Los conceptos en Geometría Diferencial. Memorias de un estudiante.

Fernando Etayo Gordejuela
Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria
fernando.etayo@unican.es

Recuerde el alma dormida,
avive el seso e despierte
contemplando
cómo se passa la vida,
cómo se viene la muerte
tan callando;
cuán presto se va el plazer,
cómo, después de acordado,
da dolor;
cómo, a nuestro parescer,
cualquiere tiempo passado
fue mejor.

Mostraré con ejemplos algunas de las enseñanzas recibidas de mi padre, en cuanto que fui alumno suyo de las Geometrías I y V y fue Director de mi Tesina de Licenciatura (todo esto, al igual que mi hermano José Javier) y, además, Director de mi Tesis Doctoral, precisamente la última que dirigió. En ésta última me dejó mucha iniciativa y pude seguir una línea de trabajo por él cultivada en los años anteriores: la teoría de conexiones y sus diferentes generalizaciones, en particular, las pseudo-conexiones. Antes de adentrarme en materia comentaré que en mi Tesis tratábamos también las casi-conexiones y una nueva generalización, las fere-conexiones, desoyendo el mandato claro del gran geómetra estadounidense Michael Spivak [1] que prescribió que quien propusiera una nueva definición de conexión debería ser ejecutado de modo sumario, como le gustaba recordar al Profesor Etayo Miqueo. A pesar de eso, me dejó introducirlas.

Pues bien, el tema del que quiero hablar es precisamente el de las definiciones en Geometría Diferencial. “Las matemáticas son la ciencia de las definiciones, no de los teoremas”, aseguraba el profesor Etayo en una frase que a sus alumnos nos dejaba perplejos, y que con el paso del tiempo he hecho mía y repito a los que ahora son mis alumnos. Los teoremas llevan muchas veces el nombre de la primera persona que los demostró, o llevan varios nombres que se corresponden a la evolución de las ideas, que el primer autor probó en un cierto contexto y los restantes extendieron a veces hasta ámbitos que no podía soñar el primero. Pero de las definiciones no se suele recordar en primera instancia su autoría. Si acaso, se cita quién introdujo las ideas: el cálculo infintesimal Newton y Leibniz, Cauchy definió la continuidad de las funciones y Dedekind los números reales, mediante las cortaduras. Este ejemplo me permite hacer una primera reflexión: históricamente los hombres conocimos antes la diferenciabilidad y la integrabilidad de las funciones, después la continuidad y finalmente los números reales. Y, justamente, los enseñamos al revés, empezando por los números, luego la continuidad y a continuación el cálculo diferencial e integral. ¿Por qué? ¿Se imagina alguien que en la enseñanza de la Física se comience por la Relatividad y la Cuántica, y que después se estudie la Mecánica Clásica? La razón está en la esencia de las matemáticas: las definiciones. Newton y Leibniz sabían operar maravillosamente con el cálculo infinitesimal, aunque estaba basado sobre definiciones poco precisas, que tardaron un par de siglos en darse con rigor. Una vez que se supo bien qué eran los números reales, se pudo “dar la vuelta al calcetín”, y comenzar a enseñar el Análisis Matemático desde las definiciones. Porque aquello que decían los libros clásicos de que “la recta tangente a una curva es la que pasa por dos puntos consecutivos de ésta" es una idea intuitiva, pero falta de rigor.

Las matemáticas se han de asentar sobre definiciones bien precisas, que, como en el ejemplo precedente, a veces tardan siglos en aparecer. Ello no impide obtener bellísimos y profundos resultados, pero al final hemos de llegar a las definiciones, porque de lo contrario nos encontraremos en un terreno resbaladizo y peligroso. Otro ejemplo que el Profesor Etayo solía citar era el de un importante libro de Geometría Diferencial francés, escrito en los años diez del siglo pasado. La definición de variedad diferenciable, aunque apuntada en la Tesis de Habilitación de Riemann de 1854 no se había expresado de modo riguroso todavía, y habría que esperar hasta los años veinte a que se formulara. Pues bien, el libro citado comenzaba un capítulo con algo que traducido sonaría así: "El concepto de variedad diferenciable es muy difícil. Sea V una variedad diferenciable…." ¡Y seguía tan ricamente, sin definición precisa, obteniendo bellos y verdaderos resultados! Por cierto, que hace cinco años me compré una reedición de un libro clásico de Russell [2], escrito en 1897, en el que encontré esta frase que comenté con mi padre: "there is, if I am not mistaken, considerable obscurity in the definition of a manifold". El libro es un tratado sobre los fundamentos de la Geometría, en el que el autor demuestra ser perfectamente conocedor de las contribuciones hechas a lo largo del siglo XIX en geometrías no euclídeas y de la visión del programa de Erlangen de Klein. ¡Qué difíciles son las definiciones, si a un hombre de la talla intelectual de Bertrand Russell no se le alcanza la noción de variedad diferenciable, cuyo conocimiento exigimos a todos nuestros estudiantes de carrera!

El rigor en las definiciones es lo que caracteriza esencialmente el lenguaje matemático. Cuando definimos un objeto, la definición ha de describir el objeto y solamente el objeto. En "De cómo hablan los matemáticos y algunos otros" [3] el Profesor Etayo se extiende en estas consideraciones, que no procede aquí glosar más.

Avancemos hacia la geometría diferencial. Omitiremos el, visto lo visto, doloroso paso por la definición de variedad diferenciable y lleguemos a la noción de campo vectorial. En la asignatura de Geometría V el profesor Etayo daba tres definiciones diferentes de este concepto:

1. Como asignación diferenciable a cada punto de la variedad M de un vector tangente a la misma. Un vector tangente en un punto p es la velocidad $\gamma'(0)$ de una curva γ contenida en la variedad y que para valor cero del parámetro pasa por el punto, $\gamma(0) = p$.
2. Como sección diferenciable del fibrado tangente de la variedad $\pi:TM\to M$. El fibrado tangente es la unión disjunta de todos los espacios tangentes y una sección X es una aplicación $X:M\to TM$ tal que la composición $\pi\circ X$ es la identidad.
3. Como operador X sobre el anillo de funciones de la variedad, de modo que a cada función $f:M\to R$, le asigna una nueva función $X(f):M\to R$, sujeta a las condiciones de ser R-lineal y de verificar la regla de Leinbiz: $X(f\cdot g)=X(f)\cdot g + f\cdot X(g)$.

Si ya es complicado dar una definición, ¿por qué dar tres definiciones diferentes de un mismo objeto? Pues porque cada definición nos permite atisbar una parte del objeto matemático que queremos describir, y aunque cada una de ellas es completa desde el punto de vista del rigor, no lo es respecto de la comprensión del objeto. En este caso, la primera es la más intuitiva: en cada punto un vector. Lo de que varíe diferenciablemente esta asignación se obtiene al expresar el campo en coordenadas locales, viendo que los coeficientes del campo son funciones diferenciables. O, mejor aún, mediante la diferenciabilidad de una cierta función. Eso es lo que hace la segunda definición al expresar el campo como sección diferenciable del fibrado tangente. Y la tercera nos hace ver los campos vectoriales como derivaciones. Un campo vectorial define un conjunto de curvas integrales al campo (aquéllas cuyas derivadas son los vectores del campo). Por cada punto de la variedad pasa una única curva integral. Una función tiene derivada nula respecto del campo, $X(f)=0$, si es constante en cada curva integral. Esta noción generaliza la de derivada parcial de una función de dos variables $f:R^2\to R$: tiene derivada parcial nula respecto de x si f depende sólo de y, es decir, si es constante en cada recta horizontal, esto es, en cada curva integral del campo horizontal $\partial/\partial x$.

Sigamos sacando conclusiones: la tercera definición nos ha permitido dar una nueva interpretación de un concepto que se supone previamente conocido: el de derivada parcial. Las derivadas parciales miden cómo varía la función a lo largo de las rectas horizontales o verticales. Mediante el concepto de campo vectorial en R^2 podemos derivar respecto de cualquier familia de curvas en que descompongamos el plano. La derivada X(f) en el punto p no es sino la derivada de una función real de una variable real: la de la función f restringida a los puntos de la curva integral del campo X que pasa por p. Así hemos llegado a la base de la formación matemática: para entender qué es un campo vectorial basta que se entienda qué es una derivada de una función real de variable real, lo cual, aunque dado por elemental, tampoco es trivial, pues tuvimos que esperar a que vinieran Newton y Leibniz a explicárnoslo.

Ésta era también una gran afición del profesor Etayo: hacer suyo el título y el espíritu del libro [4] de Klein: "Matemática elemental desde un punto de vista superior". Volver a ver los conceptos más elementales desde un punto de vista superior, que nos permita comprenderlos mejor. Así pasa también con la segunda definición, que expresa de modo intrínseco el concepto. Hay que saber qué es un fibrado, lo cual no es nada sencillo, pero una vez que lo sabemos, entendemos mejor la definición de campo vectorial. Así, de las tres definiciones vistas en conjunto podemos aprehender el concepto. Realmente, cuando se entiende un concepto matemático es cuando se tiene que hacer el esfuerzo de contárselo a otra persona. Por eso los profesores tienen que ser "estudiantes".

Escribió el gran matemático húngaro Paul Erdös que Dios tenía un LIBRO en que había escrito las demostraciones perfectas de todos los teoremas, que los hombres a veces logramos vislumbrar. Recientemente se ha publicado un libro [5] con algunas de estas demostraciones que seguro estarán también en el LIBRO. Sin duda Dios tendrá también un libro dedicado a las definiciones, en que los objetos quedarán completamente descritos de modo totalmente preciso y claro. Porque una cosa y otra no son sinónimas. Ocurre a menudo, en Geometría Diferencial, que objetos quedan definidos de un modo totalmente preciso, pero que "no vemos" lo que significan. La tercera definición de campo vectorial es un ejemplo cuando se explica sin más extensión: un campo vectorial aparece como un operador sobre las funciones y no vemos lo que eso significa. Y lo que he comentado es aún poco: un campo vectorial tiene asociada una estructura algebraica, un grupo uniparamétrico, que es el que permite "ver" la definición de derivada de Lie de un campo respecto de otro. Nuevamente, en este caso, existe una definición formal y precisa, como operador, y demasiadas veces se omite explicar la geométrica. En las clases de Geometría V veíamos siempre la definición algebraica, como operador, de los campos, las conexiones, la curvatura, la torsión, etc., junto con las definiciones geométricas que nos indicaban qué medían esos operadores y cómo se transportaban los vectores de modo paralelo.

Pero sigamos con los campos vectoriales. La asignación del grupo uniparámetrico permite asociar a la idea de campo vectorial la de partículas en movimiento. Las trayectorias de las partículas son precisamente las curvas integrales del campo vectorial, recorridas con parametrización tal que su derivada en cada punto, su velocidad, coincida con el vector del campo en el punto. Ésta es la idea del campo gravitatorio, eléctrico o magnético de la Física. El Profesor Etayo que durante muchos años impartió docencia no sólo a matemáticos sino también a físicos, lamentaba la falta de formación física de los primeros, que se agudizaba a cada reforma del plan de estudios de la carrera. Durante los últimos años he impartido yo una asignatura de Topología Diferencial en la que los alumnos han tenido que realizar un trabajo sobre los campos en la Física, pues pienso yo que el rigor matemático no está reñido con el conocimiento de la utilización de las matemáticas en otros ámbitos. A este respecto, les solía comentar yo cómo la información meteorológica que brindaba Mariano Medina en su pizarra, en la televisión en blanco y negro, era mucho más didáctica que la actual, pues al dibujar las isobaras y los gradientes hacía entender lo que significaba un mapa del tiempo y comprender cuál iba a ser la evolución del mismo. Era un esfuerzo por hacer llegar la cultura científica mucho más serio que pintar un mapa lleno de solecitos o de nubecitas. Por cierto, permítaseme la digresión, voy a comentar una extraña relación entre Mariano Medina, Locomotoro y mi padre. Los dos primeros eran caras asiduas de la televisión de los años sesenta y setenta, a diferencia de mi padre, y los tres compartían el que sus hijos estudiaran en el mismo colegio, el Calasancio de Madrid. En alguna de las fiestas interminables de fin de curso a los padres escolapios no se les ocurrió mejor idea que formar una mesa de honor en que como padres distinguidos de los alumnos estaban los tres: Mariano

Medina, Paquito Cano Locomotoro, y José Javier Etayo. Dos de ellos científicos y los tres personas entrañables.

Volvamos a nuestro camino. Llegamos a las conexiones, de las que no se debe asustar el lector, porque si de las variedades no hemos dado la definición, menos aún de las conexiones. Baste decir que el Profesor Etayo les dedicó su discurso de ingreso [6] como Académico de número de la Real Academia de Ciencias. Un discurso dedicado a una noción, a un concepto, que se fue destilando a lo largo de los años, que se ha abordado desde numerosos puntos de vista, con diferentes definiciones, y que es capital en la Geometría Diferencial, en otras ramas de la Matemática y en muchos aspectos de la Física Teórica.

Termino. Quiero recordar algunas frases que dijeron otros profesores de los que tuve la suerte de ser alumno, hoy todos ya fallecidos, que dejaron profunda huella en mi formación y que expresaban ideas similares a las aquí expuestas. Así, el profesor Abellanas nos decía a los alumnos de Geometría III: “ustedes no son estudiantes, estudiante soy yo, ustedes son aprendices de estudiante” y nos explicaba a continuación que la vida del profesor era una vida dedicada al estudio. El profesor Gaeta en la Geometría IV nos indicaba que “las Matemáticas se estudian en espiral, y volvemos a pasar una y otra vez por el mismo concepto, pero cada vez lo entendemos mejor”. El Padre Dou nos enseñó en primero de carrera a buscar las definiciones: “¿cómo puedo expresar la continuidad de una familia de funciones de modo que no dependa de la función escogida?”, y así nos construía la definición de familia equicontinua. El Profesor Rodríguez-Salinas, del que no fui alumno, pero al que mi padre llevaba en coche, lo que me permitía escuchar sus conversaciones, comentaba que “a menudo, los teoremas clásicos tenían demostraciones incorrectas vistas con el rigor de hoy, pero eran ciertos”, y explicaba que el concepto de rigor matemático ha ido evolucionando. Del profesor Arregui aprendí aquello de que “en el primer ciclo se han de estudiar los modelos matemáticos: por ejemplo, el espacio R^n, como objeto del Análisis Matemático, como espacio vectorial y como espacio afín; en el segundo ciclo se han de realizar las abstracciones”. Así es como históricamente se ha desarrollado la Matemática y quizá nos hayamos excedido al presentar las definiciones más abstractas como punto de partida y al explicar las situaciones concretas que las idearon como meros ejemplos de una teoría general.

Sirvan estas letras de sincero homenaje a todos ellos, personas que se creían su misión como profesores de universidad, que enseñaron a muchas generaciones tanto de las Matemáticas, de cómo verlas y entenderlas, de admirarlas y deleitarse en ellas con el espíritu contemplativo de quien se sabe inmerso en un maravilloso paisaje. Y, en particular, a quien además, yo podía llamar padre, al que espero Dios tenga en su misericordia y le permita echar una ojeada al LIBRO. Empecé con la primera estrofa de las coplas de Jorge Manrique a la muerte de su padre, que el mío recitaba de memoria, y terminaré con la última, en la que sólo hay una diferencia en el caso presente, y es que mi madre le precedió.

Assí, con tal entender,
todos sentidos humanos
conservados,
cercado de su mujer
y de sus hijos e hermanos
e criados,
dio el alma a quien gela dio
(el cual la ponga en el cielo
en su gloria),
que aunque la vida perdió,
dexónos harto consuelo
su memoria.

Referencias

[1] Michael Spivak: *A comprehensive introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish 1970.

[2] Bertrand Russell: *An Essay on the Foundations of Modern Geometry*. Dover, 2003. Original: Cambridge Univ. Press, 1897.

[3] José Javier Etayo Miqueo: *De cómo hablan los matemáticos y algunos otros*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, lección inaugural del curso 1990-1991. Madrid, 1990.

[4] Felix Klein: *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Reeditado por Nivola, Madrid, 2006, (Original de 1908, traducida al español en 1927).

[5] Matin Aigner, Günter M. Ziegler: *El LIBRO de las demostraciones.* Nivola, Madrid, 2005. (Original de Springer, 2003).

[6] José Javier Etayo Miqueo. *Pequeña historia de las conexiones geométricas*. Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, Madrid, 1983.