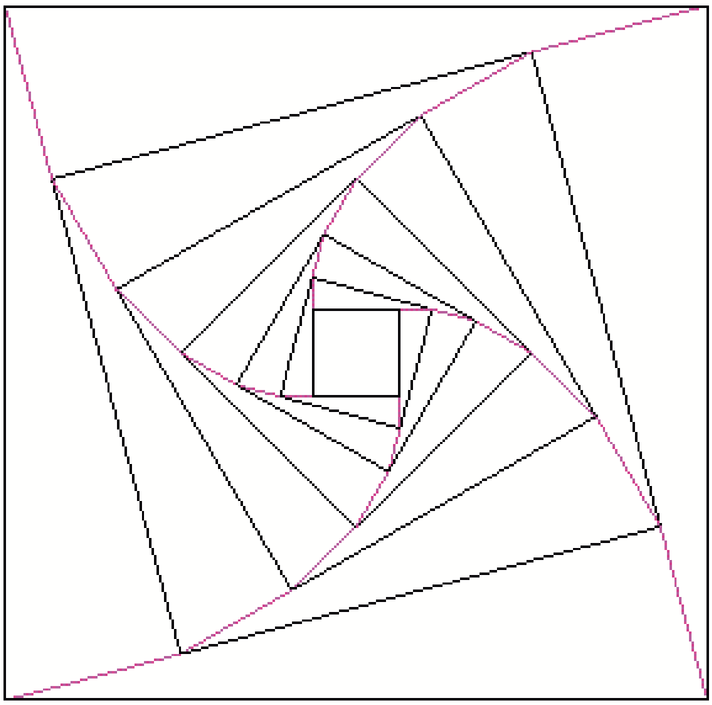
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 77
OCTUBRE DE 2007

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
Despacho 3005
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es
Página web: www.ucm.es/info/secdealg/puigadam
Nueva página web en preparación (en servicio parcial):
http://www.sociedadpuigadam.es

Todos lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

XXV Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Como todos los años, y ya van 25, el pasado sábado 9 de junio se celebró en la Facultad de Matemáticas de la UCM el concurso de Problemas Puig Adam que, junto al concurso Intercentros, constituyen dos actividades organizadas por nuestra Sociedad que ilusionan a un importante número de estudiantes.

El Concurso de este año, convocado en nuestro Boletín nº 75 (en el que aparecen las Bases), se celebró en la mañana del sábado 9 de Junio de 2007. Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde, en el mismo lugar.

La concurrencia, en un sábado de vacaciones, fue parecida a la de años anteriores. Los alumnos, según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles.

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 7 puntos. A continuación de esta crónica damos sus enunciados.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él, se pronunciaron unas breves palabras de enhorabuena a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a todos los que han contribuido al éxito del Concurso.

Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles, como en años anteriores:

Nivel I

1º. Moisés Herradón Cueto (Brains).

2º. Francisco Criado Gallart (Madre de Dios).

2º. Carlos Ruiz Domínguez (San Viator), con los mismos puntos que el anterior.

4º. Alfio Vidal Auñán (Oleana, Requena).

5º. Sergio Fernández Rincón (IES Antonio Machado, Alcalá de Henares).

Nivel II

1º. Rubén Jiménez Benito (IES José Hierro).

2º. María Cámara Torres (CI Campolara, Burgos).

2º. Eva Mª Laín Rodríguez (C. Británico), con los mismos puntos que el anterior.

4º. Fernando García Garriga (CI Campolara, Burgos).

5º. Iago Rego García (IES Joan Miró).

Nivel III

1º. Diego Izquierdo Arseguet (Liceo Francés).

2º. David Alfaya Sánchez (IES José Luis Sampedro, Tres Cantos).

3º. Andrés Rodríguez Reina (Colegio SEK Ciudalcampo).

4º. Gabriel Fürstenheim Milerud (IES Ramiro de Maeztu).

5º. Pedro Fernández Gaspar (Colegio Retamar).

Viene siendo una constante a lo largo de muchos años que cada una de las celebraciones de este concurso sirva para despedir, sin ningún acto significativo, pero sí con el corazón, a aquellos estudiantes que, a lo largo de sus años a partir de 3º ESO, tuvieron una participación destacada en el concurso. Todavía recordamos a Hugo, estudiante de 2º de matemáticas en la UCM, ganador de la Olimpiada Matemática Española en 2006 y medalla de plata en Eslovenia, que obtuvo el primer lugar en los tres años que participó en nuestro concurso.

Pues bien, este año, de una tacada, despedimos a tres. Sirvan estas líneas para reconocer el mérito de Diego Izquierdo Arseguet, David Alfaya y Gabriel Fürstenheim, participantes y ganadores en nuestro concurso desde que eran unos niños, así como nuestro agradecimiento por todos los ratos buenos que nos han hecho pasar.

No queremos, de ninguna forma, olvidar a Antonio Ledesma, que cada año nos acompaña con sus estudiantes desde Requena, realizando un trabajo encomiable que, como él y nosotros sabemos, no goza del reconocimiento que debiera por parte de la Administración Educativa.

Pero en fin, nuestros chicos disfrutan con los problemas que, al fin y al cabo, es de lo que se trata.

Nuestra enhorabuena a todos los premiados, al resto de los participantes y a los padres y profesores que los han preparado y animado a participar.

Joaquín Hernández Gómez

Problemas propuestos en el XXV Concurso

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en cada uno de los tres niveles.

NIVEL I

Problema 1º

Se da el triángulo ABC y se trazan las medianas AM y BN, que se cortan en G. Calcular el área del cuadrilátero GMCN en función del área de ABC.

Problema 2º

Decimos que un número entero es "supersticioso" cuando es igual a 13 veces la suma de sus cifras. Escribe todos los números supersticiosos que existen.

Problema 3º

Los lados de un triángulo miden 9, 12 y 15 cm. ¿Cuánto mide el radio de un círculo cuyo centro está en el lado pequeño y es tangente a los otros dos?

Problema 4º

Escribe todas las formas posibles de obtener 100 como suma de dos o más enteros positivos consecutivos.

NIVEL II

Problema 1º

Encuentra un número de cuatro cifras que verifique las siguientes condiciones:

a) La suma de los cuadrados de las cifras de las centenas y de las unidades es igual a 53.

b) La suma de los cuadrados de las otras dos cifras es igual a 45.
c) Si del número pedido restamos el que se obtiene al invertir las cifras, resulta un múltiplo de 99 comprendido entre 1000 y 1200.

Problema 2º

Sea un triángulo; a, b, c, las longitudes de sus lados y R la longitud del radio del círculo circunscrito. Demostrar que si se verifica $R(a+b)=c\sqrt{ab}$, entonces el triángulo es isósceles.

Problema 3º

A una persona le han prestado un teléfono móvil, pero ha olvidado su número PIN (de 4 cifras), a pesar de que le dijeron que era un capicúa divisible por 49. El teléfono se bloquea si hace más de dos intentos fallidos. Probar que podrá utilizarlo.

Problema 4º

El cuadrilátero ABCD admite un círculo inscrito, de centro O. Si el ángulo AÔB es de 70º, calcular el valor del ángulo DÔC.

NIVEL III

Problema 1º

Se comprueba que es $\sqrt{82}-9<0,05$. Con ese dato, calcula cuál es la cifra decimal que ocupa el lugar 31º en la escritura decimal de $\left(9+\sqrt{82}\right)^{50}$, recordando que $\left(9+\sqrt{82}\right)^{50}+\left(9-\sqrt{82}\right)^{50}$ es un número entero.

Problema 2º

Lanzamos alternativamente una moneda y un dado perfectamente equilibrados y dejamos de lanzar cuando obtengamos cara o cuando obtengamos un dos. Si empezamos lanzando la moneda, ¿cuál es la probabilidad de acabar porque hemos obtenido un dos?.

Problema 3º

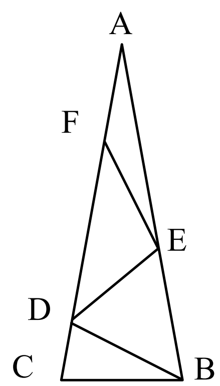
Sean a y b enteros positivos. Demuestra que la ecuación

$$(x-a)^2+(x-b)^2=2ab-1$$

no tiene raíces racionales.

Problema 4º

En la figura siguiente, el triángulo ABC es isósceles y el ángulo A es de 20 grados. Además, CB = BD = DE = EF. Calcular la amplitud del ángulo FBA (no señalado en la figura).



El Último de los vivos

(En el fallecimiento de Federico Gaeta)

Como quien regresa de una estación en la historia, he vuelto hace poco de Oxford. En aquellos colleges se guarda memoria de sus fellows que llegaron a ser espíritus universales. Se les celebra porque lo fueron. Pero quizá lo fueron porque se les celebra. De vuelta a España, he reflexionado sobre el hecho de que los medios no hayan notificado la reciente pérdida de uno de nuestros espíritus universales, Federico Gaeta. Si se hubiese tratado de un as del deporte, digamos del deporte rey, el fútbol, hasta los niños sabrían ahora su nombre, y los jóvenes tendrían un ejemplo que emular. Pero lo que hemos perdido ha sido un as de la ciencia, de la ciencia reina, las matemáticas, y su nombre ha pasado en silencio. Al final, cada pueblo tiene lo que celebra. Y los españoles no celebramos la ciencia.

¿Cómo dar en tan pocas líneas cuenta cumplida de la obra de Federico Gaeta? No haré de él un elogio. Al acabar el famoso "Banquete" se pidió a Sócrates que elogiara al dios Amor, pero él se negó a hacer de ese dios, ni de nada ni de nadie, el elogio: es decir, de entre todo lo que es verdad, recordar tan sólo lo que resulta halagüeño. Cuando, entonces, le permitieron expresarse con libertad , se tratase o no de un elogio, pronunció aquel inmortal discurso, una de las más bellas y verdaderas páginas que se hayan escrito jamás acerca del amor.

Digámoslo, pues, claramente. Gaeta no fue un maestro. No lo fue en el sentido ordinario que suele darse a esta palabra: un formador directo de jóvenes científicos que perpetuasen su nombre y su obra a través de esa misma labor de formación. Baste sólo un dato: nunca dirigió una tesis doctoral. Pero quisiera explicar cómo, más allá de este estrecho sentido, Federico Gaeta fue un gran maestro, una verdadera inspiración moral y científica para generaciones. Cuando hace diez años, geómetras de todo el mundo se daban cita en Madrid en un congreso homenaje con ocasión de su jubilación, tuve el honor de ser invitado a glosar su figura. Y lo hice comparándola con la de Pedro Abellanas, otro modo de ser maestro, otro modo de dejar rastro en las generaciones. Abellanas, en su vida de investigación, llevó a cabo una ingente labor de formación de jóvenes –dirigió muchas tesis doctorales de los que a su vez fueron directores– dejando sembrado en la geometría española un jardín de Mayo. Federico Gaeta, en cambio, paró poco por

España, desde que realizara su tesis doctoral esencialmente en Italia, y ejerciera luego por muchos años como profesor en Estados Unidos, hasta su regreso, sólo muy al final, a nuestro país. Pero el principal resultado de su investigación, su teoría de la "liaison geométrica", ha sido fuente de inspiración, no sólo para jóvenes geómetras en España, sino en Italia, en Francia, en Alemania, en Estados Unidos, por citar los principales países donde ha continuado, se ha desarrollado, y se ha generalizado y aplicado esta teoría iniciada por nuestro compatriota digamos que en busca de la nada, en busca de verdades que, como una buena amistad, no se buscan para nada. "La Nada –escribía Emily Dickinson– es la fuerza que renueva el mundo". A mi parecer, esta desinteresada búsqueda de verdad es la única actitud probadamente progresista, pues es la que constantemente en la historia, y en contra de los pragmatismos de cada siglo, ha traído consigo el progreso científico que lleva siempre distraídamente de la mano a su hermano menor, el desarrollo tecnológico.

Pero esto lo entienden unos pocos, siempre unos pocos. Gaeta fue uno de ellos y su compromiso fue siempre con la geometría pura. En su teoría de la "liaison", en la ciencia puramente geométrica, fue capaz de caracterizar las curvas conocidas, por la simplicidad de su estudio, como "curvas normales" (o más precisamente: "aritméticamente normales"). Se llama así las curvas para las que resulta trivial el problema de determinar "cuántas" superficies la contienen, y en consecuencia también otros problemas geométricos que es difícil resolver para otras curvas. Federico Gaeta caracterizó las curvas normales como aquellas que están "ligadas" en cierto modo a las curvas de más sencilla construcción: las que se construyen como intersección de dos superficies , tal como, por ejemplo, una recta se construye como intersección de dos planos (y dos curvas se dicen "directamente ligadas" si ambas juntas hacen la intersección de dos superficies, y se dicen "ligadas" si la primera curva está directamente ligada a otra, y ésta a su vez a otra, y ésa a otra... y así sucesivamente hasta llegar a la segunda curva). Este concepto de "ligadura" o de "liaison" se ha generalizado más tarde –en la actualidad hay una verdadera explosión– en contextos cada vez más sofisticados.

Y, llegados aquí, una puntualización. D. Federico solía recordarnos que él no inventó la teoría de la liaison, contra la que solía decirse de él. Esta noción se encuentra por ejemplo en trabajos previos de Macaulay, antes de que Federico Severi le propusiese a Gaeta, como tema de tesis doctoral, el estudio de las curvas aritméticamente normales. La aportación de Gaeta es el "Teorema de Liaison" que he intentado expresar en términos divulgativos . Pero es este teorema el que ha consagrado la teoría de la “liaison”. Y aún otra puntualización, que también solía hacer D. Federico. El teorema no es sólo suyo, sino que es aportación simultánea de Apery y de Gaeta, y, así pues, téngase todo lo dicho como dicho de los dos. Pero Apery entró a continuación en un monasterio. Interesante, para los amantes de la historia de la ciencia, sería indagar su paradero, como los físicos italianos han indagado el paradero de Majorana. Quizá sólo encontremos que nos ha faltado ya. Entonces habrá sido verdad lo que yo solía decir a Gaeta. Yo le llamaba “el último de los vivos”, con lo que se sobrentendía “el último de la cadena de oro de la geometría italiana”. El hacía que protestaba, pero en el fondo le gustaba.

Bien, pues, Federico Gaeta. Gracias, último de los vivos. Que tu memoria permanezca viva entre los jóvenes, como celebrada forma ejemplar. Que sepan que, como dice mi amigo Antonio Córdoba, más vale subir una vez el Everest que cien veces la montaña de tu pueblo. Más vale una sola obra inmortal hecha en toda una vida que todos esos “papers” por año con que se pretende que forremos las hemerotecas.

Ignacio Sols

Presentación del Dr. B. Kutzler

El Dr. Bernhard Kutzler, austriaco, es una de las autoridades mundiales en el campo de la Didáctica del Álgebra Computacional.

Su doctorado versó sobre la demostración automática de teoremas geométricos, pero ha llevado a cabo muy diversas actividades. Trabaja o ha trabajado como ingeniero de software, investigador en el prestigioso centro RISC-Linz (con el profesor Bruno Buchberger), consultor de Texas Instruments, profesor de la Universidad de Linz, editor de la editorial BK Teachware ...

Es de destacar, además, su intensa actividad en el campo de la Didáctica del Álgebra Computacional (y más en particular del uso de Derive y las calculadoras Texas Instruments), como organizador de congresos y sesiones especiales, conferenciante, divulgador y autor de varios libros.

Se puede encontrar más información sobre él y sus trabajos, además de noticias, avisos de congresos... en su interesante página web:
`www.kutzler.com`

El Dr. Kutzler ya escribió para nosotros otro artículo, que fue publicado en el número 60 del Boletín. El artículo que incluimos a continuación nos pareció muy interesante y actual, por lo que hemos solicitado su permiso para ser reproducirlo en nuestro Boletín, a lo que accedió gustosamente, lo cual agrademos. El artículo es pues una reedición de:

> *B. Kutzler: Numerics Versus Symbolics. University of South Bohemia Ceske Budejovice, Pedagogical Faculty: Department of Mathematics. Report Series, vol 13, 2005, pp. 91-104, ISSN 1214-4681.*

También deseamos agradecer al profesor Pavel Pech, de la University of South Bohemia, el permiso para reproducirlo.

Eugenio Roanes Lozano

Numerics versus Symbolics[1]

Bernhard Kutzler

Linz, Austria

Abstract

This lecture is a meditation about two concepts which, in the context of computer algebra, sometimes appear as opposing each other.

1. Etymology

We start with the etymology of the two words. The word "numerics" comes from the Latin word "numerus" which means "part", "number", where "number" itself is derived from "part" as the result of a counting process.

The word "symbolics" comes from the Greek word "symbolon" which is composed of the two words "sym" (meaning "together") and "ballein" (meaning "to throw"). Therefore, "symbolics" means "to put together". "Putting together" can be for two reasons: It can be for constructing something, i.e. for creating a whole from parts. And it can be for putting things next to each other so that they can be compared[2]. For the Greek a "symbolon" was anything that would be comparable to the real thing whose place it took.

It is important to note that, strictly speaking, "5" also is a symbol for, say, the number of fingers of a hand, and "3.2" is a symbolic representation of the number obtained by dividing 32 by 10. But we don't use "symbolics" in this narrow sense

[1] Este artículo es una reedición de: B. Kutzler: *Numerics Versus Symbolics*. University of South Bohemia Ceske Budejovice, Pedagogical Faculty: Department of Mathematics. Report Series, vol 13, 2005, pp. 91-104, ISSN 1214-4681. Deseamos agradecer al profesor Pavel Pech, de la University of South Bohemia, el permiso para reproducirlo.

[2] The word "compare" is composed of the two Latin words "com" = "cum" (meaning "together") and "par" (meaning "equal").

of the word here, because then all mathematics would have to be called symbolic mathematics.[3]

The German mathematician C F Gauss said: *"Mathematics is concerned only with the enumeration and comparison of relations."* With the above in mind, this means that mathematics is concerned only with numerics ("enumerate") and symbolics ("compare").

2. First thoughts

In a computer algebra system (we use Derive 6) enter $\sqrt{24}$, simplify, then approximate.

#1:	$\sqrt{24}$
#2:	$2\cdot\sqrt{6}$
#3:	4.898979485

#1 and #2 are two different symbolic representations of this number. #3 is a numeric (decimal) representation of a ten-digit approximation of the same number[4]. Pragmatically, we can say that numeric mathematics is the mathematics on numbers (typically in decimal notation) such as #3. Symbolic mathematics is mathematics on everything else.

With a calculation such as the above on the screen of a symbolic calculator, Bert Waits once asked: *"How do you recognize a mathematician?"* and suggested the following answer: *"A mathematician considers #2 a beautiful result."* So we mathematicians like symbolics more than numerics ... although we know that numerics has its virtues too, and sometimes we cannot do without numerics. More about this later. For now we quote C F Gauss again, who has said that *"a poor mathematical education often is demonstrated by a highly developed skill of mental arithmetic."* (In the context of this paper this could be rephrased as: *"Poor symbolics often is demonstrated by good numerics."*)

---

[3] In fact, in the narrow sense of the word "symbolic" one could consider mathematics the science of symbols.

[4] Compare our respective comment from section 1.

As we said, expression #3 represents only an approximation of $\sqrt{24}$. The precise decimal representation of this number has infinitely many digits and, therefore, cannot be written in a finite amount of time or in a universe with only a finite amount of matter. Therefore, practical numeric mathematics necessarily is an approximative mathematics.

3. Different kinds of mathematics

The integers I, the rational numbers Q, and the real numbers R are three important number sets in (school) mathematics. They possess useful properties. An important property is "closure". It guarantees that one remains inside the domain when performing an arithmetic operations. I is closed w.r.t. addition, subtraction, and multiplication. Q and R are closed w.r.t. addition, subtraction, multiplication, and division (except for 0). The "deficiency" of the integers is that division can take us outside the domain, for example when dividing 3 by 4.

In Q (and R) we can divide 3 by 4. The result, ¾ or 0.75, is an element of Q (and R). If you divide 1 by 3, the result, 1/3 or 0.33333..., also is an element of Q (and R). But the latter example causes "trouble" when it comes to a "material" representation of the number in "practical" numeric mathematics, for example on a computer or a calculator, where numbers are represented in decimal notation with up to *n* digits (sum of digits before and after the comma). On calculators *n* often is 12 or 14.

On such a device, the result of the division of 1 by 3 cannot be represented, therefore an approximation obtained by cutting off (infinitely many) decimal places is used. For example 1/3 will be approximated by 0.33333333333333.

Floating point arithmetic uses decimal numbers with up to *n* digits total. Fix point arithmetic uses decimal numbers with up to *n* digits following the comma. Let's look at the somewhat simpler case of fix point arithmetic. We formalized this as follows: Define R(*n*) to be the set of all real numbers with *n* decimal places. Then:

$$I = R(0) \subset R(1) \subset R(2) \subset \ \dots \subset R(n) \subset \ \dots \subset Q \subset R$$

- I is closed w.r.t. addition, subtraction, and multiplication
- R(*n*) is closed w.r.t. addition and subtraction
- Q and R are closed w.r.t. addition, subtraction, multiplication, and division

Closure is an important property when it comes to the validity of identities. For example, the simple identity

$$\frac{1}{x}\cdot x = 1$$

is valid in Q and R, but it is not valid in any R(n). On most calculators this fact is hidden in "obvious" cases because numbers such as 0.999999999 are rounded to 1. What really happens can easily be visualized in Derive. The following Figure 1 is a graph of

$$y = \frac{1}{x}\cdot x - 1$$

in R(1).

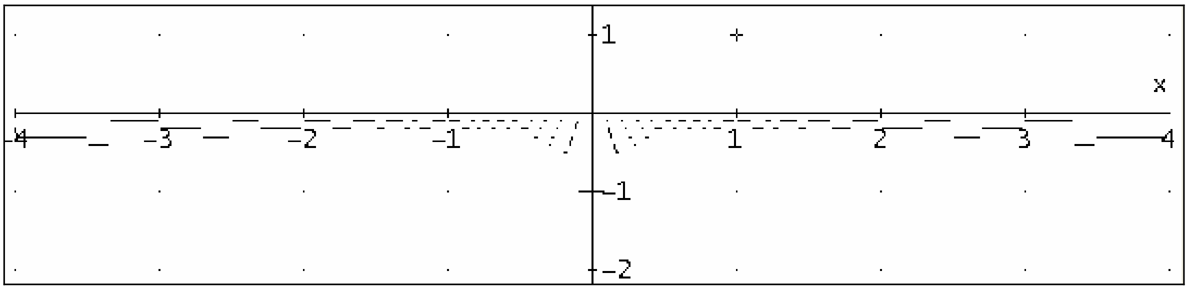


Figure 1

As you can see, the graph mostly is different from 0, hence for most values of

$$x \ \frac{1}{x}\cdot x \neq 1$$

Screen images for R(2) and R(3) follow. The following Derive code gives the code of the function used to produce the graphs of Figures 2 and 3.

```
#1:    nodi := 1

       intgr(x) :=
         If INTEGER?(x)
            x
#2:         If x ≥ 0
               FLOOR(x)
               FLOOR(x) + 1

                           nodi
                intgr(x·10     )
#3:    r(x) := ─────────────────
                        nodi
                      10

                      ⎛ ⎛ 1 ⎞      ⎞
#4:    test1(n) := r⎜r⎜ ─ ⎟·r(n)⎟ - 1
                      ⎝ ⎝ n ⎠      ⎠

#5:    test1(n)
```

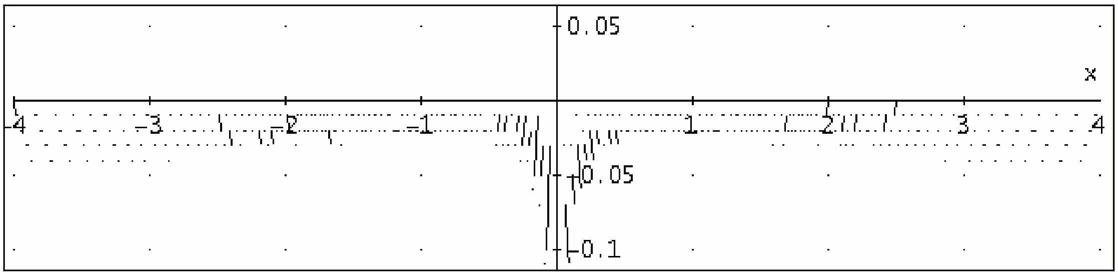


Figure 2

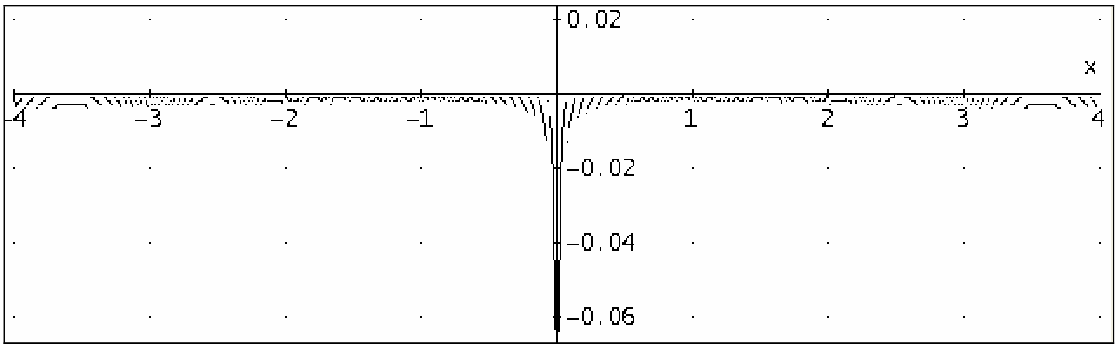


Figure 3

Another example is the identity $(x^2 - y^2) = (x+y)\cdot(x-y)$. In R(1) we have

$$(1.1^2 - 0.2^2) = 1.2(1) - 0.0(4) = 1.2$$

and

$$(1.1+0.2)\cdot(1.1-0.2) = 1.3\cdot 0.9 = 1.1(7).$$

```
#8:   test(1.1, 0.2)

#9:                        [1.2, 1.1]
```

Also for this example, falsity of the identity can be visualized in Derive. The following Figure 4 shows the graph of

$$z = (x^2 - y^2) - (x+y)\cdot(x-y)$$

in R(1). The result is different from zero for many values of x and y.

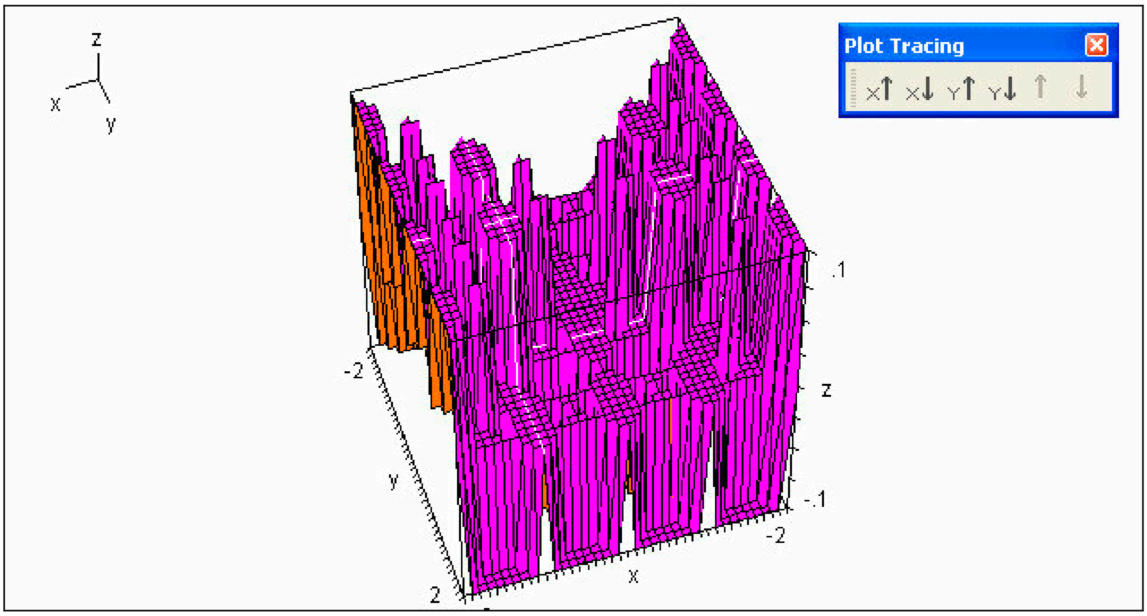


Figure 4

With the help of Derive's trace function one can easily find concrete examples in any R(n). We find $x = 1$, $y = 0.5$ as another example in R(1) (Figure 4) and $x = 0.02$, $y = 0.0075$ in R(4) (Figure 5).

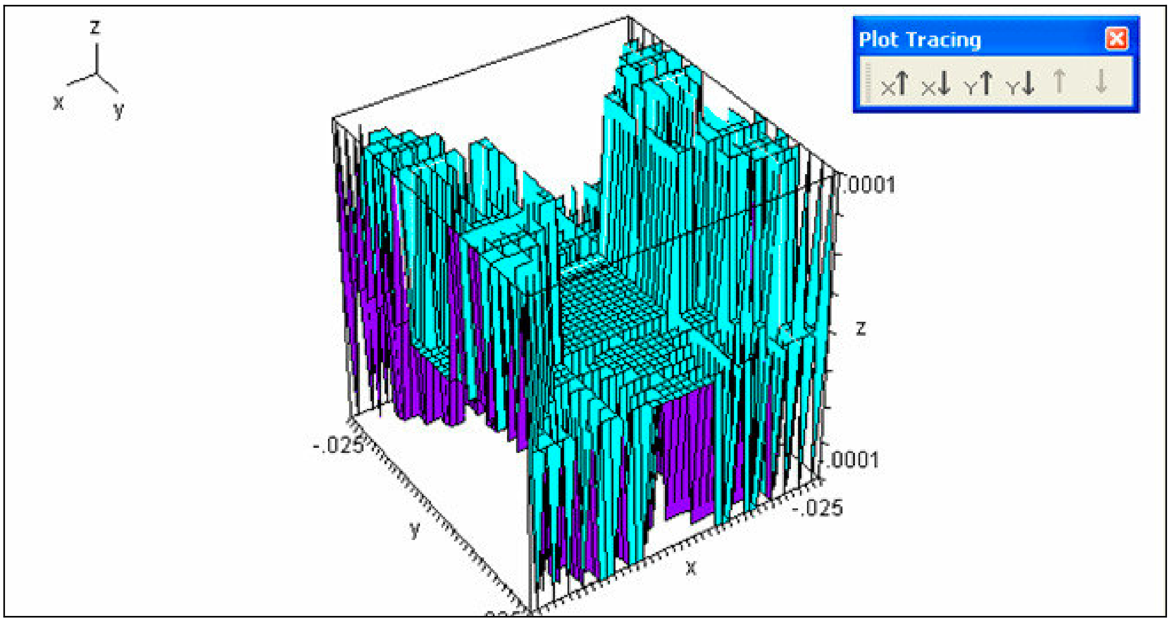


Figure 5

The following Derive code gives the code of the function used to produce the graphs of Figures 4 and 5.

```
#1:   nodi := 1

      intgr(x) :=
        If INTEGER?(x)
           x
#2:        If x ≥ 0
              FLOOR(x)
              FLOOR(x) + 1

                          nodi
               intgr(x·10     )
#3:   r(x) := ─────────────────
                       nodi
                     10

                          2          2
#4:   test(x, y) := [r(r(x) ) - r(r(y) ), r((r(x) + r(y))·(r(x) - r(y)))]

                               2          2
#5:   testdiff(x, y) := r(r(x) ) - r(r(y) ) - r((r(x) + r(y))·(r(x) - r(y)))

#6:   testdiff(x, y)
```

None of the traditional computation tools such as calculators are suitable for the "classical" mathematics in Q or R. Only computer algebra systems with their symbolic representations of rational numbers as quotients of two integers, with fractional powers, with π, *e*, etc., are appropriate.

By the way, the traditional tool for numerics is the abacus. Slide rules, four-function-calculators, scientific calculators and traditional (numeric) computer software are but sophisticated editions of an abacus. Computer algebra systems are a quantum leap. They are for symbolics what the abacus is for numerics.

It is perfectly fine to do mathematics in an "R(n) environment", but students need to understand the consequences. They need to understand, ideally by experiencing it with appropriate examples, what can happen with identities such as the above. In Derive one can do approximate arithmetic with a specified number of digits. This is of great help when studying or demonstrating the effects in an "R(n) environment".

We end this section by looking at the example

$$x \cdot \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$$

Enter the expression, substitute 1 million (1 000 000) for x, then approximate.

```
#1:   x·√x·(√(x + 1) + √(x - 1) - 2·√x)

#2:   1000000·√1000000·(√(1000000 + 1) + √(1000000 - 1) - 2·√1000000)

#3:                                   0
```

Looks like a clear zero. By default, Derive uses ten digits for approximations. If, instead, we approximate #2 with an accuracy of 15 digits, the result is very much different:

```
#4:                         -0.250012501243889
```

In [Kutzler/Kokol-Voljc 2003], pages 72ff, we show how to use Derive 6 to investigate this example in detail and demonstrate how it happens that the two results are so different.

4. Numerics helps Symbolics (i): Limitations of Symbolics

Symbolics has its limitations. Some symbolic computations are impossible:

- because an algorithm cannot be found due to theoretic limitations,
- because an algorithm has not been found yet,
- because an implementation of the algorithm does not exists yet,
- because the execution of the algorithm requires too much time or space.

In some of these cases a numeric solution is better than no solution.

Examples are:

(a) It is impossible to find symbolic solutions (using known functions and constants) of general polynomial equations of degree higher than four.

#4: $x^5 + 2\cdot x^4 - 3\cdot x^3 + 4\cdot x^2 - 5\cdot x + 6 = 0$

#5: SOLVE($x^5 + 2\cdot x^4 - 3\cdot x^3 + 4\cdot x^2 - 5\cdot x + 6 = 0$, x)

#6: $x^5 + 2\cdot x^4 - 3\cdot x^3 + 4\cdot x^2 - 5\cdot x = -6$

#7: NSOLVE($x^5 + 2\cdot x^4 - 3\cdot x^3 + 4\cdot x^2 - 5\cdot x = -6$, x)

#8: $x = -0.2389321333 - 1.151781933\cdot i \vee x = -0.2389321333 + 1.151781933\cdot i \vee x = 0.9390814243 - 0.6271970073\cdot i \vee x = 0.9390814243 + 0.6271970073\cdot i \vee x = -3.400298582$

(b) For certain functions it is impossible to find closed form antiderivatives (using known functions and constants).

#4: $\int_0^5 \mathrm{SIN}\left(\frac{1}{x}\right) dx$

#5: 2.035618287

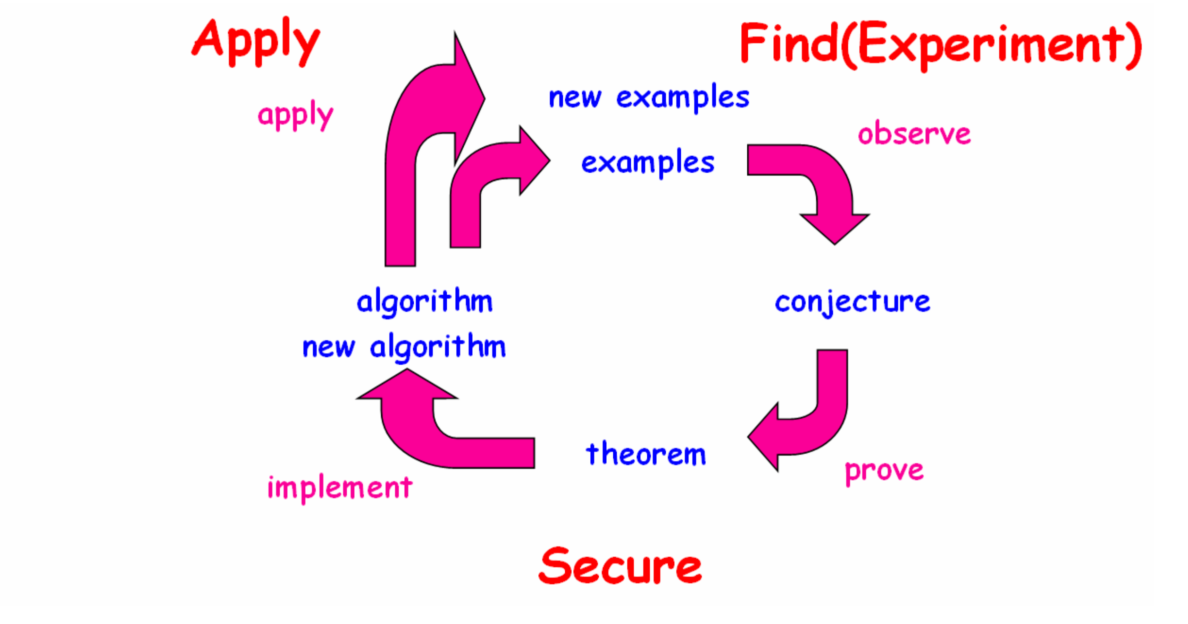
(c) It is impossible to find, for certain classes of expressions, an algorithm which can decide the equivalence of two expressions.

(d) Constructing a Groebner basis has double exponential complexity.

5. Numerics helps Symbolics (ii): The Creativity Spiral

When asked how he came upon his theorems, C F Gauss answered: *"... through systematic, palpable experimentation."*

According to one of the epistemologically oriented theories one can visualize the main steps of (mathematical) discoveries as follows: Applying known algorithms produces examples. From the examples we observe properties, which are expressed as a conjecture. Proving the conjecture yields a theorem, i.e. guaranteed knowledge. The theorem's algorithmically usable knowledge is implemented in a new algorithm. Then the algorithm is applied to new data, yielding new examples, which lead to new observations, ...



This picture of a spiral which demonstrates the path of discovery of (mathematical) knowledge was proposed by Bruno Buchberger. A detailed description of *Buchberger's Creativity Spiral* and references to related models can be found in the highly recommended (German language) book [Heugl/Klinger/Lechner 1996].

In this spiral we find three phases. During the *phase of finding/experimenting* one uses known algorithms to generate examples, then obtains conjectures through observation. During the *phase of securing* conjectures are turned into theorems through the method of proving, then algorithmically useful knowledge is implemented as algorithms. During the *phase of applying* one applies algorithms to new data.

In the finding phase often we have to find patterns in sequences of numbers. A well known example from the topic “proof by induction” is to find a closed form expression for $\sum_{i=1}^{n} i$.

For this particular example there exists an elegant solution which is based on an observation made by C F Gauss when he was still very young. Here we use a method which may be helpful also for other such problems. Clearly, there are many alternative approaches which will lead to the solution.

We compute the sum for a few (consecutive) values of n, for example $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$. The results are stored in the second column of the below table. In looking for a pattern we perform a simple factorization of the sums into two “obvious” factors – and store the result in the third column. The pattern is striking, but still a little hard to describe. By doubling the first factor we make it closer to the second factor (fourth column). Now we see that we always have products of two consecutive numbers. In the fifth column the two factors are arranged in ascending order, in the sixth column we divide by two again to compensate for the earlier doubling.

n	$\sum_{i=1}^{n} i$	Simple factorization	double the first factor	sort factors	Divide by two
5	15	$3 \cdot 5$	$6 \cdot 5$	$5 \cdot 6$	$(5 \cdot 6)/2$
6	21	$3 \cdot 7$	$6 \cdot 7$	$6 \cdot 7$	$(6 \cdot 7)/2$
7	28	$4 \cdot 7$	$8 \cdot 7$	$7 \cdot 8$	$(7 \cdot 8)/2$
8	36	$4 \cdot 9$	$8 \cdot 9$	$8 \cdot 9$	$(8 \cdot 9)/2$
9	45	$5 \cdot 9$	$10 \cdot 9$	$9 \cdot 10$	$(9 \cdot 10)/2$
10	55	$5 \cdot 11$	$10 \cdot 11$	$10 \cdot 11$	$(10 \cdot 11)/2$

Now the pattern is obvious (at least for these 6 values of n) and we can come up with the conjecture

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

which can easily be proved by induction.

This is an inductive process which leads from the special to the general, i.e. from numeric to symbolic.

The other two phases in the above spiral, securing and applying, are both deductive processes leading from the general to the specific. The applying phase is the reverse of the finding phase's inductive process: You go from symbolic to numeric, for example by using the closed form expression to compute the sum of the first 100 natural numbers as

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

(tribute to C F Gauss!).

The securing phase also is a deductive process, i.e. it leads from the general to the specific, but this is on the level of mathematical logic, where the general are the (inference) rules of logics and the specific is the mathematical theory in which the conjecture is formulated.

6. Symbolics helps Numerics (i): Preprocessing

Say we need to calculate the perpendicular bisector of two points a and b. The steps of using the so called normal vector form are simple.

First we compute the midpoint of a and b. This point, we call it p, is a point on the line we are looking for. Then we compute the vector from a to b. This vector, we call it n, is normal to the line we are looking for. Using n and p we can write the equation of the line using the normal vector form(ula)

$$n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = n \cdot p$$

These mostly numeric computations are easily performed with paper and pencil, we use Derive:

```
#1:   a := [1, 3]

#2:   b := [-2, 5]

       a + b
#3:   ───────
         2

                                         ┌    1     ┐
#4:                                      │ - ───, 4 │
                                         └    2     ┘

#5:   b - a

#6:                                        [-3, 2]

                                ┌    1     ┐
#7:   [x, y]·[-3, 2] =          │ - ───, 4 │·[-3, 2]
                                └    2     ┘

                                               19
#8:                              3·x - 2·y = - ───
                                                2
```

If we need perpendicular bisectors very often, for example because we do analytic geometry, the above procedure becomes tedious. It is always the same steps, only the numbers (i.e. the four coordinates of the two points) are different.

To save us from these many numeric applications of the above procedure we can apply it one time to a pair of symbolic points, i.e. points *a* and *b* with symbolic coordinates:

$$a = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad b = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

In a paper and pencil environment this “symbolic application” of the procedure is much more work than its meric application (and most students don’t like this kind of calculations). In a computer algebra system the extra effort of a symbolic application is done by the machine, so it is not any more difficult for the user. Below is the computation performed in Derive.

#9: InputMode := Word

#10: $a := [xa, ya]$

#11: $b := [xb, yb]$

#12: $$\frac{a + b}{2}$$

#13: $$\left[\frac{xa + xb}{2}, \frac{ya + yb}{2}\right]$$

#14: $b - a$

#15: $[xb - xa, yb - ya]$

#16: $$[x, y]\cdot[xb - xa, yb - ya] = \left[\frac{xa + xb}{2}, \frac{ya + yb}{2}\right]\cdot[xb - xa, yb - ya]$$

#17: $$x\cdot(xa - xb) + y\cdot(ya - yb) = \frac{xa^2 - xb^2 + (ya + yb)\cdot(ya - yb)}{2}$$

#18: $$x\cdot(xa - xb) + y\cdot(ya - yb) = \frac{xa^2 - xb^2 + (ya^2 - yb^2)}{2}$$

We obtain

$$(x_a - x_b)\cdot x + (y_a - y_b)\cdot y - \frac{x_a{}^2 - x_b{}^2 + y_a{}^2 - y_b{}^2}{2} = 0$$

as the equation of the perpendicular bisector of a and b. Now for any new points a and b we can simply substitute the coordinates into this expression and obtain the resulting equation of the line.

The one-time investment of a symbolic application saves a potentially infinite number of numeric applications. This method can be considered a “preprocessing”.

7. Symbolics helps Numerics (ii): The Pentium-Bug

On Oct 19, 1994 Dr. Thomas R Nicely, professor of mathematics at Lynchburg College discovered what later has become known as the Pentium Bug. After lots of testing he found that 824,633,702,441 divided by itself gave 0.999999996274709702 – instead of 1. Later it was found that this is true for all numbers between 824,633,702,418 and 824,633,702,449.

This is the well known part of the story. Here comes the unknown part[5]: Shortly after the Pentium Bug was found, the authors of Derive, David Stoutemyer and Albert Rich from Soft Warehouse, Inc., sent a complimentary copy of Derive to Prof. Nicely. After several weeks Thomas Nicely phoned up David. He apologized for taking so long to respond, but after he became famous for having found the Pentium Bug he received special protection from the police and all mail sent to him had to undergo a screening by a security team. Therefore he got the package with some delay. He thanked David for the copy of Derive and said that, in fact, he owns a copy of Derive and that Derive’s ability to do approximate arithmetic to a specified number of digits (our above “R(n)-arithmetic”) has helped him to locate the cause of the problem in the Pentium chip.

Therefore, the bug in the numeric methods of the Pentium chip was discovered with the help of a symbolic tool.

8. More from etymology

In section 1 we said that “numerics” comes from “numerus” (= “part” (of a whole), “number”) and “symbolics” comes from “symbolon” (= “to put together”, “to compare”). In mathematics we use only the meaning “numbers” for “numerics”. “Symbolics”, on the other hand, can denote either a composition (of parts) or something which takes the place of something else (and, hence, is comparable to it).

Working with decimal representations of numbers is what we call “numeric”. A variable, for example x, which takes the place of something, we call “sym-

[5] Personal communication with David Stoutemyer.

bolic”. Another example of something “symbolic” is $y = x^2$. $y = x^2$ stands for a whole which is composed of (infinitely many) parts, namely the pairs (x, x^2) for x taken from a certain set. When we take x from the real numbers, these pairs can be interpreted as points in the plane forming a parabola.

A famous quote from the Greek philosopher Aristoteles says: *“The whole is more than the sum of its parts”*. In the above example, the points of the parabola are the parts, the parabola is the whole. The parabola is composed of infinitely many points, so it is the sum of its parts – but it is more than that, because it has properties, which none of the points has or which none of all possible subsets of the points has. Such properties are continuity, symmetry, or simply the fact that the points of the parabola are exactly those points of the plane whose coordinates satisfy the equation $y = x^2$.

Instead of “symbolic computation” we often see “algebraic computation”. How are these two words related? The word “algebra” comes from the title of a work written around 825 by the Arabic mathematician known as al-Khowarizmi entitled “al-jebr w’al-muqabalah”. In Arabic “al-“ is the definite article “the”. The first noun in the title is “jebr”, which means “reunion of broken parts”, from the verb “jabara” which means “to reunite, to consolidate”.[6] The second noun in the book title is from the verb “qabala”, with meanings that include “to place in front of, to balance, to oppose, to set equal.”

Together these two words describe some of the manipulations so common in algebra.

9. Pythagoras’ View of Mathematics

Pythagoras of Samos (580 – 496 BC) was a contemporary of Confuzius (551 – 479 BC) and Prince Gautama, the Buddha, (560 – 480 BC). He is considered one of the wisest men of antiquity. Pythagoras lived on Samos, a Greek island. The tyrant Polycrates took power in 538 BC (first with his brother, then alone in 532 BC). Pythagoras disagreed with his rule and left the island 532 BC for South Italy, where he started a school in Croton.

---

[6] This corresponds to the one meaning of the Greek word “symbolon” = “to put together”.

Pythagoras used three disciplines of teaching:

- Nutrition for cleaning and developing the physical body
- Music for cleaning and developing the emotional body (the soul)
- Mathematics for cleaning and developing the mental body (the mind)

Pythagoras had two ideals: Freedom and philosophy. For him, mathematics was the discipline to acquire both as I will explain in the sequel. Pythagoras regarded the three bodies (physis, emotio, ratio) to be closely connected with each body influencing the other two. Therefore he cleaned and developed all three bodies for best results.

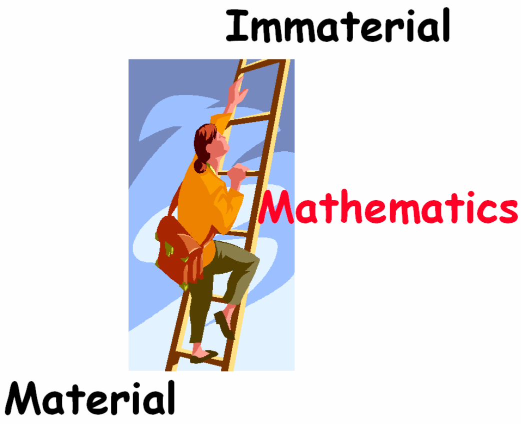
"Philosophy" comes from the Greek words "philein" (meaning "to love") and "sophia" (meaning "wisdom"). "Mathematics" comes from the Greek word "mathema" (meaning "science"), which originates from "mathesis" (meaning "knowledge"). Therefore, in the true sense of the word, mathematics is the only science we have.[7] Pythagoras said: *"Every man has been made by God in order to acquire knowledge and contemplate."* So we should do mathematics in order to acquire knowledge and we should contemplate in order to transform our knowledge into wisdom. This makes mathematics the path to philosophy.

Next about freedom. According to Pythagoras, the true world of our mind is non-material. However, because of our physical body our mind collects only material experiences. Therefore, our mind is "imprisoned" by the material. Physically we never can be free, nor can we be free emotionally. But mentally we can be free, if we break out of the chains of our mind's material imprisonment. Mathematics can help with this, because the objects of mathematics are between material and immaterial.

Look at the example of a point. As a mathematical object, a point is infinitely small. But there is nothing like this in the natural (material) world. However, there are objects (such as a point drawn with a pen, or an atom or subatomic particle) which come close to it for they are very, very small. Another example is a line, which, in mathematics, is infinitely thin and infinitely long. Also such a line does not exist in the material world, but there are objects (like a line drawn with a pencil and a ruler on a piece of paper) which comes somehow close to it. When we talk about a triangle in mathematics, we have something "in mind", which can

7 Natural sciences are sciences insofar as they use the methods of mathematics.

be considered an abstraction of triangular objects in nature or drawn on paper. Alternatively we can say that a triangle which we draw is a realization of a mathematical triangle.

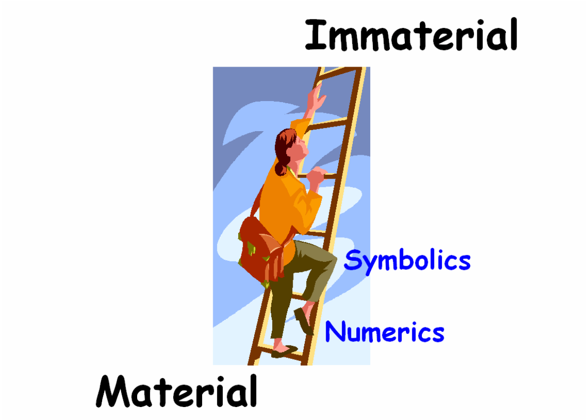


Mathematical objects are like a rung on a ladder from the material world to the immaterial world. Therefore, doing mathematics helps our mind to shake off the confinements of the material experiences and raise above the material world.

Now you probably wonder what this has to do with "numerics" and "symbolics".

Pythagoras said: *"Number is the within of all things."* The "things" are the objects in the natural (material) world. For Pythagoras the numbers are representations of these natural objects. This is why we call them "natural numbers". The "natural numbers" are the most material of all mathematical objects insofar as they are very close to material things. ("5" is a mathematical object very close to the five fingers of a hand.) From the natural numbers we construct new objects which may be less material, such as the negative numbers. ("-5" is not so easily recognized in the material world.)

Putting parts (remember: "part" = "number") together as a new whole (remember: "whole" = "symbol") is a basic technique in mathematics which leads to "less material" = "less numeric" = "more symbolic" = "more immaterial" objects.



If we look at mathematics as (part of) a ladder from the material world to the immaterial world, "numerics" is the lower end (the first rung) on it, "symbolics" are the higher rungs. This means that the higher a person's mathematical education, the higher on the ladder (s)he reaches. If you are high on the ladder there is the danger to lose contact to he material world. The picture of an absentminded mathematics professor appears ... However, the really great minds are those who are "tall" enough to stand with both feet on the material ground and reach with their hands high on the ladder.

This picture is also supported by the following quote from Nikolaus of Cues Cusanus, a German theologian and humanist who lived 1401-1464: *"If there is no other path to the divine then through symbols, we should use mathematical symbols for they possess indestructible certainty. Knowledge about the divine is out of reach for the mathematically illiterate."*

The following table summarizes our philosophical mediation:

Number	***symbol***
More material	less material
Material	immaterial
Finite	infinite
Physical	spiritual

When *"number is the within of all things"* (Pythagoras), then symbolics can be considered the within of mathematics. The Scottisc mathematician Eric Temple Bell (1883 –1960) said: *"Any impatient student of mathematics or science or engineering who is irked by having algebraic symbolism thrust upon him should try to get along without it for a week."*

We can't do mathematics without symbolics, but also we shouldn't do mathematics without numerics either for the numbers connect mathematics with the real world.

Closing Remark

I do hope that you found the contents of this presentation trivial, because, speaking with C F Gauss: *"When a philosopher says something that is true then it is trivial. When he says something that is not trivial then it is false."*

References

[1] H. Heugl, W. Klinger, J. Lechner, 1996: *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen (Ein didaktisches Lehrerbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt)*. Bonn:Addison-Wesley, 307 pages, ISBN 3-8273-1082-2.

[2] B. Kutzler, V. Kokol-Voljc, 2003: *Introduction to Derive 6*. Hagenberg: Soft Warehouse GmbH&CoKG, 268 pages, ISBN 3-9500364-5-8.

Cuárticas bicirculares

Julio Fernández Biarge

Profesor emérito de la Universidad Politécnica de Madrid
jfbiarge@telefonica.net

Abstract

In this paper, we make a systematic study of the fourth order curves with double points in the cyclical points. Several particular cases of them, have been studied from the XVII century, for what this paper is only an orderly summary of well-known results.

1. Generalidades

Como vamos a estudiar propiedades métricas adoptaremos en todos los casos sistemas cartesianos ortonormales de referencia en el plano (en coordenadas homogéneas *x, y, t*, siendo $t = 0$ la recta impropia). La ecuación general de una cuártica es $\Phi = 0$, siendo Φ una forma cuártica en esas variables. La ecuación contiene, por tanto, 15 coeficientes, que supondremos siempre reales. Una cuártica queda determinada, por tanto, con 14 condiciones lineales genéricas (como pasar por puntos determinados). No obstante, como dos cuárticas tienen 16 intersecciones (todas las del haz definida por esas dos pasan por ellos), resulta que todas las cuárticas que pasan por 13 puntos genéricos, pasan en consecuencia por otros 3.

Como aplicación inmediata de estas consideraciones resulta que si cuatro tangentes a una cuártica tienen sus puntos de tangencia alineados, sus ocho restantes intersecciones con la cuártica están sobre una cónica. Para verlo, basta considerar el haz de cuárticas definido por la dada y la formada por las cuatro tangentes, a la que pertenece otra degenerada en la recta que une los puntos de tangencia dos veces y la cónica definida por cinco de las otras intersecciones, que pasará por las tres restantes.

2. Cuárticas bicirculares

En este artículo consideraremos especialmente las llamadas *cuárticas bicirculares*, que son las que tienen puntos dobles en los puntos cíclicos. En lo que sigue las nombraremos simplemente como *cbc*. Para que los puntos cíclicos (1, ±*i*, 0) sean dobles, todas las rectas isótropas han de tener dos intersecciones confundidas en el infinito. En consecuencia, la ecuación general de una *cbc* será

$$p\left(x^2+y^2\right)^2+\left(x^2+y^2\right)(ax+by)t+ \\ +\left(fx^2+2gxy+hy^2\right)t^2+(ux+vy)t^3+wt^4=0 \quad (1)$$

Depende de 9 coeficientes en forma homogénea. Por tanto, una *cbc* queda determinada por 8 condiciones lineales. Una *cbc* puede degenerar en una cúbica circular (eventualmente degenerada) junto con la recta impropia o también en un par de circunferencias (cada una de radio real o imaginario e incluso nulo).

3. Focos de una cuártica bicircular

Si los puntos cíclicos son puntos dobles ordinarios (con dos tangentes distintas), la *cbc* tendrá cuatro asíntotas (isótropas) que se cortarán en dos puntos reales y dos imaginarios. A esos puntos reales, los denominaremos *focos*, y la *cbc* se dirá *bifocal*. Las asíntotas que pasan por un foco (isótropas) tienen cada una al menos tres intersecciones impropias (en un punto cíclico) pero pueden volver a cortar a la *cbc* en sendos puntos propios, imaginarios conjugados entre sí, por lo que determinan una recta real que diremos que es la *directriz* correspondiente a ese foco. Puede darse el caso de que las cuatro intersecciones con la *cbc* con cada asíntota sean impropias y entonces no hay directriz correspondiente a ese foco y diremos que la *cbc* es bifocal sin directrices.

Si los puntos cíclicos son de retroceso, las dos tangentes de retroceso son conjugadas y se cortan en un punto real que llamaremos *foco*, siendo la *cbc monofocal*.

Las circunferencias de centro en un foco tienen al menos 3 intersecciones con la *cbc* confundidas en cada punto cíclico, por lo que tendrán como máximo dos intersecciones propias con ella.

En el caso de que la *cbc* degenere en una cúbica circular y la recta impropia, una de las tangentes en los puntos dobles (cíclicos) es esa recta impropia, por lo que sólo se obtiene un foco, que es el punto que se designó como foco de la cúbica circular en [1] (sin que por ello la *cbc* deba considerarse como monofocal). Si la *cbc* degenera en un par de circunferencias no concéntricas, sus focos son los centros de éstas y la directriz correspondiente a un centro es el eje radical de ese centro (considerado como circunferencia de radio nulo) y la otra circunferencia. Si degenera en un par de circunferencias concéntricas, el único foco es el centro de éstas y la *cbc* es monofocal degenerada.

Si dos *cbc* bifocales tienen los mismos focos, se dirá que son *homofocales*. Dos cualesquiera de ellas tendrán 12 intersecciones confundidas en los puntos cíclicos, por lo que sólo podrán tener 4 intersecciones propias (reales o imaginarias, eventualmente algunas confundidas).

Si una *cbc* es bifocal y la distancia entre los focos es $2c$, podemos tomar el sistema de referencia de modo que los focos sean (-c, 0, 1) y (c, 0, 1). Su ecuación quedará entonces como combinación lineal de la formada por las cuatro rectas isótropas de los focos y la formada por la recta impropia dos veces y una circunferencia arbitraria:

--- *Cuártica bicircular bifocal con focos* ($\pm c$, 0,1):

$$p\left(x^2+y^2\right)^2+\left(q\left(x^2+y^2\right)-4pc^2x^2\right)t^2+\left(ux+vy\right)t^3+wt^4=0 \qquad (2)$$

que (dado c) depende de 5 coeficientes en forma homogénea, lo que supone que la fijación de los dos focos equivale a 4 condiciones lineales y que la forma de estas curvas depende de 4 parámetros.

Un caso particular de éstas es el de las simétricas respecto a la recta que une los focos y a la mediatriz de ellos, que son aquellas en las que $u = v = 0$. Es fácil probar que la condición para que no haya directrices es entonces que sea $q = 2pc^2$. En otro caso, las directrices son

$$x = \pm(qc^2 + pc^4 - w)t/(2(q\text{-}2pc^2)$$

Para obtener la ecuación general de las *cbc* monofocales, tomando su único foco como origen de las coordenadas, basta hacer $c = 0$ en (2). Resulta así:

--- *Cuártica bicircular monofocal con foco* (0,0,1):

$$p\left(x^2+y^2\right)^2+q\left(x^2+y^2\right)t^2+\left(ux+vy\right)t^3+wt^4=0 \qquad (3)$$

también con 5 coeficientes en forma homogénea, pero como los ejes del sistema de referencia no han sido fijados, ni la escala, la forma de estas curvas depende sólo de 2 parámetros.

4. Cuárticas bicirculares con punto doble propio

Las *cbc* que poseen un punto doble (además de los cíclicos), las designaremos como *cbcp* y su ecuación general, si ese punto doble se toma como origen de las coordenadas, será:

--- *Cuártica bicircular con punto doble en* (0,0,1):

$$p\left(x^2+y^2\right)^2+2\left(x^2+y^2\right)(ax+by)\,t+\left(fx^2+2gxy+hy^2\right)t^2=0 \qquad (4)$$

Tiene 6 coeficientes en forma homogénea.

El interés de las *cbcp* radica en que cada una de ellas es inversa de una cónica en una inversión con polo en su punto doble. Si éste es aislado, la cónica es elipse, si es nodal, hipérbola y si es de retroceso, parábola. Para probarlo, basta aplicar la transformación (de la inversión de polo (0,0))

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2} \quad , \quad y=\frac{Y}{X^2+Y^2}$$

a la ecuación (4) con $t = 1$, y se obtiene (tras quitar denominadores):

$$p+2aX+2bY+fX^2+2gXY+hY^2=0 \qquad (5)$$

que es una cónica arbitraria. Depende de los mismos parámetros que la *cbcp* (4).

Así, cualquier cónica, mediante una inversión de potencia arbitraria, se convierte en una *cbp* con punto doble en el polo. Si (5) es degenerada, la *cbcp* degenera en dos circunferencias y si el polo pertenece a la cónica, la *cbcp* degenera en una cúbica circular con punto doble en el polo y la recta impropia.

5. Cuárticas bicirculares con punto doble, simétricas respecto a él

En el caso de las *cbcp,* el punto doble será centro de simetría si en (4) es $a = b = 0$, y entonces la cónica (5) tiene su centro en el punto doble (es decir, también será simétrica respecto a ese punto). Si además tomamos los ejes del sistema de referencia paralelos a los de la cónica, queda $g = 0$. Si es elipse, podemos tomar el eje OY sobre su eje mayor y llamar A y B a los semiejes, con $A > B$, y si es hipérbola, tomar el eje OY como el eje de la cónica que no la corta. Podemos poner entonces (4) en la forma

$$\left(x^2+y^2\right)^2-\left(\frac{x^2}{B^2}\pm\frac{y^2}{A^2}\right)t^2=0\ , \qquad (6)$$

o sea poniendo $p = 1$, $f = -1/B^2$, $h = \pm\, 1/A^2$ ($\pm$ según sea elipse o hipérbola). Para obtener los focos, $(c, 0, 1)$ y $(-c, 0, 1)$, cortaremos esta curva con la recta isótropa $x = ct + iy$, y exigiendo que sólo haya una intersección propia imaginaria, se obtiene fácilmente $c=\sqrt{A^2\mp B^2}\big/(2AB)$, con lo que (6) queda en la forma en que aparece en la Figura 1.

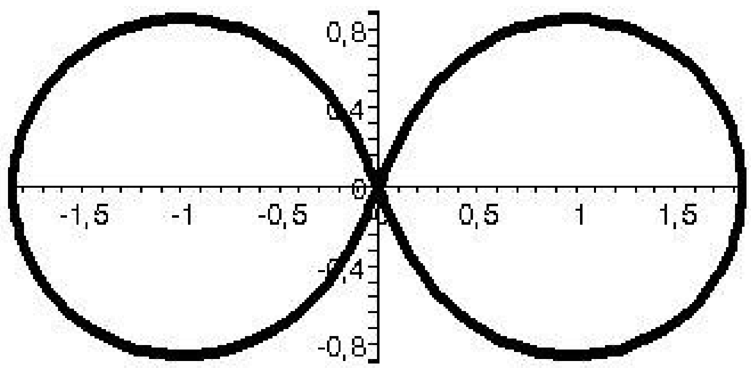


Figura 1

--- *Cbc con punto doble* (0,0,1) *y foco (c,0,1), simétrica respecto a y = 0:*

$$\left(x^2+y^2\right)^2\mp(x^2+y^2)/A^2-4c^2x^2t^2=0 \qquad (7)$$

En la Figura 2, se ha dibujado (7) con c=1, A=13/10 (con lo que B=13/24), y signos inferiores (inversa de hipérbola), y en la figura siguiente, con c=1, A=6/5 (con lo que B=6/13) y signos superiores (inversa de elipse). Ambas tienen punto doble en el origen (nodal en el caso anterior y aislado en éste).

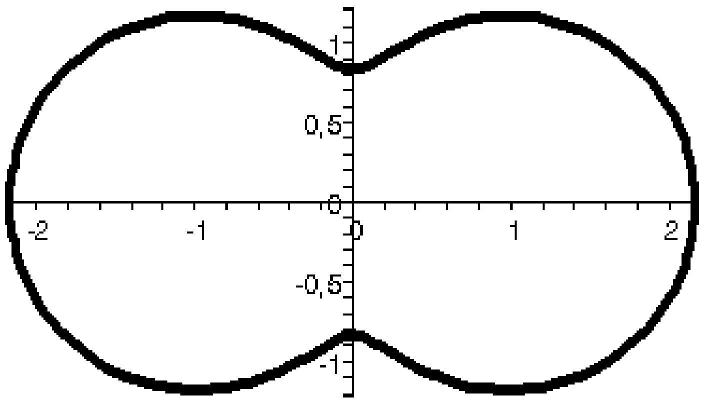


Figura 2

6. Óvalos de Cassini y lemniscata de Bernouilli

Un caso muy conocido de *cbc,* es el que resulta de la ecuación (2), haciendo $q=2pc^2$ y $u=v=0$ (por lo que serán simétricas respecto a los ejes y no tendrán directrices), o sea

$$\left(x^2+y^2\right)^2+2c^2\left(y^2-x^2\right)t^2+w_0\,t^4=0 \qquad (8)$$

Estos son los llamados *Óvalos de Casssini* de focos (-c, 0, 1) y (c, 0, 1). Es bien conocido que estos óvalos son los lugares geométricos de los puntos cuyo producto de distancias a los focos es constante. En efecto, poniendo

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}=k$$

resulta la ecuación (8) con $w_0 = c^4 - k^2$.

En el caso $k = c^2$, o sea $w_0 = 0$, el óvalo tiene un punto doble en el origen, por lo que también resulta de (4) haciendo $a = b = 0$, $f = -2$, $g = 0$, $h = 2$, quedando

$$\left(x^2+y^2\right)^2+2c^2\left(y^2-x^2\right)t^2=0 \qquad (9)$$

ecuación de la curva, muy estudiada, denominada *Lemniscata de Bernouilli* (de focos (-c, 0, 1) y (c, 0, 1)). Las tangentes en su punto doble son perpendiculares y de acuerdo con lo dicho en **4**, ésta curva es inversa de la hipérbola equilátera

$$2\left(y^2 - x^2\right)c^2 + t^2 = 0$$

con polo en su centro y potencia 1. Esta curva también es la (7) con $A = 1/\left(c\sqrt{2}\right)$ (y signos inferiores).

Para los óvalos de Cassini, la cúbica polar del punto impropio (1, 0, 0) es $x\left(x^2 + y^2 - c^2t^2\right) = 0$, degenerada en el eje OY y la circunferencia de centro en el origen que pasa por los focos. Sobre estas líneas están los puntos con tangente horizontal de todos ellos. La polar del (0, 1 ,0) es

$$y\left(x^2 + y^2 + c^2t^2\right) = 0$$

que sólo tiene los puntos reales del eje *OX*; en él se encuentran todos los puntos de tangente vertical (Figura 3).

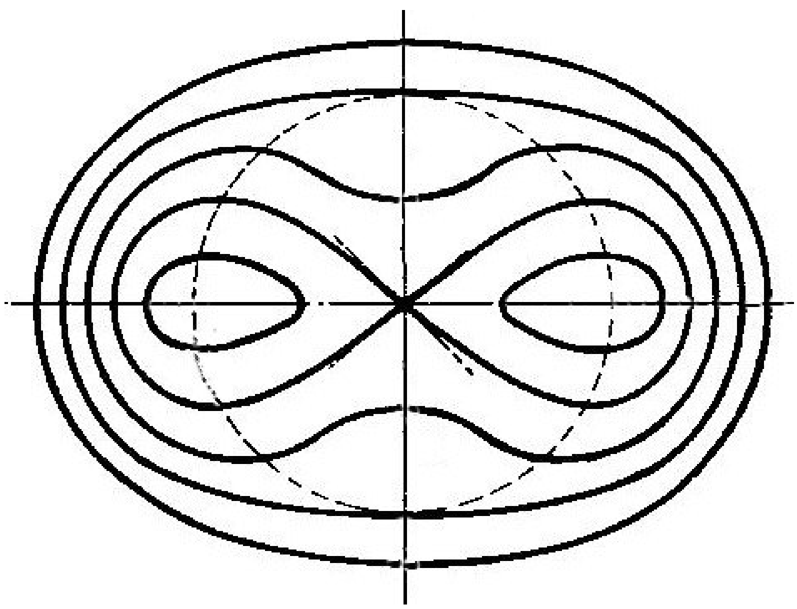


Figura 3

7. Cuárticas bicirculares monofocales con punto doble y eje de simetría

Las *cbcp* monofocales de ecuación (3) sólo podrían tener centro de simetría (que sería el foco), si $u = v = 0$, pero entonces degeneraría en dos circunferencias concéntricas.

Vamos a considerar las que tengan punto doble y eje de simetría $y = 0$, o sea de ecuación (3) con $v = 0$. Si designamos con d a la distancia del foco a ese punto doble, podemos suponer que dicho punto doble es $(-d, 0, 1)$. Para que esto ocurra, debe ser $u=2d(q+2pd^2)$ y $w=d^2(3pd^2+q)$. Sustituyendo estos valores en (3), y exigiendo que $x = -s$ sea una tangente doble, resulta que debe ser $q = 2pd(3d-4s)$. Introduciendo estos valores en la ecuación, se puede dividir por p y queda:

--- *Cbcp monofocal con foco en (0,0,1), punto doble en (-d,0,1) y tangente doble $x = -s$:*

$$\left(x^2+y^2\right)^2+2d(3d-4s)\left(x^2+y^2\right)t^2+16d^2(d-s)xt^3+d^3(9d-8s)t^4=0 \quad (10)$$

Es importante señalar que dados el punto doble O, el foco F y la tangente doble (perpendicular a OF), queda perfectamente determinada la cbcp monofocal simétrica. En el ejemplo que resulta de hacer $d = 1$, s = 17/16 , la ecuación es

$$2\left(x^2+y^2\right)^2-5\left(x^2+y^2\right)-2x+1=0$$

y su representación gráfica aparece en la Figura 4.

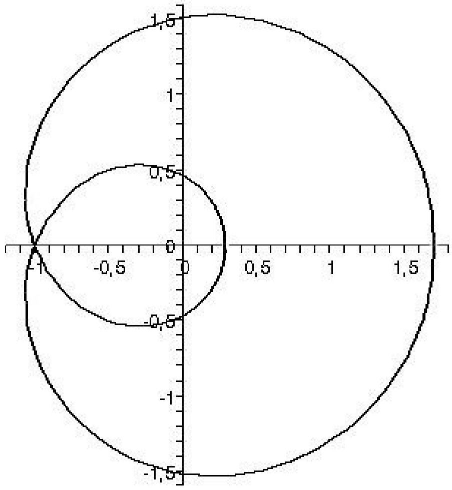


Figura 4

8. Cardioide

Otra curva muy conocida es la *cardioide***,** caso particular de concoide de una circunferencia ($x^2 + y^2 - 2Rx = 0$), cuya ecuación es

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 4Rx\left(x^2 + y^2\right)t - 4R^2y^2t^2 = 0 \qquad (11)$$

que se obtiene de (4) haciendo $p = 1$, $a = -2R$, $b = f = g = 0$, $h = -4R^2$ y que es la inversa de la parábola

$$4R^2y^2 = t^2 - 4Rxt$$

con polo en el punto de retroceso de la cardioide.

Si se hace $R = 1$ y se cambia el origen al centro de la citada circunferencia, (1, 0, 1), la ecuación queda

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 6\left(x^2 + y^2\right)t^2 - 8xt^3 - 3t^4 = 0$$

que no es sino la (3) con $p = 1$, $q = -6$, $u = -8$, $v = 0$, $w = -3$. Se trata, por tanto, de una *cbc* monofocal, de foco en el centro de la circunferencia citada. Se muestra en la Figura 5.

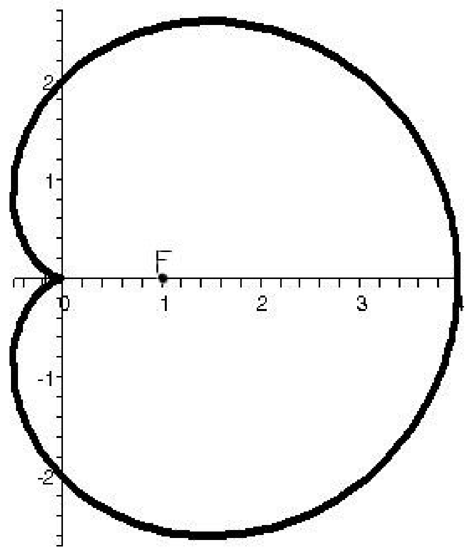


Figura 5

9. Cuárticas bicirculares de clase 4 o 3

Según nos dicen las fórmulas de Plücker (ver [2]), las cuárticas bicirculares genéricas serán de clase 4.3 – 2.2 = 8 , y si tienen un punto nodal, de clase 6. No obstante, las monofocales, con punto doble nodal, al tener dos puntos de retroceso en los cíclicos, serán de clase 4.3 – 2.3 – 2 = 4, y si el punto doble propio es también de retroceso, serán de clase 3. Este es el caso de la cardioide.

Una polaridad respecto a la circunferencia de centro en el foco que pasa por el punto de retroceso, convierte la familia de tangentes a la cardiode (11) con $R = 1$ en la cúbica circular

$$27x\left[(x-1)^2 + y^2\right] - 4 = 0$$

Referencias

[1] Fernández Biarge, J. (1993). *"Algunas propiedades de las cúbicas circulares*". Bol.de la Soc. Puig Adam*,* **34,** 28-38.

[2] Abellanas, Pedro (1969). *"Geometría Básica".* Ed. Romo. Madrid

Distribuciones estadísticas truncadas de forma bilateral. El caso de la distribución gaussiana

G. Calbo Sanjuán

Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

Abstract

In statistics applications, there are many situations where standard random variables distributions with an infinity interval of variation can not be applied because possible values are not realistic. In this case, it is more accurately to consider a truncation of the interval. In this way appears the truncated distribution associated with. In this article we study the main characteristics of a gaussian distribution. Several illustratives examples are included. Finally, a procedure in order to simulate this class of random variables is also provided.

Introducción

Cuando se realiza el estudio a nivel estadístico del comportamiento de cierta magnitud, frecuentemente se asume que se comporta siguiendo un determinado patrón, admitiendo que los valores que puede tomar dicha magnitud siguen una distribución estadística de entre las familias más habituales: Poisson, normal o gaussiana, exponencial,…

Así por ejemplo, se acepta que magnitudes como el número de vehículos que llegan a una cola solicitando un determinado servicio siguen una ley de Poisson; el peso y la estatura de las personas siguen una distribución normal; o que el tiempo de vida de muchos dispositivos eléctricos sigue una ley exponencial.

Sin embargo, muchas veces sucede que el rango de los valores observados de las magnitudes objeto de estudio no coincide con el correspondiente a la distribución estadística asumida. Así por ejemplo, mientras una variable aleatoria (v.a.) Poisson toma valores en el conjunto discreto $\{0,1,2,\ldots\}$, el número de vehículos que por ejemplo pueden llegar a la gasolinera no puede exceder de un cierto valor M (que en todo caso será con seguridad muy inferior al parque automovilístico de la localidad donde esté ubicada la gasolinera), por lo que es más razonable admitir que dicha v.a. sigue una ley de Poisson definida sobre el conjunto truncado {0,1,2,…M}.

Del mismo modo las observaciones acumuladas nos indican que la estatura de un individuo no excederá con seguridad de unos valores mínimo e_m y máximo e_M por lo que será más razonable admitir que la estatura humana de un adulto es una v.a. que sigue una ley gaussiana censurada al intervalo $[e_m, e_M]$. Un tal intervalo podría ser [100,230] en centímetros.

Por último, si no se han observado bombillas con vida superior a 10000 horas, la duración (en horas) de una cierta familia de bombillas fabricadas podría considerarse como una v.a. exponencial sobre un intervalo]0,10000[.

Los textos estadísticos clásicos proporcionan el estudio de distribuciones estadísticas (parámetros, tablas, etc) no truncadas; sin embargo, su aplicación a efectos prácticos evidencian una necesidad de tener resultados análogos para distribuciones truncadas o censuradas.

El objetivo de este trabajo es introducir este estudio a un nivel elemental y particularizarlo para la distribución normal truncada. Obsérvese que aunque la truncación se puede hacer de forma unilateral, como en el caso de los ejemplos anteriores correspondientes a las distribuciones Poisson y exponencial, donde la truncación se ha realizado por la derecha, también es posible realizar una truncación bilateral, tal y como hemos procedido en el ejemplo anterior referido a la distribución normal o gaussiana.

1. Aspectos generales de la truncación

En general, véase [1, pag. 225], para una v.a X unidimensional definida sobre un espacio de probabilidad (Ω,A,P) y $T \in B_{IR}$ (T es un elemento de la σ-álgebra de Borel sobre IR) de modo que $P[X \in T] \in \left]0,1\right[$, la distribución condicional $P[X \leq x / X \in T] \in \left]0,1\right[$ definida sobre IR, se denomina distribución truncada de X.

Si X es una v.a. con función de probabilidad (f.p.) o función de masa $p_X(x) = P[X = x]$, la función de probabilidad truncada de X está definida por

$$\widetilde{p}_{\widetilde{X}}(x) = P[X = x / X \in T] = \frac{P[X = x, X \in T]}{P[X \in T]} = \begin{cases} \dfrac{p_X(x)}{\sum\limits_{x \in T} p_X(x)} & \text{si} \quad x \in T \\ 0 & \text{si} \quad x \notin T \end{cases} \qquad \textbf{(1.1)}$$

Mientras que si X es una v.a. continua con función de densidad de probabilidad (f.d.p.) $f_X(x)$, entonces

$$P[X \le x / X \in T] = \frac{P[X \le x, X \in T]}{P[X \in T]} = \frac{\int_{]-\infty,x] \cap T} f_X(x)dx}{\int_T f_X(x)dx},$$

por lo que la f.d.p. de la distribución truncada está dada por

$$\widetilde{f}_{\widetilde{X}}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\int_T f_X(x)dx} & \text{si} \quad x \in T \\ 0 & \text{si} \quad x \notin T \end{cases} \qquad \textbf{(1.2)}$$

(en lo sucesivo, y siempre y cuando no haya posibilidad de confusión, para no hacer la notación farragosa, denotaremos del mismo modo la v.a. original, digamos, X, y su v.a. truncada $\widetilde{X}$, diferenciando únicamente su función de masa/densidad de probabilidad, según corresponda, con la notación $f_X(x)$ y $f_{\widetilde{X}}(x)$, respectivamente).

Por ejemplo, para la v.a. discreta Poisson de parámetro λ>0 truncada a la derecha sobre {0,1,…,M}, su f.p. truncada es, según (1.1)

$$\widetilde{p}_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x! \sum\limits_{x=0}^{M} \dfrac{\lambda^x}{x!}} & \text{si} \qquad x = 0,1,\ldots,M \\ 0 & \text{si} \quad x = M+1, M+2, \ldots \end{cases}$$

donde hemos utilizado que la f.p. de una v.a. Poisson de parámetro λ>0 es

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Para una v.a. continua exponencial de parámetro θ>0 censurada a la izquierda, y por tanto definida sobre]m,+∞[con m>0, su f.d.p. truncada es, según (1.2)

$$\tilde{f}_X(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\theta x}}{\int_m^{+\infty} e^{-\theta x}dx} & \text{si} \quad x>m\\ 0 & \text{si} \quad 0\le x\le m\end{cases}$$

donde hemos utilizado que la f.d.p. de una v.a. exponencial de parámetro θ>0 es

$$f_X(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x} & \text{si} \quad x>0\\ 0 & \text{si} \quad x\le 0\end{cases}$$

Más adelante veremos, a través de la distribución normal, un ejemplo de distribución truncada de forma bilateral.

2. La distribución gaussiana truncada de forma bilateral

Abordamos en este apartado, el estudio más profundo de la truncación bilateral de una v.a. normal o gaussiana, el cual puede extenderse a otras vs.as. continuas o incluso discretas.

Sea X una v.a. normal con media μ y varianza σ^2, $X \propto N(\mu;\sigma^2)$, cuya f.d.p. es

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty\le x\le+\infty\,. \qquad \textbf{(3.1)}$$

Para un intervalo de censura previamente fijado, $[x_i,x_d]$, según (1.2), la f.d.p. de la v.a. truncada es (véase figura 1, en la cual la parte señalada con puntos denota la f.d.p. truncada)

$$\tilde{f}_X(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\int_{x_i}^{x_d} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx} & \text{si} \quad x\in[x_i,x_d]\\ 0 & \text{si} \quad x\notin[x_i,x_d]\end{cases} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Aunque ahora nos podemos plantear el cálculo de la media y la varianza de una v.a. gaussiana doblemente truncada, procederemos tal y como se hace en el caso no censurado, a definir la correspondiente truncación de una v.a. normal tipificada $Z \propto N(0;1)$ y después, expresaremos los parámetros estadísticos de una v.a. normal truncada según (3.2), en términos de la correspondiente v.a. normal tipificada doblemente truncada.

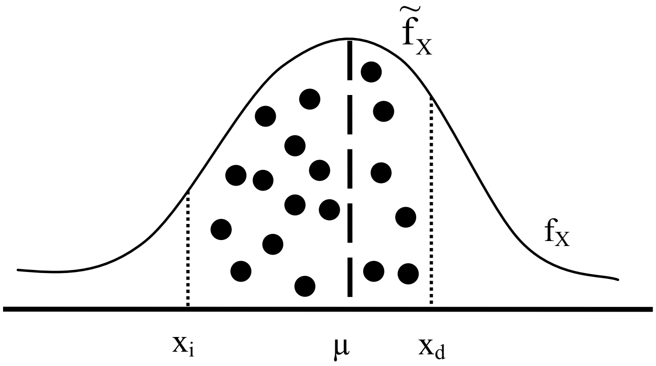


Figura 1. Distribución normal doblemente truncada.

Sea entonces $Z \propto N(0;1)$ cuya f.d.p. y función de distribución (f.d.) son, respectivamente,

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad , \quad -\infty \le z \le +\infty , \quad \textbf{(3.3)}$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(s)ds \quad , \quad -\infty \le z \le +\infty . \quad \textbf{(3.4)}$$

Sabemos que la relación entre las vs.as. no censuradas $X \propto N(\mu;\sigma^2)$ y $Z \propto N(0;1)$ está dada por la denominada relación de tipificación

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}, \quad \textbf{(3.5)}$$

por tanto la truncación de X al intervalo [x_i,x_d], conduce al siguiente intervalo de variación para la v.a. normal tipificada, la cual, por (2.5) hereda el carácter de ser también truncada bilateralmente

$$\frac{x_i-\mu}{\sigma}=z_i\le z\le\frac{x_d-\mu}{\sigma}=z_d, \quad \textbf{(3.6)}$$

cuya f.d.p. será

$$\tilde{f}_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\int_{z_i}^{z_d}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz} & \text{si} \quad z\in[z_i,z_d]\\ 0 & \text{si} \quad z\notin[z_i,z_d]\end{cases} \quad \textbf{(3.7)}$$

y para calcular la f.d., obsérvese que si $z\in[z_i,z_d]$, entonces

$$\tilde{F}_Z(z)=P[Z\le z]=\int_{z_i}^{z}\tilde{f}(s)ds=\frac{\int_{z_i}^{z}f_Z(s)ds}{\int_{z_i}^{z_d}f_Z(s)ds}=\frac{F_Z(z)-F_Z(z_i)}{F_Z(z_d)-F_Z(z_i)} \quad \textbf{(3.8)}$$

por lo que de (3.8) se tiene

$$\tilde{F}_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad z\le z_i\\ \dfrac{F_Z(z)-F_Z(z_i)}{F_Z(z_d)-F_Z(z_i)} & \text{si} \quad z_i\le z\le z_d\\ 1 & \text{si} \quad z_d\le z\end{cases} \quad \textbf{(3.9)}$$

Obsérvese que si conocemos la media, E[Z], y la varianza, Var[Z], de una v.a. normal tipificada truncada, Z, también podemos evaluar esos mismos parámetros estadísticos E[X] y Var[X] para una v.a. normal truncada, X; ya que de (3.5) se tiene

$$E[X]=\mu+\sigma E[Z], \quad \textbf{(3.10)}$$

$$Var[X]=\sigma^2 Var[Z]. \quad \textbf{(3.11)}$$

Por tanto la tarea que nos ocupará ahora será calcular E[Z] y Var[Z]. Empecemos evaluando la esperanza de una v.a. normal tipificada doblemente truncada sobre $[z_i, z_d]$

$$E[Z] = \int_{z_i}^{z_d} z\tilde{f}_Z(z)dz = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_i}^{z_d} ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_i}^{z_d} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{1}{2}z^2}\right]_{z=z_i}^{z=z_d}}{\int_{z_i}^{z_d}\tilde{f}_Z(z)dz} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z_i^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z_d^2}}{\int_{z_i}^{z_d}\tilde{f}_Z(z)dz} = \frac{f_Z(z_i) - f_Z(z_d)}{F_Z(z_d) - F_Z(z_i)}. \quad \textbf{(3.12)}$$

Para calcular la varianza de una v.a. normal tipificada truncada bilateralmente sobre $[z_i, z_d]$, dado que

$$Var[Z] = E\left[Z^2\right] - \left(E[Z]\right)^2, \quad \textbf{(3.13)}$$

necesitamos previamente calcular $E[Z^2]$. Para alcanzar este objetivo introduciremos la función de error, Erf(x), definida como la función impar (véase, [2, pág. 190])

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}ds \quad , \quad \forall x \in IR. \quad \textbf{(3.14)}$$

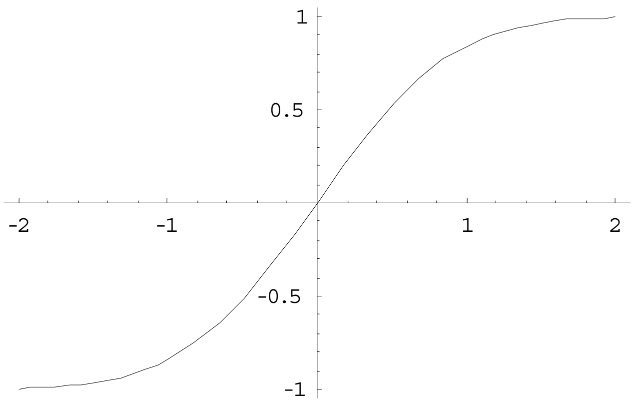


Figura 2. Función de error.

A partir de la cual, aplicando una vez el método de integración por partes y realizando posteriormente un cambio de variable, se deduce para $a < b$, que

$$\int_a^b x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \left\{\begin{matrix} u & = & x & \Rightarrow & du & = & dx \\ dv & = & xe^{-\frac{1}{2}x^2} & \Rightarrow & v & = & -e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\left[xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx =$$

$$= \left[xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{x=b}^{x=a} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx - \int_0^a e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix} s & = & \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ ds & = & \dfrac{dx}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right\} = \left[xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{x=b}^{x=a} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2}\int_0^{\frac{b}{\sqrt{2}}} e^{-s^2}ds - \sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{-s^2}ds\right)\right] =$$

$$= ae^{-\frac{1}{2}a^2} - be^{-\frac{1}{2}b^2} + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathrm{Erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathrm{Erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right). \qquad \textbf{(3.15)}$$

Por tanto,

$$E[Z^2] = \int_{z_i}^{z_d} z^2 \tilde{f}_Z(z)dz = \frac{\int_{z_i}^{z_d} z^2 f_Z(z)dz}{\int_{z_i}^{z_d} f_Z(z)dz} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_i}^{z_d} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2}dz}{F_Z(z_d) - F_Z(z_i)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z_i e^{-\frac{1}{2}z_i^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z_d e^{-\frac{1}{2}z_d^2} + \frac{1}{2}\mathrm{Erf}\left(\frac{z_d}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Erf}\left(\frac{z_i}{\sqrt{2}}\right)}{F_Z(z_d) - F_Z(z_i)} =$$

$$= \frac{z_i f_Z(z_i) - z_d f_Z(z_d) + F_Z(z_d) - F_Z(z_i)}{F_Z(z_d) - F_Z(z_i)} = 1 + \frac{z_i f_Z(z_i) - z_d f_Z(z_d)}{F_Z(z_d) - F_Z(z_i)}, \qquad \textbf{(3.16)}$$

donde hemos utilizado que

$$\mathrm{Erf}\left[\frac{z_d}{\sqrt{2}}\right]-\mathrm{Erf}\left[\frac{z_i}{\sqrt{2}}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\frac{z_d}{\sqrt{2}}} e^{-s^2}ds-\int_0^{\frac{z_i}{\sqrt{2}}} e^{-s^2}ds\right)=$$

$$=\begin{Bmatrix} u & = & \sqrt{2}s \\ du & = & \sqrt{2}ds \end{Bmatrix}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{z_d} e^{-\frac{u^2}{2}}du-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{z_i} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{z_d} e^{-\frac{u^2}{2}}du-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{z_i} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_d} e^{-\frac{u^2}{2}}du-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_i} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)=$$

$$=2\left(F_Z(z_d)-F_Z(z_i)\right). \quad \textbf{(3.17)}$$

De esta forma, sustituyendo (3.12) y (3.16) en (3.13), obtenemos la fórmula de la varianza de una v.a. normal truncada estándar doblemente truncada.

Para acabar este apartado obtengamos las expresiones correspondientes de la media y de la varianza de las vs.as. normales tipificadas truncadas unilateralmente a izquierda y a derecha, que denotaremos por Z_I y Z_D, respectivamente.

Sea $z \geq z_i$ ($z \leq z_d$) el intervalo de truncación para Z_I (Z_D), entonces interpretando Z_I (Z_D) como una v.a. normal tipificada doblemente truncada con extremo derecho (izquierdo) del intervalo de truncación $z_d = +\infty$ ($z_i = -\infty$) podemos obtener su media y su varianza a partir de las fórmulas (3.12) y (3.16), sin más que tener en cuenta que

$$f_Z(-\infty)=0=f_Z(+\infty) \quad ; \quad F_Z(-\infty)=0 \quad , \quad F_Z(+\infty)=1, \quad \textbf{(3.18)}$$

entones sustituyendo en (3.12) se tiene

$$E[Z_I]=\frac{f_Z(z_i)-f_Z(+\infty)}{F_Z(+\infty)-F_Z(z_i)}=\frac{f_Z(z_i)}{1-F_Z(z_i)}, \quad \textbf{(3.19)}$$

$$E[Z_D] = \frac{f_Z(-\infty) - f_Z(z_d)}{F_Z(z_d) - F_Z(-\infty)} = \frac{-f_Z(z_d)}{F_Z(z_d)}. \quad \textbf{(3.20)}$$

Obsérvese que, tal y como por otro lado nos indica la interpretación geométrica, de (3.19) y (3.20) se deduce que $E[Z_I] > 0$ y $E[Z_D] < 0$, ya que, $f_Z(z) \geq 0$ y $0 \leq F_Z(z) \leq 1$.

Utilizando los mismos argumentos desde (3.16) se deduce

$$E[Z_I^2] = 1 + \frac{z_i f_Z(z_i)}{1 - F_Z(z_i)}, \quad \textbf{(3.21)}$$

$$E[Z_D^2] = 1 - \frac{z_d f_Z(z_d)}{F_Z(z_d)}, \quad \textbf{(3.22)}$$

donde hemos utilizado que, por la regla de L'Hôpital

$$\lim_{z\to\pm\infty} z f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{z\to\pm\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{z\to\pm\infty} \frac{z}{e^{\frac{1}{2}z^2}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{z\to\pm\infty} \frac{1}{z e^{\frac{1}{2}z^2}} = 0$$

Obsérvese que de forma indirecta, como $E[Z_D^2] \geq 0$ por ser Z_D^2 una v.a. no negativa, se deduce la siguiente desigualdad de (3.22) entre la f.d.p. y la f.d. de una v.a. normal tipificada

$$F_Z(z) \geq z f_Z(z) \quad , \quad \forall z \in \mathrm{IR}.$$

3. Aplicaciones

En esta sección daremos diferentes aplicaciones de la distribución normal truncada bilateralmente a través de distintos ejemplos.

Ejemplo 1. *Cálculo de un percentil*

Supongamos que $X \propto N(10;3^2)$ y deseamos calcular el percentil 90 ($\alpha = 0.90$) asociado a la truncación sobre el intervalo [4,13]. Para ello tipifiquemos la v.a. dada, Z=(X-10)/3, la cual variará en [(4-10)/3,(13-10)/3]=[-2,1], entonces según (3.8), buscamos z de modo que

$$0.90 = \frac{F_Z(z) - F_Z(-2)}{F_Z(1) - F_Z(-2)},$$

despejando

$$F_Z(z) = 0.90\big(F_Z(1) - F_Z(-2)\big) + F_Z(-2),$$

utilizando la tabla de la distribución normal estándar

$$F_Z(z) = 0.759485$$

y volviendo a utilizar la mencionada tabla, z=0.704647, luego por (3.5)

$$x = 10 + 3 \cdot 0.704647 = 12.1139,$$

que difiere del valor que se obtendría si se considera X sin censura

$$x=13.8447.$$

Ejemplo 2. *Cálculo de la media y de la varianza de una v.a normal doblemente truncada.*

Sea $X \propto N(3;1^2)$ y consideremos la v.a. $\widetilde{X}$ resultado de realizar la truncación al intervalo [2,5]. Determinaremos la media y la varianza de la nueva v.a. censurada. Para ello, en primer lugar necesitamos evaluar la media y la varianza de la v.a. normal tipificada truncada, $\widetilde{Z}$, sobre [2-3,5-3]=[-1,2] cuyos valores se calculan según (3.12), (3.16) y (3.13)

$$E\big[\widetilde{Z}\big] = \frac{f_Z(-1) - f_Z(2)}{F_Z(2) - F_Z(-1)} = 0.229637,$$

$$E\big[\widetilde{Z}^2\big] = 1 + \frac{-f_Z(-1) - 2f_Z(2)}{F_Z(2) - F_Z(-1)} = 0.572496,$$

$$Var\big[\widetilde{Z}\big] = E\big[\widetilde{Z}^2\big] - \big(E\big[\widetilde{Z}\big]\big)^2 = 0.519763.$$

Entonces los parámetros pedidos se obtienen de (3.10) y (3.11):

$$E\big[\widetilde{X}\big] = 3 + 1 \cdot E\big[\widetilde{Z}\big] = 3.229637,$$

$$\mathrm{Var}\left[\tilde{X}\right] = 1^2 \cdot \mathrm{Var}\left[\tilde{Z}\right] = 0.519763,$$

los cuales difieren sensiblemente de E[X]=3 y Var[X]=1.

Ejemplo 3. *¿Pueden ser invariantes la media y la varianza en la truncación?*

Una cuestión natural que surge al realizar la truncación de una v.a. $X \propto N(\mu_X;\sigma_X^2)$, con μ_X y σ_X^2 dados, es conocer si es posible encontrar un intervalo $[x_i,x_d]$ de truncación que tenga la propiedad de que la nueva v.a. truncada $\tilde{X}$ mantiene la media $\mu_X = \mu_{\tilde{X}}$ y la varianza $\sigma_X^2 = \sigma_{\tilde{X}}^2$, de la v.a. original.

Adelantamos ya la respuesta a esta pregunta, para justificarla posteriormente. Sí será posible mantener la media, y tendremos infinitas opciones de conseguirlo, pero ninguna de ellas será apropiada para mantener además invariante la varianza.

En efecto, según (3.10) para que la media sea la misma, la esperanza de la v.a. normal estándar truncada debe ser nula, luego de (3.12) se deduce que

$$f_Z(z_i) = f_Z(z_d), \qquad \textbf{(3.23)}$$

de donde, por la simetría respecto del origen de la f.d.p. $f_Z(z)$ se tiene

$$z_i = -z_d. \qquad \textbf{(3.24)}$$

Fijemos un valor arbitrario de $x_d > \mu_X$ (análogamente se razonaría si fijásemos, $x_d < \mu_X$), entonces según (3.5)

$$z_d = \frac{x_d - \mu_X}{\sigma_X},$$

ahora calculemos x_i para satisfacer la condición requerida en (3.24)

$$z_i = \frac{x_i - \mu_X}{\sigma_X} = -\frac{x_d - \mu_X}{\sigma_X} = -z_d,$$

de donde despejando

$$x_i = 2\mu_X - x_d . \quad \textbf{(3.25)}$$

Resumiendo, dado μ_X y fijado un número $x_d > \mu_X$, basta tomar x_i como en (3.25) para que la media sea invariante al realizar la truncación.

Para que además de la media, la varianza sea invariante, según (3.11), la varianza de la v.a. normal truncada debe ser la unidad, por lo que de (3.16) se deduce que

$$E\left[Z^2\right] = \left(E[Z] \right)^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{z_i f_Z(z_i) - z_d f_Z(z_d)}{F_Z(z_d) - F_Z(z_i)} = \left(\frac{f_Z(z_i) - f_Z(z_d)}{F_Z(z_d) - F_Z(z_i)} \right)^2 ,$$

o equivalentemente,

$$z_i f_Z(z_i) - z_d f_Z(z_d) = \frac{\left(f_Z(z_i) - f_Z(z_d)\right)^2}{F_Z(z_d) - F_Z(z_i)} . \quad \textbf{(3.26)}$$

Veamos que no se pueden hallar valores de z_i y z_d (y en consecuencia tampoco de x_i y x_d) para que la condición (3.26) se satisfaga simultáneamente con (3.23), ya que en ese caso

$$z_i f_Z(z_i) = z_d f_Z(z_d) , \quad \textbf{(3.27)}$$

y como $f_Z(z_i) = f_Z(z_d)$, llegaríamos a que

$$z_i = z_d ,$$

que junto con (3.24) nos conduce a que $z_i = 0 = z_d$, lo cual, según (3.5), equivale a

$$x_i = x_d ,$$

que da lugar a un intervalo degenerado, formado por un punto.

Veamos algunos ejemplos. Sea $X \propto N(0.5;1)$, y determinemos dos intervalos de truncación, $[x_i,x_d]$, para que las vs.as. normales truncadas que se generan tengan la misma media. Para ello sea $x_d = 2$, entonces según (3.25), hay que tomar

$x_i = 2 \cdot (0.5) - 2 = -1$, para alcanzar el objetivo. En efecto, por (3.6), (3.10) y (3.12) se tiene

$$E[X] = \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{f_Z(-1.5) - f_Z(1.5)}{F_Z(1.5) - F_Z(-1.5)} = \frac{1}{2}.$$

Si tomamos $x_d = 10$, otro posible intervalo es $[x_i,x_d]=[-9,10]$, ya que

$$E[X] = \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{f_Z(-9.5) - f_Z(9.5)}{F_Z(9.5) - F_Z(-9.5)} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 4. *Construcción de tablas*

Una vez hemos definido la distribución normal truncada bilateralmente y especificado su f.d.p. y su f.d. calculando su media y su varianza, podemos construir una tabla de probabilidades, para asignar probabilidades en las aplicaciones. La tabulación se efectúa, como en el caso no censurado, para la versión tipificada, al ser ello suficiente por la relación (3.5). Para la construcción de una tabla basada en la f.d. o de probabilidad acumulada, basta utilizar (3.9), siendo que z_i y z_d están previamente fijados, así como el nivel de probabilidad.

Empezaremos indicando mediante un ejemplo, cómo se procede para realizar la construcción de una tabla de una v.a. normal estándar truncada bilateralmente. Fijado el nivel de probabilidad, digamos 0.95 y los valores z_i y z_d, por ejemplo, $z_i = -3$, $z_d = -2.8$, calcularemos a partir de (3.9) el correspondiente valor de z, tal que $\widetilde{F}_Z(z) = 0.95$ o equivalentemente z tal que

$$0.95 = \frac{F_Z(z) - F_Z(-3)}{F_Z(-2.8) - F_Z(-3)}, \qquad \textbf{(3.28)}$$

entonces despejando a partir de (3.28) obtenemos

$$F_Z(z) = 0.0025$$

y utilizando la tabla de la distribución normal tipificada

$$z = -2.8077.$$

Del mismo modo, para el nivel de probabilidad 0.95, la tabla 1 recoge distintos intervalos posibles de truncación. La entradas vacías de la tabla 1 se deben a que no son situaciones posibles, ya que, se tiene que cumplir que $z_i < z_d$. Además, obsérvese que, según (3.9), como para la construcción de la tabla 1 se requiere utilizar la de la distribución normal tipificada, no merece la pena considerar intervalos $[z_i,z_d]$ que no estén contenidos en el intervalo $[-3,3]$.

	z_d =-2.8	**z_d =-2**	**z_d =0**	**z_d =1**	**z_d =2**
z_i =-3	-2.8077	-2.0202	-0.0625	0.8393	1.4644
z_i =-2			-0.0599	0.8431	1.4723
z_i =-1			-0.0428	0.8677	1.5246
z_i =0				0.9318	1.6786
z_i =1					1.8875

Tabla 1. Valores de z tales que $\widetilde{F}_Z(z) = 0.95$ en función de los puntos de truncación bilaterales.

Aplicando esta misma idea pueden construirse las correspondientes tablas para los distintos niveles de probabilidad que se deseen disponer. Obsérvese que este es un importante cambio entre la distribución normal tipificada, la cual requiere del manejo de una única tabla, mientras que para la distribución normal tipificada doblemente truncada se pueden generar infinitas tablas.

Cuando la truncación es unilateral, basta construir una tabla. En efecto, veámoslo para una distribución normal tipificada truncada por la izquierda. Supongamos que, el nivel de probabilidad es 0.5 y que $z_i = -2$, entonces calcularemos z tal que $\widetilde{F}_Z(z) = 0.5$ a partir de (3.9) (teniendo en cuenta que ahora $z_d = +\infty$ y que $F_Z(+\infty) = 1$)

$$0.5 = \frac{F_Z(z) - F_Z(-1)}{1 - F_Z(-2)}$$

despejando

$$F_Z(z) = 0.511375$$

y utilizando la tabla correspondiente

z=0.0285.

	$z_d = -3$	$z_d = -2$	$z_d = -1$	$z_d = 0$	$z_d = 1$	$z_d = 2$	$z_d = 3$
$\widetilde{F}_Z(z) = 0.05$	-1.6350	-1.4639	-0.8390	0.0627	1.0333	2.0215	3.0156
$\widetilde{F}_Z(z) = 0.10$	-1.2747	-1.1726	-0.6974	0.1257	1.0679	2.0440	3.0320
$\widetilde{F}_Z(z) = 0.50$	0.0017	0.0285	0.2002	0.6745	1.4096	2.2776	3.2052
$\widetilde{F}_Z(z) = 0.90$	1.2823	1.2946	1.3778	1.6449	2.2478	2.8373	3.6426
$\widetilde{F}_Z(z) = 0.95$	1.6465	1.6560	1.7272	1.9600	2.4120	3.0518	3.8172

Tabla 2. Diferentes valores de z en función del punto de truncación izquierdo y del valor fijado de $\widetilde{F}_Z(z)$.

4. Simulación de una distribución normal doblemente truncada

Sea $X \propto N(\mu;\sigma^2)$ y consideremos su truncación al intervalo $[x_i , x_d]$, generando así una nueva v.a. $\widetilde{X}$ con f.d.p.

$$\widetilde{f}_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}) = \frac{1}{A} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{x}-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{si} \quad \widetilde{x} \in [x_i, x_d] \quad \text{siendo} \quad A = \int_{x_i}^{x_d} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{x}-\mu}{\sigma}\right)^2} d\widetilde{x} .$$

Para simular $\widetilde{X}$ utilizaremos el *método de rechazo* (véase, [3, pág. 66]). Para ello tomamos como v.a. auxiliar una uniforme sobre $[x_i , x_d]$ cuya f.d.p. es

$$g(x) = \frac{1}{x_d - x_i} \quad \text{si} \quad x \in [x_i, x_d],$$

y calculamos una constante c de modo que

$$h(x) = \frac{\widetilde{f}(x)}{g(x)} = \frac{x_d - x_i}{A} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \leq c .$$

Claramente, el máximo de la función h(x) se alcnaza en $x=\mu$ y vale $(x_d - x_i)/A$, por tanto

$$\frac{\widetilde{f}(x)}{g(x)} \leq \frac{x_d - x_i}{A} = c \Rightarrow \frac{\widetilde{f}(x)}{cg(x)} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

lo que permite definir el procedimiento de rechazo para simular la v.a. truncada $\widetilde{X}$ a través del siguiente algoritmo.

Algoritmo

Paso 1. Generar un número aleatorio U_1, i.e., un valor de una v.a. uniforme en [0,1], y hacemos $\hat{U}_1 = x_i + (x_d - x_i)U_1$.

Paso 2. Generar otro número aleatorio U_2

Paso 3. Si $U_2 \leq e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_1-\mu}{\sigma}\right)^2}$, detenerse y hacer $\widetilde{X} = \hat{U}_1$; en caso contrario, regresar al paso 1.

El número de veces que, en promedio, se realizará el paso 1 es $c = (x_d - x_i)/A$.

Implementación

El siguiente programa realizado con DERIVE permite simular, para valores previamente fijados: x_i, x_d, μ, σ, una v.a. normal de media μ y desviación típica σ, truncada al intervalo $[x_i, x_d]$.

```
#1: a : = xi+(xd - xi)*|RANDOM_VECTOR(1, 1)|
#2: b := ê^(- (1/2)*((a - μ)/σ)^2)
#3: c := ABS(RANDOM_VECTOR(1, 1))
#4: IF(c < b, 1, 0)*a
```

Es interesante señalar que para valores $x_i = 5, x_d = 8, \mu = 6, \sigma = 1$, el marco teórico nos indica que se necesitan realizar el paso 1 del algoritmo anterior

$$c = \frac{8-5}{\int_5^8 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-6}{1}\right)^2} dx} \cong 1.46205 \text{ veces}.$$

5. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado el problema de la truncación de una v.a. a una intervalo, particularizando los resultados al importante caso en que la v.a. es gaussiana. Para este escenario, se ha determinado la f.d., la f.d.p., la media y la varianza, para el caso en que la censura de la v.a. es tanto lateral como bilateral.

En las aplicaciones, también se han aborado diferentes problemas relacionados el manejo de vs.as., en particular, la generación de tablas de probabilidad. Finalmente, se propociona un algoritmo para simular este tipo de vs.as.

Bibliografía

[1] Quesada, V. y García A.: *Lecciones de Cálculo de Probabilidades*, Ed. Díaz de Santos. Madrid. (1988).

[2] Spiegel M.R. y Abellanas L.: *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada.* Ed. McGraw Hill. Madrid. (1997).

[3] S.M. Ross: *Simulación.* 2ª edición. Ed. Pearson-Prentice Hall. Madrid. (1997).

Interpretación del teorema de Thales con los métodos del Análisis Dimensional

Pedro Pescador Díaz

I.E.S. "Juana de Pimentel"

ppescado@platea.cnice.mecd.es

Abstract

The classical theorem stated by Thales on the similarity of triangles is interpreted using dimensional techniques, as Vaschy's or Π *theorem, advanced in previous issues of this Boletín.*

A mis padres

Introducción

Para interpretar el teorema de Thales se aplican las ideas o técnicas que se usan en la demostración del teorema de Vaschy o teorema Π, explicadas por Francisco A. González Redondo en los números 59 y 60 de este *Boletín de la Sociedad "Puig Adam"* [1] [2].

1. Unidades de medida

Sea u una unidad de medida y $u^* = M\,u$, siendo M un número real y positivo, otra unidad de medida.

Es bien conocido el hecho de que el valor de una magnitud depende de la unidad de medida pues si la longitud vale a al ser medida con la unidad u entonces vale $a^* = \dfrac{a}{M}$ al serlo con la unidad u^*.

Es importante, sin embargo, darse cuenta de que si consideramos cualquier otra longitud que valga b con la unidad u y b^* con la unidad u^*, entonces la razón entre las longitudes es una constante que no depende de la unidad con que se midan

$$\frac{a^*}{b^*} = \frac{a}{b}$$

2. Interpretación del Teorema de Thales

En los triángulos el enunciado del teorema es el siguiente: “Dos triángulos son semejantes si y sólo si tienen sus lados proporcionales”.

Si para la unidad de medida de longitud se utiliza la letra u, las magnitudes de los lados serán $a\,u$, $b\,u$ y $c\,u$, por lo que el teorema puede expresarse en la forma:

$$T' \sim T \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Ahora bien, por un lado ser semejantes equivale a tener dos ángulos (por ejemplo, A y C) iguales; y, por otro, las relaciones de proporcionalidad de los lados equivalen a $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ y $\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$.

Por ello, el enunciado del teorema puede expresarse como sigue:

$$A' = A \text{ y } C' = C \Leftrightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \text{ y } \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$$

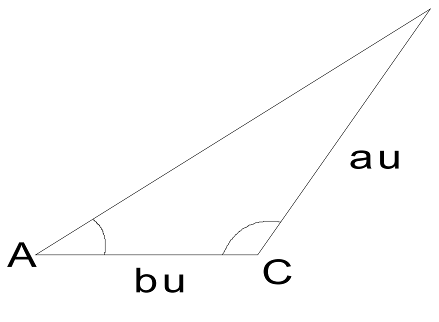


Figura 1

Desde la perspectiva dimensional, la parte directa de la demostración del teorema puede interpretarse como sigue:

Un triángulo queda determinado por un lado *b u* y los ángulos *A* y *C* que forma con los otros dos lados.

Por ello el valor de la longitud *a u* del lado opuesto al ángulo *A* ha de ser función de estas variables:

$$a = \lambda(A, b, C)$$

Además sabemos que es constante, independiente de la unidad de medida, la siguiente razón de longitudes:

$$\frac{a}{b} = \frac{\lambda(A,b,C)}{b}$$

lo que implica, dado que el valor *b* puede ser cualquier número positivo pues depende de la unidad de medida, que la fracción del segundo miembro de la ecuación se reduzca a una función que dependa sólo de los ángulos *A* y *C*, porque éstos tampoco dependen de la mencionada unidad de medida:

$$\frac{\lambda(A,b,C)}{b} = \rho(A,C)$$

Así la razón queda:

$$\frac{a}{b} = \rho(A, C).$$

Esta relación explica que, en triángulos semejantes, al ser $A' = A$ y $C' = C$, entonces

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$$

Análogamente, se puede ver que también

$$\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}.$$

Para la parte recíproca del teorema podemos proceder como sigue:

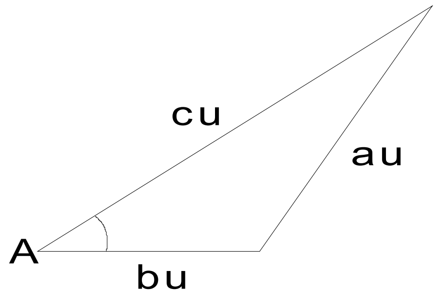


Figura 2

Un triángulo puede también quedar determinado dando los tres lados *a u*, *b u* y *c u*, de forma que todos los ángulos son función de éstos lados. Así para el ángulo *A* tendremos:

$$A = \alpha(a, b, c).$$

Ahora bien, podemos hacer:

$$\alpha(a, b, c) = \varphi\left(\frac{a}{b}, b, \frac{c}{b}\right),$$

puesto que a cada sistema de valores de los parámetros *a*, *b* y *c* corresponde de forma biunívoca el sistema de valores de los parámetros $\frac{a}{b}$, b, $\frac{c}{b}$.

En consecuencia

$$A = \varphi\left(\frac{a}{b}, b, \frac{c}{b}\right),$$

igualdad en la que al cambiar la unidad de medida son invariantes el ángulo *A* y las razones de los lados, pero no lo es el parámetro *b*, de forma que necesariamente ha de desaparecer de la función φ, y la ecuación se reduce a:

$$A = \varphi\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{b}\right),$$

relación que explica que los triángulos de lados proporcionales

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$$

y

$$\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$$

tengan el mismo ángulo $A' = A$.

Del mismo modo se puede proceder para comprobar que también $C' = C$.

Agradecimientos

Una vez más agradezco aquí la ayuda recibida de parte de Eugenio Roanes, que parece no descansar para que las cosas salgan adelante.

Bibliografía

[1] González Redondo, Francisco A. (2001). "Génesis y primera demostración del Teorema Π". *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* nº 59, 83-93.

[2] González Redondo, Francisco A. (2002). "El Teorema Π entre Vaschy y Buckingham: el método de las variables de dimensión cero". *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* nº 60, 71-81.

[3] Sena, Lev Arónovich (1979). *Unidades de las magnitudes físicas y sus dimensiones.* Ed. Mir, Moscú.

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 77 (Octubre 2007)

Julio Rey Pastor y los primeros años del *Laboratorio y Seminario Matemático*

Francisco A. González Redondo

Dpto. Álgebra. Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
faglezr@edu.ucm.es

Lourdes de Vicente Laseca

I.E.S. "Nuestra Señora de la Almudena"
lourdesdevicente@hotmail.com

Rosario E. Fernández Terán

C.E.I.P. "Rayuela (Villanueva del Pardillo)
estibalizft@yahoo.es

Abstract

In 1910 the Junta para Ampliación de Estudios created different Centres for both introducing new ideas in Science teaching and updating scientific research. But it was not until 1915 that Mathematics found its place once a specially talented mathematician was found to direct such activities, Julio Rey Pastor. In this article the early years of the never institutionalized Laboratorio Seminario Matemático is analyzed for the first time through the use of new documents never referred before by historians of Spanish Mathematics and complementary interpretation of existent literature.

1. A modo de presentación

En este trabajo se analiza la "creación" en 1915 del *Laboratorio y Seminario Matemático* (LSM), por parte de la *Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas* (JAE), y la decisión de ponerlo bajo la "dirección" del riojano Julio Rey Pastor, Catedrático en la Universidad Central de Madrid.

Elena Ausejo y Ana Millán [1] se refirieron a estas cuestiones utilizando una fuente de indudable valor e importancia: los informes aparecidos en las *Memorias* bianuales de la *Junta*. De acuerdo con la información allí recogida, apuntaban que "la actividad de la JAE se inicia con la dotación de pensiones (1908) para completarse posteriormente con la creación de Centros: en 1915 se crea la Sección de Matemáticas del Instituto de Ciencias Físico-Naturales -Laboratorio y Seminario Matemático (LSM) desde 1916-", y se pone "bajo la dirección de Julio Rey Pastor" [9].

En esos mismos años, José M. Sánchez Ron [13], tras analizar la documentación que sobre Rey Pastor[1] y su entorno se conserva en el CSIC (expedientes personales, correspondencia oficial, etc.), se encontró con que "desgraciadamente en el Archivo de la Junta falta el volumen de los *Libros de Actas* correspondiente al período en que se fundó el LSM, que presumiblemente hubiera permitido clarificar la cuestión de la creación del Laboratorio".

En el Archivo de la *Junta* (*Residencia de Estudiantes*) ya no falta el volumen del *Libro de Actas* que se necesita para clarificar el asunto. Además hemos podido contrastar los datos que proporciona con los de las *Memorias* bianuales[2] utilizadas antes [1] [13]. Los nuevos datos permiten ir avanzando la conclusión que iremos ilustrando a lo largo de las páginas que siguen: el *Laboratorio y Seminario Matemático* de la *Junta para Ampliación de Estudios* no fue "creado", no nació mediante un Real Decreto "creacional" publicado en la *Gaceta de Madrid*, análogo al de otros centros de estudio e investigación. Tampoco Julio Rey Pastor recibió nunca el nombramiento oficial de "Director" de un centro de la *Junta*, mediante la correspondiente Real Orden.

De hecho, la JAE "dio vida" a lo que se conocerá como el LSM el 14 de enero de 1915: 1) al establecer, no un nuevo "centro", sino unas nuevas "actividades", una sección de "Trabajos de Matemáticas" en el seno del *Instituto Nacional de Ciencias Físico-Naturales*; 2) al dedicar en sus presupuestos para ese año una partida de 3.360 pesetas para dichos "Trabajos de Matemáticas"; y 3) al designar a Julio Rey Pastor para dirigir esos "Trabajos" con la colaboración de Sixto Cámara Tecedor [2] [8].

2. La JAE: Centros de estudio y Trabajos de investigación

Creada la JAE por un Real Decreto de 11 de enero de 1907[3], y tras el paréntesis que supuso el Ministerio del conservador Faustino Rodríguez San Pedro, la llegada al Gobierno de los liberales el 21 de octubre de 1909, supuso una práctica refundación de la JAE [4] [12].

---

[1] Expediente personal de Julio Rey Pastor. Archivo de la JAE, legajo 121/116.

[2] Biblioteca de Amigos de la Cultura Científica.

[3] *Gaceta de Madrid* del 18 de enero de 1907. Se recoge, por ejemplo, en *Legislación de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas*. Madrid, 1910.

El 22 de enero de 1910[4] se publicaban las modificaciones tanto del Real Decreto constitutivo de la *Junta* como de su Reglamento; por otro Real Decreto de 18 de marzo de 1910[5] se creó el *Centro de Estudios Históricos*; por Real Orden de 16 de abril se encomendaron a la *Junta* ciertos servicios para fomentar las relaciones científicas con los países hispanoamericanos; y por Real Decreto de 6 de mayo[6] se creó una Residencia y un Patronato de estudiantes.

Finalmente, un Real Decreto de 27 de mayo de 1910[7], refrendado por el ministro de Instrucción Pública, Conde de Romanones, dio vida al segundo gran centro de la *Junta*, el *Instituto Nacional de Ciencias Físico-Naturales*. Integraba, junto a los nuevos *Laboratorio de Investigaciones Físicas* y *Estación Alpina de Guadarrama*, algunos establecimientos ya existentes antes de 1907: el *Museo Nacional de Ciencias Naturales*, el *Museo de Antropología,* el *Jardín Botánico*, la *Estación Biológica de Santander* y el *Laboratorio de Investigaciones Biológicas,* que más tarde se convertiría en el *Instituto Cajal*. Posteriormente, sendas Reales Órdenes de 28 de mayo de 1912 y 2 de mayo de 1913 le agregarían la *Comisión de investigaciones paleontológicas y prehistóricas*.

La creación de todos esos centros de la *Junta* supuso un gran impulso para unas enseñanzas prácticas que las Universidades españolas no estaban preparadas para ofrecer, ni siquiera la Central de Madrid, la única en la que existía Doctorado y, por tanto, posibilidad de realizar investigaciones conducentes a Tesis.

Sin embargo, el panorama de actividades de este tipo experimentaría un gran empujón a través de otra vía complementaria a la de los Laboratorios y Centros de estudio: los "Trabajos de investigación, ampliación y divulgación"[8]. Los "Trabajos" estarían financiados por la *Junta* y adscritos a los *Institutos* existentes, pero no requerían la "creación" de un nuevo centro ni el nombramiento de su Director a través de las ineludibles Reales Órdenes publicadas en la *Gaceta* desde el Ministerio de Instrucción Pública.

La iniciativa, en lo que a los centros científicos se refiere, partió de José Rodríguez Carracido y José Casares Gil, vocales de la JAE, al poner a disposición de la *Junta* los *Laboratorios* adscritos a sus Cátedras en la Facultad de Farmacia de la Universidad Central, facilitando que en ellos pudieran impartirse cursos de am-

---

[4] *Gaceta de Madr*id de 28 de enero de 1910.

[5] *Gaceta de Madrid* de 19 de marzo.

[6] *Gaceta de Madrid* de 8 de mayo.

[7] *Gaceta de Madrid* de 29 de mayo.

[8] Expresión textual que se recoge en *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 15. Ver [10] para antecedentes de esta iniciativa en las investigaciones histórico-filológicas.

pliación, y a llevarse a cabo los estudios e investigaciones que la JAE considerase oportunos.

Esta nueva realidad precisaba una articulación normativa; y la JAE la elaboró en la Sesión del 5 de enero de 1914, bajo la fórmula de "Bases porque se regirá en el presente año el Instituto Nacional de Ciencias Físico Naturales", destacándose que "los gastos previstos en las bases anteriores se harán con cargo a las subvenciones que la Junta reciba en el Presupuesto de Instrucción Pública o de los ingresos que tenga por otro concepto, expresándose en las órdenes de pago los fondos con que haya de atenderse a ellos"[9]. En suma, el Ministerio, de quien dependía orgánicamente la JAE, ni tenía que crear nuevos centros para ésta, ni controlaría su régimen económico.

La "base" que nos permitirá clarificar el origen del *Laboratorio y Seminario Matemático* es la nº 4; textualmente, decía[10]:

> *La Junta organizará cada año trabajos de investigación o de ampliación y divulgación destinados especialmente a ofrecer medios de comenzar una especialización científica y un trabajo personal a los jóvenes que han terminado sus estudios universitarios; a preparar a los que aspiran a comenzar pensiones en el extranjero y a facilitar a los pensionados, a su regreso, medios de continuar en España sus estudios.*

Esta misma base precisaba también la naturaleza y atribuciones de las personas que podrán considerarse sus directores: "La Junta designará las personas que hayan de dirigir esos trabajos como encargados de cursos, sean Profesores, ayudantes, agregados, preparadores y otros análogos, y la forma de remuneración".

Para completar la clarificación de la realidad legal de esta nueva iniciativa, la *Junta* precisaba en la base nº 5 otro ente, distinto de los "Centros", al que daba existencia *ex novo*, las "Secciones" del *Instituto Nacional de Ciencias Físico Naturales*, que no corresponderían sólo formalmente a agrupaciones de "actividades", sino también de personas:

> *Además de los encargados de cursos que dirigen cada trabajo, se agruparán éstos por analogía de materias en Secciones, designando la*

9 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, pp. 13-17.
10 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 15.

Junta un Director de Sección encargado de hacer a la Secretaría las comunicaciones, a los efectos del pago de personal y material.

Como no se trata de Centros creados por Real Decreto, con un Director nombrado por Real Orden, la base nº 5 articulaba que “Los Directores de Sección no percibirán, como tales, remuneración alguna. Si además estuvieran encargados de cursos percibirán la que para cada año acuerde la Junta, mediante oficio dirigido a la Secretaría al finalizar cada mes, haciendo constar que han dirigido durante el mismo los trabajos en curso”. Esta misma base también precisaba que “Podrá haber en cada Sección alumnos becarios, nombrados por los encargados de trabajos, de acuerdo con el Director de su Sección”. Complementariamente, en la base nº 10 se animaba la participación de estos estudiantes e investigadores en los “Trabajos”, abriendo la posibilidad de su remuneración: “Por razón de los trabajos realizados en los Laboratorios y cursos organizados por la Junta, los alumnos podrán percibir becas que no excedan las 200 pesetas mensuales”.

Finalmente, en la sesión del 5 de enero de 1914 se acordó la organización en el *Instituto* de los “Trabajos de investigación, ampliación y divulgación” anunciados en el programa para 1914, y la “formación” de las correspondientes “Secciones” de Geología, Química, etc.[11], todo ello a la luz de los “Recursos procedentes del Ministerio” para el año 1914, es decir, de las partidas del Presupuesto del Estado afectas a la *Junta*, recogidas en el Capítulo 3º, artículo 1º, “Ampliación de Estudios y adquisición de material científico”[12].

3. Los Trabajos y Cursos de matemáticas de la JAE

El año 1914 se presentaba, por tanto, lleno de nuevas esperanzas para el desarrollo de la educación científica en nuestro país. En el caso de la Matemática, por el contrario, el ámbito de actuación de la *Junta* seguía reducido entonces a las pensiones en el extranjero. Así, Julio Rey Pastor viajaba a Alemania, al poco tiempo de ser nombrado Catedrático de Análisis Matemático en la Universidad Central, autorizado por Real Orden de 24 de enero de ese año, para estudiar en Gotinga (con Carathéodory, Courant y Landau) y en Leipzig (con Hölder, Rohn y Koebe)[13].

---

[11] *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 17.

[12] *Memoria correspondiente a 1914 y 1915*, pp. 327-331. Madrid: JAE, 1916.

[13] *Memoria correspondiente a 1914 y 1915*, pp. 98-99. Madrid: JAE, 1916. También: Expediente personal de Julio Rey Pastor. Archivo de la JAE, legajo nº 121/116.

Sin embargo, en agosto de 1914 se desencadenaba la I Guerra Mundial, y "el Gobierno se creyó en el caso de ordenar, como medida de urgencia, la suspensión de todas las pensiones en países de Europa"[14], por lo que Rey Pastor se veía obligado a volver tras ocho meses y veintinueve días de ausencia. Aunque a partir de entonces algunas pensiones se canalizaron hacia Estados Unidos y Suiza, los fondos que quedaban sin utilizar permitieron intensificar la obra de la *Junta* en España. Para ello el *Instituto Nacional de Ciencias Físico Naturales* tenía que aumentar sus actividades, recogiendo a los pensionados de Ciencias que vieron interrumpidos sus estudios o incluso no pudieron salir al extranjero.

Con la Matemática la JAE (y la Facultad de Ciencias) tenía además un problema que resolver de manera urgente: 1) al hiperactivo Rey Pastor el mundo de su Cátedra en los primeros cursos de la Licenciatura se le había quedado pequeño al día siguiente de su toma de posesión; 2) el riojano no podía participar en las pocas investigaciones matemáticas que se hicieran en el período de Doctorado, pues las Cátedras correspondientes a ese período estaban ocupados por otros colegas; 3) no se le podía mandar pensionado nuevamente a estudiar a una Alemania o una Francia en Guerra; y… 4) todavía no había descubierto una Argentina que "se llevaría" años después a nuestro matemático más dotado.

La Junta encontraría la solución para la Matemática y, sobre todo, para el "problema Rey Pastor", (ya lo había hecho antes con la Física y el "problema Blas Cabrera") a través de los "Trabajos de Investigación y ampliación" que acabamos de describir. Utilizaba, por tanto, una estrategia que le permitía "sustraerse a la tentación de la simetría y formar organismos vivos allí donde la ocasión se ofrece, sin preocuparse demasiado todavía del encuadramiento y de la representación proporcional de cada orden de estudios"; e intentaba también "evitar que las ventajas de una validez oficial, u otros estímulos ajenos al interés científico, puedan desnaturalizar la labor de los centros de investigación"[15]. Veamos cómo sucedió.

En la Sesión del 14 de enero de 1915, presidida por Santiago Ramón y Cajal (con la asistencia de los vocales Azcárate, Fernández Prida, Casares, Menéndez Pidal, Bolívar, Vincenti y Fernández Ascarza) correspondía aprobar la distribución de las 300.000 pesetas de subvención consignadas en los Presupuestos[16].

---

14 *Memoria correspondiente a 1914 y 1915*, p. 9. Madrid: JAE, 1916.
15 *Memoria correspondiente a 1914 y 1915*, pp. 14-15. Madrid: JAE, 1916.
16 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 53.

Como en el año anterior, se asignaron cantidades para los centros establecidos del *Instituto Nacional de Ciencias Físico Naturales* (*Laboratorio de Investigaciones Físicas* -19.740 ptas-, *Museo de Ciencias Naturales* -47.922-, *Estación Alpina* -1.000- y *Comisión de Investigaciones Paleontológicas* -7.000-) y para los "Trabajos" específicos (Histología -9.100 ptas-, Química Biológica -6.500 ptas- y Química inorgánica -3.732 ptas-). Pero se añadía una novedad: 3.360 ptas para "Trabajos de Matemáticas".

Por tanto, el *Instituto* continuaba con el mismo régimen económico acordado en la Sesión del 5 de enero de 1914, con pocas modificaciones. En concreto, se acordaba, de conformidad con las bases nº 4 y 5, el programa de "Trabajos" para 1915, y para llevarlos a cabo se formaban las correspondientes secciones. Realmente eran las que ya existían el año anterior, a la que se añadía una "7ª. Sección de Trabajos de matemáticas, dirigida por D. Julio Rey Pastor, con la colaboración de D. Sixto Cámara Tecedor".

En esa misma sesión, y de acuerdo con la base nº 7, se acordaban las remuneraciones mensuales que debían tener los "Directores de Sección que además están encargados de cursos y no perciben otra de la *Junta*" correspondiéndole a Rey Pastor 280 pesetas por este concepto. Como continuación y complemento, en la Sesión del 2 de marzo se concretaba la asignación del 14 de enero, precisando el concepto: "8º Trabajos de matemáticas: Un profesor, un ayudante y material 3.360 ptas"[17].

Todo ello se integraba en el concepto genérico "Cursos" (insistimos, no "Centros"), la cuarta partida del *Instituto Nacional de Ciencias Físico Naturales*, tras las correspondientes a las de los tres Centros existentes. Allí se contemplaban cantidades para nueve profesores (28.527 ptas), para el material a utilizar en los cursos (50.687 ptas) y para las instalaciones de los laboratorios (9.881,67 ptas)[18].

Como vemos, en 1915 no se había creado el *Laboratorio y Seminario Matemático* de la JAE (equivalente, por ejemplo, al *Laboratorio de Investigaciones Físicas*, nacido por R.O. en 1910), ni se había nombrado a Rey Pastor director de un centro de la *Junta* (como sí se hizo por R.D. en 1910, por ejemplo, con Blas Cabrera). Pero sí quedaba claro que se concretaba la "apuesta" por Rey Pastor para dirigir el futuro de la educación matemática española [7].

En consecuencia, ahora sí puede interpretarse correctamente la cita que hasta ahora asumíamos todos como prueba de la "creación" del LSM en 1915[19]:

---

17 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 64.

18 *Memoria correspondiente a 1914 y 1915*, pp. 334-335. Madrid: JAE, 1916.

19 *Memoria correspondiente a 1914 y 1915*, pp. 194 y 242. Madrid: JAE, 1916.

El grupo, ya considerable, de Laboratorios de Ciencias que la Junta había ido formando en años anteriores, se ha enriquecido en el año 1915 con una importante aportación. El profesor de la Universidad Central D. Julio Rey Pastor, que había hecho su preparación en el extranjero, como pensionado, accedió, invitado por la Junta, a dirigir una Sección de Matemáticas que ha comenzado sus trabajos con éxito [...] Ha recibido alojamiento provisional en uno de los locales de la Junta en el Centro de estudios históricos, hasta que pueda tener su laboratorio propio [...] organizada la Sección en Marzo de 1915, se ha desenvuelto con dificultad por no recibirse, a causa de la guerra, los libros y aparatos encargados a Alemania.

En todo caso, y quizá por ser muy poco lo que se le ofrecía al matemático riojano, la JAE proponía ya en la Sesión de junio de ese año[20] a Rey Pastor como autoridad científica para ocupar la Cátedra de la *Institución Cultural Española de Buenos Aires*, aunque la propuesta hubo de desestimarse en la Sesión siguiente, del 2 de octubre de 1915, ante el cariz que tomaba la Guerra.

4. Los primeros años del *non nato* LSM de la Junta, 1916-1919

Llegado el 13 de enero de enero de 1916, la *Junta* distribuía sus presupuestos para el año que comenzaba. Aumentando la partida del ejercicio anterior, en el apartado "7ª Sección de trabajos de Matemáticas, dirigida por D. Julio Rey Pastor, con la colaboración de D. Sixto Cámara Tecedor", se asignaba la cantidad de "1600 + 9.300 = 10.900 ptas" para el *Laboratorio de Matemáticas* y se acordaba una remuneración mensual de 280 pesetas para Rey Pastor en tanto que "Director de Sección que está encargado de cursos y no percibe otra de la Junta"[21].

Aunque las denominaciones se prestarían a confusión a lo largo de toda la vida del LSM, para la *Junta* estaba claro que "Rey Pastor dirige los cursos de Matemáticas en el Instituto Nacional de Ciencias Físico Naturales" cuando deba hacer gestiones para que, por ejemplo, se le ceda temporalmente un intégrafo "que se destinará a los trabajos matemáticos que dirige el Sr. Rey Pastor"[22].

[20] *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 73.
[21] *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, pp. 89 y 92.
[22] *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 112.

Aunque ni los "Trabajos" de Química de Casares y Carracido, o los de Matemáticas de Rey Pastor, habían supuesto realmente la creación formal de un nuevo centro, en la Sesión del 10 de octubre de 1916 la *Junta* tenía que adaptar el nombre de la institución que reunía a los Centros científicos y sus "Trabajos" y "Cursos" complementarios, cambiando el de *Instituto Nacional de Ciencias Físico Naturales* por el más general de *Instituto Nacional de Ciencias*, "teniendo en cuenta que existen ya en él y aumentarán cada día más los Laboratorios y cursos de química y matemáticas sostenidos por la Junta"[23]. El Real Decreto en el que se formalizaba el cambio se firmó el 23 de diciembre de 1916[24]… pero sin que con el cambio se "decretase" consecuentemente en modo alguno la "creación" de un nuevo Centro llamado *Laboratorio y Seminario Matemático*.

En todo caso, y tal y como estamos comprobando, son las reuniones del comité directivo de la JAE celebradas a caballo entre dos años sucesivos las que más información proporcionan para nuestro estudio. Así, en el *Acta* de la Sesión del 21 de diciembre, tras hacerse constar que en el *Centro de Estudios Históricos* había una gran escasez de sitio, entre otras razones, "por haberse instalado en él provisionalmente el Laboratorio y Seminario Matemático"[25], se acordaba "Autorizar al Presidente de la *Junta* para que si lo estima necesario tome en alquiler un piso donde pueda funcionar y alcanzar un mayor desarrollo el *Laboratorio de Matemáticas*, señalando como máximo para dicho alquiler la cantidad de 150 ptas mensuales, las cuales se pagarán con cargo a la partida que se asigne al mismo Laboratorio en la distribución general de fondos".

Esta distribución se iba a hacer a continuación en la misma Sesión[26], y al "Laboratorio de matemáticas" se le asignaban "1.600+10.800=12.400 ptas". Dos frases nos muestran los pocos cambios que se producían: 1) "El Instituto seguirá con las mismas secciones que tiene actualmente y con sus mismos directores y colaboradores". 2) La sección de Matemáticas contará además con la colaboración del profesor D. José Gabriel Álvarez Ude".

En la sesión del 2 de octubre de 1917, se aprobaban los "Trabajos" para 1917-1918, que serían enviados para su publicación, con las mismas condiciones que en los años anteriores. Entre los "Trabajos de matemáticas, bajo la dirección de Don Julio Rey Pastor" se ofrecían los cursos de ampliación siguiente[27]:

23 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 115.
24 *Memoria correspondiente a 1918 y 1919*, p. 133. Madrid: JAE, 1920.
25 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, pp. 131-132.
26 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 136.
27 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 170.

1º. Análisis, bajo la dirección de D. Julio Rey Pastor.
2ª. Geometría, bajo la dirección de D. J. Alvarez Ude.
3º. Nomografía, bajo la dirección de D. Julio Rey Pastor.
4º. Coloquios matemáticos semanales, sobre los conceptos fundamentales del análisis y de la geometría moderna.

En la siguiente Sesión de la *Junta*, celebrada el 18 de diciembre de 1917, se aprobaba la distribución de fondos para el año 1918 entre las Secciones y los Centros[28], haciéndose constar que al "Laboratorio de Matemáticas" le correspondían "11.700+3.800=15.500 ptas". La *Junta* mantenía su ambigüedad institucional con respecto al LSM. En algunos momentos (como éste, haciéndolo constar ni más ni menos que en su *Libro de Actas*) se comportaba formalmente como si el LSM existiera realmente, y lo equiparaba en su tratamiento con el *Laboratorio de Investigaciones Físicas*[29]:

> *En cuanto a esos directores [de las Secciones o Centros] mismos que han de fijar cada mes el personal y las retribuciones, la Junta acordó lo siguiente: 1º. En el Instituto Nacional de Ciencias, D. Blas Cabrera y Felipe, como Director del Laboratorio de Investigaciones Físicas, y D. Julio Rey Pastor, como Director del Laboratorio y seminario matemático, percibirán 300 pesetas mensuales cada uno.*

Sin embargo, en junio de 1917 había salido Rey Pastor en misión cultural a la República Argentina, invitado por la *Institución Cultural Española* de Buenos Aires[30] El viaje, impresionante éxito socio-científico tanto de la Educación superior española como, sobre todo, personal de nuestro matemático, se prolongó hasta el final de la primavera de 1918 [11], por lo que, a pesar de lo recogido en su *Libro de Actas*, la *Junta* se veía obligada a constatar que "El Laboratorio y Seminario matemático se ha visto privado, durante el curso de 1917-18, de su más va-

---

28 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 183.
29 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo II, p. 184.
30 Existe abundante documentación al respecto en el Expediente personal de Julio Rey Pastor. Archivo de la JAE, legajo nº 121/116. El viaje se analiza, a partir de este expediente, en [13]. Pueden verse, también, la *Memoria correspondiente a 1916 y 1917*, pp. 81-82. Madrid: JAE, 1918; y la *Memoria correspondiente a 1918 y 1919*, pp. 94-95 y 183-187. Madrid: JAE, 1920. También los propios *Anales de la Institución Cultural Española*, publicados en Buenos Aires.

lioso elemento", aunque reconocía que, "llevado del amor a este Centro", había colaborado desde la otra orilla del Atlántico "revisando algunos de los trabajos aquí efectuados y contestando a cuantas consultas se le han hecho".

En todo caso, la *Junta* había encontrado su sustituto: "Una compensación de gran valía a la ausencia del señor Rey Pastor ha sido la agregación, hecha en el mes de enero, de don José María Plans", hasta que el riojano "de nuevo asumió la dirección del Seminario a su regreso de América, en fines de 1918"[31].

Realmente, a pesar de lo que pudieran inducirnos a pensar estas palabras, la situación de "indefinición creacional" del LSM se mantenía tres años después de la puesta en marcha de los "Trabajos de Matemáticas". Así, en el entorno de la vuelta de un Rey Pastor agigantado por su reconocimiento en Argentina, en el *Acta* de la Sesión del 18 de junio de 1918 leemos[32]:

> *Se acordó elevar al Ministerio una propuesta para que el Laboratorio y Seminario Matemático, que lleva ya funcionando suficiente tiempo para considerarse como consolidado, sea incorporado al Instituto Nacional de Ciencias creado por el Real decreto de 27 de Mayo de 1910 y que recibió la actual denominación por Real Orden de 23 de Diciembre de 1916. Se propondrá también que se nombre Director de dicho Laboratorio a D. Julio Rey Pastor Catedrático de la Universidad Central que ha venido desempeñando dicha función en los años de ensayo.*

Y es que, efectivamente, el LSM, considerado ya como institución consolidada después de tres años de "ensayo" educativo, seguía sin ser "creado"; y quien había desempeñado la función de director, Julio Rey Pastor, seguía sin ser "nombrado". En este marco de reconocimiento, a Rey Pastor sí le encargaban por Real Orden del 27 de julio, complementariamente, la formación pedagógica de los "Aspirantes al Magisterio Secundario" en el recientemente creado *Instituto-Escuela* de la JAE, junto a María de Maeztu, Ramón Menéndez Pidal e Ignacio Bolívar.

A la espera de una "incorporación" del *Laboratorio* y un "nombramiento" del Director (que no llegarán a publicarse nunca), los fondos para los nuevos cursos de Matemáticas aumentaban hasta las "3690+810=4.500 ptas" para el primer trimestre de 1919[33], de "1193 + 270 = 1.463,00" para los meses de abril y mayo,

---

31 *Memoria correspondiente a 1918 y 1919*, p. 183-187. Madrid: JAE, 1920.
32 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo III, p. 23.
33 *Libro de Actas* de la JAE, Tomo III, p. 57.

“1100+270 = 1.370” para junio y julio, 150 para agosto, 1000 para septiembre, y “810 + 3690 = 4.500” para el último trimestre.

5. La primera crisis del Laboratorio y Seminario Matemático, 1919-1921

Pero poco tiempo iba a estar Rey Pastor en España... y poco también con ganas de seguir haciéndose cargo de un “ensayo” docente que no acababa de cuajar. Así, en primer lugar, en la Sesión del 18 de diciembre de 1919[34] se recoge cómo volvería a ausentarse durante los primeros meses de 1920, a Alemania nuevamente, mediante el reconocimiento de la “condición de pensionado”. Desde allí, se dirigiría a la *Junta* renunciando a todos los puestos con los que se le había honrado anteriormente[35]:

> *Se da cuenta de una carta de Julio Rey Pastor desde Alemania, manifestando que dadas las condiciones de la enseñanza Matemática oficial en España y la falta de todo estímulo que no sea la preparación para oposiciones, considera poco útil su trabajo en el Seminario Matemático, y desea declinar su cargo que en él ha venido desempeñando. De igual manera ruega a la Junta le releve de la dirección de la sección Matemática que le confirió en el Instituto Escuela.*

Como es natural, la *Junta* aplazaba cualquier decisión hasta el regreso de Rey Pastor, “manifestando el deseo de que continúe de esta u otra forma”. Pero a la vuelta del riojano, y convocado éste a una entrevista con el Secretario de la JAE, José Castillejo, en la Sesión del 15 de junio de 1920, su visión seguía siendo la misma[36]:

> *Ha insistido en su opinión de que el Seminario Matemático como tal seminario, es decir, como centro para la formación de matemáticos, no podrá cumplir su misión mientras, por el atraso o las preocupaciones de la gran mayoría del personal designado como jueces de oposiciones queda cerrada esa solución casi única, de que puedan vivir de la matemática*

---

[34] *Libro de Actas* de la JAE, Tomo III, p. 121.

[35] *Libro de Actas* de la JAE, Tomo III, p. 105. En [13], aunque se analiza esta documentación, no se hacen las valoraciones que presentamos nosotros.

[36] *Libro de Actas* de la JAE, Tomo III, p. 129.

los que a ella se dedican. Los casos rarísimos de jóvenes con fortuna y con deseo de cultivar la matemática sin esperar de ella utilidad ninguna, no pueden justificar el sostenimiento del Seminario.

Ante la insistencia de Rey Pastor en abandonar todos sus puestos, y “sin perjuicio de buscar remedio a las dificultades esenciales que el Sr. Rey Pastor acertadamente señala”, la *Junta* hacía constar en *Acta* una nueva manifestación de la “no creación” del LSM… explicitando qué habría que hacer para “el sostenimiento de un laboratorio o centro de estudios matemáticos ya independientemente o ya agregado a alguno de los establecimientos de la Junta”.

La modestia y precaución con la que se afrontaba el problema era notoria. Consideraban que “ese laboratorio aunque tenga que desistir por ahora total o parcialmente de su función de Seminario” estaría encargado (mediante evolución de lo existente o creándose *ex novo*) de:

1) Mantener al día la información sobre los progresos de la Matemática, procurando servir de órgano de difusión y de consulta a los pueblos de lengua española.
2) Publicar para ello en forma de Revista o de cuadernos, no periódicos tanto trabajos originales como recensiones extractos, críticos y noticias del movimiento científico matemático del mundo, en cuanto se juzga que señala nuevos rumbos o que puede servir de estimulante y guía para los matemáticos de lengua española.
3) Acoger, facilitar libros y orientación y, si es necesario y posible, otorgar un pequeño auxilio pecuniario a cualquier matemático que desee hacer trabajos científicos puros.
4) Invitar a Matemáticos extranjeros a dar cursos de laboratorio y preparar si es posible, para aprovecharlos un corto número de profesores o graduados españoles.
5) Ser órgano para la transformación de la matemática en España dirigiendo la que se de en el Instituto Escuela de Madrid, preparando a los aspirantes al Magisterio de dicho Instituto, haciendo publicaciones de libros elementales, publicando instrucciones y consejos sobre enseñanza matemática etc.
6) Servir a la Junta de ponencia técnica para el envío de pensionados de matemáticas al extranjero contribuyendo de ese modo a la renovación del personal docente.

Este nuevo intento de institucionalización tendría que haberse concretado en un Real Decreto. Pero, en esa misma Sesión, la *Junta* acordaba (sic): a) "invitar para dirigir o colaborar en esos trabajos a los señores D. Julio Rey Pastor, D. José Alvarez Ude y D. José María Plans que han constituido el profesorado del Seminario Matemático"; b) "encargar a cada uno que tome de las funciones que quedan numeradas aquellas que prefiera o que pueda prometerse mayor éxito"; c) "rogarles que a base de esa distribución den al Laboratorio la organización que crean más adecuada, tanto con respecto a funciones, como a personal y local"; y d) "pedirles que sigan aceptando la modestísima indemnización que la Junta les tenía asignada, mientras no sea posible señalar una retribución que corresponda a la labor científica de dichos profesores".

Finalmente, como si la JAE quisiera proporcionarnos nuevas evidencias que sustentaran la tesis que defendemos, acordaba "igualmente mantener para los gastos de material y personal del laboratorio la partida que se había señalado en presupuesto al Seminario" y hacía presente que "asume la responsabilidad del proyecto y que ruega a los señores Rey Pastor, Álvarez Ude y Plans se presenten a hacer el ensayo un tiempo suficiente para obtener algunos, al menos, de los frutos que se espera".

Claro que, ¿puede quedar alguna duda de que, tras "no crearse" en 1915, "no se creará" tampoco en 1920? En un próximo trabajo lo documentaremos.

Referencias bibliográficas

[1] AUSEJO, E. Y MILLÁN, A. (1989). "La organización de la investigación matemática en España en el primer tercio del siglo XX: el Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (1915-1938)". *Llull. Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, Vol. 12, 261-308.

[2] ESCRIBANO BENITO, J. J. (2000). *Estudio histórico de la obra matemática de Sixto Cámara Tecedor (1878-1964) en el contexto de la matemática española*. Tesis Doctoral. Logroño, Universidad de La Rioja.

[3] ESPAÑOL GONZÁLEZ, L. (2006). "Julio Rey Pastor. Primeros años españoles: hasta 1920". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 9 (nº 2), 545-586.

[4] FERNÁNDEZ TERÁN, R. E. y GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2007). "La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas en el Centenario de su creación". *Revista Complutense de Educación*", Vol. 18 (nº 1), 13-34.

[5] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2001). "La actividad del *Laboratorio y Seminario Matemático* de la Junta para Ampliación de Estudios durante la Guerra Civil". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 4 (nº 3), 675-686.

[6] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2002). "La Matemática en el panorama de la Ciencia española, 1852-1945". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 5 (nº 3), 779-809.

[7] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. y FERNÁNDEZ TERÁN, R. E. (2004). "El criterio de relevancia científica y la organización histórica por generaciones de la Ciencia española". *Revista Complutense de Educación*, Vol. 15 (nº 2), 687-700.

[8] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. y DE VICENTE LASECA, L. (2005). "El 'oficio de matemático' en España en el siglo XX: Pedro de Pineda y Gutiérrez". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 8, nº 3, 837-868.

[9] HORMIGÓN BLÁNQUEZ, M. (1988). "Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX". En Sánchez Ron, J. M. (ed.): *Ciencia y sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil*. Madrid: El Arquero-CSIC.

[10] LÓPEZ SÁNCHEZ, J. M. (2006). *Heterodoxos españoles. El Centro de Estudios Históricos, 1910-1936*. Madrid: Marcial Pons.

[11] RÍOS, S., SANTALÓ, L. A. y BALANZAT, M. (1979). *Julio Rey Pastor, matemático*. Madrid: Instituto de España.

[12] SÁNCHEZ RON, J. M. (coord.) (1988). *La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas 80 años después. 1907-1987*. 2 Vols. Madrid: C.S.I.C.

[13] SÁNCHEZ RON, J. M. (1990). "Julio Rey Pastor y la Junta para Ampliación de Estudios". En L. Español (ed.): *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, pp. 9-41. Logroño: Instituto de Estudios Riojanos.

Una nota sobre la Agenda Escolar: algo más que una herramienta de trabajo

Juan José Prieto Martínez
I.E.S. Celestino Mutis
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Fac. de Matemáticas. Universidad Complutense
jjprieto@mat.ucm.es

Abstract

"I.E.S. Celestino Mutis" is a Public Priority Secundary School and it takes part, since January 2006, in the support and School Help Programme (P.R.O.A.). The School has to improve the actual situation about academic results. For this, one line of performance is to use the school diary.

Resumen

El I.E.S. Celestino Mutis es un Centro Público Prioritario y participa dentro del Programa de Apoyo y Refuerzo Escolar (PLAN PROA) desde enero de 2006. El Centro tiene el compromiso de mejorar la situación actual en cuanto a los resultados académicos. Para ello, una de las líneas de actuación es la puesta en marcha de la Agenda Escolar.

La experiencia parece enseñarnos que la convivencia entre personas no es fácil. En concreto, en un Instituto de Educación Secundaria existen problemas entre los alumnos y, a veces, en la relación alumno-profesor.

Hay alumnos agresivos que usan la violencia o la amenaza para resolver sus problemas; pero también hay alumnos pasivos inhibidos que no saben o no se atreven a enfrentarse con sus problemas.

No son sólo las normas antiguas de urbanidad las que a veces desaparecen de la vida escolar; es algo más hondo. Lo que está ocurriendo es que no se sabe resolver los problemas de convivencia.

La agenda escolar es un instrumento pionero en el I.E.S. Celestino Mutis que se está utilizando, además de apuntar los deberes, como vía de comunicación entre docentes y padres para resolver los problemas personales de sus hijos.

Es posible que nos falten a todos, pero especialmente a los alumnos, las habilidades sociales necesarias para vivir en paz de manera creativa. No se pretende que el profesor exponga con detalle los hechos en la agenda escolar para comunicárselo a los padres, sino que los alumnos sepan que los hechos son faltas de disciplina leves o graves; que se está presentando una queja con serenidad y sin faltar al respeto a ningún miembro de la comunidad educativa, con el único fin de saber convivir en paz y con tolerancia.

Se sabe que cuesta aceptar una crítica aunque sea objetiva y razonable; nos humilla tener que pedir excusas; no se sabe elogiar a otro sin que él o nosotros nos sintamos molestos; muchas veces no se sabe cómo enfrentarse a la vergüenza o al miedo.

Es necesario que el padre, madre o tutor del estudiante nos ayude en la educación de su hijo; si ha tenido algún problema de compañerismo o de relación con algún profesor, sepan lo sucedido, quedando por escrito para que todos podamos reflexionar más tarde sobre los hechos, y podamos aprender y mejorar en fomentar actitudes que favorezcan la convivencia y eviten posibles actos de violencia en los ámbitos escolares, familiares y sociales.

La agenda también puede ser el diario de un estudiante que con sus anotaciones refleje la personalidad de un adolescente consciente y comprometido con los valores de la democracia; que se observe que contribuirá a una educación social, ética y con una preparación intelectual sobre los principios de nuestra sociedad.

Cuando estamos en un aula de secundaria, los contenidos de área son de gran importancia pero los contenidos sociales no hay que dejarlos al margen. Las estrategias didácticas que los profesores deben utilizar tienen que estar en conexión con los valores sociales que se quieren transmitir, siendo consciente de que el propio educador no es neutral en la transmisión de valores.

El alumno, a lo largo de su educación en secundaria, debe haber conseguido, fundamentalmente, unos valores sociales, morales y éticos que lo formen como persona para la vida en sociedad. La comunicación entre profesores y padres a través de la agenda escolar no debe ni puede limitarse a apuntar exclusivamente quejas del alumno.

Debemos tener en cuenta que la agenda escolar nunca se puede concebir como un rosario de notas acerca de los retrasos, dificultadas encontradas en el aprendizaje del alumno, justificaciones de faltas de asistencia a clase, etc.

Todos los alumnos (y digo todos) hacen cosas que están bien. Si nos limitamos a las cosas negativas, la agenda, en vez de ser una valiosa herramienta de educación, puede convertirse en un instrumento odiado por el estudiante que sólo le puede humillar y bajar la autoestima.

Toda la comunidad educativa tenemos que implicarnos en la utilización de la agenda escolar: los alumnos deben asumir que la utilización de la agenda tiene que ser diaria y obligatoria, para convertirse en una ayuda real para planificar su trabajo.

Por otra parte, los profesores deberíamos revisar su utilización informando continuamente a los padres del progreso escolar del alumno, donde la comunicación familia-centro no se limite a las entrevistas personales. Los padres deben comprometerse a la revisión habitual de la agenda para conocer en todo momento la evolución académica de sus hijos.

Los alumnos (con ayuda del profesor en 1º y 2º de la E.S.O.) normalmente deben anotar la tarea escolar que tienen que realizar en casa para el próximo día. Es conveniente que también anoten aquellos epígrafes o temas de asignaturas que deben memorizar.

Quiero hacer notar que digo aprender de memoria y no digo estudiar. Si un alumno apunta la palabra estudiar, éste puede alegar que ya lo ha hecho, y tal vez tenga razón, porque no precisa cuánto. En cambio, si dice aprender, no tiene la tarea acabada hasta que no lo sabe, y los padres pueden comprobarlo.

En estos pequeños detalles puede estar el secreto de un buen uso de la agenda para realizar con éxito el trabajo de casa, que incluye tanto la realización de ejercicios como entender y memorizar los contenidos de cada lección.

Fotografía matemática

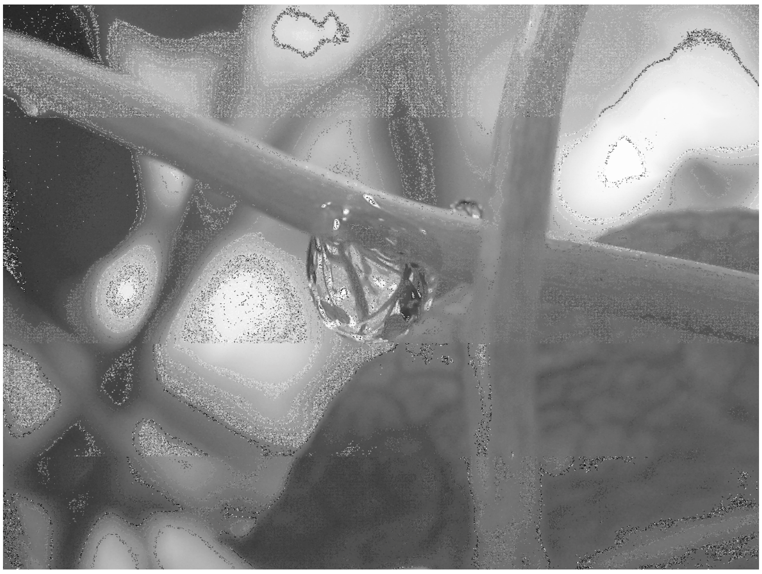
Miguel Ángel Queiruga, Eva y Marta Gutiérrez Adrián

Colegio Jesús-María de Burgos
queiruga@inicia.es

Abstract

The World is plenty of geometric forms, objects and places with mathematical suggestions. Nature, technology… all the objects we use in our daily life are governed by mathematical patterns. Photography is a didactic tool for mathematics lessons, stimulating reflection, observation and scientific creativity.

John Bernal dice: "Más de la mitad del cerebro humano se dedica al proceso de ver y de interpretar lo que ve. Hacer que un fenómeno sea visible es ampliar extraordinariamente nuestra capacidad para comprenderlo".

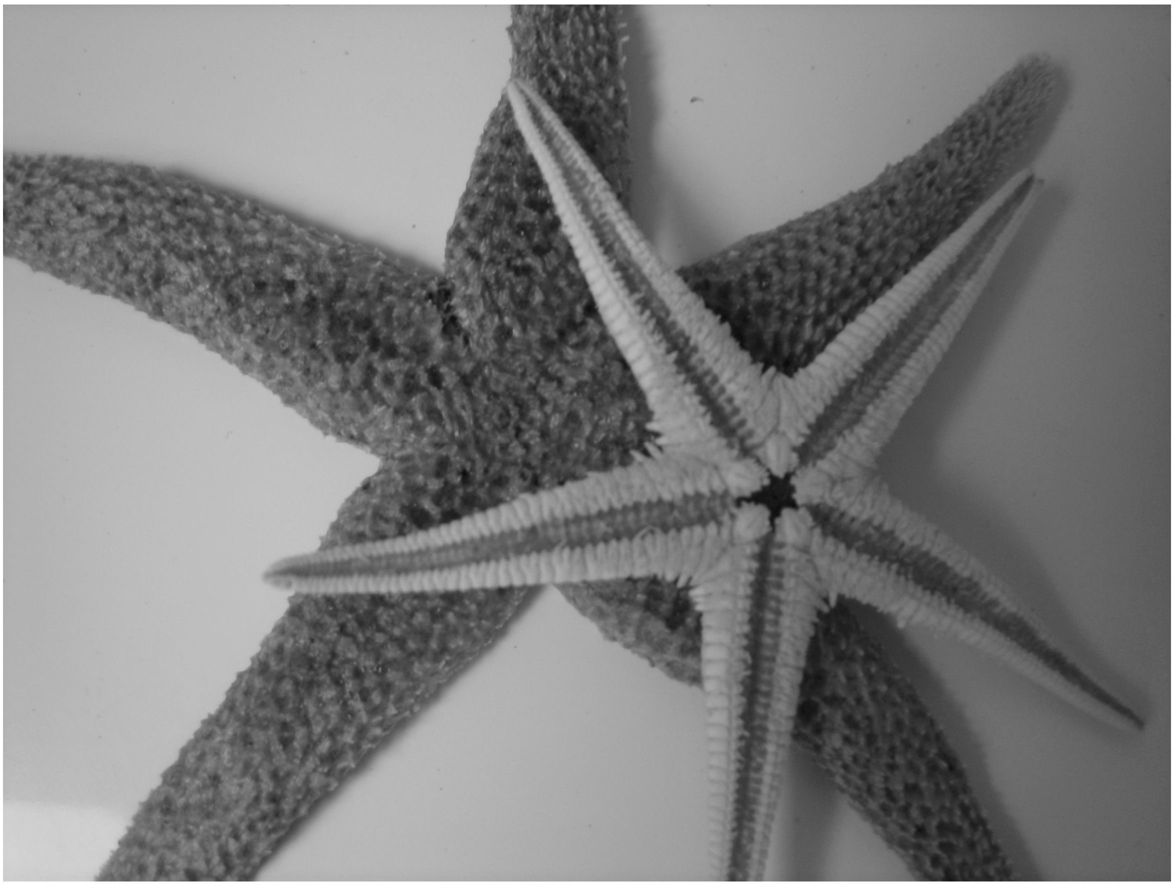


Fotografía nº 1

Para muchos, las matemáticas constituyen un Universo abstracto y lejano, patrimonio de unos pocos genios. Un mundo alejado de la realidad. Sin embargo, esto no es así. El mundo está lleno de formas geométricas y de objetos y lugares con sugerencias matemáticas (Fotografía nº 2).

Fotografía nº 2

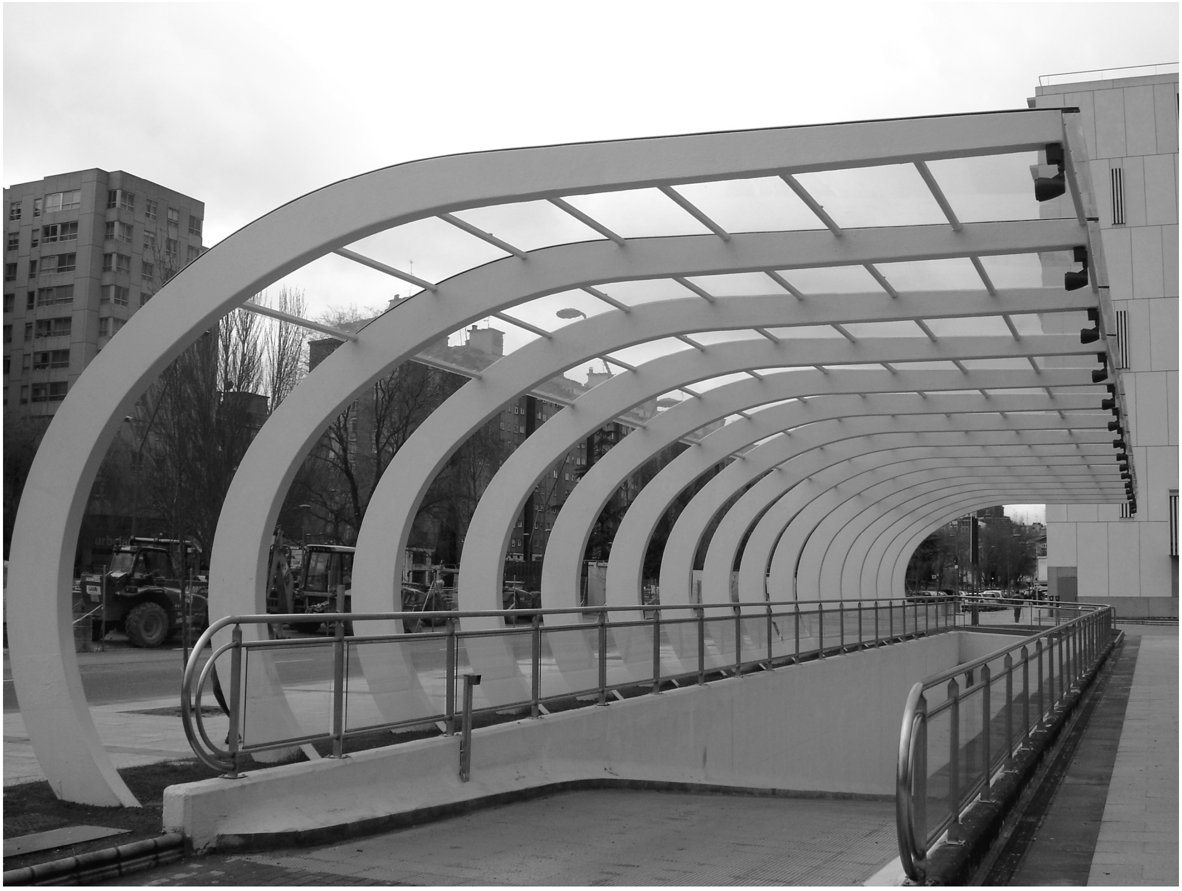
Sólo se precisa una mirada matemática que los descubra, de unas gafas mágicas que nos permitan descubrir la gran cantidad de matemáticas en que estamos inmersos.



Fotografía nº 3

Muchas veces, la naturaleza (Fotografía nº 3), la tecnología, los objetos que utilizamos en nuestra vida cotidiana, suelen regirse, aunque no nos demos cuenta, por patrones matemáticos. Incluso en las cosas más inesperadas y cotidianas podemos encontrárnoslas. Así, una tapadera de alcantarilla suele ser redonda por una propiedad matemática. De la misma forma, los taburetes de tres patas son más estables que los de cuatro, también por una propiedad geométrica.

Se une fotografía y matemáticas con el único pretexto de animar al conocimiento y al uso de las matemáticas, como pilar fundamental de la cultura, por ser el lenguaje de la ciencia y así poder entender el mundo en que vivimos y apoyar su aprendizaje.



Fotografía nº 4

Es obvio la relación entre las artes visuales: pintura, escultura, arquitectura, fotografía, cine… y las matemáticas. Conceptos como simetría, proporción áurea, perspectiva, proyección, escala, proporción, ritmo, etc… son comunes a unas y otras (Fotografía nº 4).

Vemos la fotografía como una herramienta didáctica en el aula de matemáticas. Ello servirá para estimular la reflexión, la observación y la creatividad matemática descubriendo asombrados como la presencia de las matemáticas está siempre a nuestro alrededor: “Las matemáticas están por todas partes” (Pilar Moreno).

Con la fotografía se hace perceptible en imágenes el uso de las palabras matemáticas sin representación mental que les de sentido.

Si la imagen es uno de los recursos más importantes que cualquier medio de comunicación dispone para trasmitir información, las matemáticas deben contar con ella. Por lo tanto, utilizaremos la imagen captada por el “ojo mecánico” como recurso para percibir y transmitir información matemática.

Fotografía nº 5

La fotografía matemática resulta ser, por tanto, una interesante propuesta de trabajo cuando se quieren fomentar la adquisición de destrezas de observación, de análisis del entorno y de interpretación de la realidad.

Requiere encontrar el objeto o recrear la situación susceptible de ser fotografiada, analizando las estructuras geométricas, buscando y reconociendo formas en el entorno. Como ejemplo sirva el comentario sugerido a la fotografía nº5, realizado por alumnos de secundaria:

> *Acabábamos de tener un examen de mates. Volvíamos a casa y todo estaba relacionado. Esta construcción infantil es la solución gráfica de una ecuación de segundo grado (parábola). Es una curva plana que se puede ajustar a un sistema de coordenadas: y = ax^2 + bx + c.*

Además, invita a la curiosidad, a plantearse preguntas, ¿qué nombre recibe la curva que forma de una cadena que pende sujeta por dos extremos? (fotografía nº6), ¿y la forma que adquiere una gotita de agua adherida al tallo de una planta?, ¿qué características tienen estas formas?, ¿qué personajes han descubierto tales características?...Un sin fin de preguntas, cuya respuesta nos llevaría a una profundización en las matemáticas.

Fotografía nº 6

Es por tanto la fotografía matemática una invitación a la investigación y al descubrimiento, y a la elaboración de elementos de divulgación.

Como resultado de este proceso, hemos desarrollado un “Cuaderno de Divulgación”, en el que además de una colección de fotografías analizadas, se introducen algunos artículos relacionados con la geometría. Si algún lector lo solicita le enviaremos un ejemplar.

Fotografías

Las fotografías han sido tomadas por Eva y Marta Gutiérrez Adrián, Sandra Gómez Román y Eugenia Maestro Santamaría.

Coordinador: Miguel Ángel Queiruga Dios

Bibliografía

[1] Pilar Moreno*: Anda con ojo*. Editorial Factoría K de libros.

Reseña de libros

Mª JESÚS DE LA PUENTE MUÑOZ*: Curvas Algebraicas y Planas.* ISBN: 978-84-9828-135-4. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Este libro, que quiso llamarse Curvas Algebraicas Planas, está dirigido a aquéllos alumnos de la licenciatura de CC. Matemáticas que se encuentran a caballo entre los dos ciclos de la licenciatura y a aquéllos matemáticos con una insatisfecha curiosidad por los rudimentos de la Geometría Algebraica.

Las notas que han dado lugar al mismo han sido empleadas varios años para impartir la asignatura "Curvas Algebraicas" en la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Consta de ocho capítulos y tres apéndices.

Los dos primeros capítulos son introductorios y dirigidos a definir multiplicidad de intersección. Esto se hace mediante la resultante, y hay que señalar el cuidado con que se prueba la independencia de la definición respecto de cambios de coordenadas; algo que la mayoría de textos tratan de pasada. Se demuestra en el Capítulo 2 el primer resultado importante: el teorema de Bezout.

La noción de orden de contacto de una curva en un punto, y con ella la de punto singular se tratan en el Capítulo 3, mientras que la deficiencia, y por lo tanto la racionalidad, se abordan en el Capítulo 4, tras estudiar sistemas lineales.

El Capítulo 5 es nuclear, y en él se tratan las curvas polares, la dual y la hessiana, para concluir con las fórmulas de Plücker y la cota de Jacobi. Las cúbicas se estudian en el Capítulo 6.

Aunque los teoremas fundamentales del texto se refieren a curvas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, la autora, que es especialista en Geometría Algebraica Real, ha estudiado en cada capítulo qué sucede cuando el cuerpo base es el de los números reales.

Además dedica el Capítulo 7 a presentar algunas pinceladas acerca de la topología de las curvas algebraicas planas reales. El Capítulo 8 se dedica al Teorema de Newton-Puiseux y al algoritmo de Newton que proporciona las ramas de una curva en un punto, pero no se emplea a lo largo del libro.

Los apéndices están dedicados a exponer algunas herramientas de carácter algebraico, tales como clases especiales de anillos (dominios de factorización única y euclídeos), criterios de irreducibilidad de polinomios, algo sobre series formales, la resultante tratada con detalle, y un breve repaso de la geometría lineal proyectiva y la topología del espacio proyectivo.

El texto contiene excelentes notas bibliográficas en cada uno de los capítulos y una extensa y bien seleccionada bibliografía de consulta que contiene libros de nivel similar al objeto de esta reseña y otros de nivel superior.

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65,66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76 y 77.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN EN LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

D. .... Teléf.: ....
Dirección: ....
Ciudad: .... Cod. Postal: .... E-mail: ....
Centro de trabajo: ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco: ....
Dirección de la Sucursal: ....
para que cargue en mi cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 2007-2008 y siguientes.

Fecha: .... de .... de 2007

Firma:

La cuota anual está actualmente establecida en 40 euros (de ellos, 21 euros como cuota de la Sociedad «Puig Adam» y 19 euros como cuota de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, por la que se recibe la revista SUMA).
Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/. Carranza, 5 - 28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

ORDEN DE DOMICILIACIÓN EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha: .... BANCO: ....
Sucursal o Agencia: .... en: ....
Dirección de esta: ....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam", de profesores de Matemáticas hasta nueva orden. Les saluda atentamente:

Firma:

Nombre y Apellidos: ....
Dirección: ....

Remítanse ambas partes (toda esta página) a nuestra sede:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matematicas
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.