio propio de las carreras universitarias, ya que no se trata de simples lagunas en un repertorio de conocimientos, sino en algo más difícil de adquirir en breve plazo; en el caso de las Matemáticas, las faltas más comunes son:

a) Falta de un cierto hábito para la utilización del lenguaje con una sintaxis algo más elaborada que la del habla común, exigida por el razonamiento lógico y las ciencias en general. El alumno encuentra dificultades para la interpretación (gramatical) de enunciados de problemas, definiciones, teo remas, etc., y frecuentemente intenta salvarlas con un estéril esfuerzo memorístico. Las dificultades en la expresión son todavía mayores cuando se requiere un mínimo de precisión.

b) Falta de soltura en la utilización de automatismos cuyo dominio se supone al principio de los estudios superiores, tales como el cálculo aritmético, algebraico y trigonométrico, áreas y volúmenes elementales, etc.

c) Falta de un repertorio de material intuitivo en que basar las abstracciones que necesariamente se han de introducir en los estudios superiores.

d) Falta de hábito de organizar eficientemente el aprendizaje (técnicas de estudio, confección de apuntes, claridad en la escritura matemática, autocorrección de errores, espíritu crítico, etc.).

Muchos alumnos emplean uno o dos años apenas en otra cosa que en subsanar alguna de esas deficiencias. La tardanza en descubrir el diagnóstico de su mal contribuye a alargar ese tiempo. Es frecuente que los que consiguen superar esas dificultades prosigan con brillantez el resto de la carrera. Otros no sólo no logran superarlo, sino que ni siquiera llegan a conocer claramente la causa de su fracaso.

2. FALTA DE MOTIVACION VOCACIONAL

La vocación de la mayor parte de los alumnos de los primeros cursos está todavía mal definida y asentada, cuando no violentada. Pero no presentaré como causa del fracaso la debilidad del impulso vocacional del estudiante, sino la inadecuación del sistema de enseñanza al cultivo y al fomento de esa vocación.

Los estudios de los primeros años de cualquier E.T.S. son una dura prueba para una incipiente vocación ingenieril; para el alumno es dificilísimo percibir la relación existente entre la mayor parte de las materias que se tratan en esos cursos, y las aplicaciones a que se dirige su vocación. Bien es verdad, que casi nadie se ocupa de explicarle tal relación; incluso muchos de los profesores especializados en las asignaturas básicas la desconocen. Por otra parte, es característico de las Matemáticas el que cuando se va construyendo una teoría que al final proporciona la solución de un importante problema aplicado, cada paso que se dé, no sugiere acercamiento alguno a la meta que al final se alcanza. Sólo al final sorprende el descubrimiento de la fecundidad de la teoría; pero la fé del alumno en el fruto que se le promete es muy débil, e inevitablemente piensa que podría entregársele directamente ese fruto, prescindiendo del esfuerzo de elaboración; es difícil convencerle de la limitación de ese modo de proceder, que les dejará incapacitados para abordar una situación distinta de la tratada a modo de ejemplo, en una época en que la rapidez del desarrollo tecnológico exige una preparación válida para afrontar problemas radicalmente distintos cada pocos años.

Se intenta exigir al alumno una confianza ilimitada en que sus profesores le conducirán por el camino que le conviene, con sólo seguir dócilmente sus consignas; creer en la eficacia de ese modo de proceder es desconocer por completo a nuestros jóvenes.

Anulada la motivación vocacional, queda sólo la motivación que ofrece el deseo de conseguir un título que se cree altamente valorado por la sociedad, y como consecuencia, se orienta la actividad casi exclusivamente a la superación de las pruebas; pero con eso entramos en otra componente de las causas del fracaso escolar.

3. INTERFERENCIA DE LA FUNCION EVALUADORA EN LA DOCENTE

Frente al descuido casi total del cultivo de las motivaciones vocacionales para el estudio, cada día se van intensificando más las motivaciones reducidas al deseo de superar las pruebas; éstas proliferan hasta absorber gran parte de la actividad de los centros docentes. La no superación de esas pruebas tiene efectos sociales fuertemente aversivos para el alumno y eso le invita a esforzarse en su preparación; las verdaderas metas del estudio se pierden, y las estrategias para obtener el éxito se extienden al minucioso estudio de la reglamentación de las evaluaciones, en busca de sus puntos débiles, e incluso de las posibilidades de fraude. Para muchos alumnos, la presión continuada de los exámenes, llenando de objetivos ficticios la labor de cada día, es más soportable que el vacío que supondría la ausencia de unos objetivos claros personalmente aceptados; así, ejercen rigurosa crítica sobre los detalles de la reglamentación de las pruebas, pero no llegan a plantearse un análisis de la misión que desempeña una tarea evaluadora tan intensa.

La conducta del alumno llega a estar totalmente condicionada por los procesos de evaluación; ello no sería necesariamente pernicioso, pues si las pruebas fuesen diseñadas con gran habilidad, podría ocurrir que la conducta que reforzasen en el alumno coincidiese con la deseable para alcanzar los objetivos educativos propuestos; harían falta verdaderos "ingenieros de conducta" para conseguirlo; lejos de eso, la mayor parte de los que reglamentan las pruebas, creen estar diseñando un aparato de medida, poniendo mucho interés en sus aspectos de precisión, repetibilidad, sensibilidad, justicia, etc., pero sin estudiar a fondo su repercusión como condicionante del comportamiento escolar.

Lo curioso es que la mayor parte de los que evaluamos, lo hacemos sin saber exactamente el objetivo cuya consecución se trata de evaluar, a menos que nos limitemos al objetivo parcial

y poco definido de "saber la asignatura". ¿Consiste una carrera universitaria en saberse un cierto número de asignaturas? Además el sistema predominantemente evaluador refuerza en el alumno ciertas conductas perniciosas:

- La asistencia a academias especializadas en la superación de las pruebas, sobrecargando el ya cargado horario de clases.
- La dedicación a "entrenamientos" en simulacros de evaluación.
- El estudio realizado en impulsos discontinuos, uno en cada víspera de evaluación.
- El ejercer presión sobre los docentes para reformar las reglamentaciones de pruebas y los programas, siempre desde el punto de vista de los resultados de los exámenes.

Lo inadecuado de esos planteamientos, conduce frecuentemente al fracaso, aun después de unos éxitos aparentes iniciales.

4. DEFECTOS DE PLANIFICACION DE LA ENSEÑANZA

Frente a las tres causas de fracaso citadas anteriormente, las que podrían atribuirse a unos planes de estudios inadecuados son menos importantes, precisamente porque en esos planes no suelen figurar explícitamente los objetivos perseguidos, ni el sistema docente que ha de emplearse; se reducen generalmente a la enumeración de materias sobre las que ha de versar la enseñanza, lo cual es un detalle técnico importante, pero no decisivo para la definición de la docencia. Un mismo objetivo educativo puede alcanzarse usando diferentes materias científicas en forma auxiliar, y asímismo una teoría científica pue de servir para actividades docentes muy diversas (hacer que se aprenda de memoria, ilustrarla experimentalmente, enseñar a valerse de ella, examinarla críticamente, etc.).

Es lamentable que cualquier insatisfacción sobre la marcha de una institución docente, se intente corregir siempre con un "plan nuevo" que se limita a cambiar los contenidos, dentro del mismo marco de imprecisiones de siempre. Si alguna parte de las causas de fracaso escolar se ha de buscar en los planes de estudio, aparte de su general vaguedad de objetivos, yo señalaría sólo dos aspectos negativos:

- El estar sobrecargados de contenidos, lo que impide concentrarse sobre cualquiera de ellos.
- El referirse casi siempre a lo que el alumno ha de "saber explicar", en lugar de referirse a lo que ha de "saber hacer".

5. DEFECTOS DE REALIZACION DE LA FUNCION DOCENTE

Claro está que la calidad del profesorado podría ser mejor de lo que es, y es socorrido atribuir los fracasos escolares a su mediocridad. También es fácil achacarlos a la "masificación", que impide que la buena calidad que se supone en el profesorado, no pueda rendir fruto. Pero el verdadero problema está en ver si con los medios disponibles podría mejorarse sustancialmente la enseñanza, sin perderse en utopías irrealizables.

Una mayor claridad en los objetivos perseguidos, unida a una planificación efectiva y a una labor de los Departamentos y Escuelas dedicada al perfecionamiento científico y didáctico de su propio personal, a conseguir una perfecta coordinación del mismo y a fomentar el trabajo en equipo y la auto-evaluación de resultados, permitiría mejorar altamente el rendimiento de los medios disponibles y contribuiría al progresivo desarrollo de éstos.

COMPUTACION PARALELA

Por Joaquín Gómez Rey
Catedrático del I.B. mixto de Aranjuez

INTRODUCCION

Entre las limitaciones que afectan a los procesos de cálculo, la más importante es la de la velocidad, aunque también lo es la relativa a la fiabilidad (posibilidad de cometer errores y esfuerzos requeridos para detectarlos y corregirlos). Fue la inadecuada velocidad de los seres humanos para llevar a cabo los cálculos que requerían los problemas, lo que condujo al desarrollo de técnicas para mecanizarlos o automatizarlos.

Los computadores convencionales presentan una limitación inherente a su arquitectura (o sistema de organización) que les permite tan solo llevar a cabo procesos de cálculo secuenciales. Los algoritmos y programas preparados para ellos han de tener en cuenta esa característica. Es evidente que el paralelismo, o posibilidad de ejecutar simultáneamente varios procesos, ha de repercutir favorablemente en la eficacia de la máquina.

La idea de paralelismo ya la consideró Charles Babbage, en sus discusiones acerca de la máquina analítica:

"D'ailleurs, lorsque l'on devra faire une longue série de calculs identiques, comme ceux qu'exige la formation de tables numeriques, on pourra mettre en jeu la machine de manière à donner plusieurs resultats à la fois, ce qui abrégera de beau coup l'ensemble des opérations".

La computación paralela está recibiendo cada vez más atención. En teoría, una colección de procesadores que trabajan en paralelo puede obtener velocidades bastante más rápidas, que un solo procesador secuencial.

En la práctica los desarrollos tecnológicos están permitiendo la construcción de tales máquinas a bajo costo.

Dadas las inherentes limitaciones de los computadores secuenciales tradicionales, surge el estímulo de los investigadores interesados en el diseño de computadores y algoritmos paralelos.

MODELOS DE COMPUTADORES

Según el esquema de clasificación de Flynn, se introducen cuatro clases de computadores paralelos:

1) SISD (single, instruction stream - single data stream): Una instrucción se ejecuta cada vez, sobre unos únicos datos. Por ejemplo a+b.

2) SIMD (simple instruction stream - multiple data stream): Un tipo de instrucción se ejecuta a la vez, sobre diferentes datos. Por ejemplo a+b y c+d.

   Se les llama también vector de procesadores. Un ejemplo es el ILLIAC IV.

3) MISD (multiple instruction stream - single data stream): Diferentes instrucciones se pueden ejecutar a la vez sobre los mismos datos. Por ejemplo, a+b y a-b.

4) MIMD (multiple instruction stream - multiple data stream): Diferentes instrucciones se pueden ejecutar a la vez sobre datos diferentes. Por ejemplo a+b y c-d.

   Se les llama también multiprocesadores. Un ejemplo es el C.mmp.

De entre los 4 modelos anteriores sobresalen los MIMD y los SIMD.

COMPUTADORES SIMD

Son un ejemplo de eliminación de redundancias; los ahorros obvios están en la memoria de programa, en las instrucciones y en el código, porque hay una única copia de estos componentes.

La topología de sus estructuras consiste en p elementos idénticos de proceso (PEs), que tienen acceso a una memoria común principal, que contiene las instrucciones del programa.

i) Los PEs están indexados con 0, 1,..., p-1 y cada PE puede ser referenciado por una instrucción del programa, mediante PE(i). Cada PE es capaz de ejecutar la aritmética estándar y las operaciones lógicas. Además cada PE se identifica por su índice.

ii) Cada PE tiene su propia memoria local.

iii) Los PEs están sincronizados y ejecutan sus instrucciones simultáneamente, bajo el control de una única instrucción "stream", emitida desde la unidad de control (o procesador principal). Todos los PEs ejecutan la misma instrucción, pero operan sobre los datos almacenados en sus memorias respectivas.

iv) Para seleccionar un subconjunto de los PEs que van a ejecutar una instrucción, pueden ser usadas máscaras de activar-desactivar. Unicamente los PEs activos ejecutan la instrucción, todos ellos la misma. Los restantes PEs, inactivos, no harán nada. El subconjunto de PEs activos puede cambiar de instrucción en instrucción.

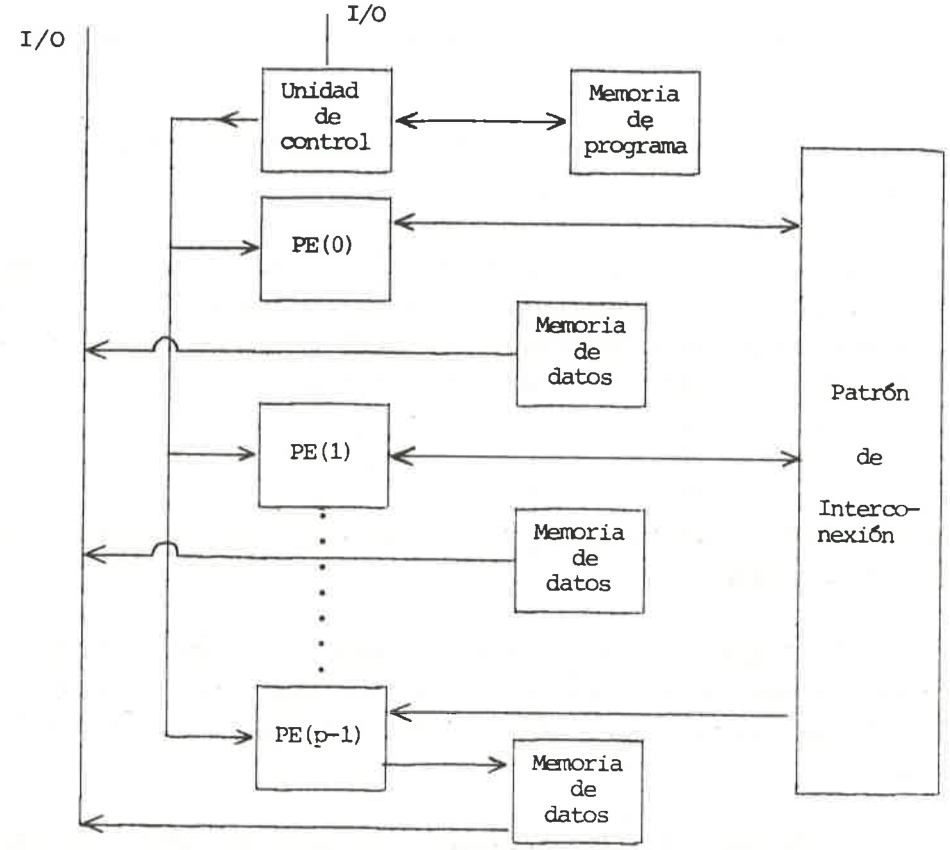
Dentro de los modelos SIMD, distinguimos entre los SMM (shared memory model) y los restantes modelos. En los SMM, modelos de memoria compartida, hay una memoria común disponible para todos los PE. Los datos se pueden transmitir de PE(i) a PE(j) simplemente haciendo que PE(i) escriba los datos en la memoria común y que PE(j) los lea. No está permitido a dos PEs escribir dentro de la misma palabra de la memoria común simultáneamente. Los PEs pueden o no leer al mismo tiempo la misma palabra de la memoria común; en caso afirmativo se dice que están permitidos conflictos de lectura.

Los restantes modelos no tienen memoria compartida y emplean un patrón de interconexión entre los PEs. Los PEs sólo pueden comunicarse entre ellos por medio de este patrón, según el diagrama de la página siguiente.

Entre los ejemplos más notables de estrategias de interconexión citaremos los denominados:

1) MCC (Mesh conected computer.
2) CCC (Cube connected computer).
3) PSC (Perfect shuffle computer).

En el proceso de datos en paralelo, las interconexiones de registros y unidades de proceso, afectan a la velocidad computacional.



ALGORITMOS PARALELOS

Los algoritmos se pueden clasificar según diversos criterios: algebraicos o analíticos, finitos o infinitos, exactos o aproximados.

Consideraremos ahora otra clasificación importante: secuenciales y paralelos.

En los algoritmos secuenciales hay a menudo un compromiso entre tiempo y espacio. En los algoritmos paralelos hay similarmente un compromiso entre tiempo y número de procesadores usados.

Damos a continuación algunos ejemplos (en los que denotamos con $\lceil x \rceil$ el entero k que cumple $k-1 < x \leq k$):

Ejemplo 1.- El cómputo de $\sum_{i=1}^{N} a_i$, requiere N-1 sumas en un algoritmo secuencial; sin embargo, si se utiliza un potente método de doble recursividad (un caso especial de divide y vencerás), que en símbolos resumiríamos mediante

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + \left(\sum_{i=n}^{N} a_i\right), \quad n = \lceil N/2 \rceil$$

al trabajar en paralelo, con N PEs, el algoritmo requiere tan sólo $\lceil \log N \rceil$ pasos.

Ejemplo 2.- El cómputo del producto escalar de dos vectores N-dimensionales, requiere N multiplicaciones y N-1 sumas. Sin embargo en paralelo, usando N PEs, requiere $1 + \lceil \log N \rceil$ pasos.

Ejemplo 3.- El problema de la mochila: Dados N números naturales $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ y un número natural S, encontrar una solución binaria $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $x_i \in (0,1)$ para la ecuación

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = S$$

Para N = 100 un rápido computador secuencial tardaría más de 35 años, pero con un computador paralelo, el tiempo puede reducirse sustancialmente (dependiendo del número de PEs disponibles).

LA TECNOLOGIA DEL VLSI

La tecnología del VLSI (very large scale integration) ¿está a favor del paralelismo? Veamos los beneficios que ofrece y las limitaciones que impone.

Ventajas:

1) Economía.- Los chips son baratos. La labor de fabricar un chip, no depende del número de transistores usados (como el costo de imprimir una página, tampoco depende del número de palabras que contiene).

2) Alta integración.- El material semiconductor es usado en el diseño del chip microprocesador, tanto para los circuitos aritméticos como para la memoria para registros y las interconexiones.

3) Densidad.- La alta densidad es aprovechada en reducir el tamaño de los chips, reduciendo el de los transistores y la anchura de las conexiones. Pero ello permite también aumentar el número de transistores y el número de puertas sobre un chip.

Inconvenientes:

1) Regularidad.- Las máscaras son diseñadas por artesanos y su producción es cara, especialmente en términos de tiempo. El costo del diseño es amortizado sobre las unidades producidas. En consecuencia el tiempo empleado y el costo aumentan con el número de chips diferentes usados.

La estrategia tecnológica adecuada consiste en desarrollar un diseño general que pueda ser especializado a diversos usos.

2) Planaridad.- La limitación más importante, es su carácter bidimensional, ya que los chips están situados sobre láminas.

Es importante preguntarse: ¿Por qué no tridimensional? Se están desarrollando experimentalmente pero incluso si llegan a ser una realidad, el problema radica, no en el hecho de que el límite es dos, sino en que hay un número limitado de dimensiones. A lo más que podemos aspirar es a pasar de la limitación de la planaridad a la limitación de las tres dimensiones.

EL FUTURO

En los últimos años (quizás únicamente en la última década), ha habido un cambio significativo hacia el paralelismo, pero tan sólo en ciertas aplicaciones especiales.

El hardware necesario ha sido demasiado caro y la complejidad asociada con el paralelismo, comenzando por los algoritmos e incluyendo los lenguajes de programación, ha sido considerable.

Actualmente, los costes de hardware han bajado mucho, pues la fabricación de unidades similares, que es bastante utilizada en muchas clases de paralelismo, ha resultado fácil con la llegada de la tecnología del VLSI.

A la vez hay una experiencia creciente de algoritmos y software sobre la que se apoya la computación concurrente.

Mirando al futuro, parece que estamos en fase de transición de los sistemas secuenciales a los paralelos y que al final de este período, la computación paralela tendrá tanta importancia como ahora la computación secuencial.

RESEÑA DE LIBROS

"CONTRIBUCIONES MATEMATICAS".- Estudios en honor del profesor D. FRANCISCO BOTELLA RADUAN, Edit. Univ. Complutense de Madrid, 1986, 250 págs.

Se han oído recientemente muchas voces, y con frecuencia voces de alarma, sobre las jubilaciones casi masivas que en estos últimos años se están produciendo en la Universidad. Efectivamente, la primera línea de nuestro profesorado estaba formada por aquella generación que accedió a la cátedra universitaria tras el paréntesis de la guerra y primeros años siguientes. A ella correspondió la ingente labor de reconstruir la Universidad casi desde la nada y en verdad que, contra lo que ahora se quiere decir, supo cumplir brillantemente su misión.

Los que entonces éramos alumnos podemos hablar de las penurias con que trabajábamos, de las dificultades que para formarnos tuvieron que vencer nuestros maestros y de cómo sólo su entusiasmo y nuestra fé pudieron lograrlo. La Universidad que hemos tenido, con todos sus grandes valores, a pesar de sus defectos, es obra de quiénes se entregaron generosamente a ella, cuántas veces por encima de sus estrictas obligaciones.

A ese bloque de maestros le ha llegado la edad de su retirada. Si a ello se añade la jubilación anticipada impuesta a otros muchos, no es raro que las cifras indicativas de la descapitalización que estamos sufriendo en el más alto magisterio hayan suscitado el temor de quienes contemplan la situación educativa actual. Paralelamente se han prodigado escritos laudatorios sobre muchos de ellos, han recibido otros disintos homenajes, sociales o íntimos, y algunos, finalmente, se han limitado a retirarse en silencio sin aceptar ninguna expresión de reconocimiento y menos de loa.

El afecto y gratitud hacia uno de ellos, D. Francisco Botella Raduán, ha llevado a un grupo de sus discípulos a preparar un libro que recoge trabajos de investigación especialmente destinados a esta celebración y escritos por sus compañeros, amigos, colaboradores, alumnos y discípulos y miembros del Departamento de Topología y Geometría de la Universidad Complutense al que perteneció el homenajeado hasta su jubilación.

Seguramente todos los lectores han conocido al Prof. Botella, catedrático de Geometría en Barcelona y luego en Madrid, y no pocos habrán recibido sus lecciones. Su foco de interés lo constituyó la Topología, rama sólo aludida anteriormente en casos esporádicos pero sin duda no cultivada en España hasta que él la convirtió en su centro de atención. Consiguió atraer y encauzar a algunos de sus primeros alumnos que empezaron a desarrollar una destacada producción y a constituir la primera escuela de topólogos, hoy ya muy extendida y en expansión. Estos estudios pueden parecer hoy un lugar común pero probablemente muchos no saben que en sus inicios está la pequeña llama que D. Francisco Botella supo silenciosamente encender. Junto a ello, sus dotes humanas, la dedicación ejemplar a su ministerio sacerdotal y sus atenciones a todos componen una biografía que este libro ha querido justamente ensalzar.

Comienza con una semblanza suya, más bien un acopio de remembranzas, de su primer discípulo, el Prof. D. Antonio Plans, hoy catedrático de la Facultad de Ciencias de Zaragoza. Los restantes artículos, que los autores dedican al homenajeado, son de investigación muy especializada, por lo que nos limitamos a enunciar sus títulos.

- A.M. Amores.- "Una demostración del teorema de Darboux".

- R. Barbolla.- "Selecciones uniformemente continuas en espacios uniformes de dimensión cero".
- E. Bujalance, J.J. Etayo y J.M. Gamboa.- "Grupos de automorfismos de superficies de Klein sin involuciones".
- A. Costa.- "Sobre algunas propiedades de cubiertas ramificadas de espacios topológicos".
- Carolina Cuartero y J. Etayo Miqueo.- "Conexiones en el fibrado de las referencias proyectivas".
- V. Chumillas.- "Las jugadas racionales con p colores dependen de las de numerador p".
- J. Fontanillas.- "Una demostración elemental del teorema de De Rham".
- A. Gª López y B.R. Salinas.- "Sobre algunas propiedades de espacios de funciones con valores vectoriales".
- J. Lafuente y L. Villareal.- "Inversiones en espacios afines métricos no degenerados".
- V.F. Laguna y J.M.R. Sanjurjo.- "Retractos aproximativos y teoría de la forma".
- M.T. Lozano y C. Safont.- "Sobre cubiertas localmente cíclicas".
- J. Margalef y E. Outerelo.- "Función implícita en variedades con borde anguloso. Inmersión de una variedad compacta en R^{2n+1}.
- E. Martínez.- "Algunas propiedades de regiones fundamentales convexas de Wilkie de grupos N.E.C.".
- J.M. Montesinos.- "Sobre 3-variedades que tienen fibrados de superficies como cubiertas ramificadas".

- A. Plans y E. Martín.- "Sistemas L de rayos y sumabilidad".
- J. Tarrés.- "Espacios M-conexos y M- dimensión".
- J.L. Viviente.- "Estructura cociente e invariantes básicos.

H.

AVENTURAS MATEMATICAS, por Miguel de Guzmán. Ed. Labor, Barcelona, 1986. 163 págs.

Estamos en presencia de una obra en verdad interesante, al menos ésta es mi opinión. No sólo por su contenido, también por la belleza de la exposición. El profesor y académico, don Miguel de Guzmán, bien conocido en los medios matemáticos internacionales por sus originales aportaciones en las investigaciones del Análisis Matemático, posee también un saber enciclopédico en los campos de la Historia y la Filosofía. Es además de un gran didacta de la matemática en todos los niveles, un entusiasta, como lo han sido tantos matemáticos, antiguos y modernos, de los juegos, porque un juego con reglas es, en efecto, un juego matemático, ya que participa del carácter esencial de la matemática como forma especial del pensamiento.

Como continuación del anterior CUENTOS CON CUENTAS, nos ofrece ahora otro delicioso, en la misma línea. Bellamente escrito, en estilo directo, lleva el sugestivo título de AVENTURAS MATEMATICAS, y, en efecto, trata y consigue embarcar al lector en "*sus historias policiacas en las que tú mismo vas a ser el detective*", participando activamente en la búsqueda de la solución de un problema curioso planteado a manera de desafío a su imaginación, en descifrar un enigma, explicar una paradoja, descubrir la estrategia óptima para vencer en un juego. En suma, despertar en el lector el deseo de resolver por sí mismo, ilusionadamente, la verdad de una situación enigmática. Es precisamente el espíritu de curiosidad por saber el por qué, la razón de ser de que las cosas sean así y no de otra manera, el origen de la Ciencia. Hay, como se sabe, problemas en la Historia de la Matemática, unos antiguos, otros recientes, resueltos ya algunos, otros en lista de espera (los llamados problemas abiertos), y no faltan los declarados indecidibles, pero todos han sido, los resueltos y los todavía sin solución, motivos de creación y desarrollo de fecundas teorías, en ocasiones inesperadas. En todo caso, los jóvenes que dediquen parte de su tiempo, en sentido **lúdico**, enfrentándose con problemas, trabajan-do con interés y con placer, jamás habrán perdido su tiempo, con independencia de haber llegado o no a la solución del caso. Dice Guzmán muy gráficamente que si un alumnto sabe hacer bien cuatro cosas, y las hace, habrá realizado CUATRO cosas buenas. Pero si sabe que fallará en el 40% de las veces, y a pesar de ello va adelante y hace veinte cosas hará DOCE cosas bien. Hay que perder, pues, el miedo a equivocarse. La diferencia que hay entre un listo y un tonto -se ha dicho- es que los dos cometen tonterías, pero el listo se da cuenta. El trabajo, la perseverancia, la observación, el análisis de los errores... es lo que proporciona la experiencia necesaria para dominar las situaciones. También se sabe que los pueblos florecientes son aquellos en que sus ciudadanos aman intensamente el trabajo que realizan. Quizá también sea en este amor donde radique en buena parte la propia felicidad individual. En el libro de Guzmán yo quiero ver este propósito: hacer más felices a los alumnos que estudian las matemáticas, a la vez que trata de fomentar esta actividad en mayor número de ellos.

No vamos a detallar los títulos y contenidos de los 13 capítulos del libro. Todos ellos son sugerentes y persiguen el mismo objetivo. Objetivo que viene explicitado en el llamado capítulo 0, y del que el autor dice con humor: "*Este capítulo es muy importante... pero no hace falta que lo leas*". Y tiene razón. Es el más importante de todos, pero nada sacará de él el que se limite a leerlo. Señala aquí el autor los fines que espera lograr del alumno, en la formación de hábitos de trabajo, y éstos sólo se conseguirán haciendo lo que le propone o sugiere en los capítulos siguientes. Merece la pena recoger en esta reseña la síntesis de este capítulo 0, como ejemplo de normas didácticas estimulantes de la actividad del alumno en el aprendizaje.

A. ANTES DE HACER, TRATA DE ENTENDER

B. EN BUSCA DE ESTRATEGIAS

B.1 Busca semejanzas con otros juegos y problemas.

B.2 Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil.

B.3 Experimenta y busca regularidades, pautas.

B.4 Hazte un esquema y si se tercia... píntalo en colores.

B.5 Modifica el problema, cambia en algo el enunciado, para ver si se te ocurre así un posible camino.

B.6 Escoge una buena notación.

B.7 Explota la simetría... si puedes.

B.8 Supongamos que no... ¿a dónde nos lleva?

B.9 Supongamos el problema resuelto.

B.10 Piensa en técnicas generales: inducción, descenso, proceso diagonal, principio del palomar....

C. LLEVA ADELANTE TU ESTRATEGIA

C.1 Lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la etapa B. Una a una. No las mezcles en principio.

C.2 No te arruges fácilmente. Pero tampoco te emperres demasiado con una sola idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía.

C.3 ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.

D. SACA JUGO AL JUEGO Y A TU EXPERIENCIA

D.1 Examina a fondo el camino que has seguido tú. ¿Cómo has llegado a la solución? ¿O, por qué no has llegado a la solución?

D.2 Trata de entender no sólo que la cosa efectivamente marcha, sino también por qué tiene que marchar así.

D.3 Mira ahora a ver si se te ocurre hacerlo de modo más simple.

D.4 Mira hasta dónde da de sí el método que has seguido para ver si lo puedes usar en otras circunstancias.

D.5 Reflexiona un poco sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

El autor dedica el libro a médicos y enfermeras que le atendieron solícitamente en una enfermedad, "feliz" circunstancia que le permitió escribir tan sugestiva obra. También a mí me ha servido su lectura para olvidarme un poco de determinada dolencia. "*Estar enfermo una temporada puede no ser tan malo*", escribe Guzmán en aroma de trascendencia.

Resaltemos, por último, un sustancioso prólogo, una extensa bibliografía, un índice de nombres, unas simpáticas viñetas de Miguel, hijo, así como una muy cuidada impresión de la obra.

J.R.P.I.

PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA II OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA CELEBRADA EN URUGUAY EN ENERO DE 1987 :

PROBLEMA 1° :

Halle las $f(x)$ tales que $\left[f(x)\right]^2 . f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$ para todo $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.

PROBLEMA 2° :

En un triángulo ABC , M y N son los puntos medios respectivos de los lados AC y AB , y P es el punto de intersección de BM y CN . Demuestre que, si es posible inscribir una circunferencia en el cuadrilátero ANPM , entonces el triángulo ABC es isósceles.

PROBLEMA 3° :

Pruebe que si m , n , r son enteros positivos, no nulos, y $1 + m + n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{2r-1}$, entonces m es un cuadrado perfecto.

PROBLEMA 4° :

Se define la sucesión p_n de la siguiente manera: $p_1 = 2$, y para todo n mayor o igual que 2 , p_n es el mayor divisor primo de la expresión

$$p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-1} + 1 \ .$$

Pruebe que p_n es diferente de 5 .

PROBLEMA 5° :

Si r , s , t son las raices de la ecuación

$$x(x - 2)(3x - 7) = 2 \quad :$$

a) Demuestre que r , s , t son positivas.

b) Calcule $\operatorname{arc\,tg} r + \operatorname{arc\,tg} s + \operatorname{arc\,tg} t$.

(Nota: Se denota con $\operatorname{arc\,tg} x$ al arco comprendido entre 0 y π cuya tangente es x .)

PROBLEMA 6° :

Sea $ABCD$ un cuadrilátero plano convexo; P y Q son puntos de AD y BC respectivamente tales que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{DC} = \frac{BQ}{QC} \quad .$$

Demuestre que los ángulos que forma la recta PQ con las rectas AB y DC son iguales.

ALGUNOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA PRIMERA FASE DE LA XXIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA, EN EL DISTRITO UNIVERSITARIO DE EXTREMADURA:

PROBLEMA 7°

Sean a , b , c números reales tales que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad .$$

Demostrar que

$$-\frac{1}{2} \leqslant ab + bc + ca \leqslant 1$$

- - -

PROBLEMA 8°

Determinar los números a , b y c para que la ecuación

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

tenga como soluciones a dichos tres números.

- - -

PROBLEMA 9°

Descomponer el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en infinitos subconjuntos disjuntos dos a dos, tales que cada uno de esos subconjuntos tenga, a su vez, infinitos elementos.

- - -

PROBLEMA 10°

Dados 100 puntos del plano tales que tres cualesquiera de ellos no estan alineados, se consideran todos los triángulos que tienen vértices en tales puntos. Demostrar que no más del 70 % de dichos triángulos son acutángulos (tienen sus tres ángulos agudos).

- - -

En la redacción de este Boletín, todavía no se han recibido soluciones a los siguientes problemas propuestos en números anteriores:

- Problema n° 6 del Boletín n° 4.
- Problema n° 3 del Boletín n° 6 (ver corregido el enunciado de éste en el n° 8)
- Problemas n° 3 y n° 4 del Boletín n° 7.
- Problema n° 3 del Boletín n° 8.
- Problemas n^{os} 1 al 8 y 10 del Boletín n° 9.
- Problemas n^{os} 1 al 9 del Boletín n° 10.
- Problemas n^{os} 1 al 9, 11, 12 y 14 del Boletín n° 11.

Esperamos que esta nota anime a nuestros compañeros a encontrar estas soluciones y que nos las remitan para su publicación en los próximos números.

CORRIGENDA

Como el buen sentido de nuestros lectores habrá subsanado, en el enunciado del Problema n° 4 del Boletín n° 9 (pág. 76) donde dice $\bar{x} = \frac{x_1 - x_2}{2}$ debe decir $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 3° DEL BOLETIN N° 5 :

Se da un prisma cuyas bases son los pentágonos $A_1A_2A_3A_4A_5$ y $B_1B_2B_3B_4B_5$. Cada lado de esos pentágonos y cada uno de los segmentos rectilíneos A_iB_j , para todos los i , $j = 1, 2, \ldots, 5$ recibe uno de los colores rojo o verde. Todos los triángulos cuyos vértices son vértices del prisma y cuyos lados han sido coloreados, tienen dos lados de diferente color. Demostrar que los diez lados de las bases tienen el mismo color.

Solución :

Expresaremos que la arista básica A_iA_j $(i=j\pm 1)$ es roja mediante la notación R^{ij} o que es verde mediante la V^{ij} ; análogamente expresaremos que la arista B_iB_j es roja o verde mediante R_{ij} o V_{ij} respectivamente. Expresaremos que el segmento rectilíneo A_iB_j es rojo mediante R^i_j y que es verde mediante V^i_j . Para expresar el razonamiento de que, al ser dos lados del mismo color, el otro ha de ser del color contrario, para que se cumpla la condición del enunciado, emplearemos notaciones tales como $R^i_jR_{jk} \rightarrow V^i_k$, $V^i_jV^{ik} \rightarrow R^k_j$, $R^i_jR^i_k \rightarrow V_{jk}$, etc.

Se pueden probar tres lemas, supuesto que en el coloreado se cumplen las condiciones del enunciado:

LEMA I : Si una base tiene 4 lados de un color, no pude haber un lado del otro color en la otra base.

En efecto, supuesto que son rojos cuatro de la base inferior y numerando convenientemente los vértices, sea V^{12}, R_{12}, R_{23}, R_{34}, R_{45} . Entonces:

$$R^1_3R_{23} \rightarrow V^1_2 \ , \ V^1_2V^{12} \rightarrow R^2_2 \ , \ R^2_2R_{12} \rightarrow V^2_1 \ , \ V^2_1V^{12} \rightarrow R^1_1$$

por otra parte,

$$R^1_3R_{34} \rightarrow V^1_4 \ , \ V^1_4V^{12} \rightarrow R^2_4 \ , \ R^2_4R_{45} \rightarrow V^2_5 \ , \ V^2_5V^{12} \rightarrow R^1_5$$

y en consecuencia, $R^1_1R^1_5 \rightarrow V_{15}$ pero $V^2_1V^2_5 \rightarrow R_{15}$, lo que es una contradicción.

LEMA II : Si una base tiene 3 lados consecutivos de un color, la otra no puede tener dos consecutivos del color contrario.

En efecto, sea (con una numeración conveniente) R_{12}, R_{23}, R_{34}, V^{12}, V^{23}. Por el lema I, ha de ser V_{15} y V_{54} (pues de lo contrario habría 4 rojas en la base inferior y alguna verde en la superior). Además, también por el lema I, ha de ser R^{34} o bien R^{51} (pues de lo contrario habría 4 verdes en la superior y alguna roja en la inferior). Sea, por ejemplo R^{34} (si en su lugar fuese R^{51}, bastaría una renumeración para pasar al caso considerado). Se parte así de la hipótesis $R_{12}R_{23}R_{34}V_{45}V_{15}V^{12}V^{23}R^{34}$. Hagamos la hipótesis de trabajo adicional V_3^2. Entonces:

$V_3^2V^{12} \to R_3^1$, $R_3^1R_{23} \to V_2^1$, $V_2^1V^{12} \to R_2^2$, $R_2^2R_{21} \to V_1^2$, $V_1^2V^{23} \to R_1^3$;

por otro lado,

$V_3^2V^{23} \to R_3^3$, $R_3^3R_{34} \to V_4^3$, $V_4^3V_{45} \to R_5^3$, $R_5^3R^{34} \to V_5^4$, $V_5^4V_{15} \to R_1^4$;

se llega así al triángulo $R_5^3R_5^4R^{34}$ con sus tres lados rojos, por lo que debe rechazarse esa hipótesis. La contraria es R_3^2 y así:

$R_3^2R_{34} \to V_4^2$, $V_4^2V^{23} \to R_4^3$, $R_4^3R^{34} \to V_4^4$, $V_4^4V_{45} \to R_5^4$;

por otro lado,

$R_3^2R_{23} \to V_2^2$, $V_2^2V^{23} \to R_2^3$, $R_2^3R_{12} \to V_1^3$, $V_1^3V_{15} \to R_5^3$;

se llega así al triángulo $R^4R^3R^{34}$ con sus tres lados rojos, con lo que queda probado el lema.

LEMA III : En una base no puede haber 4 lados consecutivos que sean alternativamente rojos y verdes.

En efecto, en la otra habría dos consecutivos del mismo color; por el lema I, no puede haber cuatro, luego habrá uno de color contrario, consecutivo a esos dos; numerando convenientemente los vértices e intercambiando los colores, si es preciso, la situación es: $V_{12}R_{23}V_{34}R_{45}V^{12}R^{23}R^{34}$. Hagamos la hipótesis de trabajo V_2^2 ; entonces:

$V_2^2V_{12} \to R_1^2$, $R_1^2R^{23} \to V_1^3$, $V_1^3V_{12} \to R_2^3$, $R_2^3R_{23} \to V_3^3$, $V_3^3V_{34} \to R_4^3$, $R_4^3R_{45} \to V_5^3$, $V_5^3V_1^3 \to R_{51}$; por otro lado:

$V_2^2V^{12} \to R_2^1$, $R_2^1R_{23} \to V_3^1$, $V_3^1V_{34} \to R_4^1$, $R_4^1R_{45} \to V_5^1$, $V_5^1V^{12} \to R_5^2$, $R_5^2R_1^2 \to V_{51}$, en contradicción con el resultado anterior, R_{51}.

En la hipótesis alternativa a la V_2^2 , o sea en la R_2^2 , se tiene:

$R_2^2R_{23} \to V_3^2$, $V_3^2V_{34} \to R_4^2$, $R_4^2R_{45} \to V_5^2$, $V_5^2V^{12} \to R_5^1$, $V_5^2V_1^2 \to R_{51}$;

por otro lado, $R_2^2R^{23} \to V_2^3$, $V_2^3V_{12} \to R_1^3$, $R_1^3R^{23} \to V_1^2$, $V_1^2V^{12} \to R_1^1$

tendríamos así $R_5^1\ R_1^1\ R_{51}$, un triángulo con sus tres lados rojos.

Veamos ahora que, por aplicación de los tres lemas, resulta probado lo deseado:

Si una base tiene 4 lados de un color, por ejemplo rojo, por el lema I, la otra los tendrá todos rojos, y nuevamente por el lema I, el quinto de la primera será también rojo; los sagmentos A_iB_j serán todos verdes y se cumplirán las exigencias; lo mismo permutando los colores.

Si una base no tiene más de tres lados de un color (caso contrario al considerado antes) solo puden ocurrir dos casos:

a) que tenga 4 de ellos alternativamente rojos y verdes;

b) que tenga tres consecutivos de un color y dos consecutivos del otro;

En el caso a) no pueden cumplirse las condiciones, por el lema III.

En el caso b) sean, por ejemplo, rojos los tres consecutivos; por el lema II, la otra base no podrá tener dos consecutivos verdes; no podría tener 4 rojos, por el lema I; luego tendría tres rojos no consecutivos y dos verdes no consecutivos; pero entonces tendría 4 de colores alternativos, en contra del lema III.

Queda así probado que la única posibilidad es la que señala el enunciado.

Argearge

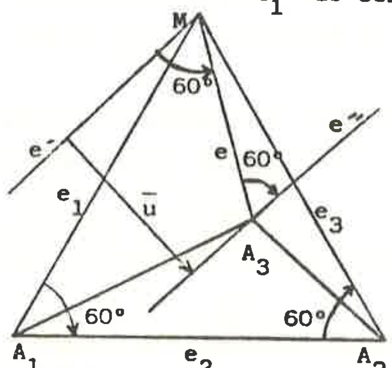
(se invita a nuestros socios a que encuentren otra solución obtenida menos penosamente, que publicaríamos en otro número del Boletín).

PROBLEMA 10° DEL BOLETIN N° 11 :

Dado un triángulo $A_1A_2A_3$ y un punto P_o en el plano, se define $A_s = A_{s-3}$ para todo $s \geq 4$. Construimos una sucesión de puntos P_o, P_1, P_2, ... tal que P_{k+1} $(k = 0,1,2,\ldots)$ es la imagen de P_k por una rotación de centro A_{k+1} y de ángulo 120° en sentido horario. Demuestre que si $P_{1986} = P_o$, entonces el triángulo $A_1A_2A_3$ es equilátero.

Solución :

La rotación G_1 de centro en A_1 y 120° en sentido horario es el producto $S_2.S_1$ de las simetrías de ejes e_1 y e_2, y la rotación G_2 de centro A_2 y 120° es el producto $S_3.S_2$ de las simetrías de ejes e_2 y e_3 (ver figura). Por tanto, $G_2.G_1 = S_3.S_2.S_2.S_1 = S_3.S_1 = S_e.S_{e'}$, siendo e la recta A_3M y e´ la que pasa por M y forma con e_1 60°, tal como se indica en la figura.



La rotación G_3 de centro en A_3 y 120° es igual al producto $S_{e''}.S_e$ de las simetrías de ejes e y e´´, en donde e´´ es la paralela a e´ por A_3. Por tanto, $G_3.G_2.G_1 = S_{e''}.S_e.S_e.S_{e'} = S_{e''}.S_{e'} = T_{2\bar{u}}$, siendo $T_{2\bar{u}}$ la traslación le vector $2\bar{u}$ y $\bar{u}$ el vector de la traslación que transforma e´ en e´´. Puesto que $1986 = 3 \times 662 \doteq 3$, resulta que si fuese $A_3 \neq M$, sería P_{1986} el transformado de P_o por un producto de 662 factores iguales la traslación $T_{2\bar{u}}$ y, puesto que una traslación no tiene puntos invariantes, sería $P_{1986} \neq P_o$. En consecuencia, A_3 coincide con M y el triángulo es equilátero.

Francisco Lorenzo Miranda

PROBLEMA N° 13 DEL BOLETIN N° 11 :

Hallar todas las funciones f definidas del conjunto de los números reales no negativos en sí mismo que satisfagan las tres propiedades siguientes:

i $\quad f[x\,f(y)] . f(y) = f(x+y)$ para todo $x, y \geq 0$.

ii $\quad f(2) = 0$.

iii $\quad f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$.

Solución :

Poniendo en (i) $x = t \in R^+$, $y = 2$ y teniendo en cuenta la condición (ii) resulta

$$0 = f(t+2) \quad \text{para} \quad t \geq 0 \qquad (1)$$

Haciendo en (i) $x = 0$, $y = 1$, se obtiene

$$f(0) = 1 \qquad (2)$$

ya que $f(1) \neq 0$ en virtud de (iii) .

Para $x = 1$, $y = 1$, se deduce $f(f(1)).f(1) = f(2) = 0$, de donde $f(f(1)) = 0$; luego, según (1) y (iii), es

$$f(1) = k \geq 2 \qquad (3)$$

Sea ahora $0 \leq y < 2$, $x = k - y$. De (i) resulta $f[(k-y).f(y)].f(y) = f(k) = 0$, y puesto que $f(y) \neq 0$, se tiene, según (1) : $(k-y).f(y) = h \geq 2$, o sea $f(y) = \dfrac{h}{k-y}$ de donde, por (2) : $f(0) = 1 = \dfrac{h}{k}$, luego $h = k$ y por tanto, $f(y) = \dfrac{k}{k-y}$.

Pero $f(1) = k = \dfrac{k}{k-1}$, por lo que $k = 2$. La función f, única que cumple las condiciones (i), (ii), (iii), está definida en consecuencia por

$$f(x) = \frac{2}{2-x} \quad \text{para todo } x \text{ tal que } 0 \leq x < 2$$

$$f(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \geq 2 .$$

Francisco Lorenzo Miranda