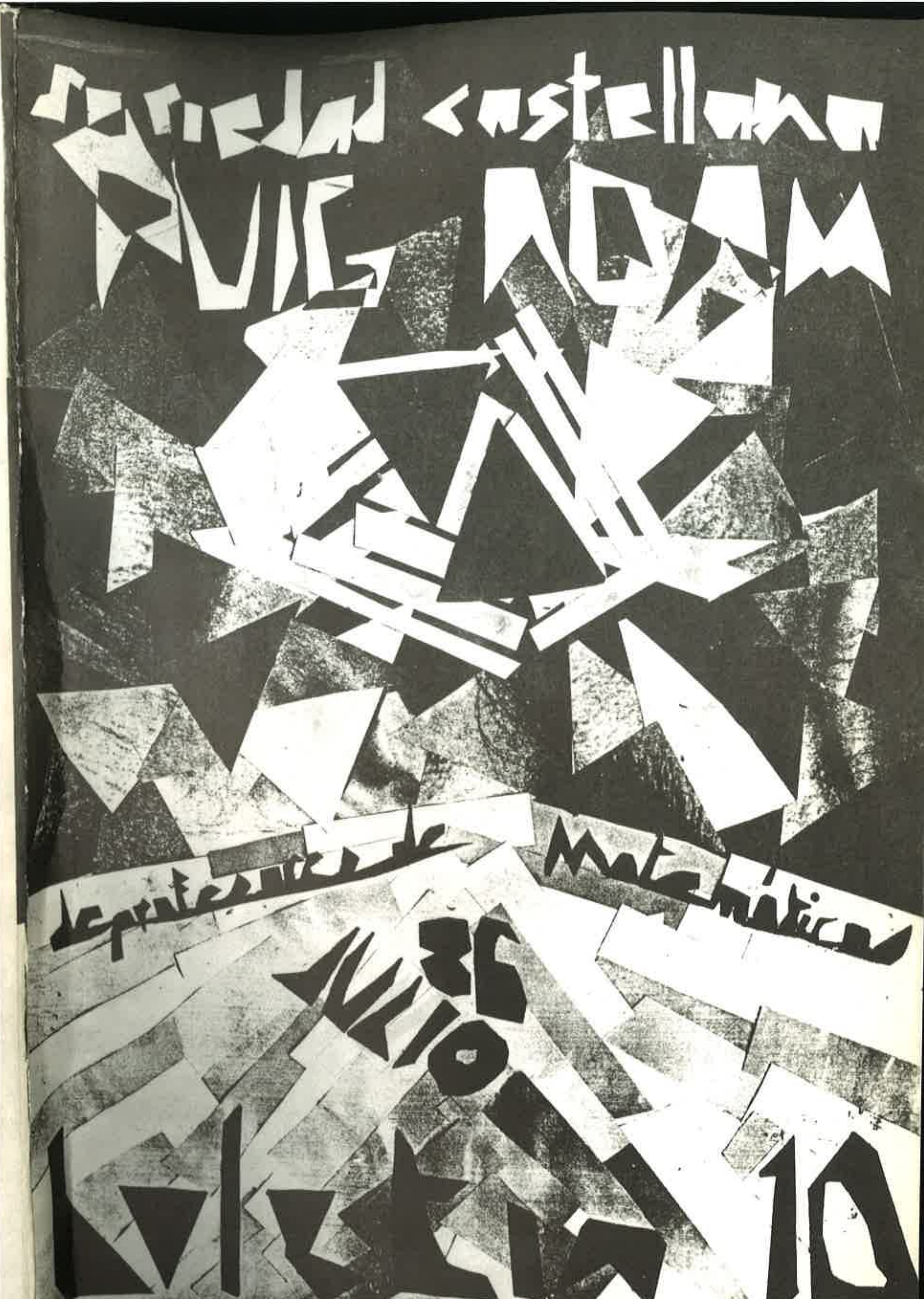

sociedad castellana
PUIG ADAM
de profesores de matemáticas
julio 86
boletín 10

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Julio - 1986 nº 10 (1985 - 86)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

Ronda de Atocha, 2 (INBAD)
MADRID

- La correspondencia deberá dirigirse al:

Apartado nº 9479
28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

PASCUAL IBARRA, José Ramón
FERNÁNDEZ BIARGE, Julio

INDICE

## JUNTA DIRECTIVA

Presidente: José Javier Etayo Miqueo

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardó (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: José Francisco Carballido Quesada

Vicesecretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey



## ASAMBLEA GENERAL DE LA SOCIEDAD

Según anunciábamos en el Boletín anterior, el pasado 24 de mayo tuvo lugar nuestra Asamblea General Ordinaria, correspondiente al curso 1985-86. Aprobadas el acta de la anterior y las cuentas, el Presidente hizo un amplio informe de las actividades desarrolladas y expuso la línea de colaboración iniciada ya en la organización del IV Concurso de Problemas con el Colegio de Doctores y Licenciados, iniciativa que fue aprobada.

Seguidamente se procedió a la elección de los cargos de la Junta Directiva que reglamentariamente correspondía renovar. Resultó elegido nuevo Presidente de la Sociedad, por unanimidad, don José Javier Etayo Miqueo, y para Vicesecretaria doña Carmen García-Miguel Fernández. Los demás fueron reelegidos.

Los asistentes expresaron su pesar por el cese en la Presidencia del señor Fernández Biarge, que con tanto desvelo y acierto ha desempeñado durante los dos años de su mandato. Quede constancia de la gratitud de la Sociedad por la intensa y abnegada labor realizada. Afortunadamente la elección para el cargo del profesor Etayo, bien conocido de todos por su constante y desinteresada dedicación a los problemas educativos, por su relevante personalidad en la investigación y en la docencia, asegura para la Sociedad la continuidad en las tareas en favor de una mejora en la calidad de la enseñanza matemática. El profesor Etayo solicitó la colaboración de todos los socios, que esperamos no ha de faltarle.

El pasado día veintitrés de Mayo, coincidiendo con el final de carrera de la quince promoción de la Sección de Matemáticas de la Universidad de Valladolid, se rindió un merecido homenjae al catedrático de Análisis Matemático de dicha sección Prof. Juan José Gutiérrez Suárez. El homenaje consistió en un solemne acto académico celebrado en el Salón de Grados de la Facultad de Ciencias, en el que intervinieron, además del homenajeado, los catedráticos Dr. Antonio Pérez Gómez y Dr. José Martínez Salas, cerrando el acto el Magnífico y Excelentísimo Rector de la Universidad de Valladolid Dr. Fernando Tejerina, y además, a propuesta de la Facultad de Matemáticas, el día 26 de Mayo, la Junta de Gobierno de la Universidad de Valladolid acordó por unanimidad, conceder al Dr. Gutiérrez Suárez la medalla de oro de la Universidad de Valladolid en atención a su eficaz y continua dedicación a la promoción de la Sección de Matemáticas de esa Universidad.

Felicitamos muy cordialmente a nuestro ilustre consocio.

---

El II International Symposium on Orthogonal Polinomials and their Applications se celebrará en Segovia entre los dias 22 al 27 de Septiembre. Puede obtenerse información a través del Secretario de la Comisión Organizadora, Sr. Marcellán, del Departamento de Matemáticas de la E. T. S. de Ingenieros Industriales (c/ José Gutiérrez Abascal, 2, 28006-Madrid), teléfono (91)- 2 62 62 00 .

---



CUARTO CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS PARA ALUMNOS DE B.U.P.

---

Nuestra Sociedad, en colaboración con el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias, ha celebrado su IV Concurso de Resolución de Problemas, cuya convocatoria publicamos en el nª 9 de nuestro Boletín.

De acuerdo con esa convocatoria, podían concurrir a este Concurso los alumnos de Primero y Segundo de B.U.P. (o de F.P.) de nuestro ámbito territorial, que fuesen presentados por sus Centros, hasta un máximo de dos por cada curso.

Las pruebas del Concurso han tenido lugar en el Instituto de Bachillerato "Beatriz Galindo" de Madrid, a cuya Dirección debemos agradecer una vez más la cesión de sus locales, en la mañana del sábado 28 de Junio.

El número de Centros pre-inscritos ha sido este año de 75 y han concurrido a las pruebas 70 alumnos de primer curso y 65 de segundo.

Se propusieron cuatro problemas, en dos tandas, para cada curso; al final de esta crónica damos a conocer los enunciados.

La entrega de diplomas y premos tuvo lugar el mismo día, en el Salón de Actos del Instituto "Beatriz Galindo", al que concurrió numeroso público. Nuestro Presidente, Sr. Etayo, tuvo unas palabras de agradecimiento para todos los que han contribuido a la organización de este Concurso, y en especial, para los que han participado en él con espíritu olímpico, a los que alentó a seguir trabajando con entusiasmo. A continuación se fue llamando a los ganadores, a los que se hizo entrega de los correspondientes diplomas y lotes de libros; damos a continuación sus nombres:

PRIMER CURSO DE B.U.P.

1ª) Dña. Isabel García-Monge Carretero, Colegio de "Jesús Maestro", Madrid.

2ª) Dña. Marta Jiménez Martín, de LAE (Profesores Universitarios Reunidos), Madrid.

3ª) D. José María Font Fernández, del Colegio de Huérfanos de la Armada, Madrid.

4ª) Dña. Emma Sánchez García, del Colegio de la Inmaculada, Madrid.

5ª) D. Manuel Iglesias Ferreira, del I.B. "Juan Carlos I" de Ciempozuelos, Madrid.

En calidad de accesits, recibieron lotes de libros:

- Dña. Isabel Hernández López, del Colegio Patrocinio de S. José.
- Dña. Alicia Gómez López, del I.B. de Cantalejo, Segovia.
- Dña. Mª Teresa Sánchez Rojas, del I.B. de Illescas, Toledo.

SEGUNDO CURSO DE B.U.P.

1ª) Dña. Carmen Casares Antón(*), del I.B. "Gran Capitán", Madrid.



2ª) D. José Luis Rivera Pardo(*), del I.B. "Cervantes", Madrid.

3ª) D. Miguel A. Pantoja Molina, del Colegio "Retamar", Madrid.

4ª) D. José María de Garriga Johansson, del Colegio Marista "San José del Parque", Madrid.

5ª) D. Carlos Hermoso Ortiz, del I.B. "San Isidro", Madrid.

En calidad de accesits, recibieron lotes de libros:

- Dña. Carmen Rueda Claussell, del I.B. "Isabel la Católica", Madrid.
- D. Guillermo Sebastián Villarinos, del Colegio "Berriz" de Las Rozas, Madrid.
- Dña. Natalia Pérez Carmona, del Colegio "Virgen del Carmen", Toledo.
- D. Antonio Gil Ayuso, del I.B. de Talavera de la Reina, Toledo.
- Dña. Marta Casillas González, del I.B. "A. Pedro Gumiel", Alcalá de Henares.
- Dña. María Lleyda Delgado, del Colegio "San Estanislao de Kostka", Madrid.
- D. Raúl Sanz Rioyo, del "Complutense", Alcalá de Henares.
- D. Angel López Santacruz, del I.B. de Talavera de la Reina, Toledo.

(*) Los señalados con (*) fueron también premiados el año pasado, en nuestro Concurso, como alumnos de Primero.

A todos ellos, y a sus profesores de Matemáticas, nues_ tra enhorabuena.

Los valiosos lotes de libros que se entregaron a los participantes antes citados, fueron donados por la Consejería de Cultura de la Comunidad Autónoma de Madrid y por la Conseje_ ría de Educación y Cultura de la Comunidad Autónoma de Castilla - La Mancha, organismos a los que debemos agradecer el que nues_ tros mejores concursantes haya podido llevarse un recuerdo que les sirva de compensación a sus esfuerzos y de estímulo para el futuro.

Los enunciados de los problemas propuestos fueron los siguientes:

## P R I M E R   C U R S O

### PROBLEMA 1ª

Se considera un triángulo equilátero de lado 3 m. Un P, interior a dicho triángulo, dista de los tres lados a, 2a y 3a respectiva_ mente. Calcular la longitud de a.

### PROBLEMA 2ª

Los números $a_1, a_2, \dots, a_n$, están en progresión geométrica. Se conocen las sumas:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

Calcular el valor de $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$, en función de S y T.



### PROBLEMA 3ª

Sean Q(x) y R(x) el cociente y el resto de dividir el polinomio $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 184x + 212$, por el polinomio $B(x) = x^2 + 2x + 70$. Para n, número natural, sean:

$$a_n = A(n), \quad b(n) = B(n), \quad q_n = Q(n), \quad r_n = R(n)$$

¿Para qué valores de $n \in N$, se cumple que $q_n$ y $r_n$ son respectivamente, el cociente y el resto de la división de $a_n$ por $b_n$?

### PROBLEMA 4ª

Demostrar:

$$\binom{m}{0} + \frac{1}{2}\binom{m}{1} + \frac{1}{3}\binom{m}{2} + \dots + \frac{1}{m+1}\binom{m}{m} = \frac{2^{m+1} - 1}{m+1}$$

## S E G U N D O   C U R S O

### PROBLEMA 1ª

Comprobar que para todo $n \in N$, el número

$$M = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$$

es múltiplo de 17.

### PROBLEMA 2ª

Descomponer un cuadrado de lado igual a 1, en cinco rectángulos de la misma área y lados menores que 1, calculando los lados de los rectángulos resultantes. ¿Hay distintas soluciones?

### PROBLEMA 3ª

Calcular el valor de $\log_{a \cdot b} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, sabiendo que $\log_{a \cdot b} a = 4$.

PROBLEMA 4ª

La altura de un triángulo es igual a 4 cm y divide a la base en dos partes que están en la razón 1/8. Calcular la longitud de un segmento paralelo a la altura y que divida al triángulo en dos partes de áreas iguales.



## NOTICIAS

### XXVII OLIMPIADA MATEMÁTICA INTERNACIONAL

Entre los dias 7 y 14 de Julio se ha celebrado en Varsovia la Olimpiada Matemática Internacional de 1986. Participaron en ella 250 estudiantes de 40 paises, menores de 21 años, de cursos pre-universitarios. Entre ellos, un grupo de españoles que, por primera vez, ha conseguido unos resultados semejantes a los de otros paises con mayor tradición en estas lides.

Uno de los 41 segundos premios fué ganado por D. Ricardo Pérez Marco , alumno de C.O.U. del Liceo Francés de Barcelona que también obtuvo medalla de plata en la I Olimpiada Matemática Iberoamericana de Bogotá (ver Boletín nº 8). Dos de los 43 terceros premios fueron conseguidos por D. Juan David González Cobas, del Colegio de San Fernando de Avilés, que obtuvo el tercer puesto en nuestra Olimpiada Nacional, y por D. Alberto Garrido Arribas, del I. B. de Cantalejo (Segovia), que fué segundo en esa Olimpiada, y medalla de bronce en la Ibero-Americana (ver Boletines nºˢ 8 y 9), así como campeón en nuestro Concurso de Problemas para alumnos de 2º de B.U.P. en 1984. También participó D. Carlos Ueno Jacue, del I. B. "Cervantes", de Madrid, quedando tan sólo a dos puntos de distancia de otos premiados.

Todos debemos felicitarnos de estos resultados, fruto del esfuerzo de esos jóvenes sobresalientes y también de la labor incansable de algunos profesores de Matemáticas a los que nuestra Sociedad ha tratado siempre de alentar y ayudar en lo posible. Los gastos del desplazamiento a Polonia han sido sufragados por el Instituto Nacional de Asistencia y Promoción del Estudiante (INAPE). Asesoró a los participantes el catedrático de la Universidad de Granada, D. Ceferino Ruiz Garrido.

CONCURSOS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS EN EL I.B. "MAESTRO JUAN AVILA" DE CIUDAD REAL

Entre los actos celebrados con motivo de la festividad del Santo Patrón del Instituto "Juan de Avila" de Ciudad Real, se ha hecho entrega de los premios del "XVII Torneo Matemático Puig Adam" para alumnos de COU, del "III Torneo Rey Pastor" para los de 2ª de BUP y del "V Torneo Tomás Vicente Tosca" para los de 1ª. En los tres casos se trata de concursos de resolución de problemas. Los ganadores recibieron diplomas y unos lotes de libros de Matemáticas donados por la Asociación de Padres de Alumnos.

Los primeros clasificados fueron los siguientes:

- 1er Curso de BUP: María Josefa García Serrano
- 2ª Curso de BUP: Francisco Javier González Espadas
- COU : Celia Serrano Martín

A todos ellos nuestra enhorabuena, y al Seminario de Matemáticas del Instituto, así como al Grupo Matemático "Puig Adam" promovido por el mismo, nuestros deseos de que continúe, con el mismo empeño y entusiasmo, la labor que viene realizando en Ciudad Real para motivar y mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato.



MATEMATICOS FRANCESES A PRINCIPIOS DEL XVII

Por Enrique Linés Escardó
Catedrático de Universidad

*En una conferencia que sobre Fermat desarrollé en la Real Academia de Ciencias E.F. y N., la primera parte se dedicaba a la época de Fermat y a los matemáticos contemporáneos. Se me pidió, para esta Revista, una reproducción de dicha parte general. En la presente redacción, el tema es el mismo, pero para conseguir mayor unidad en el texto, con mucho gusto lo he vuelto a escribir, acompañándolo con algunas reflexiones.*

A PRINCIPIOS DEL SIGLO XVII

En el umbral del siglo XVII, desaparece la figura señera de François Vieta. Tras una larga vida, jurista, consejero real, verdadero humanista y matemático, deja entre otras obras "In arten analyticen Isagoge" (Tours, 1591), de gran importancia en la Historia del Algebra. En esta "Introducción" Vieta pretendió actualizar el método de análisis expuesto por Pappus en su gran "Colección" y combinarlo con los métodos de Diofanto. Añadió también el método "exegético" para hallar magnitudes desconocidas resolviendo ecuaciones.

Vieta es el enlace entre los matemáticos renacentistas italianos y los de una nueva generación, la última anterior al descubrimiento del Cálculo infinitesimal.

A este interesante período, en el que se combina la geo métrica solidez del pensamiento clásico, con la indecisa aparición del pensamiento funcional, le da carácter y definición la presencia de los cuatro grandes matemáticos franceses Girard Desargues (1591-1661), René Descartes (1596-1650), Pierre-Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662).

Admira, en primer lugar, la simultaneidad con que irrumpen en la historia de la Ciencia estos cuatro genios; y, en segundo lugar, sorprende la diversidad de caracteres y estilo de estos cuatro prototipos humanos.

Antes de trazar un esbozo de estos grandes de la Matemática, se ha de hacer referencia a la "Academia Mersenne", a la que todos se sintieron muy vinculados. Su fundador, el Padre Martin Mersenne, de la Orden de los Mínimos, creó la academia como centro de intercambio de ideas matemáticas. Todas las semanas tenían lugar sesiones científicas, en las que se exponían los últimos resultados de las investigaciones, tanto de los presentes como de otros matemáticos franceses o extranjeros con los que el P. Mersenne mantenía viva correspondencia. La valía matemática del fundador no es comparable con la de aquellas cuatro figuras antes mencionadas; sin embargo, la bondad de su carácter, el entusiasmo y su dedicación hicieron posible una institución de gran influencia en la matemática francesa a partir del siglo XVII. Más adelante la institución se denominó "Academia Libre" y en 1666 "Academia de Ciencias".

## Girard Desargues (1591-1661)

De los cuatro, Girard Desargues es cronológicamente el primero, y se puede calificar como el más original. Nació en Lyon, en el seno de una familia de nueve hermanos, donde su padre tenía a su cargo la recaudación del impuesto diocesano de los diezmos. De sus estudios se tiene poca noticia y su forma-



ción podría calificarse como la de un autodidacta. En 1626 está en París trabajando como arquitecto, y parece que elaboró un proyecto para elevar las aguas del Sena para el servicio de la ciudad. Como ingeniero participó en el sitio de La Rochelle en 1628.

Hacia 1630 tiene relación con algunos miembros de la Academia de Mersenne, que frecuenta. En 1635 el P. Mersenne le cita como uno de los miembros asiduos asistentes a las reuniones, en las que se encuentra con Etienne Pascal, Mydorge, Roberval, Carcavi y el joven Blaise Pascal entre otros.

Desargues conoce la obra de Apolonio y tiene conciencia de los métodos sintéticos empleados por el griego. Su preocupación por impulsar la educación geométrica de los artistas, ingenieros, arquitectos y canteros, le mueve a organizar los teoremas "útiles" de manera didáctica, escribiendo unos textos que distribuye en hojas sueltas o cartas. Sus propias palabras reflejan su carácter mejor que una prolija descripción.

*"Confieso sinceramente que nunca he tenido el gusto de estudiar o investigar en Física o en Geometría, excepto en cuanto pudiera servir para alianzar algún tipo de conocimiento de las causas próximas..., o para el bien y conveniencia de la vida, en el mantenimiento de la salud, en la práctica de algún arte..., habiendo observado que una buena parte de las artes se basa en la Geometría..."*

Más adelante, en 1639, publica su obra más importante, que es un verdadero tratado de Geometría Proyectiva, y que titula: "Brouillon project d'une atteinte aux événemens des recontres du cône avec un plan". Este título ya es muestra de una personalidad extraña, que se manifiesta en el texto escrito en una especie de código secreto e impreso en letra microscópica.

Este hombre, preocupado por la aplicación práctica, es el descubridor de una Geometría pura, en la que existen puntos y rectas del infinito; en la que la belleza de las proposiciones reside en la justa simplificidad de sus hipótesis, y la inesperada riqueza de las conclusiones. El teorema básico de los triángulos perspectivos, la invariancia de la razón doble en proyecciones y secciones, las propiedades de la involución, y, en general, todos los teoremas básicos de la que hoy se llama Geometría Proyectiva se encuentran en la obra de Desargues. Pero, por encima de todo ello, hizo de las proyecciones y secciones un método de demostración, y un método unitario en el estudio de todas las secciones cónicas. ¡Una nueva Geometría después de 2000 años de tradición euclídea!

René Descartes (1596-1650)

René Descartes, sin duda el más famoso de los cuatro matemáticos, nació en La Haya en Touraine. Hijo de un jurista de noble familia, perdió a su madre al año de nacer. A los ocho años ingresa en el Colegio de La Fleche en Anjou, regentado por los jesuítas y una de las más célebres instituticiones educativas de Francia, donde adquiere una sólida formación clásica. En 1616 se diplomó en Derecho en la Universidad de Poitiers, marchando después a París. En esta ciudad el gentilhombre Descartes se relacionó con los primeros matemáticos del círculo de Mersenne y en particular con Mydorge, que le inició en la Matemática, dedicando más de un año al estudio de esta ciencia.

Sin embargo, la salida a su inquietud la buscó alistándose en la milicia del príncipe Mauricio de Orange, cuando tenía 21 años, luchando en los Países Bajos contra los españoles. Fue soldado profesional durante nueve años y, con seguridad, muy osado. En esta época alterna su servicio en distintos ejércitos con sus estancias en un París placentero, aunque nunca dejara de estudiar Matemáticas.



En 1629 parte para Holanda, donde permanecerá veinte años. En este exilio voluntario buscará una quieta y libre atmósfera intelectual. Realmente allí encuentra el sosiego interior para escribir sus obras más famosas, pero no dejará de ser centro de controversia. Por una parte, lo recio de su carácter, y por otra y principal, su posición de pensador rebelde que rompe con la tradición introduciendo una metodología nueva para una nueva Filosofía, son motivo y razón de fuertes disputas, que Descartes no rehuye.

Cuando en sus meditaciones busca la profundidad de lo que se considera verdadero, con estilo militar planea un ataque general a los fundamentos de la Ciencia. En 1637 publica el famoso "Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences", como prólogo a tres ensayos: "La Dioptrique", "Les Météores" y "La Géométrie". Este último es el único libro que escribió Descartes de Matemáticas, aunque en numerosas cartas también expusiera ideas sobre esta ciencia.

Es difícil separar el pensamiento filosófico de Descartes del matemático. En el modelo matemático encontrará la claridad, la lógica y el rechazo de todo compromiso ajeno a su línea de pensamiento. En esta indiscutible solidez del método matemático, que permite establecer certezas y demostrarlas efectivamente, basa Descartes la seguridad en el razonamiento. Refiriéndose a dicho método, escribe: *"Es un instrumento del conocimiento, más poderoso que cualquier otro que nos haya legado el quehacer humano, como si hubiera sido el origen de todos los demás".*

No se detiene aquí la reflexión del filósofo y aspira a descubrir el "Método general", como método filosófico de valor universal, a partir del modelo matemático. Lo que, de alguna forma, haría realidad el sueño de la "Ars magna" del monje mallorquín Ramón Llull (1235-1315).

Un método general basado en el modelo matemático, requiere establecer una correspondencia biunívoca entre los conceptos complicados de una realidad y los más simples del modelo. Siguiendo a Descartes, en la metodología de su "Discurso", el modelo más sencillo es el matemático y el más seguro el del cálculo algébrico de los números. Este postulado, de su método general, lo llevó a efecto en "La Geometría" en la que algebriza la ciencia de la intuición espacial.

Descartes no es el descubridor de la representación gráfica, fundamento de su Geometría, pues ya el griego Apolonio había introducido las abscisas y ordenadas para obtener la "symptoma" de algunas curvas. El descubrimiento del gran filósofo es mucho más importante, pues se trata de un método nuevo de estudio de la Geometría, potenciado por la generalidad del Algebra. En la hoy llamada geometría Analítica, muchas proposiciones tiene dos aspectos: el goemétrico y el algébrico, aun correspondiendo a la misma realidad. Sin duda este proceso unificador tiene su origen en la primitiva idea del método general cartesiano.

## Pierre Fermat (1601-1685)

Pierre Fermat, el matemático más importante de los cuatro, nació en Beaumont de Lomagne, en tierras del mediodía de Francia. Descartes decía de él, que era un gascón. Los Fermat se dedicaban al comercio de cueros, pero la madre de Pierre procedía de una familia de juristas ejercientes en los medios parlamentarios de Toulouse.

Los primeros años de su juventud los debió pasar cerca de su ciudad natal, y recibiría una educación clásica de acuerdo con el estilo familiar. Probablemente estudió en la Universidad de Toulouse y ciertamente Leyes. En 1620 está en Bordeaux,



y en 1631 se diplomó como jurista en la Universidad de Orleans.

No se conocen detalles de la vida de Fermat en sus 30 primeros años, pero se puede asegurar que tras los años escolares dedicó mucho tiempo a su afición matemática. Estudió los clásicos griegos, lo que le movió a restaurar los textos incompletos de Apolonio, buscando su forma original. Los métodos y el simbolismo de Vieta le eran familiares y los supo aplicar a la clasificación de las secciones cónicas y a otros problemas geométricos. Sus famosos descubrimientos en la Teoría de Números tuvieron origen en el estudio de la "Arithmetica" de Diofanto, durante esta época.

De vuelta a Toulouse en 1631, entra al servicio del Parlamento regional. Desde entonces la vida de Fermat transcurre honorablemente sirviendo a su ciudad, en aquellos difíciles tiempos de luchas religiosas, decadencia económica y litigios locales y con el gobierno central.

Seguramente el jurista Pierre de Fermat hubiera sido recordado por sus virtudes cívicas y humanas y pronto olvidado, si no hubiera sido por aquellas escondidas investigaciones matemáticas que en cartas comunicaba a sus amigos.

A partir de 1636 empieza una relación epistolar con el P. Mersenne y los matemáticos de la Academia parisina; y después con "la mayoría de los grandes geómetras de Inglaterra e Italia", como aparece escrito en el Journal de Sçavans, en el elegio póstumo.

Efectivamente se le reconoce como muy distinguido en "la Ciencia de los números y en la bella Geometría". El mismo Pascal da fé de sus talentos en esta rama de la Matemática en una carta en la que le dice:

*"También diría, que aunque os tenga por el más grande*

*geómetra de toda Europa, ésta no será la cualidad que me atraería..."*.

En todo caso se trata de una Geometría enraizada en el pensamiento griego que encuentra en el simbolismo algébrico una nueva expresión. En cambio, los famosos resultados de la Ciencia de los números, conservan hasta hoy su transparencia inalterable, más allá de lo sensible.

## Blaise Pascal (1623-1662)

Blaise Pascal, sin duda el más ingenioso de los cuatro matemáticos mencionados, nació en Clermon-Ferrand. De naturaleza enfermiza, pero un prodigio de precocidad infantil, perdió a su madre a los tres años. Su padre, que era jurista, se oponía a que se ocupara con estudios matemáticos, por creer que el rigor conceptual requería una madurez que el joven aparentemente no poseía. Sin embargo, al trasladarse la familia a París en 1631, empezó a estudiar por cuenta propia los "Elementos" de Euclides, y desde 1635 acompañaba a su padre a las reuniones semanales de la Academia de Mersenne. Allí tuvo ocasión de conocer y relacionarse con el geómetra Desargues, y quedó sugestionado por la belleza de las proposiciones y métodos de la nueva Geometría proyectiva. Con Fermat y Descartes fue uno de los pocos que entendieron y apreciaron las ideas del extraño geómetra, del que fue su principal discípulo.

Pascal acepta los elementos del infinito, y en 1639 descubre el famoso teorema del "exágono místico". Al año siguiente ya publica "Essay pour les coniques", con numerosos resultados originales, y que es el esquema de un gran tratado de Geometría proyectiva. Aunque en 1654 indicó Pascal que el tratado estaba casi completo, no llegó a publicarse, y las referencias que se tienen son de Leibniz, que lo conocía.



Es muy compleja la personalidad de Pascal, que está reflejada en las circunstancias de su vida. La frágil salud y su inquietud religiosa son determinantes en su historia personal, y también en su actividad científica.

En 1640 sigue a su padre a Rouen, donde la familia se convierte al cristianismo austero de Port-Royal. En 1642 se ocupa de otros temas científicos, construyendo una máquina de cálculo, con la que simplifica el trabajo de su padre, que es oficial del impuesto real. Vuelve enfermo a París en 1647, en donde brilla en la sociedad elegante de la capital. No satisfecho de esta vida mundana experimenta su segunda conversión, y a partir de 1654 relega a segundo término su preocupación científica para luchar junto a los jansenistas, en sus polémicas con los jesuitas. En un brillante estilo escribe sus "Pensées", obra apologética del cristianismo, que se considera como uno de los clásicos de la literatura francesa.

En 1658 y primeros meses del siguiente año se dedica a perfeccionar el "método de los indivisibles", y del que ya hiciera mención en 1637, en un fragmento de "De l'esprit géométrique", en relación con los infinitamente pequeños e infinitamente grandes. Pero Pascal ya estaba muy enfermo.

El pensador Blaise Pascal fue también grande en otros campos. En Física se ocupó de la estática de los fluidos y del problema del vacío. Con Fermat se considera como uno de los fundadores de la Teoría de la Probabilidad, donde introdujo el concepto de esperanza matemática.

Su obra matemática fue intuitiva en gran medida. Supo prever importantes resultados, enunció conjeturas certeras, y descubrió caminos directos en los razonamientos. Al final de su vida, era todavía más firme su convencimiento de que en la intuición estaba la fuente de la verdad, por encima de la fría razón.

REFLEXION

Son las épocas de transición, en las que las individualidades brillan con luz propia. No ha de sorprender, pues, que en un período en el que todavía vive el espíritu de la Matemática griega, y aún no ha llegado el descubrimiento del Cálculo infinitesimal, aparezcan figuras estelares de la Matemática como las que hemos reseñado. Sin embargo, lo que sorprende es su diversidad. El momento histórico de la Matemática en que viven es el mismo, y, sin embargo, sus ideas y sus métodos tienen un carácter muy personal.

Procedentes de regiones distantes, de características culturales e históricas muy diferentes, entran a la vez en la escena matemática cuatro actores genialmente distintos. Los cuatro encuentran en la Matemática el "más alto ejercicio del espíritu", como diría Pascal; pero, y aquí la gran paradoja, no los calificaríamos oficialmente como científicos:

Un arquitecto didáctico, cuya pedagogía se convierte en la Geometría más pura que se conoce.

Un filósofo soldado, que buscando el "método general" para el buen razonamiento, consigue asociar la intuición geométrica con el simbolismo algébrico.

Un jurista parlamentario, cuya afición por los clásicos griegos, le convierte en el restaurador de la obra de Apolonio, y continuador de la de Diofanto.

Un pensador místico, para el que la intuición es fuente del conocimiento, y le permite percibir armonías en las figuras de una bella Geometría.

Ante esta diversidad también sorprende un rasgo común. Todos ellos, bien sea por lazos familiares, o por estudios universitarios participan de una formación jurídica. Claro que estos estudios serían los normales en el medio social en que vivieron; pero no se trata de entrar en estas circunstancias, pues el alcance de la observación es otro. El jurista en su profesión interpreta y analiza realidades, las clasifica de acuerdo con códigos y deduce lógicas conclusiones. Ciertamente que algunos aspectos de este trabajo con realidades, no son ajenos al ejercicio del matemático; sin embargo, la actividad de creación matemática está más cerca de la especulación filosófica y de la observación de la Naturaleza.



Claro que los genios no tienen denominador común, y con frecuencia ha de pasar algún tiempo para descubrir el papel que jugaron en el progreso de una ciencia. Entonces es frecuente advertir la coherencia de su aparición en un momento histórico, y eso justifica el atribuirles un común carácter generacional.

Los cuatro matemáticos dependen de la tradición geométrica griega y presencian, como actores, el momento crucial en el que la tradición se remansa y se abren nuevos cauces. Por una parte, una Geometría más cualitativa, más ideal, que opera con proyecciones y secciones; y por otra parte, una Geometría más cuantitativa, en la que los puntos de los lugares geométricos son las soluciones de ecuaciones. Sin embargo, la realidad indiscutible es que la Geometría está presente en aquellos cuatro grandes matemáticos franceses, y el "espíritu geométrico" marca su quehacer matemático con una exigencia de claridad y método.

Estos matemáticos son los más representativos de la última generación antes del descubrimiento de un método de cálculo con los infinitesimales, que Leibniz y Newton, un filósofo y un físico, realizaron unas décadas más tarde.

Todavía no había llegado el tiempo en que se estudiara "lo variable" como tema central de la Matemática. La investiga ción de la Naturaleza urgía este estudio, pues la Naturaleza sólo es aprehensible en sus cambios. Por otra parte, para que la observación de la Naturaleza se transforme en ciencia, una vez fijado lógicamente el concepto de variación, se ha de disponer de un instrumento matemático para dominarlo e investigarlo.

Es claro que detrás de esta urgente necesidad, cuya solución exige el físico, aparece planteada, en el campo de la Filosofía, una de las situaciones más polémicas y sugestivas: el paso del pensamiento predicativo al pensamiento funcional.

El descubrimiento del Cálculo infinitesimal es, pues, uno de los logros capitales de la Cultura occidental y seguramente lo que hace posible y da forma a la Ciencia moderna.

Todavía faltarán unos años hasta que se descubra un nuevo Cálculo, con símbolos y reglas, para estudiar lo que por su nombre parecía rebelde al cálculo: lo variable. Un descubrimiento que será vedado a la racional matemática francesa, aunque presintiera su presencia.

OBSERVACION

Es cierto, en efecto, que el descubrimiento del Cálculo estuviera vedado a la matemática francesa, aunque se hablara de Fermat y Pascal como predecesores. Cuestión aparte es determinar los escollos que dificultaron dar el paso arriesgado por encima de las oscuridades de los indivisibles y del continuo.

Aunque algunos de los "parámetros" que aclaran esta cuestión, ya han sido mencionados a lo largo del escrito, el tema es de gran interés.



# JUEGOS MATEMATICOS EN LA ENSEÑANZA(*)

Por Miguel de Guzmán, Universidad Complutense

---

## 1. MATEMATICAS Y JUEGOS

*A good mathematical joke is better and better mathematics than a dozen mediocre papers.*

(J.E. Littlewood, A Mathematician's Miscellany).

¿Dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde fuera, ésta, mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los más de entre los matemáticos, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas.

El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático. Las diferentes partes de la matemática tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comporta-

(*) Nota de la redacción

El presente trabajo es una parte de la comunicación presentada por el prof. Guzmán en las VII Jornadas de la Sociedad Canaria "Isaac Newton", que tuvieron lugar en Arrecife de Lanzarote en el pasado mes de mayo. Se publica con expresa autorización del insigne profesor y conocimiento de la mencionada Sociedad. Gracias por su valiosa colaboración.

miento mutuo a través de las definiciones de la teoría. Las reglas válidas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamiento admitidos como válidos en el campo. Cuando la teoría es elemental, éstos no son muchos ni muy complicados y se adquieren bien pronto, lo cual no quiere decir que el juego sea trivial. Elemental quiere decir cerca de los elementos iniciales y no necesariamente simple. Existen problemas elementales desproporcionadamente complicados con respecto a su enunciado. Un ejemplo lo constituye el problema de averiguar el mínimo de las áreas de las figuras en las que una aguja unitaria puede ser invertida en el plano por movimientos continuos. Cuando la teoría no es elemental es generalmente porque las reglas usuales del juego se han desarrollado extraordinariamente en número y en complejidad y es necesario un intenso esfuerzo para hacerse con ellas y emplearlas adecuadamente. Son herramientas muy poderosas que se han ido elaborando, cada vez más sofisticadas, a lo largo de los siglos. Tal es, por ejemplo, la teoría de la medida e integral de Lebesgue en el análisis superior.

La matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar, de modo original y útil, herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema.

Por esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos



observadores de los juegos, participando muy activamente en ellos, y que muchas de sus elucubraciones, precisamente por ese entreveramiento peculiar de juego y matemática, que a veces los hace indiscernibles, hayan dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos matemática profundamente seria.

## Impacto de los juegos en la historia de la matemática

La historia antigua no ha sido inclinada a preservar sino los elementos solemnes de la actividad científica, pero uno no puede menos de sospechar que muchas de las profundas cavilaciones de los pitagóricos, por ejemplo alrededor de los números, tuvieron lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con las piedras. El llamado problema bovino de Arquímedes, álgebra hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales. Euclides fue, al parecer, no sólo el primer gran sistematizador de la matemática contemporánea, sino también el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada Pseudaria (Libro de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por la falacia y la aporía.

En la Edad Media Leonardo de Pisa (ca. 1170 - ca. 1250), mejor conocido hoy y entonces como Fibonacci, cultivó una matemática numérica con sabor a juego con la que, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, asombró poderosamente a sus contemporáneos hasta el punto de ser proclamado oficialmente por el emperador Federico II como Stupor Mundi.

En la Edad Moderna Geronimo Cardano (1501-1576), el mejor matemático de su tiempo, escribió el Liber de ludo aleae, un libro sobre juegos de azar, con el que se anticipó en más de un siglo a Pascal y Fermat en el tratamiento matemático de la probabilidad. En su tiempo, como tomando parte en este espíritu lúdico, los duelos medievales a base de lanza y escudo dieron paso a los duelos intelectuales consistentes en resolver ecuaciones algebraicas cada vez más difíciles, con la participación masiva, y más o menos deportiva, de la población estudiantil, de Cardano mismo y de otros contendientes famosos como Tartaglia y Ferrari.

El famoso problema del Caballero de Méré, consistente en saber cómo deben ser las apuestas de dos jugadores que, habiendo de alcanzar n puntos con sus dados, uno ha obtenido p y el otro q puntos en una primera jugada, fue propuesto por Antoine Gombaud, Caballero de Mére (1610-1685) a Pascal (1623-1662). De la correspondencia entre éste y Fermat (1601-1665) a propósito del problema surgió la moderna teoría de la probabilidad.

Leibniz (1646-1716) fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: *"Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente"*, escribía en una carta en 1715. Y en particular comenta en otra carta en 1716 lo mucho que le agrada el ya entonces popular solitario de la cruz, y lo interesante que le resulta el jugarlo al revés.

En 1735, Euler (1707-1783), oyó hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano). Su solución constituyó el comienzo vigoroso de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos y con ella de la topología general.

También el espíritu matemático de la época de Euler participaba fuertemente del ánimo competitivo de la época de Cardano. Johann Bernoulli (1667-1748) lanza el problema de la braquistocrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Jakob Bernoulli (creador, precisamente con su solución al problema, del cálculo de variaciones) Leibniz, Newton y Huygens.



Se cuenta que Hamilton (1805-1865) sólo recibió dinero directamente por una de sus publicaciones y ésta consistió precisamente en un juego matemático que comercializó con el nombre de Viaje por el Mundo. Se trataba de efectuar por todos los vértices de un dodecaedro regular, las ciudades de ese mundo, un viaje que no repitiese visitas a ciudades circulando por los bordes del dodecaedro y volviendo al punto de partida (camino hamiltoniano). Esto ha dado lugar a un problema interesante en teoría de grafos, aún abierto hoy día en su versión general: caracterizar los grafos que admiten un camino hamiltoniano.

Los biógrafos de Gauss (1777-1855) cuentan que el Princeps Mathematicorum era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente.

Hilbert (1862-1943) uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

John von Neumann (1903-1957), otro de los matemáticos más importantes de nuestro siglo, escribió con Oskar Morgenstern en 1944 un libro titulado Teoría de Juegos y Conducta Económica. En él analizan los juegos de estrategia donde aparece en particular el teorema de minimax, pieza fundamental para los desarrollos matemáticos sobre el comportamiento económico.

Según cuenta Martin Gardner, Albert Einstein (1879-1955), tenía toda una estantería de su biblioteca particular dedicada a libros sobre juegos matemáticos.

## El fundamento matemático de los juegos

Estas muestras del interés de los matemáticos de todos los tiempos por los juegos matemáticos, que se podrían ciertamente multiplicar, apuntan a un hecho indudable con dos vertientes. Por una parte son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente y por otra parte una gran porción de la matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego.

El primer aspecto se puede poner bien de manifiesto sin más que ojear un poco el repertorio de juegos más conocidos. La aritmética está inmersa en los cuadrados mágicos, cambios de monedas, juegos sobre pesadas, adivinación de números.... La teoría elemental de números es la base de muchos juegos de adivinación fundamentados en criterios de divisibilidad, aparece en juegos que implican diferentes sistemas de numeración, en juegos emparentados con el Nim... La combinatoria es el núcleo básico de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una tarea, muchos de ellos sin resolver aún, como el de averiguar el número de formas distintas de plegar una tira de sellos, el problema del viajante... El álgebra interviene en muchos acertijos sobre edades, medidas, en el famoso juego de los 15, en el problema de las ocho reinas... La teoría de grupos, en particular el grupo de Klein, es una herramienta importante para analizar ciertos juegos con fichas en un tablero en los que se "come" al saltar al modo de las damas. La teoría de grafos es una de las herramientas que aparece más frecuentemente en el análisis matemático de los juegos. Nació con los puentes de Konigsberg, se encuentra en el juego de Hamilton, da la estrategia adecuada para los acertijos de cruces de ríos, como el del pastor, la oveja, la col y el lobo, el de los maridos celosos, y resuelve también muchos otros más modernos como el de los cuatro cubos de la Locura Instantánea... La teoría de matrices está íntimamente relacionada también con los grafos y juegos emparentados con ellos. Diversas formas de topología aparecen tanto en juegos de sabor antiguo, como el de las tres granjas y tres pozos, como en juegos más modernos como los relacionados con la banda de Möbius, problemas de coloración, nudos, rompecabezas de alambres y anillas. La teoría del punto fijo es básica en algunos acertijos profundos y sorprendentes como el del monje que sube a la montaña, el pañuelo que se arruga y se coloca sobre una réplica suya sin arrugar... La geometría aparece de innumerables formas en falacias, disecciones, transformación de configuraciones con cerillas, polinomios planos y espaciales... La probabilidad es, por supuesto, la base de todos los juegos de azar, de los que precisamente nació. La lógica da lugar a un sinfín de acertijos y paradojas muy interesantes que llaman la atención por su profundidad y por la luz que arrojan sobre la estructura misma del pensamiento y del lenguaje.



## Matemáticas con sabor a juego

Por otra parte resulta igualmente fácil señalar problemas y resultados profundos de la matemática que rezuman sabor a juego. Citaré unos pocos entresacados de la matemática más o menos contemporánea.

El teorema de Ramsey, en su forma más elemental, afirma que si tenemos 6 puntos sobre una circunferencia, los unimos dos a dos, y coloreamos arbitrariamente los segmentos que resultan de rojo o de verde, entonces necesariamente hay al final un triángulo con tales segmentos por lados que tiene sus tres lados del mismo color.

El lema de Sperner, importante en la teoría del punto fijo, afirma que si en un triángulo ABC se efectúa una triangulación (una partición en un número finito de triángulos tales que cada dos de ellos tienen en común un lado, un vértice, o nada) y se nombran los vértices de los triángulos de la triangulación con A, B, C, de modo que en el lado AB no haya más que las letras A o B, en el AC nada más que A o C y en BC nada más que A o C, entonces necesariamente hay un triángulo de la triangulación que se llama ABC.

El teorema de Helly afirma que si en un plano hay un número cualquiera de conjuntos convexos y compactos tales que cada tres tienen un punto en común, entonces todos ellos tienen al menos un punto en común.

El problema de Lebesgue, aún sin resolver, pregunta por el mínimo del área de aquellas figuras capaces de cubrir cualquier conjunto del plano de diámetro menor o igual que 1.

El siguiente problema de la aguja en un convexo tridimensional está también aún abierto: ¿Cuál es el cuerpo convexo de volumen mínimo capaz de albergar una aguja de longitud 1 paralela a cada dirección dada? Se sospecha, por analogía con el caso bidimensional, que es el tetraedro regular de altura 1, pero no hay demostración de ello.

## Consecuencias para la didáctica de la matemática

La matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumentos matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias substanciales entre la práctica del juego y la de la matemática. Generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas, complicadas, ni tediosas. En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos, incluso algunos muy profundos, permiten también una introducción sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa y así ha de plantearse, no las preguntas que quiere, sino las que su realidad le plantea de modo na



tural. Por eso muchas de sus cuestiones espontáneas le estimulan a crear instrumentos sutiles cuya adquisición no es tarea liviana. Sin embargo, es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante. De hecho, como veremos, han sido numerosos los intentos de presentar sistemáticamente los principios matemáticos que rigen muchos de los juegos de todas las épocas, a fin de poner más en claro las conexiones entre juegos y matemáticas. Desafortunadamente para el desarrollo científico en nuestro país, la aportación española en este campo ha sido casi nula. Nuestro científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento de mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes.

## Notas sobre la literatura clásica sobre juegos

Los datos que siguen sobre la historia de la literatura sobre recreaciones matemáticas están tomados fundamentalmente del artículo de Schaaf en la Encyclopaedia Britannica titulado Number Games and Other Mathematical Recreations, que contiene una excelente exposición de los juegos más significativos y de las obras más importantes. Pienso que los más seriamente aficionados a los juegos matemáticos agradecerán estas breves notas y que servirán al mismo tiempo para que los más escépticos puedan comprobar al menos con qué tesón ha sido y es cultivado el campo en otros países.

Aunque en la Edad Media y comienzos de la Moderna se dieron algunos intentos esporádicos de formalización y análisis matemático de juegos, con Fibonacci (1202), Robert Recorde (1542) y Gerórimo Cardano (1545), el gran primer sistematizador de donde bebieron abundantemente posteriores imitadores fue Claude-Gaspar Bachet de Méziriac, quien en 1612 publicó su obra de vanguardia en este campo Problémes plaisans et delectables qui se font par les nombres. A él mismo se debe también la publicación en francés de Diophanti, traducción de un texto griego sobre teoría de números que ejerció un gran influjo sobre la historia de la matemática, sobre todo a través de Fermat. El libro de recreaciones de Bachet estaba basado sobre todo en propiedades aritméticas y contiene los problemas más clásicos sobre juegos de cartas, relojes, determinación del número de pesas para pesar 1, 2, 3,..., 40 kilos, problemas de cruces...

En 1624 un jesuíta francés, Jean Leurechon, escribió bajo el seudónimo de van Etten, una obra, Recréations Mathématiques, fuertemente basada en la de Bachet, pero que tuvo mucho más éxito que la de éste, alcanzando las 30 ediciones ya en 1700. La obra de van Etten fue modelo para sus continuadores Claude Mydorge (1630), en Francia, y Daniel Schwenter, en Alemania. Este último, profesor de hebreo, lenguas orientales y matemáticas, añadió gran cantidad de material compilado por el mismo. Su obra póstuma apareció en 1636 con el título Deliciae Physico-Mathematicae oder Mathematische und Philosophische Erquickstunden y la reedición de ella en 1651-1653 fue por algún tiempo la obra más completa en su género.

Mientras tanto había aparecido en Italia en 1641-1642 la obra en dos volúmenes bajo el complicado título Apiaria Universae Philosophiae Mathematicae, in quibus paradoxa et nova plerague machinamenta exhiebntur, escrita por el jesuíta Mario Bettini. Fue seguida en 1660 por un tercer volumen Recreationum Mathematicarum Apiaria Novissima...

En Inglaterra William Leybourn publica en 1694 un libro a medio camino entre el texto y la recreación, con la intención de "apartar a la juventud de los vicios propios a los que es inclinada". Su título fue Pleasure with Profit: Consisting of Recreations of Divers Kinds...



La obra que realmente marca la pauta para los muchos autores que aparecerán en los siglos 18 y 19 fue la de Jacques Ozanam, quien en 1694 publicó Récréations Mathématiques et Physiques, obra inspirada en las de Bachet, Leurechon, Mydorge y Schwenter, que fue revisada más tarde por el historiador de la matemática Montucla.

Al final del siglo 19 aparecen los cuatro volúmenes de Edouard Lucas, especialista en teoría de números, titulados Récréations mathematiques (1882-1894), que pasa a ser la obra clásica durante algún tiempo. Contemporáneo de Lucas es Lewis Carroll, el autor de Alicia, gran aficionado a los puzzles lógicos y juegos matemáticos quien publicó, entre otras cosas, Pillow Problems y A Tangled Tale (1885-1895).

En la primera mitad del siglo 20 los nombres más importantes en América son los de los dos Sam Loyd, padre e hijo, grandes especialistas en puzzles mecánicos, autores del famosísimo juego de los 15, que en su tiempo causó un furor parecido al del cubo de Rubik en nuestros días. En Alemania se destacan Hermann Schubert con sus Zwölf Geduldspiele (1907-1909) en tres volúmenes, así como Wilhelm Ahrens con sus dos volúmenes Mathematische Unterhaltungen und Spiele (1904-1920). En Inglaterra se destacan Henry Dudeney (1917-1967) y sobre todo la gran obra de W.W. Rouse Ball, Mathematical Recreations and Essays (1892, primera edición), otro de los clásicos, con gran erudición histórica, en cuyas páginas puede apreciarse documentadamente, a través de las numerosas notas, el impacto de los juegos sobre los matemáticos y las matemáticas de todos los tiempos. El geómetra H.S.M. Coxeter revisó en 1938 la undécima edición. En Bélgica hay que destacar a Maurice Kraitchik, editor de la revista Sphinx y compilador de varios libros entre 1900 y 1942. En

Holanda se destaca también Fred. Schuh, con su obra Wonderlikjke Problemen, publicada en 1943.

A partir de los años 50, Martin Gardner comenzó a publicar con gran éxito su artículo mensual en las páginas de Scientific American y su nombre, gracias a la difusión de esta revista y a las compilaciones sucesivas, ocho hasta el presente, de sus mejores artículos, ha llenado con enorme éxito el campo hasta finales de los años 70. De las obras más recientes hay que destacar especialmente la de Berlekamp, Conway y Guy, titulada Winning Ways, en dos volúmenes, publicada en 1982, que por su amplitud, sistematización y profundidad, alcanzará sin duda un gran éxito entre los aficionados más concienzudos.

## 2. UTILIZACION DE LOS JUEGOS EN LA ENSEÑANZA

¿Se pueden utilizar los juegos matemáticos con provecho en la enseñanza? ¿De qué forma? ¿Qué juegos? ¿Qué objetivos pueden conseguirse a través de los juegos".

Los juegos tienen un carácter fundamental de pasatiempo y diversión. Para eso se han hecho y ese es el cometido básico que desempeñan. Por eso es natural que haya mucho receloso de su empleo en la enseñanza. "El alumno, -piensa-, se queda con el pasatiempo que, eso sí, le puede comer el coco totalmente, y se olvida de todo lo demás. Para lo que se pretende, es una miserable pérdida de tiempo".

A mi parecer en cambio, ese mismo elemento de pasatiempo y diversión que el juego tiene esencialmente, debería ser un motivo más para utilizarlo generosamente. ¿Por qué no paliar la mortal seriedad de muchas de nuestras clases con una sonrisa? Si cada día ofreciésemos a nuestros alumnos, junto con el rollo cotidiano, un elemento de diversión, incluso aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra enseñanza, el conjunto de nuestra clase y de nuestras mismas relaciones personales con nuestros alumnos variarían favorablemente.



Pero es que además sucede que, por algunas de las razones apuntadas antes, relativas a la semejanza de estructura del juego mismo y de la matemática, avaladas por la historia misma de la matemática y de los juegos, y por otras razones que señalaré a continuación, el juego bien escogido y bien explotado puede ser un elemento auxiliar de gran eficacia para lograr algunos de los objetivos de nuestra enseñanza más eficazmente.

En mi opinión, el objetivo primordial de la enseñanza básica y media no consiste en embutir en la mente del niño un amasijo de información que, pensamos, le va a ser muy necesaria como ciudadano en nuestra sociedad. El objetivo fundamental consiste en ayudarle a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso. Y para ello nuestro instrumento principal debe consistir en el estímulo de su propia acción, colocándole en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las actitudes básicas más características que se pretende transmitir con el cultivo de cada materia.

Por la semejanza de estructura entre el juego y la matemática, es claro que existen muchos tipos de actividad y muchas actitudes fundamentales comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados tan bien o mejor que escogiendo contenidos matemáticos de apariencia más seria, en muchos casos con claras ventajas de tipo psicológico y motivacional para el juego sobre los contenidos propiamente matemáticos.

Es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para la matemática, disfrutan intensamente con puzzles y juegos cuya estructura en poco difiere de la matemática. Existen en ellas claros bloqueos psicológicos que nublan su mente en cuanto se percatan de que una cuestión que se les propone, mucho más sencilla tal vez que el juego que practican, tiene que ver con el teorema de Pitágoras. Estos bloqueos son causados muy frecuentemente en la niñez, donde a absurdas preguntas iniciales totalmente inmotivadas seguían respuestas aparentemente inconexas que hacían de la matemática una madeja inextricable cada vez más absurda y complicada.

Bien se puede pensar que muchas de estas personas, adecuadamente motivadas desde un principio, tal vez a través de esos mismos elementos lúdicos que están descargados del peso psicológico y de la seriedad temible de la matemática oficial, se mostrarían, ante la ciencia en general y ante la matemática misma en particular, tan inteligentes como corresponde al éxito de su actividad en otros campos diferentes.

Es claro que no todos los juegos que se encuentran en los libros de recreaciones matemáticas se prestan igualmente al aprovechamiento didáctico. Muchos son meras charadas y acertijos ingeniosos. Muchos otros se basan en la confusión intencionada del enunciado al modo de los oráculos sibilinos y dejan al final una impresión de mera tomadura de pelo. En otros casos la solución da la impresión de haber llegado por revelación divina que no cabe fácilmente en un esquema de pensamiento que pueda conducir a un método. Pero, como veremos, hay juegos que, de forma natural, resultan asequibles a una manipulación muy semejante a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de problemas matemáticos y que encierran lecciones profundamente valiosas.

Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en el que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado, si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra, la vida propia de las matematícas. Muchos de estos elementos pueden adquirirse igualmente en el enfrentamiento con los problemas que constituyen los juegos matemáticos.



## 3. ALGUNAS INDICACIONES BIBLIOGRAFICAS

Una bibliografía muy completa que da buena idea de la rica historia de los juegos y recreaciones matemáticas es:

- SCHAAF, W.L., A Bibliography of Recreational Mathematics, vols. 1, 2. (National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1970).

Los clásicos de nuestro siglo, obras que en su mayoría se pueden conseguir fácilmente, algunas en ediciones muy baratas:

- BALL, W.W.R., and COXETER, H.S.M., Mathematical Recreations and Essays (Univ. of Toronto Press, Toronto, 1974). (Primera edición: 1892).

- DUDENEY, H.E., Amusements in Mathematics (Nelson, London, 1943).

- DUDENEY, H.E., The Canterbury Puzzles (Dover, New York, 1958).

- KRAITCHIK, M., Mathematical Recreations (Dover, New York, 1953).

- LOYD, S., Mathematical Puzzles of Sam Loyd, selected and edited by M. Gardner (Dover, New York, 1959 (vol. 1), 1960 (vol. 2)).

- LUCAS, E., Récreations Mathématiques, vols. 1-4, (Gauthiers-Villars, París, 1882), (reeditado por Blanchard, París, 1960).

- O'BEIRNE, T.H., Puzzles and Paradoxes (Oxford Univ. Press, London, 1965).

- SCHUH, F., The Master Book of Mathematical Recreations (Dover, New York, 1968).

Los libros de Martin GARDNER, con la numeración que les he dado en las referencias de estas notas son los siguientes:

- GARDNER 1, The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions (Simon and Schuster, New York, 1959).

- GARDNER 2, The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions (Simon and Schuster, New York, 1961).

- GARDNER 3, New Mathematical Diversions from Scientific American (Simon and Schuster, New York, 1966). Traducido al castellano por Luis Bou, editado por Alianza Editorial: Nuevos Pasatiempos Matemáticos (LB 391).

- GARDNER 4, Mathematical Circus. Traducido al castellano por Luis Bou, editado por Alianza Editorial: Circo Matemático (LB 937).

- GARDNER 5, Further Mathematical Diversions. The paradox of the Unexpected Hanging and Others (Allen and Unwin, London, 1970).

- GARDNER 6, The Sixth Book of Mathematical Games from scientific American (Freeman and Co., San Francisco, 1971).

- GARDNER 7, Mathematical Carnival. Traducido al castellano por Luis Bou, editado por Alianza Editorial:



Luis Bou, editado por Alianza Editorial: Carnaval Matemático (LB 778).

- GARDNER 8, Mathematical Magic Show. Traducido al castellano por Luis Bou, editado por Alianza Editorial: Festival Mágico -Matemático (LB 1023).

Los dos libros de M. GARDNER editados por Labor son también muy recomendables, aunque en este trabajo no he hecho mucho uso de ellos.

- GARDNER, M., Inspiración ¡ajá! (Labor, Barcelona, 1981).

- GARDNER, M., ¡Ajá! Paradojas que hacen pensar (Labor, Barcelona, 1983).

La obra más seria desde el punto de vista matemático es la de BERLEKAMP, CONWAY y GUY, que he mencionado varias veces en estas notas. Su referencia completa es:

- BERLEKAMP, E.R., CONWAY, J.H. and GUY, R.K., Winning Ways for your Mathematical Plays, vols. 1, 2 (Academic Press, London, 1982).

A continuación me ha parecido bien indicar algunos libros que existen en castellano más o menos útiles para la finalidad que he pretendido con este trabajo. Una bibliografía general más extensa, orientada no exclusivamente hacia los juegos matemáticos, sino hacia obras adecuadas para proporcionar motivación y enriquecimiento histórico, estético y lúdico de la enseñanza fue confeccionada por mí y distribuída por el ICE de la Universidad Autónoma de Madrid en 1983 a raiz de un cursillo sobre juegos matemáticos.

- ALEM, J.P., Juegos de ingenio y entretenimiento matemático, vols. 1 y 2 (Gedisa, Barcelona, 1984).

- DIENES, Z.P., Lógica y juegos lógicos (Teide, Madrid, 1980).

- DONOVAN, J., Matemáticas más fáciles con manualidades de papel (Distein, Madrid, 1975).

- FRABETTI, C., Problemas de ingenio (Bruguera, Barcelona, 1982).

- GAMOW, G., Uno, dos, tres,... infinito (España-Calpe, Madrid, 1969).

- GARDNER, M., las referencias han sido dadas separadamente antes.

- GUZMAN, M. de, Mirar y Ver (Alhambra, Madrid, 1977).

- GUZMAN, M. de, Cuentos con Cuentas (Labor, Barcelona, 1984).

- HOGBEN, L., El universo de los números (Destino, Madrid, 1966).

- LEWIS, B., Matemáticas Modernas. Aspectos recreativos (Alhambra, Madrid, 1983).

- MATAIX LORDA, M., Divertimientos lógicos y matemáticos (Marcombo, Madrid, 1979).

- MATAIX, M., Cajón de sastre matemático (Marcombo, Madrid, 1981).

- MATAIX, M., Fácil, menos fácil y difícil (Marcombo, Madrid, 1981).

- MATAIX, M., El discreto encanto de las matemáticas (Marcombo, Madrid, 1979).

- PEDOE, D., La geometría en el arte (G. Gili, Barcelona, 1979).

- PERELMAN, Y.I., Problemas y experimentos recreativos (Mir, Moscú, 1975).

- PERELMAN, Y., Matemáticas recreativas (Martínez Roca, Barcelona, 1968).

- PERELMAN, Y., Algebra recreativa (Mir, Moscú, 1978).

- PERELMAN, Y., El divertido juego de las matemáticas (Círculo de Lectores, Madrid, 1970).



- RADEMACHER, H., y TOEPLITZ, O., Números y figuras (Alianza, Madrid, 1970).

- SMULLYAN, R., ¿La dama o el tigre? y otros pasatiempos lógicos (Cátedra, Madrid, 1983).

- SMULLYAN, R., ¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos (Cátedra, Madrid, 1981).

- TAHAN, MALBA (seudónimo de J.C. de Melho), El hombre que calculaba (Losada, Madrid, 1980).

- Tangram (anónimo) (Labor, Barcelona, 1981).

- THIO DE POL, S., Primos o algunos dislates sobre números (Alhambra, Madrid, 1975).

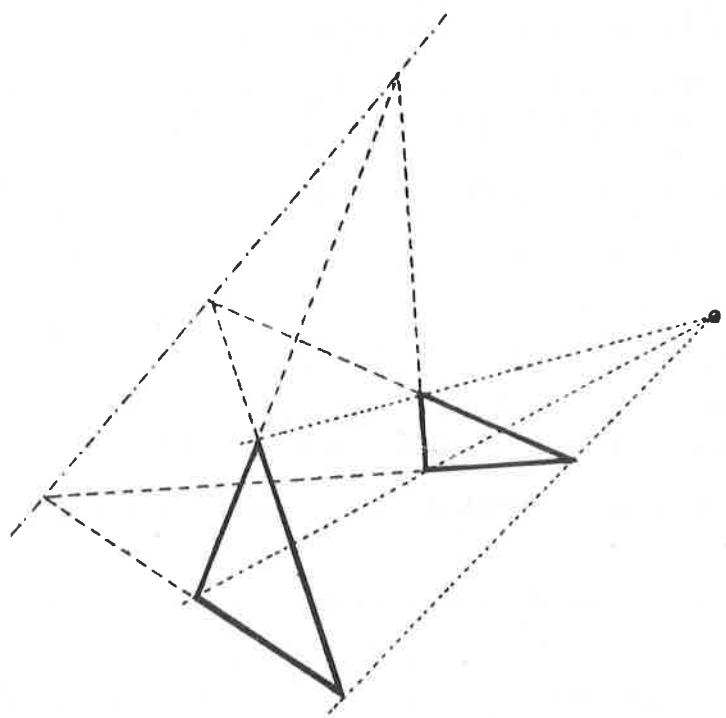
- UNICEF, Juegos de todo el mundo (UNICEF, Zürich, 1978).

- VANNIER, E. y CHAUVEU, P., Cómo jugar y divertirse con su calculadora de bolsillo (Altalena, Madrid, 1978).

- VASILIEV, N.B. y GUTENMAJER, V.L., Rectas y curvas (Mir, Moscú, 1980).

- VIVES, P., Juegos de ingenio (Círculo de Lectores, Madrid, 1983).

- WARUSFEL, Los números y sus misterios (Martínez Roca, Madrid, 1972).





## EL PROBLEMA SEMANAL

Por Fidel Oliveros
Catedrático del I.B. "Avenida de los Toreros". Madrid.

En el Seminario de Matemáticas de nuestro Instituto, hemos venido realizando a lo largo del curso que ahora termina una experiencia, como actividad extraescolar, con el título de Problema Semanal. Ha consistido sencillamente en la proposición a los alumnos, con carácter voluntario, de dos o tres problemas semanales, no para resolverlos en la clase, sino para que libremente en su casa, bien individualmente o en equipo, realizasen un trabajo personal. En vísperas de las vacaciones de Navidad y Semana Santa, el número de problemas propuestos fue mayor. Normalmente cada viernes se les daban los enunciados y se recogían las soluciones aportadas de los correspondientes a la semana anterior, a la vez que se les entregaba las soluciones correctas de éstos.

La elección de los enunciados ha sido objeto de un cuidado especial. Se ha procurado que no presentaran dificultades grandes, para evitar desalientos, ni que tampoco fueran triviales, con objeto de motivar suficientemente el interés de los muchachos. En su mayor parte, fueron tomados de los excelentes libros: "Elementary Mathematics" (Selected Topics and Problem Solving), de Dorofeev y otros; "Problemas de Matemáticas Elementales", de Lidski; y "Rectas y Curvas", de Vasiliev, los tres de la editorial MIR. Asimismo, pensando que el prestigio de las Olimpiadas Matemáticas -Nacional, Internacional e Iberoamericana- podía constituir un acicate para animar a los alumnos, se propusieron algunos tomados de estos certámenes, indicando su origen.

En cuanto a los resultados obtenidos, hemos de confesar sinceramente no estar ni con mucho satisfechos. Al comienzo, el número de participantes fue importante -toda novedad provoca un entusiasmo inicial-, pero este número fue descendiendo notablemente a lo largo del curso. No obstante, algún alumno llegó a presentar un ochenta por ciento de soluciones acertadas. Tal vez hubiera sido más atractivo y estimulante el publicar y comentar, en lugar de las soluciones elaboradas por nosotros, las proporcionadas por los propios alumnos, con referencia especial a las mejores. Seguramente ha faltado también la concesión de algún tipo de premio académico (mejora de nota), o de índole material, como libros, diplomas.

La idea, en todo caso, no nos parece mala y sí mejorable. Se publica en el Boletín con la doble esperanza de servir de punto de partida a otros Seminarios interesados en hacer algo análogo y de recibir sugerencias que permitan mejorarla.

Damos seguidamente los enunciados de los problemas que fueron propuestos.



I.1.

Dado un triángulo arbitrario ABC y un punto arbitrario P en el lado BC, trazar por P una recta que divida al triángulo en dos partes con la misma área.

I.1.

Demostrar que de la igualdad

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ac + ab$$

donde a, b y c son números reales, se deduce que $a = b = c$.

II.1.

Los 30 atletas de un equipo reciben puntuaciones de 2, 3, 4 y 5 puntos. La suma de los puntos del equipo es 93. Hay más atletas con 3 puntos que con 5, y menos con 3 puntos que con 4. Además el número de los que reciben 4 puntos es divisible por 10 y el número de los que reciben 5 puntos es par.

Determinar el número de atletas que han recibido 2, 3, 4 y 5 puntos.

II.2.

Dos ciclistas dan vueltas sobre una pista circular con velocidad uniforme. Cuando se mueven en el mismo sentido el más rápido alcanza al más lento cada 25 minutos. Cuando se mueven en sentidos opuestos se cruzan cada 8 minutos.

Calcular qué distancia recorre el más lento mientras el más rápido recorre 8,316 km.

III.1.

Dado un triángulo ABC, hallar el conjunto de los puntos

M tales que el área de cada uno de los triángulos AMB, BMC, CMA sea menor que el área del triángulo ABC.

III.2.

¿En cuántos ceros termina el producto 1.2.3.4. ... 1984. .1985?

IV.1.

Probar que para cualquier número par n, el número $N = n^3 + 20n$ es múltiplo de 48.

IV.2.

Un estudiante decide poner los sellos de su colección en un album. Si pone 20 sellos por hoja, quedarán sellos sin colocar; si pone 23 sellos por hoja, quedará al menos una hoja vacía. Si se le regala otro album de la misma clase con 21 sellos en cada hoja, tendrá en total 500 sellos. ¿Cuántas hojas hay en el album.

V.1.

Una fábrica tiene que enviar 1100 objetos a un cliente. Los objetos son empaquetados en cajas de tres tipos. Una caja del tipo A contiene 70 objetos, una caja del tipo B contiene 40 y una caja del tipo C contiene 25. El coste de envío de una caja del tipo A es 2000 pesetas; el de una del tipo B, 1000 pesetas, y el de una del tipo C, 700 pesetas. ¿Qué clase de cajas deberán ser empleadas para que el coste de envío sea mínimo? Todas las cajas deben ir llenas.

V.2.

Dos caras de una pirámide triángular son triángulos equiláteros de lado a, y las otras dos caras son triángulos rectángulos isósceles. Hallar el radio de la esfera inscrita en la pirámide. (La esfera inscrita es la contenida en el interior de la esfera y tangente a las cuatro caras.



VI.1.

Dos postes clavados en el suelo tienen de altura 2 metros y 3 metros, respectivamente. El extremo de cada uno se une con el pie del otro con un alambre rectilíneo. Estos dos alambres se cruzan en un punto P.

¿Qué distancia debe haber entre los pies de los postes para que la altura del punto P sobre el suelo sea de 1,20 metros? ¿Y para qué sea un metro?

VI.2.

Demostrar que para cualquier número natural n se cumple:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

VII.1.

Dos mecanógrafas realizan un trabajo. La segunda empieza a trabajar una hora después que la primera. Tres horas después de que la primera mecanógrafa empezara el trabajo queda aún por hacer 9/20 del trabajo. Cuando terminan observan que cada una ha realizado la mitad de la labor. ¿Cuántas horas tardaría cada una en hacer el trabajo individualmente?

VII.2.

En el interior de un triángulo equilátero de lado a hay tres círculos iguales tangentes a los lados del triángulo y mutuamente tangentes entre sí. Hallar el área del triángulo curvi líneo formado por los arcos de los círculos mutuamente tangentes. (Siendo sus vértices los puntos de tangencia).

VIII.1.

Simplificar la expresión:

$$\sqrt{9 - 6a + a^2} + \sqrt{9 + 6a + a^2}$$

donde $a < -3$.

VIII.2.

Probar el teorema: Si el producto de $n \geq 2$ números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual a n, es decir, si $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$,

$$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots\ x_n > 0$$

entonces,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$$

IX.1.

Simplificar

$$\frac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}$$

para $1 < x < 2$.

IX.2.

A partir de las longitudes b y c de dos lados de un triángulo, y de la longitud l de la bisectriz del ángulo formado por ellos, calcular la longitud del tercer lado.



X.1.

¿Para qué valores reales de x se cumple

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = A$$

siendo: a) $A = \sqrt{2}$, b) $A = 1$, c) $A = 2$ y teniendo en cuenta que en las raíces sólo se toma el valor positivo?

(Olimpiada Matemática Internacional, 1959)

X.2.

Tres personas A, B y C juegan de la siguiente forma: sobre tres tarjetas hay escrito un número entero (uno en cada una). Estos tres números, p, q, r, cumplen las desigualdades $0 < p < q < r$. Las tres tarjetas se barajan y se da una a cada jugador, que recibe tantas piedras como indica el número que tiene en su tarjeta. De nuevo se vuelven a barajar las tarjetas, pero cada jugador conserva sus piedras.

Este proceso (barajar, repartir tarjetas, tomar piedras) tiene lugar por lo menos dos veces. Después de la última vuelta, A tiene 20 piedras, B tiene 10 y C tiene 9. En la última vuelta B recibió r piedras. ¿Quién recibió q piedras en la primera vuelta?

(Olimpiada Matemática Internacional, 1974)

XI.1.

Un tren sale de la estación A en dirección a C pasando por B. La velocidad del tren entre A y B fue la normal, pero bajó un 25% entre B y C. En el viaje de regreso, la velocidad fue la correcta entre C y B, pero entre B y A bajó un 25%. ¿Cuánto tardará el tren en hacer la distancia de A a C a velocidad normal sabiendo que invirtió el mismo tiempo en el tramo A-B que en el tramo B-C y que en el viaje A-C perdió 5/12 de hora menos que en el viaje de regreso (de C a A)?

XI.2.

Demostrar que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

XI.3.

Probar que para cualquier número $a > 0$, la desigualdad

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$$

(el primer miembro contiene un número arbitrario de radicales) es cierta.

XI.4.

Hallar una progresión geométrica de números reales sabiendo que la suma de sus cuatro primeros términos es igual a 15 y que la suma de sus cuadrados es igual a 85.

XI.5.

Hallar el coeficiente de $x^n$ en el desarrollo de

$$(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n)^2$$

XI.6.

Probar que si a, b, c son números positivos y desiguales, entonces:

a) $(a + b + c)\ (a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}) > 9$
b) $(a + b + c)\ (a^2 + b^2 + c^2) > 9\ abc$

XI.7.

Construir un triángulo del que se conocen la altura, la mediana y la bisectriz que parten de un mismo vértice.



XI.8.

El radio de un sector circular es igual a R y el radio del círculo inscrito en el sector es igual a r. Calcular el área del sector.

XI.9.

Resolver la ecuación

$$4 \operatorname{sen} x + 2 \cos x = 2 + 3 \tan x$$

XI.10.

Calcular, sin ayuda de tablas,

$$\cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7}$$

XII.1.

¿De cuántas formas se puede partir una baraja de 36 cartas en dos mitades, de modo que en cada mitad entren 2 ases?

XII.2.

Expresar $\log_{54} 168$ mediante a y b siendo:

$$\log_7 12 = a\ ; \quad \log_{12} 24 = b$$

XII.3.

Calcular, sin emplear las tablas, la expresión:

$$E = \frac{1}{2 \operatorname{sen} 10°} - 2 \operatorname{sen} 70°$$

XIII.1.

Cierto alfabeto se compone de seis letras que con el fin de transmitirlas por telégrafo se codificaron de la siguiente for ma: $\bullet \quad - \quad \bullet\bullet \quad -- \quad \bullet- \quad -\bullet$

Al trasmitir una palabra no se hicieron los intervalos que separan una letra de otra, de modo que resultó una cadena continua de puntos y rayas con 12 signos. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra transmitida?

XIII.2.

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\log_{ax} y = 2y^2$$
$$\log_a \sqrt{xa} + 2\log_{a^2} \frac{y}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$$

XIII.3.

Calcular, sin hacer uso de las tablas

$$\operatorname{sen}^4 \frac{\pi}{16} + \operatorname{sen}^4 \frac{3\pi}{16} + \operatorname{sen}^4 \frac{5\pi}{16} + \operatorname{sen}^4 \frac{7\pi}{16}$$

XIV.1.

Si: $x \neq 1,\ y \neq 1,\ x \neq y$, y

$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{xz - y^2}{1-y}$$

demuestre que ambas fracciones son iguales a: $x + y + z$.

(Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, 1985 - 4)

XIV.2.

Sea P un punto en el interior del triángulo equilátero ABC tal que PA = 5, PB = 7, y PC = 8. Halle la longitud de un lado del triángulo ABC.

(Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, 1985 - 2)



XIV.3.

Problema del pirata.- Las instrucciones dejadas por el pirata para encontrar el punto T en que está enterrado el tesoro son las siguientes:

En la Isla Desierta hay dos palmeras A y B y un mojón M no alineado con ellas. Sobre la semirrecta r que parte de A, es perpendicular a AM y está en distinto semiplano que M respecto a la recta AB, se toma el punto A' tal que AA' = AM. Análogamente, a partir de B, se halla el punto B'. El punto T es el punto medio del segmento A'B'.

Un furioso huracán ha arrancado el mojón M de su sitio. ¿Cómo se puede localizar T?

XV.1.

Resolver el sistema:

$$x + y + z = 4$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 34$$

XV.2.

A cada entero positivo n se asigna un entero no negativo f(n) de tal manera que se satisfacen las siguientes condiciones:

i) $f(rs) = f(r) + f(s)$

ii) $f(n) = 0$, siempre que la cifra en las unidades de n sea 3

iii) $f(10) = 0$

Halle f(1985). Justifique la respuesta.

(1ª Olimpiada Iberoamericana, 1985)

XV.3.

Halle las raíces $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$ de la ecuación:

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$$

sabiendo que son reales, positivas y que

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$$

($1^{\underline{a}}$ Olimpiada Iberoamericana, 1985)

XVI.1.

Sea (x,y,z) la solución del sistema de ecuaciones:

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}$$

Hallar la suma $x^3 + y^3 + z^3$.

XVI.2.

Simplificar la expresión

$$a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$$

suponiendo que todos los logaritmos han sido tomados con la misma base b.

XVI.3.

Demostrar que cualesquiera que sean los números reales x, y, z se cumple:

$$\text{sen}(x^3) + \text{sen}(y^3) + \text{sen}(z^3) - \text{sen}(zyx) < 4$$

(Olimpiada Matemática Nacional, 1985)



XVIII.1.

Un poliedro descansa sobre una de sus caras como base. La suma de todos los ángulos en las caras visibles es 3060°. Demuestre que el poliedro tiene al menos una cara con un número impar de aristas.

XVII.2.

Un señor al morir dejó \$ 23500 para ser repartido entre su viuda, su hijo y su hija, con la condición de que si muriera la hija y sobreviviera el hijo, éste recibiría 5/8 del dinero y la viuda 3/8. Pero si muriera el hijo y sobreviviera la hija, ésta recibiría 5/9 del dinero y la viuda 4/9. Sobrevivieron tanto el hijo como la hija. ¿Cuánto recibió cada uno de sus herederos?

XVII.3.

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

con incógnitas $x_1$, $x_2$, $x_3$. Los coeficientes satisfacen las condiciones:

a) $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$ son números positivos
b) los restantes coeficientes son números negativos
c) en cada ecuación la suma de los coeficientes es positiva.

Probar que el sistema dado tiene solamente la solución: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(Olimpiada Matemática Internacional, 1965)

XVIII.1.

Resolver la inecuación:

$$\sqrt{\text{sen } x} + \sqrt{\cos x} > 1$$

XVIII.2.

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$\text{sen } x + 2 \text{ sen } 2x = 3 + \text{sen } 3x$$

en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$?

XVIII.3.

Hallar los valores de a y b para los cuales el sistema

$$xyz + z = a$$

$$xyz^2 + z = b$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

tiene solamente una solución. (a, b, x, y, z, son reales).

XVIII.4.

Los lados de un triángulo son a, b, c y las medianas $m_a$, $m_b$, $m_c$. Se pide:

1) Demostrar que vale siempre la acotación

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1$$

2) Probar que estas cotas (3/4 y 1) no pueden mejorarse.

(XI Olimpiada Matemática Nacional)

XVIII.5.

En una circunferencia de radio igual a la unidad se trazan dos cuerdas AB y AC, de igual longitud.

Se pide:

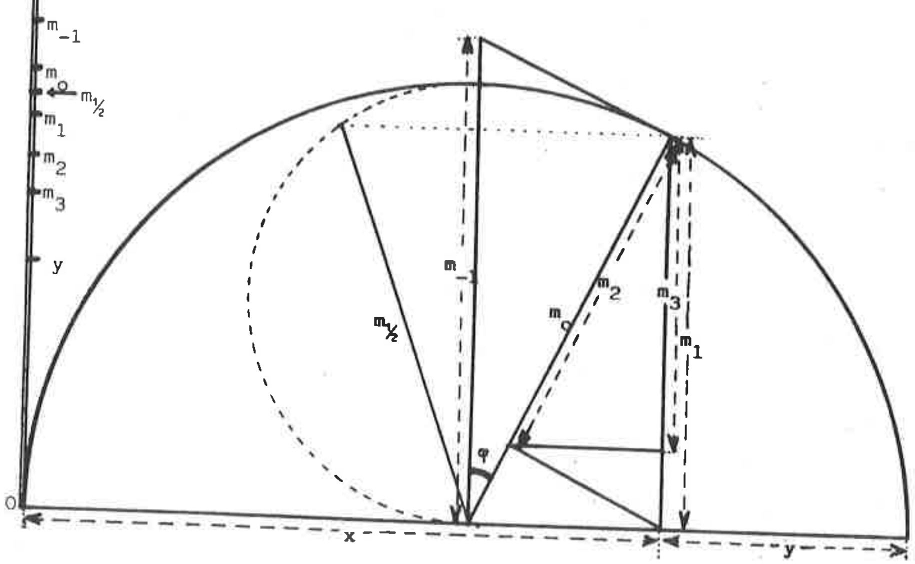


1) Averiguar cómo se puede construir una tercera cuerda, DE, que quede dividida en tres partes iguales por sus intersecciones con AB y AC.

2) Si, en particular, vale AB = AC = $\sqrt{2}$, ¿cuánto valen los dos segmentos en que queda dividida AB por la cuerda DE?

(XI Olimpiada Matemática Nacional)

## LAS MEDIAS Y SUS RELACIONES




$m_o = \frac{x+y}{2}$ (aritmética)

$m_1 = \sqrt{xy}$ (geométrica)

$m_2 = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ (armónica)

( x , y , reales positivos )

$$\frac{m_o}{m_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

La progresión geométrica $m_o$ , $m_1$ , $m_2$ (de razón $\cos\varphi$ ), se puede extender por ambos lados poniendo

$$m_{-1} = m_o^2/m_1 = \frac{(x+y)^2}{4\sqrt{xy}} \qquad m_3 = m_2^2/m_1 = \frac{4\sqrt{x^3y^3}}{(x+y)^2}$$

Evidentemente:

$$m_{-1} \geq m_o \geq m_1 \geq m_2 \geq m_3$$

y $\{x = y\} \Longrightarrow \{x = y = m_{-1} = m_o = m_1 = m_2 = m_3\}$ .

Es bien sabido que $\{x > y\} \Longrightarrow \{x > m_o > m_1 > m_2 > y\}$ ,

pero, en cambio, las desigualdades $x > m_{-1} > m_3 > y$ , sólo se cumplen si $0{,}087378.. < \frac{y}{x} < 1$ ( $0{,}087378...$ es una raiz de $(1+t)^4 = 16t$ ); es decir, $m_{-1}$ y $m_3$ sólo pueden considerarse medias si x e y no son muy diferentes.

Puede definirse $m_{½} = \sqrt{m_o m_1}$ interpolando un término en la progresión geométrica. En la figura puede verse su representación gráfica.



## COMPETICIONES MATEMATICAS EN CHINA

Por Rodolfo Esteve Arolas
Profesor Agregado del I.B. de Novelda (Alicante).

---

Los distintos boletines de esta asociación han venido, desde el número 2, dedicando unas páginas a la difusión de enunciados de los problemas propuestos en las distintas Olimpiadas Internacionales.

Es de todos conocida la escasa difusión que estos certámenes tienen a nivel de gran público en nuestro país, ya que incluso la Olimpiada Nacional no merece ningún comentario en los grandes medios de comunicación y, normalmente, hay que recurrir a publicaciones especializadas, en las que tampoco es frecuente encontrar una información exhaustiva.

No es España un país donde se dedique demasiado esfuerzo a la formación de "problemistas". Los que seguimos más o menos de cerca este tipo de competiciones, creo que muchas veces nos hemos sentido realmente perplejos ante el aparato matemático que en ellas se maneja. Cabría preguntarse acerca de la existencia en una diferencia de niveles o, quizás, acerca de los contenidos de nuestros programas; lo cierto es que los resultados -los pobres resultados- obtenidos por España, exceptuando la última actuación en la Olimpiada Iberoamericana, son bastante elocuentes.

Por todo esto y con ánimo de divulgar el quehacer matemático en otros países, quizás sea enriquecedor el que se conozca su actividad en este campo. Entre ellos, por su lejanía y enorme tradición cultural, puede ser de interés el saber algo sobre la actividad matemática que se desarrolla en la República Popular de China.

Las primeras competiciones aparecieron como respuesta a una creciente demanda social, basada en la necesidad de actualización que sintió el pueblo chino. Bajo el nuevo régimen, las autoridades responsables de la educación emprendieron la tarea de recompensar a los estudiantes por sus méritos académicos, y consideraron que era necesario, entre otras cosas, el fomentar un aumento del nivel matemático, conscientes de que ello les permitiría dar el "gran salto hacia adelante".

En 1956 se celebraron en Shangai, Pekín, Tientsin y Hankow, las cuatro ciudades más importantes de China, las primeras pruebas.

Cada competición consta de dos niveles; uno corresponde a los estudiantes de 2ª año y otro para estudiantes de 3er año (son los grados máximos de la escuela media superior, equivalentes a nuestro 3ª de B.U.P. y el C.O.U.) y dentro de cada nivel la competición se divide en tres vueltas:

1ª vuelta: la realiza la misma escuela y de entre todos los participantes es seleccionado un 3% que accede a la

2ª vuelta: está dirigida por un comité de competición nacional y entre los alumnos presentados es seleccionado entre un 6 y un 10%.

3ª vuelta: organizada igualmente por el comité nacional, da un total de 10 ganadores.

Al final de cada vuelta se conceden premios, aparte de una gran publicidad, y a los tres mejores del nivel 3er año se les permite estudiar cualquier especialidad en Matemáticas sin necesidad de realizar examen previo de ingreso.



El Comité de Competiciones Matemáticas consta de 17 miembros, todos pertenecientes a la Sociedad Matemática de China, y en su actividad se ven apoyados por todo tipo de organizaciones sociales, además de la prensa y radio que mediante la difusión y publicidad de noticias relacionadas con las competiciones, intentan despertar el interés de los estudiantes.

La misma Sociedad ha realizado un análisis de los resultados obtenidos y elaborado un informe de las deficiencias encontradas; estas son:

1ª. Muchos alumnos muestran deficiencias en el análisis de un problema a base de hipótesis y conclusiones. No consiguen llegar al centro del problema mediante la utilización de razonamientos lógicos.

2ª. En las escuelas medias se debería prestar más atención al estudio de las desigualdades para de esta forma facilitar la transición de las escuelas medias a las superiores.

3ª. Los estudiantes no son lo suficientemente hábiles al realizar operaciones, sobre todo en problemas complicados.

4ª. Además de los libros de texto, los estudiantes deberían leer libros adicionales, revistas, etc. y formar grupos de estudio para discutir la solución de problemas.

En cuanto al aspecto positivo de la competición se constató el hecho de que los 44 mejores alumnos de la 2ª vuelta pertenecían a 26 escuelas y los diez mejores de la vuelta final pertenecían a nueve escuelas distintas. Esto indicaba la alta calidad de la enseñanza de las Matemáticas.

En la sección de Problemas Propuestos de este Boletín damos algunos de los enunciados correspondientes a la fase final ($3^{\underline{a}}$ vuelta) de los años 1956 y 1957. Se asignó un tiempo total equivalente a 30 minutos para cada problema.



## NOTA SOBRE EL CONCEPTO DE LIMITE Y EL AXIOMA DE ELECCION EN EL BACHILLERATO

Por Santiago Calviño Castelo
Profesor Agregado del I.B. "Emperatriz María de Austria"

Hacer más claro, o por lo menos más diáfano, el turbio concepto de límite de una función en la enseñanza de las matemáticas en el 2ª curso de B.U.P. es un propósito encomiable, pero tal vez inútil. Los libros de texto al uso lo suelen despachar, unos con saña y a gusto, otros con sabia parquedad, y los más con desconcierto. En ellos aparecen dos definiciones y las dos son traducción de la idea de Cauchy, que se limitó a enunciar:

*"Cuando los valores que va tomando sucesivamente una variable particular se aproximan a un valor fijo, de tal manera que acaban por diferir de él tan poco como queramos, entonces este último valor recibe el nombre de límite de los anteriores".*

El concepto de función no había sido formulado como una correspondencia entre dos variables. Lo que Cauchy llama variable no tiene todavía el sentido de un signo que puede tomar un valor cualquiera de un conjunto, sino que se acerca a nuestra idea de función. No hace, tampoco, mención explícita del comportamiento de la variable independiente respecto a la cual la variable particular tiene límite. Esta idea, en el caso de que el límite de una función $f(x)$ es un número L cuando x tiende a $x_0$, fue transcrita de dos manera diferentes:

A) Si para toda sucesión $\{a_n\} \to x_0$, con $a_n \neq x_0$, $\forall n$, se cumple que $\{f(a_n)\} \to L$.

B) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para todo x que satisfaga $|x_0 - x| < \delta$ y $x \neq x_0$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.

La primera formulación, de carácter intuitivo, muestra la idea de aproximación a través de una sucesión de valores tendentes a L, pero es poco operativa en cálculos y demostraciones. La segunda, en cambio, es más abstracta y rigurosa, no da apoyo a nuestra imaginación, pero resulta de fácil manejo en las demostraciones.

Ambas definiciones se manejan en los libros de texto. Es necesario probar, para que tenga sentido su utilización, que son equivalentes. Podríamos decir que el rigor se basa en la intuición y ésta garantiza a aquél, si se verifica: $A \Longrightarrow B$ y $B \Longrightarrow A$.

Supongamos, pues, el enunciado de Cauchy traducido en A y deduzcamos B. Procederemos por reducción al absurdo. Si de A no se dedujera que para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $|x-x_0| < \delta$ y $x \neq x_0$, entonces $|f(x)-L| < \varepsilon$, sería cierta la negación de B, esto es, se cumpliría:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall \delta > 0, \exists x, |x-x_0| < \delta, \quad x \neq x_0$$

que cumple $|f(x-L| \geq \varepsilon$.

Para $\varepsilon > 0$ que satisfaga lo anterior, tomando $\delta = 10^{-n} > 0$ existe por lo menos un x tal que $|x-x_0| < 10^{-n}$, $a_n \neq x_0$ y $|f(x)-L| \geq \varepsilon$. En definitiva se tendría $\{a_n\} \to x_0$ y $|f(a_n)|$ no tiende a L, lo que contradice A. Luego necesariamente $A \Longrightarrow B$.

Recíprocamente, tomemos B como hipótesis y deduzcamos A. Sea $\{a_n\}$ una sucesión en el dominio de f(x), tal que $\{a_n\} \to x_0$. Probemos que $\{f(a_n)\} \to L$. En efecto: Para cada $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que todo término de la sucesión que satisfaga $|a_n - x_0| < \delta$, cumple que $|f(a_n)-L| < \varepsilon$. Como $\{a_n\} \to x_0$ y $\delta > 0, \exists n_0, \forall n > n_0$



es $|a_n - x_0| < \delta$. Por tanto, para todo $n > n_0$, $|f(a_n)-L| < \varepsilon$, luego la sucesión $\{f(a_n)\}$ tiene por límite L, es decir, para cada $\{a_n\} \longrightarrow x_0$ con $a_n \neq x_0$, es $\{f(a_n)\} \to L$. En definitiva $B \Longrightarrow A$.

En la prueba de esta equivalencia ($A \Longrightarrow B$) hemos utilizado un axioma, que aunque admitido, no deja de ser controvertido. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos un número x del conjunto:

$$S = \{x \in R \ |x-x_0| < 10^{-n}, \ x \neq x_0 \quad y \quad |f(x)-L| \geq \varepsilon\}$$

al que denominamos $a_n$. Esto supone la posibilidad de elegir un elemento de cada miembro de una familia infinita de conjuntos. Evidentemente, el cómo puedan hacerse dichas elecciones es muy difícil de explicar. Quizá haga falta toda la eternidad. La posibilidad de escoger un elemento de cada uno de los conjuntos de una familia fue un recurso veladamente utilizado en muchas demostraciones. En el año 1904, Zermelo formuló explícitamente esta posibilidad de elección como un axioma, conocido con el nombre de Axioma de Elección. En él se acepta como posible la elección simultánea de un elemento arbitrario de cada uno de los conjuntos de una colección. Sin embargo, Zermelo aportó en su enunciado toda expresión que sugiriera infinitas elecciones arbitrarias:

*"Dada una familia, finita o infinita, $F = \{A_i\}$, $i \in I$, de conjuntos no vacíos, se llama función de selección de la familia F a una función $\phi$, cuyo dominio es $\{A_i\}$, $i \in I$, y tal que a cada $A_i$ le haga corresponder un elemento de $A_i$, $\phi(A_i) = x_i \in A_i$".*

Definición que se completa con la afirmación:

*"Para toda familia no vacía de conjuntos existe una función de selección".*

La característica esencial del axioma es la existencia de tal función, no el que pueda construirse. En algunos casos puede construirse efectivamente. Por ejemplo, en la familia finita formada por los conjuntos cuyos elementos son las ciudades de cada país europeo, podemos definir una función selección que a cada conjunto (país) le haga corresponder su capital. En la familia de infinitas rectas del plano paralelas a $y = 0$, podemos definir una función de selección que a cada recta le haga corresponder el punto de intersección con la recta $x = 1$. Pero las cosas no son siempre tan fáciles. Así, por ejemplo, no se conoce ninguna función de este tipo sobre la familia formada por P(R). Se pensó en un principio, que en este conjunto de las partes de R a cada conjunto se hiciera corresponder su elemento mínimo, lo que implica la posibilidad de una buena ordenación (todo conjunto no vacío posee un primer elemento). Pero también R se mostró reacio a una buena ordenación. Se han hecho otras formulaciones de axiomas equivalentes al axioma de elección, como el de Zorn, el teorema de maximalidad de Haussdorf o el teorema de Zychonoff. En el año 1938, Gödel demostró que si los axiomas de la teoría de conjuntos son consistentes, también permanecerán consistentes al añadirles el axioma de elección: este axioma no genera contradicciones... aunque sea poco digerible.

BIBLIOGRAFIA


- "Del Cálculo a la teoría de Conjuntos".- I.- Grattan-Guiness. Alianza, Madrid, 1985.
- "History of Mathematics".- C. Boyer. John Wiley and Sons, New York, 1968.
- "Compendio de Matemática".- J. Sebastiao e Silva. C.E.P., Lisboa, 1976.
- "Iniciación a la teoría de conjuntos".- J. de Lorenzo. Tecnos, 1972.
- "Matemática constructiva".- Allan Calder. Investigación y Ciencia, Diciembre 1979.




## PROGRAMA PARA EL CALCULO DEL RANGO

Por Fernando Piñero Navarro

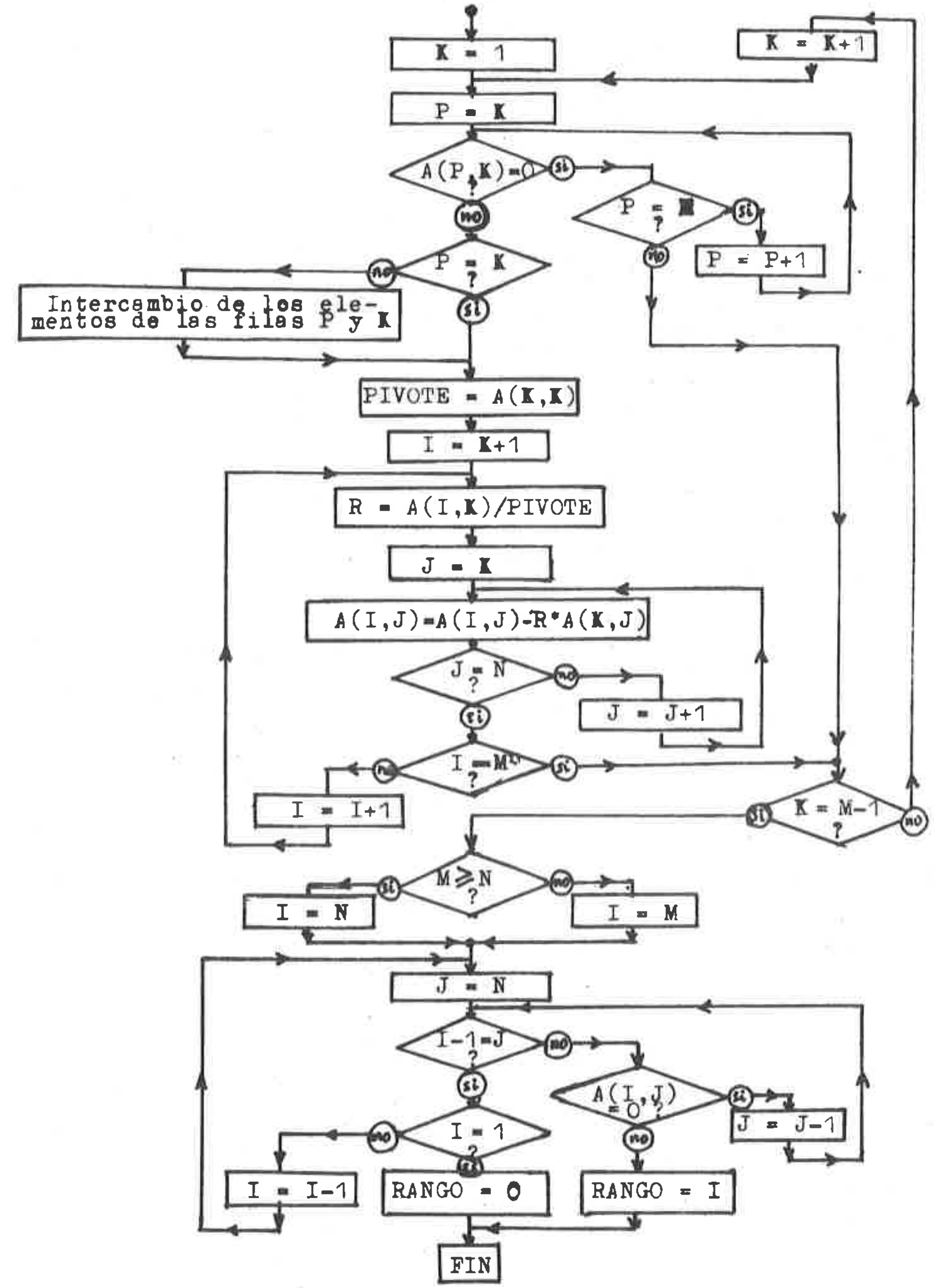
Hay muchos problemas y cuestiones de Algebra Lineal en las cuales se hace necesario el cálculo del rango de una matriz, por ejemplo, estudio de la dependencia o independencia lineal de una familia de vectores, estudio de una aplicación lineal, discusión de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales, etc.

El algoritmo que expongo a continuación trata de resolver esta cuestión de una forma bastante directa y que puede ser útil para casos no excesivamente complicados. El algoritmo va acompañado de un programa en lenguaje Basic en el que ha sido necesario complicar algo su estructura dadas las limitaciones propias de este lenguaje.

En el algoritmo he prescindido de la parte correspondiente a la introducción de datos para el inicio del programa y también de la parte correspondiente a la impresión de resultados. El algoritmo consta de dos partes claramente diferenciadas, la primera de ellas se centra en el estudio y reducción de la matriz cuyo rango se desea calcular, esto se realiza mediante el llamado método del pivote, para ello se van eligiendo sucesivamente como pivotes los elementos de la forma A(K,K); en caso de que alguno de ellos fuese cero, se intercambiaría la fila sobre la que está situada por otra situada por debajo en la que el elemento correspondiente (en la misma columna) fuese distinto de cero. El método del pivote consiste básicamente en ir haciendo ceros los elementos situados debajo de los sucesivos pivotes; de esta forma se llegaría a una matriz del mismo rango que la inicial en la que dicho rango viene dado por el número de filas no nulas, estas filas no nulas se van a encontrar situadas de forma sucesiva en la parte superior de la matriz. Una posible mejora de esta parte del algoritmo podría consistir en ir modificando en cada paso el orden de las filas de manera que el pivote fuese lo mayor posible, ya que si fuese muy pequeño, un error de redondeo, aunque pequeño en valor absoluto, puede provocar errores grandes en el cociente, con el consiguiente perjuicio en la precisión de los resultados.

La segunda parte del algoritmo trata sobre la lectura del rango en la matriz reducida. Para ello nos situamos sobre el último elemento que podría ser distinto de cero (ésto depende del número de filas y de columnas), comenzando a leer a partir de este elemento hacia la izquierda (teniendo como margen izquierdo el pivote) y luego hacia arriba saltando a la fila anterior hasta que aparezca un elemento distinto de cero, entonces el índice de la fila sobre la que está este elemento nos proporcionaría el rango buscado.





```
10 REM********** PROGRAMA PARA EL CALCULO DEL RANGO *********
20 REM********* LECTURA DE LA MATRIZ*********
30 INPUT" NUMERO DE FILAS";M:INPUT" NUMERO DE COLUMNAS";N
40 DIM A(M,N)
50 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO N:PRINT" ELEMENTO A( ";I;",";J;")":INPUT A(I,J):NEXT
J:NEXT I
60 PRINT " MATRIZ INICIAL"
70 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO N:PRINT TAB(10*J-10) A(I,J);:NEXT J:PRINT:NEXT I
80 REM ******REDUCCION DE LA MATRIZ*******
90 FOR K=1 TO M-1
100 P=K
110 WHILE A(P,K)=0
120 IF  P=M THEN GOTO 210 ELSE P=P+1
130 WEND
140 IF P<>K THEN  FOR L=1 TO N:SWAP A(P,L),A(K,L) :NEXT L
150 PIVOTE=A(K,K)
160 FOR I=K+1 TO M
170 R=A(I,K)/PIVOTE
180 FOR J=K TO N
190 A(I,J)=A(I,J)-R*A(K,J)
200 NEXT J:NEXT I
210 NEXT K
220 PRINT" MATRIZ REDUCIDA"
230 FOR F=1 TO M:FOR C=1 TO N:PRINT TAB(10*C-10) INT (A(F,C)*10)/10;:NEXT C:PRIN
T:NEXT
240 REM********* LECTURA DEL RANGO EN LA MATRIZ REDUCIDA*******
250 IF M>=N THEN I=N ELSE I=M
260 FOR Q=I TO 1 STEP -1
270 FOR S=N TO Q STEP -1
280 IF A(Q,S)<>0 THEN RANGO=Q: PRINT "EL RANGO ES ";RANGO:END
290 NEXT S
300 NEXT Q
310  PRINT" EL RANGO ES 0"
320 END
```

EJEMPLO:

```
 MATRIZ INICIAL
 1         2         3
 4         5         6
 7         8         9
 MATRIZ REDUCIDA
 1         2         3
 0        -3        -6
 0         0         0
EL RANGO ES  2
Ok
```



## LAS MEDALLAS "FIELDS"

---

Alfred Nobel, de cuyo fallecimiento se cumplen ahora los noventa años, instituyó los famosos premios que llevan su nombre y que cada año dan reconocimiento universal a los sabios más destacados por su obra en favor de la Paz, en la Literatura, o en la investigación científica, ésta en las ramas de Física, Química y Medicina.

Mucho se ha especulado sobre las razones por las que a los matemáticos no se les ha concedido la posibilidad de acceder a tan importantes galardones. Este olvido ha llegado a atribuirse al hecho de una supuesta enemistad personal entre Nobel y su compatriota Magnus Mittag-Leffer, eminente matemático, quince años más joven que él. Un amigo de Mittag-Leffer, John Charles Fields, quiso reparar en lo posible esa omisión de Nobel, y con este objeto instituyó un premio con resonancia mundial para los matemáticos más destacados. Nacido en Hamilton (Ontario), en 1893, fue profesor en la Universidad de Toronto, en la que organizó el ICM (International Congress of Mathematicians) en 1924. Allí propuso la creación de una medalla para distinguir a los autores más relevantes por su contribución al progreso de las Matemáticas. Fallecido poco después, en 1932, las medallas que llevan su nombre comenzaron a concederse en 1936, y cada cuatro años los ICM honran con ellas a algunos insignes matemáticos. A diferencia de los premios Nobel, la concesión de las medallas no llevan consigo un premio en metálico.

Hasta el momento, la lista de los matemáticos que han sido honrados con la Medalla Fields, es la siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| I | (1936) | Lars V. Ahlfors (U.S.A.)<br>Jesse Douglas (U.S.A.) |
| II | (1950) | Laurent Schwartz (Francia)<br>Atle Selberg (U.S.A.) |
| III | (1954) | Kunihiko Kodaira (U.S.A.)<br>Jean-Pierre Serre (Francia) |
| IV | (1958) | Klaus Friedrich Roth (Reino Unido)<br>René Thom (Francia) |
| V | (1962) | Lars V. Hörmander (Suecia)<br>John W. Milnor (U.S.A.) |
| VI | (1966) | Michael Francis Atiyah (Reino Unido)<br>Paul J. Cohen (U.S.A.)<br>Alexandre Grothendieck (Francia<br>Stephen Smale (U.S.A.) |
| VII | (1970) | Alan Baker (Reino Unido)<br>Heisuke Hironaka (U.S.A.)<br>Pyotr S. Novikov (U.R.S.S.)<br>John G. Thompson (U.S.A.) |
| VIII | (1974) | Enrico Bombieri (Italia)<br>David Munford (U.S.A.) |
| IX | (1978) | Pierre Deligne (Bélgica)<br>Charles Fetterman (U.S.A.)<br>Gregory A. Margulis (U.R.S.S.)<br>David Quillan (U.S.A.) |
| X | (1982) | Alain Connes (Francia)<br>William Zhurston (U.S.A.)<br>Shing-Tung Yau (U.S.A.)<br>Robert Endre Tarjan (U.S.A.) |



El próximo mes de agosto en Berkeley se celebrará el Congreso del ICM, correspondiente a este año, y en él se concederán las nuevas medallas. Estas son de oro, y llevan la efigie de Arquímedes con las inscripciones: TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI y CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE.

En la redacción de este Boletín, todavía no se han recibido soluciones a los siguientes problemas propuestos en números anteriores:

- Problema n° 6 del Boletín n° 4
- Problema n° 3 del Boletín n° 5
- Problema n° 3 del Boletín n° 6
  (Ver corregido el enunciado de éste en el n° 8)
- Problemas n° 3 y n° 4 del Boletín n° 7
- Problemas n° 3 y n° 6 del Boletín n° 8
- Problemas números 1 al 8 y 10 del Boletín n° 9.

Esperamos que esta nota anime a nuestros compañeros a encontrar estas soluciones que faltan y nos las remitan para su publicación en los próximos números.



## PROBLEMAS PROPUESTOS

### ALGUNOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA OLIMPIADA MATEMATICA DE LA REPUBLICA POPULAR CHINA, EN LOS AÑOS 1956 Y 1957

#### PROBLEMA 1ª

Dada la función polinómica $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, con coeficientes enteros, y el número entero impar p y el número entero par q, tales que f(p) y f(q) son ambos impares, probar que la ecuación f(x) = 0 no tiene raíces enteras.

#### PROBLEMA 2ª

Encontrar 10 números naturales consecutivos compuestos.

#### PROBLEMA 3ª

D y C son dos puntos de una semicircunferencia de diámetro AB. Sea X un punto cualquiera de AB. Probar que:

$$\text{tg } ACX \cdot \text{tg } BDX = \text{tg } BAC \cdot \text{tb } ABD$$

#### PROBLEMA 4ª

Dado el entero a mayor que 2 y el número compuesto b (b > 0), si b puede ser dividido por r números positivos distintos, probar que $a^b - 1$ puede ser dividido al menos por r números positivos distintos.

#### PROBLEMA 5ª

Si $x + y + z = 0$, probar que:

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)\left(\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5}\right) = \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7}$$

ALGUNOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA OLIMPIADA MATEMATICA AUSTRALIANA DE 1982

PROBLEMA 6ª

La mantisa $\{x\}$ de $x$ se define como el mínimo número no negativo tal que $x - \{x\}$ es un entero (por ejemplo: $\{1,6\} = 0,6$; $\{\pi\} = \pi - 3$). Probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \{(2+\sqrt{3})^n\} = 1$$

PROBLEMA 7ª

Sea ABC un triángulo, y sea P el punto en que la bisectriz interior del ángulo A vuelve a cortar a su circunferencia circunscrita. Se definen Q y R análogamente. Probar que:

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA$$

PROBLEMA 8ª

Encontrar los números reales d que tengan la siguiente propiedad: Si $f(x)$ es una función continua para $0 \le x \le 1$, que cumple $f(0) = f(1)$, existe entonces un t tal que

$$0 \le t < t+d \le 1 \quad \text{y} \quad f(t) = f(t+d).$$

PROBLEMA 9ª

En cada recuadro de una tabla $n \times n$ (o sea, de n filas y n columnas) hay escrito un número. Sabemos que dos cualesquiera de las filas de la tabla son diferentes. Demostrar que en la tabla hay una columna tal que si se omite, la tabla que queda, tampoco tiene filas iguales.

(Nota: Las filas 1, 1, 2, 7, 5 y 1, 1, 7, 2, 5 formadas con los mismos números en distinto orden, se consideran diferentes, es decir, no iguales).



PROBLEMAS RESUELTOS

Se han recibido las siguientes soluciones a los problemas propuestos en nuestros Boletines números 8 y 9.

PROBLEMA 1ª (Boletín nº 8)

Hallar todas las ternas de números enteros (a,b,c) tales que:

$$\begin{aligned} a + b^2 + c &= 24 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 210 \\ abc &= 440 \end{aligned}$$

Solución

Al ser, $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+ac+bc)$, se tiene:

$$24^2 = 210 + 2(ab+ac+bc)$$

de donde,

$$ab + ac + bc = 183 \qquad (1)$$

Las ecuaciones 1ª y 3ª de los datos, junto con la (1) obtenida, son las relaciones de Cardano. Por tanto, las ternas buscadas son las soluciones enteras de la ecuación:

$$x^3 - 24x^2 + 183x - 440 = 0$$

Estas son $x_1 = 5$, $x_2 = 8$, $x_3 = 11$. Por tanto las ternas buscadas son:

$$a = 5 \qquad b = 8 \qquad c = 11$$

y todas sus permutaciones. Es decir,

| | | |
|---|---|---|
| a = 5 | b = 11 | c = 8 |
| a = 8 | b = 5 | c = 11 |
| a = 8 | b = 11 | c = 5 |
| a = 11 | b = 8 | c = 5 |
| a = 11 | b = 5 | c = 8 |

Rodolfo Esteve Arolas
Valencia.

---

Otras soluciones de:

- Onésimo Millán Gómez-Camino (Ciudad Real).
- Vicente Mendiola (Ciudad Real).

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 2ª (Boletín nº 8)

Sea P un punto en el interior del triángulo equilátero ABC tal que PA = 5, PB = 7 y PC = 8. Hallar la longitud del lado del triángulo.

---

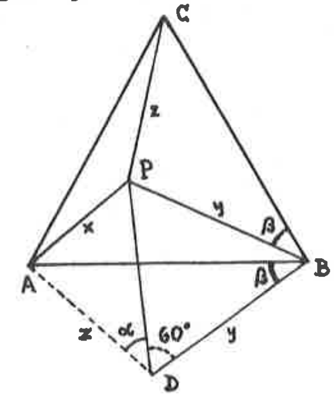
Solución

Resolvamos el problema en su forma general. El punto P puede encontrarse -según esta solución- sobre un lado, en el exterior o en el interior. En cualquier caso la solución es única (al ser equilátero). Sea "a" el lado del triángulo y x, y, z , las distancias de P a los vértices.

Construyamos un triángulo equilátero PBD tal y como indica la figura.



Es evidente que los ángulos β señalados en la figura son iguales.




Por tanto, los triángulos PBC y DAB son semejantes al tener dos lados iguales (AB = BC = a) (PB = DB = y) y el ángulo β que comprenden.

Es consecuencia de ésto que AD = PC = .

Es claro que $\cos\alpha = \dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}$, en DAP.

Así es,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^4+y^4+z^4)}}{2yz}$$

En DAB es,

$$a^2 = y^2+z^2-2yz\cos(60+\alpha) = y^2+z^2-2yz\left(\frac{\cos\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)$$

sustituyendo sen α y cos α es:

$$a^2 = y^2+z^2-2yz\,\frac{y^2+z^2-x^2}{4yz} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,2yz\,\frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2 - 4(x^4+y^4+z^4)}}{2yz}$$

operando,

$$2a^2 = x^2+y^2+z^2+\sqrt{3}\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2 - 4(x^4+y^4+z^4)}$$

haciendo,

$$x^2+y^2+z^2 = t \quad y \quad x^4+y^4+z^4 = u$$

queda,

$$2a^2 = t + \sqrt{3}\sqrt{t^2-u}$$

Elevando al cuadrado y agrupando convenientemente tenemos:

$$(a^2+t)^2 = 3(u+a^4)$$

esto es,

$$(a^2+x^2+y^2+z^2)^2 = 3(x^4+y^4+z^4+a^4)$$

Estamos ahora en condiciones de resolver el problema, haciendo x = 5, y = 7, z = 8, y se obtiene como solución:

$$a = \sqrt{129}$$

Rodolfo Esteve Arolas
Valencia.

---

Otra solución de:

Onésimo Millán Gómez-Camino (Ciudad Real).

- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 4ª (Boletín nª 8)

Se tiene la igualdad $\frac{yz-x^2}{1-x} = \frac{xz-y^2}{1-y}$ en la cual $x \neq 1$, $y \neq 1$, $x \neq y$. Demostrar que ambas fracciones son iguales a x+y+z.

---

Solución

Cualquiera de las razones es igual a la diferencia de antecedentes partida por la diferencia de consecuentes, que es

$$\frac{yz-x^2-xz+y^2}{1-x-1+y} = \frac{z(y-z)+y^2-x^2}{y-x} = \frac{z(y-x)+(y+x).(y-x)}{y-x} = z+y+x$$



La existencia de los cocientes escritos queda asegurada por las condiciones dadas.

Vicente Mendiola Muñoz de Morales
Ciudad Real.

- ▪ - ▪ - ▪ -

PROBLEMA 5ª (Boletín nª 8)

A cada entero positivo n se asigna un enterno no negativo f(n), de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

i) f(r·s) = f(r) + f(s)

ii) f(n) = 0, siempre que la cifra de las unidades de n sea 3.

iii) f(10) = 0

Se pide hallar f(1985), justificando la respuesta.

---

Solución

a) 0 = f(10) = f(2) + f(5), por i) y iii) y como f(2) y f(5) son enteros no negativos, resulta que f(5) = f(2) = 0.

b) f(9) = f(3) + f(3) = 0 + 0 = 0, según i) y ii).

c) 0 = f(3573) = f(397) + f(9) = f(397) + 0 = f(397), según i) y b).

Teniendo en cuenta las hipótesis y las conclusiones anteriores habrá de ser:

$$f(1985) = f(5 \cdot 397) = f(5) + f(397) = 0 + 0 = 0$$

Vicente Mendiola Muñoz de Morales
Ciudad Real.

---

Otra solución de:

Rodolfo Esteve Arolas (Valencia).

- ■ - ■ - ■ -

Publicaremos en nuestro próximo Boletín las soluciones recibidas de algunos de los problemas propuestos en el nº 9 .

- - -