

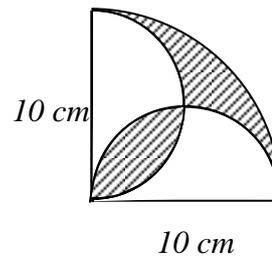
# Problemas propuestos en el XXIX Concurso

Tiempo para cada problema: 1 hora 30 minutos

## NIVEL I (3º de E.S.O.)

### Problema 1º

Calcula el área sombreada en la que, como observas, los arcos que ves son semicircunferencias y un cuarto de circunferencia.



### Problema 2º

Encuentra, si existen, números enteros  $x$  e  $y$  tales que

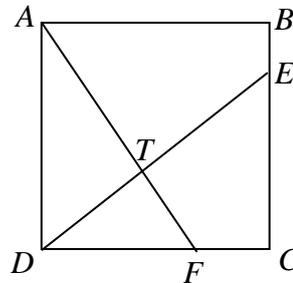
$$7 + x^2 = 3y \cdot (y + 1)$$

### Problema 3º

Vidal intenta multiplicar un número de dos cifras por uno de tres, pero se le ha olvidado todo lo referente a la multiplicación y escribe, simplemente, el número de dos cifras seguido por el de tres, resultando un número de cinco cifras, que es exactamente 9 veces el producto que debería haber obtenido. ¿Cuál es la suma de los dos números que quería multiplicar?

### Problema 4º

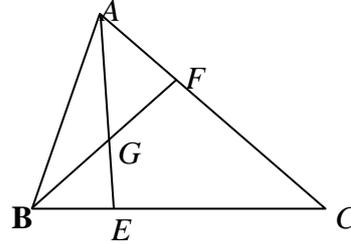
En el cuadrado  $ABCD$  de la figura, de lado  $12\text{ cm}$ , los puntos  $E$  y  $F$  son tales que  $3BE = EC$  y  $2FC = DF$ . Si  $T$  es el punto de intersección de  $DE$  y  $AF$ , calcula el área del triángulo  $DFT$ .



## NIVEL II (4° de E.S.O.)

### Problema 1°

En el triángulo  $ABC$ , el punto  $F$  verifica que  $2AF = FC$ . Si  $G$  es el punto medio del segmento  $BF$  y  $E$  es la intersección de las rectas  $BC$  y  $AG$ , calcula el cociente entre  $BE$  y  $EC$ .

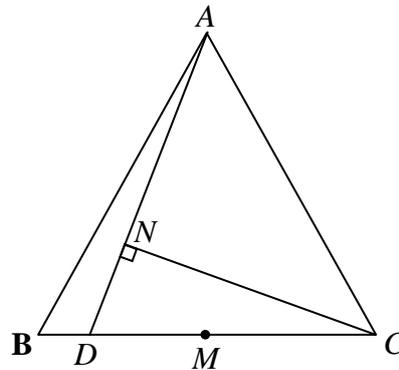


### Problema 2°

Hallar dos números primos  $p$  y  $q$  tales que  $p - q = 436$  y la media aritmética de  $p$  y  $(q - 4)$  sea el cubo de un entero.

### Problema 3°

En el triángulo isósceles  $ABC$ , con  $AB = AC$ ,  $M$  es el punto medio de  $BC$ . El punto  $D$ , en el lado  $BC$ , verifica que  $\widehat{BAD} = \frac{1}{6} \widehat{BAC}$ . Además, la recta perpendicular a  $AD$  por  $C$ , corta a  $AD$  en  $N$ , verificándose que  $DN = DM$ . Calcula el valor de los ángulos del triángulo  $ABC$ .



### Problema 4°

Marta llega a un aeropuerto que tiene 12 puertas de acceso a vuelos, alineadas y a 100 m de distancia entre cada dos consecutivas. Le asignan una de las doce al azar y, después de estar esperando, le comunican que su vuelo ha cambiado a otra puerta de salida, también elegida con igual probabilidad entre las restantes. Calcula la probabilidad de que Marta tenga que recorrer una distancia inferior o igual a 400 m para llegar a su nueva puerta de salida.

### NIVEL III (1° de Bachillerato)

#### Problema 1°

Encuentra todos los enteros positivos  $m$  y  $n$ , con  $n$  impar, tal que  $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}$ .

#### Problema 2°

Todo número primo  $p$ , mayor que 2, se puede expresar como suma de dos enteros consecutivos (la mitad del anterior más la mitad del siguiente). Si el número no es primo hay más posibilidades, y muchos se pueden expresar, de varios modos, como suma de enteros consecutivos. Encontrar todas las soluciones de este problema para  $n = 300$ .

#### Problema 3°

En el triángulo  $ABC$ , con  $AC = 450$  y  $BC = 300$ , marcamos los puntos  $M$  y  $L$  en los lados  $AC$  y  $AB$  respectivamente, siendo  $M$  el punto medio de  $AC$  y  $L$  el pie de la bisectriz del ángulo  $C$ . Sea  $P$  el punto de intersección de  $BM$  y  $CL$  y  $K$  el simétrico de  $P$  respecto de  $M$ . Si  $AK = 180$ , calcula  $LP$ .

#### Problema 4°

Si  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son números reales tales que  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$  y  $ac + bd = 0$ , determina el valor de  $ab + cd$ .