XXX CONCURSO “PUIG ADAM” DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 9 de junio de 2012

NIVEL I (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

Hay enteros consecutivos, como 14 y 15 por ejemplo, en los que la suma de sus divisores es la misma. En efecto: 1 + 2 + 7 + 14 = 1 + 3 + 5 + 15 = 24. Encuentra todas las parejas de enteros consecutivos m y n con $m = 2p$, $n = 9q$, p y q primos mayores que 3, tales que coincida la suma de sus divisores. (Considera los casos $m > n$ o $m < n$)

Problema 2.

Un gimnasio dispone de tres bicicletas estáticas (roja, verde y azul) para uso de sus clientes. Durante la semana pasada solamente cuatro de ellos y en días diferentes han practicado con una bicicleta estática. Cada uno de ellos ha elegido una bicicleta al azar y todas ellas tienen la misma probabilidad de ser elegida.
Determina:

a) La probabilidad de que los cuatro hayan elegido la misma bicicleta.
b) La probabilidad de que ninguno haya elegido la bicicleta verde.
c) La probabilidad de que alguna de las bicicletas haya quedado sin utilizar por ninguno de los cuatro.

XXX CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 9 de junio de 2012

NIVEL I (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Si m y n son enteros positivos, ninguno de ellos múltiplo de 10, $m \cdot n = 40\,000$ y $m > n$, ¿cuál es el resto de la división entera de m entre n?

Solución: T_1 =

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T_1 la respuesta del problema anterior (1A) y $v = \sqrt{T_1}$.
Ángel y Beatriz corren alrededor de una pista circular de 400 m de longitud. Ángel corre con una velocidad de v m/s y Beatriz con $(v - 1)$ m/s. Los dos parten a la vez y desde el mismo punto. ¿Cuántos metros ha recorrido Beatriz cuando, al cabo de cierto tiempo, Ángel le saca de ventaja una vuelta completa?

Solución: T_2 =

Problema 3A. (2 puntos)
Sea T_2 la respuesta del problema anterior (2A).
Si x e y son números reales con $x + y = 1$ y $(x^2 + y^2)\cdot(x^3 + y^3) = \frac{T_2}{200}$, ¿cuál es el valor de $(x^2 + y^2)$?

Solución: p =

¡Sugerencia!
Desarrolla $(x+y)^2$ y $(x+y)^3$ y despeja en cada caso x^2+y^2 y x^3+y^3.

Problema 1B. (1 punto)
Lanzamos al aire tres dados de diferentes colores: azul, rojo y verde, Los dados tienen seis caras numeradas con: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Observamos el número obtenido en el dado azul, lo multiplicamos por 2 y le sumamos 5. Multiplicamos este resultado por 5 y le sumamos el número obtenido en el dado rojo. Al resultado obtenido lo multiplicamos por 10 y le sumamos el número obtenido en el dado verde. Después de este proceso el resultado obtenido fue 816. Calcula la suma de los tres números que se obtuvieron en los dados.

Solución: S_1 =

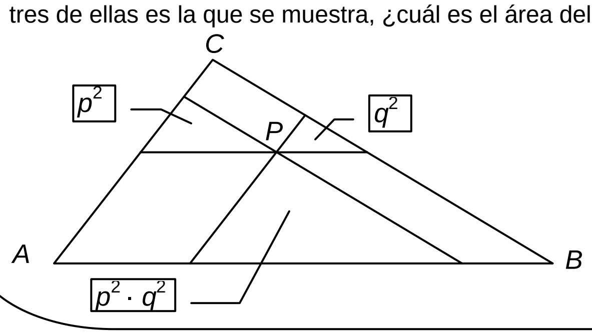
Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea S_1 la respuesta del problema anterior (1B).
Como sabes, la uva es una fruta que contiene mucha agua. Recién cogida el 80 % de su peso es agua. Si las tenemos una semana al sol este porcentaje baja al 15 %. Si cogemos S_1 kg de uvas, ¿cuántos kg pesarán después de una semana al sol?

Solución: S_2 =

Problema 3B. (2 puntos)
Sea S_2 la respuesta del problema anterior (2B).
La suma de $2S_2 + 1$ enteros consecutivos es 450. Cuántos de ellos son primos?

Solución: q =

Problema 4. (5 puntos)
Sean p y q las respuestas de los problemas 3A y 3B. En el triángulo ABC de la figura los tres segmentos que pasan por P son paralelos a los lados del triángulo y dividen a éste en seis regiones. Si el área de tres de ellas es la que se muestra, ¿cuál es el área del triángulo ABC?



Nota. Si se obtiene la expresión correcta del área del triángulo ABC en términos de p y q, aunque no se explicite el resultado porque no se conocen los valores de p o q, también se podrán obtener los 5 puntos del problema.

XXX CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 9 de junio de 2012

NIVEL II **(4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

En la parábola $y = x^2$ inscribimos el triángulo rectángulo PQR, con ángulo recto en Q. Las coordenadas de sus vértices $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$ y $R(r_1, r_2)$ son todas números enteros. Demuestra que $2q_1 + p_1 + r_1 = 0$.

Problema 2.

Formamos una sucesión de la siguiente manera:

- Los dos primeros términos son 0, 1.
- A continuación los dos números siguientes a los dos primeros términos de la sucesión, es decir, 1, 2.
- A continuación los cuatro números siguientes a los cuatro primeros términos de la sucesión que serán: 1, 2, 2, 3.
- A continuación los ocho números siguientes a los ocho primeros términos de la sucesión, que serán: 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4.
- A continuación los dieciséis números siguientes a los dieciséis primeros términos de la sucesión, que serán: 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5.
- Y así sucesivamente con los treinta y dos siguientes, etc.

Como has visto, los treinta y dos primeros términos son:

0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5.

Determina:

a) ¿Cuántas veces aparece el 4 en los 64 primeros términos?
b) ¿Cuál es el término a_{210} de la sucesión?
c) ¿En qué puesto aparece el número 9 por tercera vez?
d) ¿Cuánto suman los 128 primeros términos de la sucesión?

XXX CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 9 de junio de 2012

NIVEL II (4º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Un ortoedro (caja rectangular) tiene de dimensiones $8\times10\times12$. ¿Qué fracción de su volumen ocupa la región del espacio formada por los puntos interiores al ortoedro y que distan más de 1 de cualquiera de sus caras?

Solución: T_1 =

Problema 1B. (1 punto)
Ninguno de estos dos números M = [4 A 6] y N = [1 B 7] de tres cifras es divisible por 9, pero en cambio el producto M·N sí es divisible por 9. Calcula el mayor valor posible para A + B.

Solución: S_1 =

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T_1 la respuesta del problema anterior (1A)
Calcula la mayor de las soluciones reales de la ecuación $(\log x)^2 - \log\sqrt{x} = T_1$, donde log significa logaritmo decimal.

Solución: T_2 =

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea S_1 la respuesta del problema anterior (1B)
¿Cuántos grados mide cada uno de los ángulos interiores de un polígono regular de S_1 lados?

Solución: S_2 =

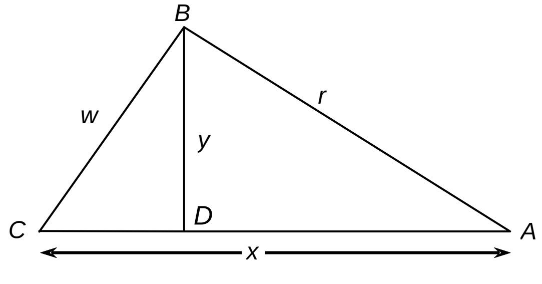
Problema 3A. (2 puntos)
Sea T_2 la respuesta del problema anterior (2A) y $N = T_2 - 7$.
¿Cuántos enteros positivos de N cifras no tienen entre sus dígitos ni el 1 ni el 9?

Solución: p =

Problema 3B. (2 puntos)
Sea S_2 la respuesta del problema anterior (2B) y n la suma de los tres factores primos de S_2.
Si r y s son las soluciones de la ecuación $F_n x^2 + F_{n+1}x + F_{n+2} = 0$, en la que F_n *representa el n*-ésimo número de Fibonacci. Calcula el producto $(r + 1)\cdot(s + 1)$.
(En la sucesión de Fibonacci $F_1 = F_2 = 1$ y cada término, a partir de F_3 es igual a la suma de los dos anteriores)

Solución: q =

Problema 4. (5 puntos)
Sean p y q las respuestas de los problemas 3A y 3B.
En los triángulos rectángulos *ABC* y *BDA* de la figura se verifica que $r + w = \dfrac{p}{q^4}$ y que $x + y = q^5$. Calcula el valor de *y.*



Nota. Si se obtiene la expresión correcta de y en términos de p y q, aunque no se explicite el resultado porque no se conocen los valores de p o q, también se podrán obtener los 5 puntos del problema.

XXX CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.

Madrid, 9 de junio de 2012

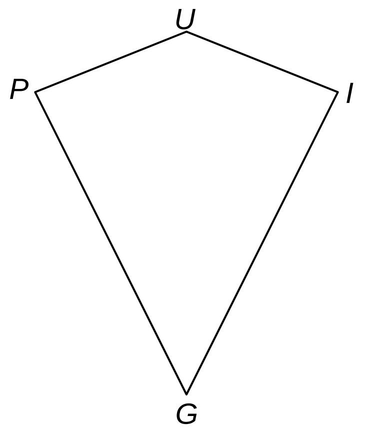
<u>NIVEL III</u> (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

El pentágono *ABCDE*, inscrito en una circunferencia, verifica que las longitudes de tres de sus lados son: *AB* = 12, *BC* = 32 y *CD* = 8. Si la diagonal *BD* pasa por el punto medio de la diagonal *AC*, calcula todas las posibles longitudes enteras que puede tomar el lado *EA*.

Problema 2.

El cuadrilátero *PUIG* tiene forma de cometa, es decir, *PU* = *IU*, *PG* = *IG*. Si el ángulo en *U* es doble que el ángulo en *G* y [Área del triángulo *PIG*] = 2013·[Área del triángulo *PUI*], calcula el coseno del ángulo en *G*.



XXX CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.

Madrid, 9 de junio de 2012

<u>NIVEL III</u> (1º de Bachillerato) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
¿Cuántos pares ordenados de números enteros (x, y) verifican la ecuación $x^2 - 8x + y^2 + 4y = 5$?

Solución: T_1 =

Problema 1B. (1 punto)
Calcula el número de dos cifras [AB] que verifica 3·[BA] + [AB] = 300

Solución: S_1 =

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T_1 la respuesta del problema anterior (1A) y $k = 5 + 2T_1$
Calcula el mayor entero n para el cual el valor numérico de la expresión $2n^2 - kn + 77$ es un número primo.

Solución: T_2 =

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea S_1 la respuesta del problema anterior (1B).
Hay un valor de a para el que la suma de las soluciones de la ecuación, con incógnita x, $(x - 2a + 3)^{x+a} = 1$ es S_1. Hállalo.

Solución: S_2 =

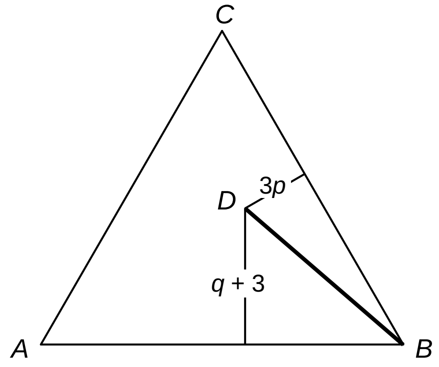
Problema 3A. (2 puntos)
Sea T_2 la respuesta del problema anterior (2A). En el triángulo ABC, con $BC = T_2$, el ángulo en B es de 30º. Calcula el número de valores enteros de AC para los que hay dos posibles valores para la longitud de AB.

Solución: p =

Problema 3B. (2 puntos)
Sea S_2 la respuesta del problema anterior (2B).
Calcula el mayor valor de n para el que 5^n divide a $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot S_2!$

Solución: q =

Problema 4. (5 puntos)
Sean p y q las respuestas de los problemas 3A y 3B.
En el interior del triángulo equilátero ABC señalamos un punto D cuyas distancias a dos de los lados del triángulo son $3p$ y $q + 3$. Calcula la distancia desde D al vértice común a esos dos lados.



Nota. Si se obtiene la expresión correcta de dicha distancia en términos de p y q, aunque no se explicite el resultado porque no se conocen los valores de p o q, también se podrán obtener los 5 puntos del problema.

NIVEL I

RESPUESTAS

Problema 1.
Hay enteros consecutivos, como 14 y 15 por ejemplo, en los que la suma de sus divisores es la misma. En efecto: 1 + 2 + 7 + 14 = 1 + 3 + 5 + 15 = 24. Encuentra todas las parejas de enteros consecutivos m y n con $m = 2p$, $n = 9q$, p y q primos mayores que 3, tales que coincida la suma de sus divisores. (Considera los casos $m > n$ o $m < n$)

$1 + 2 + p + 2p = 1 + 3 + 9 + q + 3q + 9q \Rightarrow p = \dfrac{10+13q}{3}$

Por otro lado:

Si $m > n$ entonces $m = n+1 \Rightarrow 2p = 9q+1 \Rightarrow \dfrac{20+26q}{3} = q+1 \Rightarrow q = 17$

En este caso $p = \dfrac{10+13\cdot 17}{3} = 77$ que no es un número primo.

Si $m < n$ entonces $m = n-1 \Rightarrow 2p = 9q-1 \Rightarrow \dfrac{20+26q}{3} = q-1 \Rightarrow q = 23$

En este caso $p = \dfrac{10+13\cdot 23}{3} = 103$ que sí es un número primo.

La solución única que se obtiene es $m = 2p = 206$ y $n = 9q = 207$.

Problema 2.
Un gimnasio dispone de tres bicicletas estáticas (roja, verde y azul) para uso de sus clientes. Durante la semana pasada solamente cuatro de ellos y en días diferentes han practicado con una bicicleta estática. Cada uno de ellos ha elegido una bicicleta al azar y todas ellas tienen la misma probabilidad de ser elegida.
Determina:

a) La probabilidad de que los cuatro hayan elegido la misma bicicleta.
b) La probabilidad de que ninguno haya elegido la bicicleta verde.
c) La probabilidad de que alguna de las bicicletas haya quedado sin utilizar por ninguno de los cuatro.

a) $P\left[(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) \cup (V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\right] = 3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{27}$

b) $P\left(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3} \cap \overline{V_4}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$

c) Designando mediante $\overline{R}$ a ninguno elige la roja, $\overline{V}$ ninguno elige la verde y $\overline{A}$ ninguno elige la azul, podemos escribir:

$$P\left(\overline{R} \cup \overline{V} \cup \overline{A}\right) = P\left(\overline{R}\right) + P\left(\overline{V}\right) + P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{R} \cap \overline{V}\right) - P\left(\overline{R} \cap \overline{A}\right) - P\left(\overline{V} \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{R} \cap \overline{V} \cap \overline{A}\right)$$

y teniendo en cuenta que las tres tienen la misma probabilidad y que alguna de las tres se ha utilizado, el problema se reduce a:

$$P\left(\overline{R} \cup \overline{V} \cup \overline{A}\right) = 3\cdot P\left(\overline{R}\right) - 3\cdot P\left(\overline{R} \cap \overline{V}\right) = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{16}{27} - \frac{1}{27} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}.$$

RESPUESTA AL PROBLEMA ENCADENADO.

NIVEL I.

1A. 40000 = $2^6 \cdot 5^4 \rightarrow$ M = 5^4 = 625 y N = 2^6 = 64. Como 625 = 9·64 + 49 $\boxed{T_1 = 49}$

2A. $v = \sqrt{49} = 7$. La velocidad de Ángel es 7 m/s y la de Beatriz 6 m/s. Como la distancia recorrida y por lo tanto el número de vueltas es directamente proporcional a la velocidad, tenemos: $\dfrac{7}{n+1} = \dfrac{6}{n} \Rightarrow n = 6$. Por lo tanto Beatriz da 6 vueltas y recorre $\boxed{T_2 = 2400 \text{ m}}$

3A. Teniendo en cuenta que $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ y que x + y = 1, tenemos que $x^3 + y^3 + 3xy = 1$. Igualmente $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 1$. Sustituyendo en la expresión que nos dan, se obtiene:

$$(x^2+y^2)\cdot(x^3+y^3) = \frac{2400}{200} \Rightarrow (1-2xy)\cdot(1-3xy) = 12 \Rightarrow 6(xy)^2 - 5(xy) - 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{11}{6} \\ xy = -1 \end{cases}$$

Como $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$ debe ser positivo, sólo tiene sentido cuando xy = – 1 y resulta $x^2 + y^2 = 3$. $\boxed{p = 3}$

1B. $$[(2a+5)\cdot 5 + r]\cdot 10 + v = 816 \Rightarrow \begin{cases} v = 6 \\ (2a+5)\cdot 5 + r = 81 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 6 \end{cases} \end{cases}$$ Como $(2a+5)\cdot 5$ es impar sólo tiene sentido r = 6 y por lo tanto a = 5. Por lo tanto $\boxed{S_1 = 17}$

2B. Si consideramos que la parte de la uva que no es agua no pierde peso, tenemos:

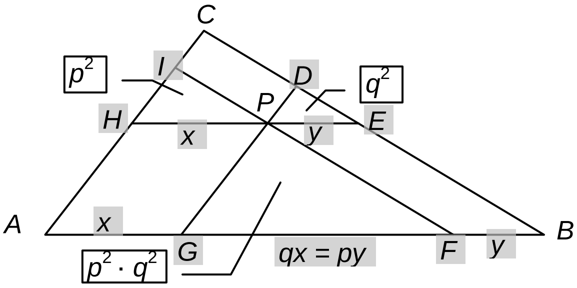
85 % de x = 20 % de 17 $\Rightarrow x = \dfrac{20\cdot 17}{85} = 4$. $\boxed{S_2 = 4 \text{ kg}}$

3B. $2S_2 + 1 = 9$. Si 9 números consecutivos suman 450, el del centro es 950 : 9 = 50. Los números son: 46, 47,…,54 y los únicos primos son: 47 y 53. $\boxed{q = 2}$

4. Los triángulos *ABC, GFP, PED* y *HPI* son semejantes. Como la razón de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, se deduce que:

GF = *qx* = *py* $\Rightarrow y = \dfrac{q}{p}x$. Por lo tanto

$AB = \left(1 + q + \dfrac{q}{p}\right)x = \dfrac{(p+qp+q)}{p}x$ La



razón de semejanza entre los triángulos *ABC* y *HPI* es $\dfrac{p+qp+q}{p}$ y la razón de sus áreas $\left(\dfrac{p+qp+q}{p}\right)^2$ por lo que el área de *ABC* = $p^2 . \dfrac{(p+qp+q)^2}{p^2} = (p+qp+q)^2$.

Sustituyendo los datos p = 3 y q = 2, se obtiene que el $\boxed{\text{área de } ABC = 121}$.

NIVEL II. **RESPUESTAS**

Problema 1.
En la parábola $y = x^2$ inscribimos el triángulo rectángulo PQR, con ángulo recto en Q. Las coordenadas de sus vértices $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$ y $R(r_1, r_2)$ son todas números enteros.
Demuestra que $2q_1 + p_1 + r_1 = 0$.

$$\overrightarrow{QP} = (p_1 - q_1,\, p_2 - q_2) = \left(p_1 - q_1,\, p_1^2 - q_1^2\right)$$
$$\overrightarrow{QR} = (r_1 - q_1,\, r_2 - q_2) = \left(r_1 - q_1,\, r_1^2 - q_1^2\right)$$

Como el ángulo en Q es recto, se verifica:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = 0 \Rightarrow (p_1 - q_1)\cdot(r_1 - q_1) + \left(p_1^2 - q_1^2\right)\cdot\left(r_1^2 - q_1^2\right) = 0$$

Operando, $(p_1 - q_1)\cdot(r_1 - q_1) + (p_1 - q_1)(p_1 + q_1)\cdot(r_1 - q_1)(r_1 + q_1) = 0$

Como $p_1 \neq q_1 \neq r_1$ podemos simplificar y se obtiene:

$$1 + (p_1 + q_1)(r_1 + q_1) = 0 \Rightarrow (p_1 + q_1)(r_1 + q_1) = -1 \Rightarrow \begin{cases} p_1 + q_1 = 1 \\ r_1 + q_1 = -1 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} p_1 + q_1 = -1 \\ r_1 + q_1 = 1 \end{cases}$$

En cualquiera de los dos casos al sumar se obtiene $2q_1 + p_1 + r_1 = 0$.

Problema 2.
Formamos una sucesión de la siguiente manera:

- Los dos primeros términos son 0, 1.
- A continuación los dos números siguientes a los dos primeros términos de la sucesión, es decir, 1, 2.
- A continuación los cuatro números siguientes a los cuatro primeros términos de la sucesión que serán: 1, 2, 2, 3.
- A continuación los ocho números siguientes a los ocho primeros términos de la sucesión, que serán: 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4.
- A continuación los dieciséis números siguientes a los dieciséis primeros términos de la sucesión, que serán: 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5.
- Y así sucesivamente con los treinta y dos siguientes, etc.

Como has visto, los treinta y dos primeros términos son:

0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5.

Determina:

a) ¿Cuántas veces aparece el 4 en los 64 primeros términos?
b) ¿Cuál es el término a_{201} de la sucesión?
c) ¿En qué puesto aparece el número 9 por tercera vez?
d) ¿Cuánto suman los 128 primeros términos de la sucesión?

a) Los números que aparecen en los 64 primeros términos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Las veces que cada uno aparece repetido son el coeficiente correspondiente de $(a + b)^6$, es decir, 1, 6, 15, 20, **15**, 6, 1. Luego el 4 aparece 15 veces.
También pueden contestar, desde el a_{33} hasta el a_{64} el 4 estará tantas veces como el 3 en los treinta y dos primeros términos. Por lo tanto habrá 5 + 10 = 15.

b) La sucesión está escrita por bloques de potencias de dos: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3,\ldots$
Escribimos 201 como suma de potencias de 2, esto es:
$210 = 128 + 64 + 8 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^0$
Como el que ocupa el lugar 2^0 es 0 y cada vez que se aumenta una potencia de 2 el número aumenta en 1, el pedido será 3.

c) La primera vez aparece ocupando el puesto número $2^9 = 512$. La segunda vez cuando, después de esos 2^9 términos, se escriba por primera vez el siguiente a 8, es decir, después de haber añadido 2^8 términos. Y la tercera cuando, después de esos $2^9 + 2^8$ términos, se escriba por primera vez el siguiente al siguiente de 7. En total, el 9 aparecerá por tercera vez en el puesto $2^9 + 2^8 + 2^7 = 512 + 256 + 128 = 896$.

d) $128 = 2^7$. Los coeficientes de $(a + b)^7$ son: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Por lo tanto habrá: 1 cero, 7 unos, 21 doses, 35 treses, 35 cuatros, 21 cincos, 7 seises y 1 siete. La suma es:
$1\cdot0 + 7\cdot1 + 21\cdot2 + 35\cdot3 + 35\cdot4 + 21\cdot5 + 7\cdot6 + 1\cdot7 = 7\cdot(1 + 7 + 21 + 35) = 7\cdot64 = 448$.

RESPUESTA AL PROBLEMA ENCADENADO.

NIVEL II.

1A. $\dfrac{6\times8\times10}{8\times10\times12}=\dfrac{1}{2}$ $\boxed{T_1=\dfrac{1}{2}}$

2A. $(\log x)^2-\log\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\log x)^2-\dfrac{1}{2}\log x-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2(\log x)^2-\log x-1=0$.

$\log x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\begin{cases}1\Rightarrow x=10\\ -\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{cases}$ La solución buscada es $\boxed{T_2 = 10.}$

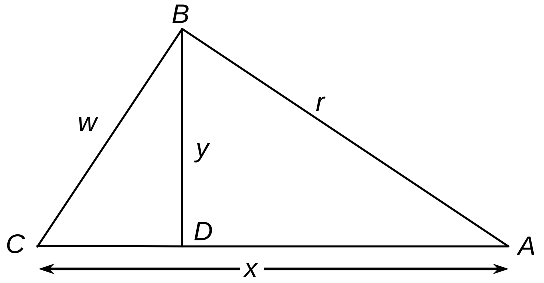
3A. N = 10 – 7 = 3 cifras. Números de 3 cifras con: 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 menos los que comienzan por 0. $VR_{8,3}-VR_{8,2}=8^3-8^2=448$. $\boxed{p = 448}$

1B. $\left.\begin{matrix}[4A6]=\dot{3}\\ [4A6]\neq\dot{9}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=2,\ A=5$ $\left.\begin{matrix}[1B7]=\dot{3}\\ [1B7]\neq\dot{9}\end{matrix}\right\}\Rightarrow B=4,\ B=7$. Por lo tanto el máximo de $A + B$ es: 5 + 7 = 12. $\boxed{S_1 = 12}$

2B. $180^{\circ}-\dfrac{360^{\circ}}{12}=150^{\circ}$ $\boxed{S_2 = 150}$

3B. Como 150 = $2\cdot3\cdot5^2$, los factores primos son 2, 3 y 5 y su suma es 10.
La sucesión de Fibonacci es: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,…y los términos buscados son: F_{10} = 55, F_{11} = 89, F_{12} = 144.
Las soluciones, r y s, de la ecuación $55x^2 + 89x + 144 = 0$ verifican: $r+s=-\dfrac{89}{55},\ r\cdot s=\dfrac{144}{55}$.
Por lo tanto $(r+1)\cdot(s+1)=r\cdot s+r+s+1=\dfrac{144}{55}-\dfrac{89}{55}+1=2$. $\boxed{q = 2}$

4. Teniendo en cuenta las relaciones



$$\left.\begin{matrix}x+y=q^5\\ r+w=\dfrac{p}{q^4}\\ x\cdot y=r\cdot w\\ w^2+r^2=x^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}x=q^5-y\\ (r+w)^2=r^2+w^2+2rw=\dfrac{p^2}{q^8}\end{matrix}$$

Sustituyendo se obtiene: $x^2+2xy=\dfrac{p^2}{q^8}$

$$(q^5-y)^2+2(q^5-y)y=\frac{p^2}{q^8}\Rightarrow q^{10}-2yq^5+y^2+2yq^5-2y^2=\frac{p^2}{q^8}\Rightarrow y^2=q^{10}-\frac{p^2}{q^8}=\frac{q^{18}-p^2}{q^8}$$

de donde se obtiene $\boxed{y=\dfrac{1}{q^4}\sqrt{q^{18}-p^2}}$.

Sustituyendo p = 448, q = 2 se obtiene finalmente

$$\boxed{y=\frac{1}{2^4}\sqrt{2^{18}-448^2}=\frac{1}{2^4}\sqrt{2^{12}(2^6-7^2)}=\frac{2^6}{2^4}\sqrt{64-49}=4\sqrt{15}}.$$

NIVEL III

RESPUESTAS

Problema 1.
El pentágono *ABCDE*, inscrito en una circunferencia, verifica que las longitudes de tres de sus lados son: $AB = 12$, $BC = 32$ y $CD = 8$. Si la diagonal *BD* pasa por el punto medio de la diagonal *AC*, calcula todas las posibles longitudes enteras que puede tomar el lado *EA*.

Los triángulos *AMB* y *DMC* son semejantes por tener sus ángulos iguales. Su razón de semejanza es $k = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, por lo tanto, como $AM = MC = x$, se deduce que $BM = \frac{3}{2}x$, $MD = \frac{2}{3}x$.

Por el teorema del coseno

$$\cos\alpha = \frac{x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 8^2}{2\cdot\frac{2}{3}x\cdot x} = -\cos(180^\text{o} - \alpha) = -\frac{x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 32^2}{2\cdot\frac{3}{2}x\cdot x}$$

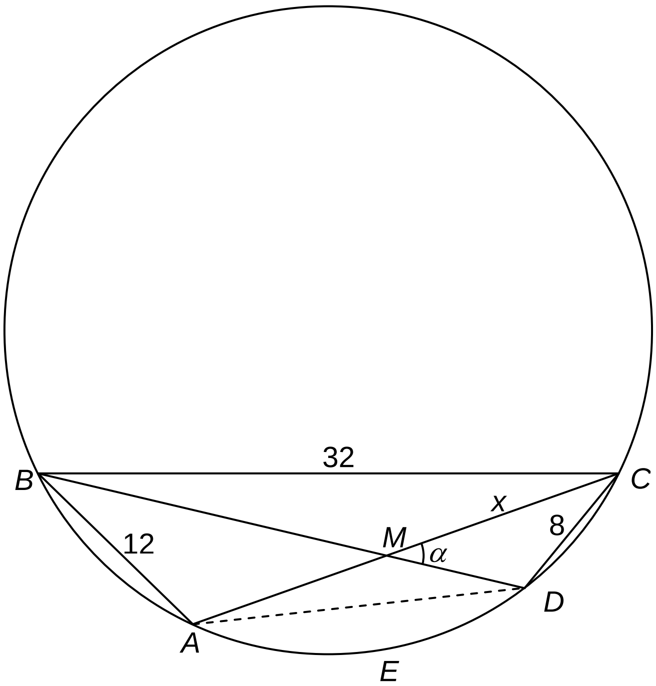
Operando se obtiene: $\frac{\frac{13}{9}x^2 - 64}{\frac{4}{3}x^2} = \frac{1024 - \frac{13}{4}x^2}{3x^2} \Rightarrow 9\left(\frac{13}{9}x^2 - 64\right) = 4\left(1024 - \frac{13}{4}x^2\right) \Rightarrow$

$$13x^2 - 576 = 4096 - 13x^2 \Rightarrow 26x^2 = 4672 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2336}{13}}$$

$$AD^2 = x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 2\cdot x\cdot\frac{2}{3}x\cdot\cos(180^\text{o} - \alpha) = \frac{13}{9}x^2 - \frac{4}{3}x^2\cdot\frac{\frac{13}{4}x^2 - 1024}{3x^2} = \frac{4096}{9} \Rightarrow x = \frac{64}{3}.$$

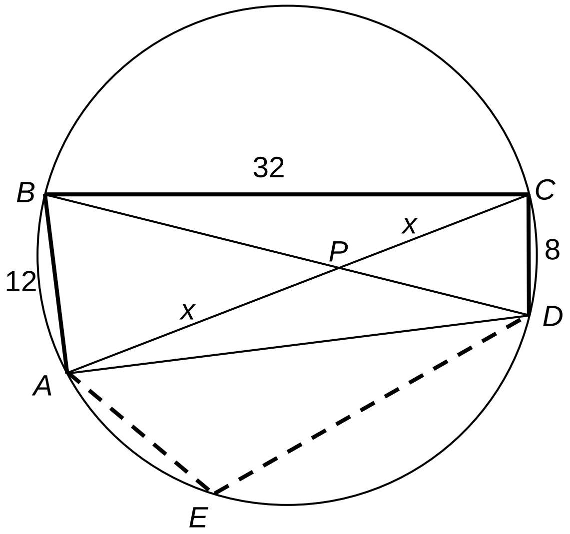
También por semejanza se puede obtener más rápido. $AD = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}\cdot 32 = \frac{64}{3}$.

Como $AE < AD$ los posibles valores enteros de *AE* son: 1, 2, 3,…,21.



Otra forma de hacerlo.

Problema 1.



Los triángulos *CPD* y *BPA* son semejantes con razón de semejanza $k = \frac{2}{3}$. Por lo tanto $BP = \frac{3}{2}x$ y $PD = \frac{2}{3}x$

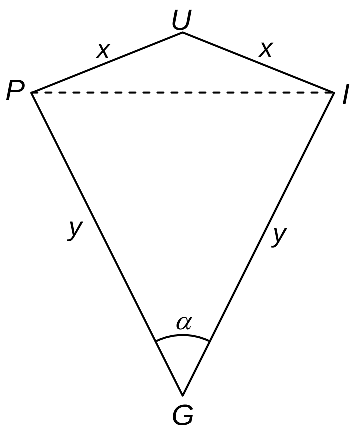
Igualmente *BPC* y *APD* son semejantes con razón de semejanza $k' = \frac{3}{2}$

Por lo tanto $AD = \frac{2}{3} \cdot 32 = \frac{64}{3}$.

Como $\frac{64}{3} < 32$ el arco que abarca es menor de 180º, como refleja la figura. Y el ángulo en *E* es obtuso, por lo que en el triángulo *AED* el lado mayor es *AD*.

En conclusión, como $AE < AD = \frac{64}{3}$ los únicos valores enteros posibles para *AE* son: 1, 2, 3,…, 21.

Problema 2.
El cuadrilátero *PUIG* tiene forma de cometa, es decir, *PU* = *IU*, *PG* = *IG*. Si el ángulo en *U* es doble que el ángulo en *G* y [Área del triángulo *PIG*] = 2013·[Área del triángulo *PUI*], calcula el coseno del ángulo en *G*.



Área de *PUI*. $\frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot sen 2\alpha$

Área de *PGI*. $\frac{1}{2} \cdot y \cdot y \cdot sen\alpha$

Como Área de *PGI* = 2013 · (Área de *PUI*)

$$2013 \cdot \frac{1}{2} x^2 \cdot 2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} y^2 sen\alpha \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{4026\cos\alpha}$$

Por el teorema del coseno.

$$PI^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos 2\alpha = y^2 + y^2 - 2y^2 \cos\alpha \Rightarrow$$

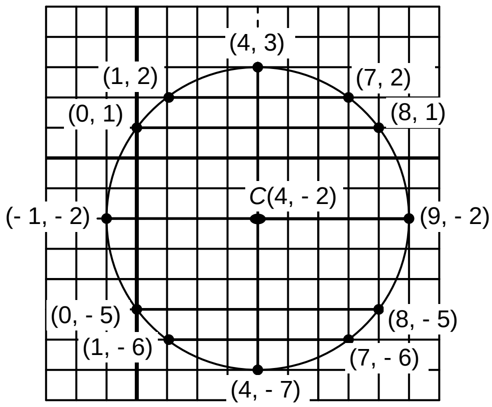
$$2x^2(1 - \cos 2\alpha) = 2y^2(1 - \cos\alpha) \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{1-\cos\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{2(1-\cos^2\alpha)} = \frac{1}{2(1+\cos\alpha)}$$

Igualando las expresiones obtenidas.

$$\frac{1}{4026\cos\alpha} = \frac{1}{2(1+\cos\alpha)} \Rightarrow 1 + \cos\alpha = 2013\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2012}$$

$\boxed{\text{NIVEL III}}$. **RESPUESTA AL PROBLEMA ENCADENADO.**

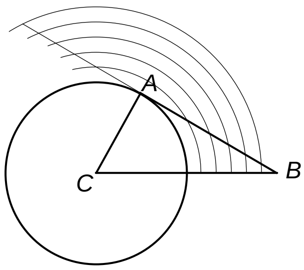


1A. $x^2 - 8x + y^2 + 4y = 5 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 5^2$
Las soluciones son los puntos de una circunferencia de centro $C(4, -2)$ y radio $r = 5$ y las enteras corresponden a las ternas pitagóricas, 3, 4, 5 y a 0, 5, 5. Como se muestra en la figura hay 12 soluciones con números enteros. $\boxed{T_1 = 12}$

2A. $k = 5 + 2\cdot 12 = 29$.
$2n^2 - 29n + 77 = (n-11)\cdot(2n-7) = P(n)$.
Los valores numéricos de esta expresión serán números primos si y solamente si de los dos factores uno de ellos igual a uno y el otro un número primo.

$$\left.\begin{array}{l} n-11 = 1 \Rightarrow n = 12 \Rightarrow P(12) = 1\cdot 17 = 17 \\ 2n-7 = 1 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow P(4) = -7\cdot 1 = -7 \end{array}\right\}$$ De donde se deduce que $n = 12$. $\boxed{T_2 = 12}$

3A. En el caso de un triángulo rectángulo en A, como el ángulo en B es de 30º y $BC = 12$ se obtiene $AC = 6$. El lado AC no puede ser menor que 6 ni mayor o igual a 12.
Si $AC = 6$ sólo hay un valor posible para AB, en este caso $6\sqrt{3}$
Si $6 < AC < 12$ hay dos valores posibles para la longitud de AB, uno que corresponde al triángulo con ángulo agudo en A y otro cuando el ángulo en A es obtuso. Por lo tanto los únicos valores enteros de AC que nos dan dos posibilidades para AB son: 7, 8, 9, 10 y 11. En total 5 casos. $\boxed{p = 5}$



1B. $30B + 3A + 10A + B = 300 \Leftrightarrow 31B + 13A = 300$. Como [AB] < 100 3·[BA} > 200 de donde se deduce que los únicos valores posibles de B son: 6, 7, 8 y 9. Probando cada uno de ellos se obtiene como única solución B = 8 y A = 4. [AB] = 48. $\boxed{S_1 = 48}$

2B. $$(x-2a+3)^{x+a} = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x + a = 0 \\ x - 2a + 3 = 1 \\ x - 2a + 3 = -1 \quad y \ (x+a) \ par \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -a \\ x_2 = 2a - 2 \\ x_3 = 2a - 4 \end{array}\right.$$

La suma de las tres soluciones es $x_1 + x_2 + x_3 = 3a - 6 = 48 \Rightarrow a = 18$.
Las soluciones son $x_1 = -18$, $x_2 = 34$ y $x_3 = 32$ (con $x + a = 32 + 18 = 50$, par) $\boxed{S_2 = 18}$

3B. En los factoriales 5!, 6!, 7!, 8! y 9! hay un factor 5 en cada uno.
En los factoriales 10!, 11!, 12!, 13! y 14! hay dos factores 5 en cada uno.
En los factoriales 15!, 16!, 17! y 18! hay tres factores 5 en cada uno.
En total 5 + 2·5 + 3·4 = 27.

4. $sen\alpha = \dfrac{q+3}{x}$; $\quad sen(60º - \alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \dfrac{1}{2}sen\alpha = \dfrac{3p}{x}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{(q+3)^2}{x^2}} - \frac{1}{2}\frac{q+3}{x} = \frac{3p}{x} \Rightarrow \sqrt{3x^2 - 3(q+3)^2} = (q+3) + 6p$$

$$3x^2 - 3(q+3)^2 = (q+3)^2 + 36p^2 + 12p(q+3) \Rightarrow$$

$$3x^2 = 4q^2 + 36p^2 + 12pq + 24q + 36p + 36 \Rightarrow$$

$\boxed{x = \sqrt{\dfrac{4}{3}q^2 + 12p^2 + 4pq + 8q + 12p + 12}}$ Para $q = 27$ y $p = 5$ se obtiene $\boxed{x = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21}}$