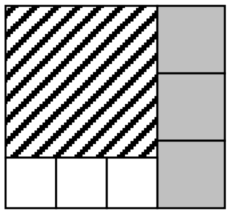
XXVII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 13 de junio de 2009

<u>NIVEL I</u> (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

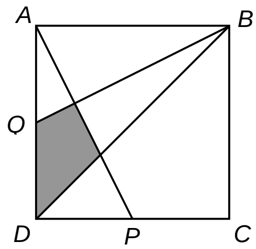
Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es un dato para el siguiente.



a) El rectángulo que se muestra en la figura está dividido en siete cuadrados. El lado de cada cuadrado gris mide 8 cm. ¿Cuántos centímetros mide el lado del cuadrado rayado?

b) Sea R la respuesta del apartado anterior.

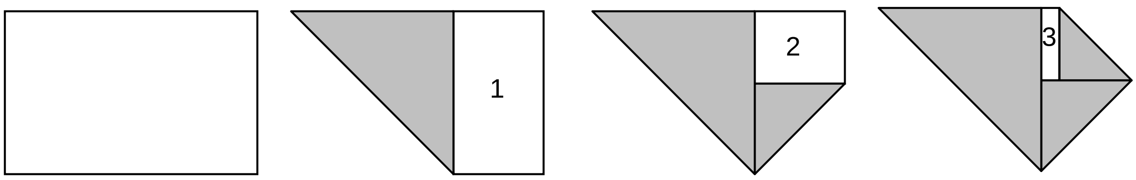
Cuando dividimos los números **272 758** y **273 437** entre el número N, obtenemos como restos $R - 5$ y $R - 1$, respectivamente. Calcula el número N.



c) Si el área del cuadrilátero sombreado de la figura viene dado por el número N del apartado anterior, obtén el área del cuadrado $ABCD$, sabiendo que P y Q son puntos medios de lados del cuadrado.

Problema 2.

Una hoja rectangular de papel, algo más alargada que una de las habituales DIN A-4, blanca por un lado y gris por el otro, fue doblada tres veces como indica la figura.



El perímetro del rectángulo 1, que quedó blanco después del primer doblez, mide 20 cm más que el perímetro del rectángulo 2 que quedó blanco después del segundo doblez, y éste, a su vez, es 16 cm mayor que el perímetro del rectángulo 3 que quedó blanco después del tercer doblez. Determina el área de la hoja.

XXVII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 13 de junio de 2009

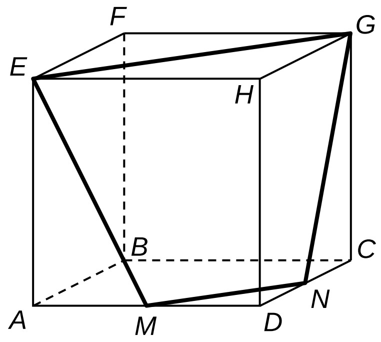
<u>NIVEL I</u> (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 3.

Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10 % de los gatos se creen que son perros y el 10 % de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, gatos y perros, son perfectamente normales.
Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20 % del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

Problema 4.

Los vértices de un cubo de 2 cm de arista son *A, B, C, D, E, F, G* y *H* como se indica en la figura. Si *M* y *N* son los puntos medios de las aristas *AD* y *DC* respectivamente, calcula el área del cuadrilátero *MEGN.*



XXVII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 13 de junio de 2009

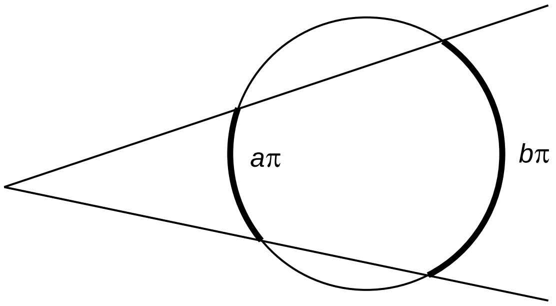
<u>NIVEL II</u> (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es un dato para el siguiente.

a) Al sumar todos los números de dos cifras, Javier creyó que había obtenido un capicúa pero, desafortunadamente, luego comprobó que había olvidado uno de los sumandos. ¿Qué número de dos cifras olvidó sumar?

b) Sean ***a*** y ***b*** las cifras del número que olvidó Javier.
Desde un punto exterior a una circunferencia trazamos dos secantes a la misma, que forman entre sí un ángulo de 30º y que determinan en dicha circunferencia arcos de longitudes $\boldsymbol{a}\pi$ y $\boldsymbol{b}\pi$ como indica la figura. Calcula el radio de la circunferencia.



c) Sea R la respuesta del apartado b).
Las dos bases y uno de los otros lados de un trapecio miden respectivamente, R, $4R$ y $R - 1$. Si una de las diagonales mide también $4R$, calcula la longitud de la otra diagonal.

Problema 2.

Encuentra todas las parejas de números reales (a, b) para las que se verifique que hay exactamente tres números iguales entre los cuatro siguientes: $a \cdot b$, $\dfrac{a}{b}$, $a + b$ y $a - b$.

XXVII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.

Madrid, 13 de junio de 2009

NIVEL II (4º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 3.

Considera tres enteros positivos consecutivos. Si dejas al pequeño como está, le sumas 10 al mediano y un número primo al mayor, resulta que los tres números que obtienes están en progresión geométrica. Determina razonadamente el número primo que sumaste al mayor.

Problema 4.

Demuestra que cualquier triángulo acutángulo cuyas alturas miden todas menos de 3 cm, su área debe ser menor que $3\sqrt{3}$ cm^2.

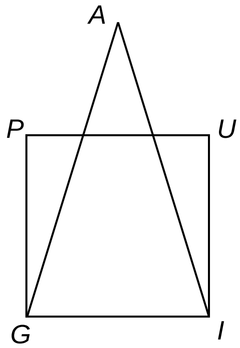
XXVII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 13 de junio de 2009

<u>NIVEL III</u> (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es un dato para el siguiente.



a) El cuadrado *PUIG* de la figura tiene de lado 10 y el triángulo isósceles *AIG* tiene en común con el cuadrado un trapecio de área 80. Calcula la altura de dicho triángulo sobre el lado *GI*.

b) Sea *h* dicha altura.
En la curva de ecuación $y^2 + 2hy + 2009 = x^2$ hay dos puntos cuyas coordenadas son números enteros positivos. Obtén la suma S de sus abscisas.

c) Sea *p* el mayor primo que divide a *S.* El número *p*! acaba en varios ceros. Si *N* es el número obtenido al borrar todos esos ceros, calcula el mayor entero *k* para el que 12^k es un divisor de *N*.

Problema 2.

Se tienen tres cajas, en cada una de las cuales hay al menos una bola blanca y al menos una bola negra. La probabilidad de que sacada al azar una bola de cada caja se verifique que no son las tres blancas es de $\frac{1}{2}$.
Calcula razonadamente la composición de cada caja, sabiendo que el total de bolas es el menor posible para que se cumpla el enunciado.

XXVII CONCURSO “PUIG ADAM” DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 13 de junio de 2009

NIVEL III **(1º de Bachillerato)** Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 3.

En la parábola $y = x^2$ consideramos los puntos $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$, $D(d, d^2)$ cuyas coordenadas son números enteros.

a) Sea k el área del triángulo ABC. Demuestra que, para cualquier elección de *a, b* y *c* con las condiciones dadas, el número k viene dado por $k = \frac{1}{2}\left|(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)\right|$.

b) Demuestra que k es entero.

c) Prueba que si k es primo, entonces $k = 3$.

d) Demuestra que k nunca es el cuadrado de un primo.

e) Prueba que el área del cuadrilátero $ABCD$ no puede ser nunca 8.

Nota: Puedes utilizar el resultado de cada apartado para hacer los siguientes aunque no hubieras conseguido demostrarlo.

Problema 4.

Calcula tres números reales en progresión geométrica, sabiendo que si al tercero le restamos 4, los nuevos números están en progresión aritmética y que si en estos nuevos restamos 1 tanto del segundo como del tercero, los nuevos números vuelven a estar en progresión geométrica.