Problemas propuestos en el XXVIII Concurso

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Problema 1º

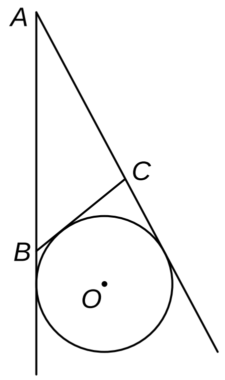
Consideremos en un círculo dos diámetros perpendiculares entre sí. Con centro en un extremo de uno de ellos trazamos un arco que pasa por los extremos del otro diámetro. Calcula el cociente entre el área de la región mayor y el área de la región menor en las que este arco divide al círculo.

Problema 2º

Los dígitos de un entero *n* de cuatro cifras son cuatro enteros consecutivos que están en orden decreciente cuando se lee de izquierda a derecha. ¿Cuál es la suma de todos los restos posibles de la división de *n* entre 37?

Problema 3º

En la figura se observa un triángulo *ABC* y una circunferencia de centro *O* tangente al lado *BC* y a las prolongaciones de los lados *AB* y *AC*. Si el ángulo en *A* es de 22º, calcula el valor del ángulo $B\hat{O}C$.



Problema 4º

El director de una banda de música observa que si pone a todos sus músicos, que son más de 40, formando el mayor cuadrado posible, le sobran 5 músicos, pero, en cambio, si los pone en disposición rectangular, con 7 filas más que columnas, puede colocarlos a todos. Calcula el número de músicos de la banda.

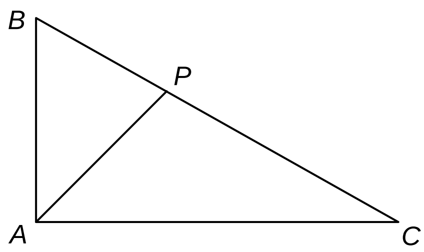
NIVEL II (4º de E.S.O.)

Problema 1º

Encuentra razonadamente todas las soluciones enteras de la ecuación $x! + 24 = y^2$

Problema 2º

En el triángulo rectángulo *ABC*, sea *P* el punto común a la hipotenusa *BC* y a la bisectriz del ángulo Â. Si $AP = 20\sqrt{2}$, calcula la suma de los inversos de las longitudes de los catetos.

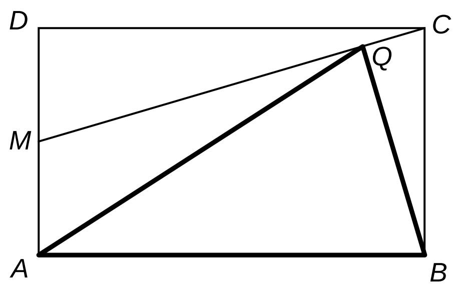


Problema 3º

Sea n un entero positivo. Demuestra que el máximo común divisor de los números $(3n – 1)$ y $(2n – 3)$ es múltiplo de 7 si al dividir n entre 7 se obtiene de resto 5 y que en cualquier otro caso, $(3n – 1)$ y $(2n – 3)$ son primos entre sí.

Problema 4º

En el rectángulo *ABCD*, sea *M* el punto medio del lado *AD* y *Q* el punto del segmento *MC* tal que *BQ* es perpendicular al segmento *MC*. Demuestra que el triángulo *AQB* es isósceles.



NIVEL III (1º de Bachillerato)

Problema 1º

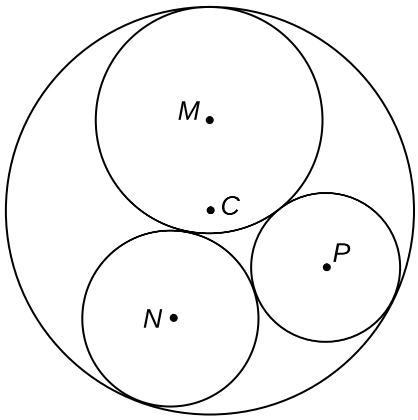
Encuentra todos los enteros positivos *m* y *n*, con *n* impar, tal que $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$.

Problema 2º

En el triángulo *ABC* con *AB* = 6, *BC* = 4 y *AC* = 3, las bisectrices interior y exterior del ángulo Â cortan a la recta *BC* en los puntos *P* y *Q*. Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo *APQ*.

Problema 3º

En la figura observas tres circunferencias de centros, *M*, *N* y *P*, tangentes exteriores dos a dos y otra circunferencia de centro *C* tangente a las tres y que las contiene. Demuestra que los triángulos *CMN*, *CMP* y *CNP* tienen todos de perímetro 2*r*, siendo *r* el radio de la circunferencia de centro *C*.



Problema 4º

Una persona visita el Casino de juego en las ciudades por las que pasa. Destina 20 € en cada visita como cantidad máxima a perder. Lo hace en la ruleta a PAR-IMPAR (con probabilidad 1/2 de ganar en cada jugada). Procede así: Apuesta sus

20 € y si pierde se retira a pasear. Si gana, apuesta los 40 € y si los pierde se retira a pasear, pero si vuelve a ganar se juega 60 de los 80 € que ha reunido. Ahora, si gana, se retira con los 140 € que tiene y si pierde está como al principio, con 20 €. Así procede hasta que o bien pierde los 20 € o bien sale con 140 €. ¿Cuál es la probabilidad de salir del Casino con 140 €?
Explica si, a la larga, esta persona ganará o perderá dinero.