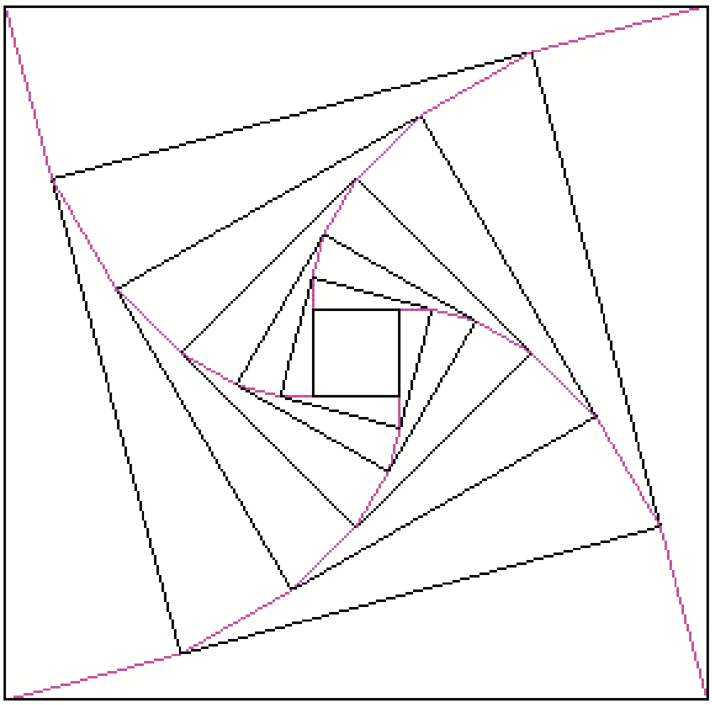
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 76
JUNIO DE 2007

ÍNDICE

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
Despacho 3005
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: `puigadam@mat.ucm.es`
Página web: `www.ucm.es/info/secdealg/puigadam`
Nueva página web en preparación (en servicio parcial):
`http://www.sociedadpuigadam.es`

Todos lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2007 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en le Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 14 de abril de 2007, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil siete.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad

Se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 73, 74 y 75 del Boletín. Se resalta la buena acogida que ha tenido la decisión de publicar el índice en la contraportada del Boletín nº 75.

Se informa que el día 10 de junio de 2006 se celebró con el éxito ya tradicional, el XXIV Concurso de Resolución de Problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Licenciados. Como en años anteriores, la prueba tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas. En el Boletín nº 74 se recoge información sobre los concursantes y los resultados obtenidos.

Se informa que, el día 11 de junio de 2005 se celebró con el éxito ya tradicional, el XXIII Concurso de Resolución de Problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Licenciados. Como en años anteriores, la prueba tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas. En el Boletín de octubre se recoge información sobre los concursantes y los resultados obtenidos.

Se informa también de la colaboración de la Sociedad en la Olimpíada Matemática y en el Concurso Intercentros.

También se informa que el próximo sábado 21 de abril se celebrará el XI Concurso de Primavera de la Comunidad de Madrid y que está teniendo un gran éxito, ya que este año ha aumentado considerablemente la participación. Hay que destacar que algunos miembros del equipo organizador del Concurso son miembros de la Sociedad.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Las cuentas quedan aprobadas por unanimidad, y se concluye que no resulta necesario modificar la actual cuota.

4. Elección de nuevos cargos directivos

El Presidente manifiesta que en la Asamblea del año 2003 se renovaron tres cargos y por tanto en el año 2007 procede su cese y nombramiento de nuevos cargos. Después de un intenso debate entre los asistentes, se aprueba:

Nombrar a D. Julio Fernández Biarge como Vocal en la Redacción de Publicaciones, a D Eugenio Roanes Lozano como Vocal en la Gestión de Publicaciones y a D Juan Bosco Romero Márquez como Vicepresidente. Seguir dejando vacante la plaza de Bibliotecario.

5. Asuntos de tramite

Se resalta la coincidencia de fechas de nuestra Asamblea con la Junta Directiva de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, disculpándose el Presidente por no poder asistir.

Respecto de los colores de la portada del Boletín, con el fin de hacer previsiones de cartulina por parte de la imprenta, se decide seguir manteniendo el criterio de que cada numero tenga un color distinto.

6. Ruegos y preguntas No hubo.

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las doce y treinta y cinco minutos del día de la fecha arriba indicada.

Vº Bº El Presidente *El Secretario*

XLIII Olimpiada Matemática Española

Torrelodones es un municipio bastante peculiar. Seguramente es el único de España que tiene, además de las habituales escuelas de música y de danza, o de deportes, otra dedicada a que los niños hagan matemáticas. Es la Escuela municipal de Pensamiento Matemático Miguel de Guzmán, dirigida por José María López de Letona. No es entonces de extrañar que el Ayuntamiento se implicara de manera decisiva en la organización de la fase nacional de la olimpiada de este año 2007, acogiendo a los 119 chicos y chicas (más de los primeros que de las segundas) clasificados de todo el país, y a sus profesores. Como siempre, el programa resultó muy apretado, pero hubo ocasión de realizar algunos paseos por la sierra madrileña, de celebrar un seminario sobre resolución de problemas, y de ir a Madrid, para celebrar el acto de entrega de los premios de la primera fase en el Paraninfo de la Universidad Complutense.

Como de costumbre, se propusieron seis problemas, en dos sesiones de tres horas y media cada una en las mañanas del viernes 23 y el sábado 24. Estos fueron los problemas.

Fase nacional 2007 (Torrelodones)
Primera sesión (23 marzo)

Problema 1

Sean a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 cinco números positivos en progresión aritmética de razón *d*. Probar que

$$a_2^3 \leq \frac{1}{10}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right).$$

Media de todos: 5,43
Media Oros: 7

Problema 2

Determinar todos los posibles valores enteros no negativos que puede tomar la expresión

$$\frac{m^2+mn+n^2}{mn-1},$$

siendo m y n enteros no negativos tales que $mn \neq 1$.

Media de todos: 0,53
Media Oros: 0,67

Problema 3

Sea O el circuncentro de un triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple:

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc$$

Media de todos: 1,17
Media Oros: 6

Segunda sesión (24 marzo)

Problema 4

¿Cuáles son los números enteros positivos que se pueden obtener de exactamente 2007 maneras distintas, como la suma de al menos dos números enteros positivos consecutivos? ¿Cuál es el menor de todos ellos? Ejemplo: el número 9 se escribe exactamente de dos maneras distintas:

$$9 = 4 + 5$$
$$9 = 2 + 3 + 4$$

Media de todos: 0,27
Media Oros: 0,67

Problema 5

Sea $a \neq 1$ un número real positivo y n un entero positivo. Demostrar que

$$n^2 < \frac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2}.$$

Media de todos: 1,58
Media Oros: 6

Problema 6

Dada una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se considera una cuerda CD de longitud fija c. Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC. Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda CD sobre la semicircunferencia.

Media de todos: 1,59
Media Oros: 6,5

Las dos primeras medallas de oro fueron para Diego Izquierdo Arseguet, alumno de 1º de Bachillerato en el Liceo Francés de Madrid, se clasificó en primer lugar, empatado con Adrián Rodrigo Escudero, que estudia 2º de Bachillerato en el IES Elaios de Zaragoza.

Gabriel Fürstenheim Milerud (IES Ramiro de Maeztu, 1º de Bachillerato) y David Alfaya (IES José Luis Sanpedro de Tres Cantos, también de 1º de Bachillerato) obtuvieron también medallas de oro, clasificándose en los lugares cuarto y quinto respectivamente.

El equipo que participará en la próxima Olimpiada Internacional, que se celebrará en Hanoi (Vietnam) este mes de julio, se completa con el asturiano Daniel Remón Rodríguez (2º de Bachillerato en el IES Moreda de Aller), clasificado en el tercer puesto, y con Glenier Bello Burguet, el benjamín del equipo: estudia 4º de ESO en el IES Hermanos D'Elhuyar de Logroño.

Entre los estudiantes madrileños, además de Diego, Gabriel y David, obtuvieron Medalla de Plata Andrés Rodríguez Reina (estudia 1º de Bachillerato en el Colegio SEK -Ciudalcampo), Álvaro Mateos González (Liceo Francés) y Carlos Sánchez Ramírez (Colegio Nuestra Señora de las Maravillas). Estos dos últimos son de 2º de Bachillerato, al igual que que Manuel López Sheriff (Colegio Arturo Soria) y Teresa Rodrigo Rey (IES Príncipe Felipe). Completaba el equipo madrileño Pablo Portilla Cuadrado, del Colegio San Viator.

Como se ve, una excelente actuación, fruto del trabajo que realizan los sábados en la Facultad de Matemáticas de la UCM con la ayuda de los ex olímpicos Elisa Lorenzo, Maite Peña, Hugo Fernández, Javier de la Nuez, Javier Fresán, Luis Hernández…

María Gaspar Alonso-Vega

XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

La XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas se celebró entre los días 23 y 30 de septiembre de 2006 en Guayaquil (Ecuador). El equipo español se vio reducido a tres miembros. Razones médicas obligaron en el último momento a uno de los estudiantes a quedarse en casa. Acompañaron a los chicos los profesores José Aymerich Miralles (Universidad Jaume I de Castellón) y José Luis Díaz Barrero (Universidad Politécnica de Cataluña)

Los resultados de nuestros estudiantes fueron los siguientes:

Hugo Fernández Hervás, de Madrid, obtuvo Medalla de Oro, con 35 puntos, clasificándose en quinto lugar.

Xavier Ros Otón, de Barcelona, obtuvo 31 puntos y Medalla de Plata

Marc Viñals Pérez, de Gerona, obtuvo 23 puntos y Medalla de Bronce.

España no tenía medalla de oro en una iberoamericana desde 2001, año en que la obtuvo también Luis Hernández Corbato, cuando estudiaba 4º de ESO.

Problemas propuestos

Primer día (26 de septiembre de 2006)

Problema 1

En el triángulo escaleno *ABC*, con $A\hat{B}C = 90^{\circ}$, se consideran las circunferencias inscrita y circunscrita. La recta tangente en *A* a la circunferencia circunscrita corta a la recta *BC* en *M.* Sean *S* y *R* los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos *AC* y *AB* respectivamente. La recta *RS* corta a la recta *BC* en *N*. Las rectas *AM* y *SR* se cortan en *U*. Demuestre que el triángulo *UMN* es isósceles.

Problema 2

Se consideran *n* números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no necesariamente distintos. Sea d la diferencia entre el mayor y el menor de ellos, y sea $s = \sum_{i<j} \left| a_i - a_j \right|$. Demuestre

que $(n-1)d \le s \le \dfrac{n^2 d}{4}$

Problema 3

Los números 1,2,3, ….. ,n^2 se colocan en las casillas de una cuadrícula n x n, en algún orden, un número por casilla. Una ficha se encuentra inicialmente en la casilla con el número n^2. En cada paso, la ficha puede avanzar a cualquiera de las casillas que comparten un lado con la casilla donde se encuentra. Primero, la ficha viaja a la casilla con el número 1, y para ello toma uno de los caminos más cortos (con menos pasos) entre la casilla con el número n^2 y la casilla con el número 1. Desde la casilla con el número 1 viaja a la casilla con el número 2, desde allí a la casilla con el número 3, y así sucesivamente, hasta que regresa a la casilla inicial, tomando en cada uno de sus viajes el camino más corto. El recorrido completo le toma a la ficha N pasos. Determine el menor y el valor mayor posible de N.

Segundo día (27 de septiembre de 2006)

Problema 4

Determine todas las parejas (a , b) de enteros positivos tales que $2a+1$ y $2b-1$ sean primos relativos y $a + b$ divida a $4ab+1$

Problema 5

Dada una circunferencia e**,** considere el cuadrilátero $ABCD$ con sus cuatro lados tangentes a e, con AD tangente a e en P y CD tangente a e en Q. Sean X e Y los puntos donde BD corta a e, y M el punto medio de XY. Demuestre que

$$A\hat{M}P = C\hat{M}Q\,.$$

Problema 6

Sea $n > 1$ un entero impar. Sean P_0 y P_1 dos vértices consecutivos de un polígono regular de n lados. Para cada $k \ge 2$, se define P_k como el vértice del polígono dado que se encuentra en la mediatriz de P_{k-1} y P_{k-2}. Determine para qué valores de n la sucesión $P_0, P_1, P_2, ...$ recorre todos los vértices del polígono.

XI Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

¿Para cuántos valores enteros de n *resulta ser* $4^{\frac{n-1}{n+1}}$ *también entero?*

A) *1* ***B)*** *2* ***C)*** *3* ***D)*** *4* ***E)*** *5*

Con esta pregunta se encontraron algunos de los 2.700 estudiantes que acudieron la mañana del sábado 21 de abril a la segunda fase del XI Concurso de Primavera de Matemáticas celebrado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

El Concurso tiene una dinámica muy sencilla. Previamente se realiza una primera fase que sirve para seleccionar a los estudiantes que acudirán a la segunda fase.

La primera fase tiene lugar en los centros educativos (este año han participado 25.000 alumnos de 350 centros de la Comunidad de Madrid) y la prueba consta de 25 problemas de opción múltiple. Hay cuatro niveles distintos: 5º y 6º de Primaria; 1º y 2º de ESO; 3º y 4º de ESO; 1º y 2º de Bachillerato. Cada centro elige a los estudiantes que irán a la final de Primavera.

La segunda fase tiene el mismo formato que la anterior y se realiza siempre un sábado por la mañana en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Esta convocatoria, con 2.700 participantes, hemos batido todas las marcas anteriores y estamos dispuestos a seguir superándolas.

Para los organizadores de este Concurso nos es muy fácil seguir adelante. Basta ver la ilusión y el esfuerzo con los que los alumnos viven esta experiencia; cómo se enfrentan a los retos matemáticos; cómo se desesperan, sonríen, se enfadan; cómo se explican los problemas unos a otros; cómo preguntan a sus profesores; cómo miran a sus padres.

Alumnos ganadores del XI Concurso de Primavera

Primer nivel *(5º y 6º de Primaria)*

Empatados en el primer lugar:
Guillermo Pascual Pérez (5º de Primaria, Colegio Fray Luis de León)
Javier Cortázar Hernando (6º de Primaria, CEIP Joaquín Costa)
Paula Sardinero Meirá (6º de Primaria, Colegio Virgen de Europa)

Segundo nivel *(1º y 2º de ESO)*

1.- Pablo Boixeda Álvarez (2º de ESO, Colegio Alemán de Madrid)
2.- Eric García de Ceca Elejoste (1º de ESO, Colegio Bérriz)
Alberto González Fernández (2º de ESO, Colegio Joyfe)

Tercer nivel *(3º y 4º de ESO)*

1.- Rubén Jiménez Benito (4º de ESO, IES José Hierro de Getafe)
Empatados en segundo lugar:
2.- Santiago Cubillo Esteban (3º de ESO, Colegio El Prado)
2.- Moisés Herradón Cueto (3º de ESO, Colegio Brains)

Cuarto nivel *(1º y 2º de Bachillerato)*

1.- Manuel López Sheriff (2º de Bachillerato, Colegio Arturo Soria)
Empatados en segundo lugar:
2.- Gabriel Fürstenheim Milerud (1º de Bachillerato, IES Ramiro de Maeztu)
2.- Diego Izquierdo Arseguet (1º de Bachillerato, Liceo Francés de Madrid)

Esteban Serrano Marugán
Comité organizador del Concurso de Primavera

In Memoriam:
Excmo. Sr. D. Baltasar Rodríguez-Salinas Palero

(30/12/1925 - 14/2/2007)

El 14 de Febrero de 2007 fallecía en Madrid, tras un rápido empeoramiento en su ya delicado estado de salud, el Profesor D. Baltasar Rodríguez-Salinas Palero.

Nacido en Alcalá de Henares en 1925 en el seno de una familia muy conocida en la localidad, el Profesor Rodríguez-Salinas cursó sus estudios de bachillerato en el Instituto de Enseñanza Media de la ciudad, en donde pronto destacó por sus excepcionales dotes para las matemáticas. A esa época se remonta su primera publicación en Matemáticas, aparecida en el volumen del año 1942 de la revista Euclides. Apercibido de las cualidades de su alumno, fue su profesor de Matemáticas, D. Leoncio González Calzada, quien le animó a dedicarse a esta disciplina y le puso en contacto con algunos profesores de la Universidad Central de Madrid (la actual Universidad Complutense), como D. Esteban Terradas, D. Pedro Pineda, D. Tomás Rodríguez Bachiller y D. Sixto Ríos. Allí fue donde realizó los estudios de Licenciatura en Ciencias y Doctorado, con las máximas calificaciones, obteniendo también los Premios Extraordinarios de Licenciatura (1948) y Doctorado (1954).

En 1951 D. Baltasar realizó una estancia de investigación de seis meses en el Instituto Matemático *Ulisse Dini* de Florencia, bajo la dirección del Profesor Giovanni Sansone durante la cual encarriló decisivamente su Tesis Doctoral, que presentó en Madrid bajo el auspicio del Profesor D. Tomás Rodríguez Bachiller. Siempre guardó un gratísimo recuerdo de esta estancia en Italia, hasta el punto de repetir la visita (esta vez por tres meses) en el año 1959, pensionado por la Comisaría de Protección Escolar y Asistencia Social.

En 1953 ingresa por concurso en el Cuerpo de Ingenieros Geógrafos, y el año siguiente obtiene la cátedra de Análisis Matemático de la Universidad de Zaragoza. Comienza entonces una intensa actividad docente, investigadora y formativa, lo que le hace solicitar la excedencia como Ingeniero Geógrafo en 1955. Su interés inagotable por todos los aspectos de las matemáticas queda bien de manifiesto en este periodo, en el que imparte clases de Análisis Matemático 4º y 5º, Cálculo de Probabilidades y Estadística, Topología y Física Matemática, entre otras, y cursos de Doctorado que van desde el Análisis Funcional, los Grupos de Lie y la Teoría de Haces hasta la Teoría de la Medida y la Teoría de Distribuciones.

Durante su estancia en Zaragoza, fue elegido miembro de La Academia de Ciencias de esa ciudad, leyendo su discurso de ingreso en 1965. En 1970 se incorporó a la Universidad Complutense, en donde permaneció hasta su jubilación en 1991, aunque continuó en la misma institución como Profesor Emérito. En febrero de 1975 es elegido Académico de Número de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, leyendo su discurso de ingreso el 19 de Mayo de 1976, que versó sobre *Medidas en espacios topológicos.*

D. Baltasar desarrolló una gran actividad investigadora, recogida en más de doscientas publicaciones, que abarcan todo un abanico de ramas de la Matemática. Realizó contribuciones importantes en Ecuaciones Diferenciales, Teoría de la Aproximación, Transformada de Laplace, Extensión de Aplicaciones Lineales, Teoría de la Medida y de la Integral, Análisis de Variable Compleja, Análisis Funcional, etc., incluyendo trabajos de Álgebra, Geometría Proyectiva, Economía Matemática, Análisis de Fourier y Oceanografía.

En su conferencia "*Sobre una selección de trabajos del Profesor Rodríguez-Salinas*", pronunciada en el encuentro homenaje celebrado en Ávila con motivo del septuagésimo aniversario de D. Baltasar, el Profesor John Horvath afirma, refiriéndose al Profesor Rodríguez-Salinas, que "sería imposible relatar en un curso de un año de duración, todos los bellos resultados con los que él ha enriquecido las matemáticas...".

Durante su vida profesional ocupó distintos cargos de responsabilidad, aunque nunca fue demasiado amigo de las actividades de gestión. Entre otros, desempeñó los puestos de director del Departamento de Teoría de Funciones en las Universidades de Zaragoza y Madrid, decano de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y jefe de la Sección de Análisis Matemático del Instituto J*orge Juan* de Matemáticas del C.S.I.C. Era también miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Lisboa desde 1976.

El Profesor Rodríguez-Salinas ha sido uno de los principales impulsores del desarrollo del Análisis Matemático en nuestro país. En 1960 tuvo lugar la defensa de la primera de las 21 Tesis Doctorales que dirigió, inaugurando una fecunda labor de magisterio en la investigación en un período difícil, de gran aislamiento científico, con escasez de medios y en un país con poca tradición investigadora. A lo largo de su vida orientó a gran número de alumnos por el difícil camino de la investigación en matemáticas. Muchos de sus discípulos ocupan hoy puestos de Profesores en diversas Universidades de nuestro país.

D. Baltasar era un apasionado de las Matemáticas y tenía una curiosidad inagotable. Era sorprendente su habilidad para asimilar rápidamente nuevas técnicas y teorías, que incorporaba rápidamente a su quehacer investigador. Muestra de ello es la variedad de temas que abordó en sus publicaciones científicas. Y además era tremendamente generoso al compartir sus conocimientos y resultados con sus discípulos, a los que lograba transmitir su entusiasmo y dedicación. Nosotros, como discípulos suyos, hemos experimentado también, junto a todos los demás, esa evolución en la relación con D. Baltasar, que hacía que el respeto y admiración iniciales se trocaran con el tiempo en un cariño entrañable.

En sus palabras de despedida con motivo del homenaje que se le tributó en diciembre de 1985 por su sexagésimo cumpleaños se puede apreciar la importancia que daba D. Baltasar a su trabajo y a la relación con sus discípulos:

> *"Queridos amigos: comenzamos ayer, aunque comenzamos hace mucho tiempo, y no terminamos hoy porque continuaremos trabajando hasta cuando Dios quiera. Mi júbilo es éste y no otro [...] Os he enseñado lo que sé y no os he ocultado nada. También me he enriquecido con vosotros, pues no he desdeñado lo que me habéis enseñado, que ha sido mucho. Mi pecado consiste en mi orgullo de haberos transmitido mi entusiasmo por la Matemática..."*

Y más adelante, en su discurso de agradecimiento en el encuentro homenaje, anteriormente mencionado, celebrado en su honor en Ávila en 1995, con motivo de su 70 cumpleaños, dijo:

> *"...me dais la ocasión para que ofrezca mi homenaje particular a todos los que han sido olvidados y han pasado la antorcha de la ciencia de unos a otros. Esta es nuestra misión: pasar la antorcha de unos a otros con una luz cada vez más intensa..."*

D. Baltasar tuvo la suerte de contar a su lado con la presencia constante de su esposa, Da. Isabel Alaejos, ayuda y soporte para todas las actividades cotidianas. Así lo reconoció D. Baltasar en el homenaje citado anteriormente, cuando al finalizar su discurso de agradecimiento manifestó:

> *"...quiero destacar el papel que ha desempeñado una persona muy próxima a mí. Me refiero naturalmente a mi mujer Isabel, que tantas ayudas y cuidados me ha dedicado [...] La he tenido siempre a mi lado cuando me ha hecho falta pero se ha retirado discretamente cuando he tenido que trabajar. Más amor y discreción no cabe. Isabel: muchas gracias. De todo esto se sigue que si no he hecho más ha sido por mi culpa."*

El Profesor Rodríguez-Salinas se interesó además por otras muchas cuestiones, entre otras, por cuestiones de Física, de Historia de la Ciencia, de Filosofía y especialmente de Teología, materia ésta última, que le apasionó hasta el final de sus días, llevado por su interés en profundizar en el conocimiento de Dios, con el deseo de que su vida y sus obras fuesen siempre "A la Mayor Gloria de Dios", lema de su vida, con el que inició su tesis doctoral en Matemáticas y finalizó su Discurso de Ingreso en esta Real Academia.

El pasado 14 de Febrero, D. Baltasar Rodríguez Salinas nace a la Vida, a esa vida con mayúsculas, en la que él creyó, y en la que se ha fundido en un abrazo eterno con ese Dios que es Amor y al que él amó profundamente.

En uno de los escritos de D. Baltasar se puede leer:

> *"Aquí estamos. Venimos del infinito y vamos al infinito. Bien hemos dicho, porque Dios es infinito [...] Somos nada y por ello debemos procurar ser todo lo más grande que podamos."*

D. Baltasar ha llegado ya a ese infinito del que, como él mismo dice, venimos y vamos, y en él que ya se habrán desvelado todos los misterios que tanto le fascinaban.

Fernando Bombal Gordón
y Pedro Jiménez Guerra

Federico Gaeta (1923–2007), in memoriam

El profesor Gaeta se trasladó a la Universidad Complutense en el curso 1982/83. Venía de la Universidad de Barcelona, en la que había sido catedrático desde 1978. En Madrid se hizo cargo de la asignatura Geometría IV, perteneciente a la especialidad de Matemática Fundamental de la Licenciatura de Matemáticas vigente entonces.

Los estudiantes que nos habíamos matriculado aquel año en Geometría IV nos encontramos con un profesor muy diferente a los demás docentes que habíamos tenido y ante el cual surgía de inmediato la curiosidad por saber más de él y de su historia.

Pronto supimos que en los años 45-50 había sido ayudante en la Complutense y a la vez había estado en Roma para ser estudiante de Severi y poder completar así su tesis doctoral, cuyo director en España fue Germán Ancoechea.

A los que estábamos ya interesados en estudiar Geometría Algebraica más profundamente, esa conexión directa con los geómetras algebraicos italianos nos llamó la atención, sobre todo cuando en sus clases hacía referencia a conceptos y resultados que entroncaban con aquella época y que entonces apenas entendíamos. Con los años he podido valorar mejor la importancia de sus clases, impartidas de modo nada convencional pero abundantes en ideas geométricas de gran trascendencia.

El profesor Gaeta obtuvo una cátedra en la Universidad de Zaragoza en 1952; en el año 1957, decide abandonar España (se ha relacionado esta decisión con la condena a Tierno Galván por cuestiones políticas) y pasa varios años en universidades de Argentina, Brasil y Venezuela antes de establecerse ya de modo más permanente en la State University of New York at Buffalo, en Estados Unidos. Allí estuvo, junto a su familia hasta 1978, cuando decidió volver a España.

Su carácter, difícil y polémico, dificultó y oscureció con frecuencia su formidable dedicación a las Matemáticas. Durante los últimos años su salud se fue deteriorando hasta su fallecimiento el 7 del pasado mes de abril. Lejos ya de los conflictos que llevaron su nombre a muchas conversaciones y columnas de periódicos, podemos y debemos valorar su figura como un científico de obligada mención en la historia de las Matemáticas en España.

Su primera etapa investigadora (pensemos que entonces las dificultades para investigar en el extranjero eran mayores que hoy en las universidades españolas) ha sido la que más impacto ha dejado en la Geometría Algebraica. Sus trabajos sobre la teoría de “liaison” son citados entre las fuentes clásicas de esta rama de investigación que sigue teniendo mucha actualidad y se ha generalizado a contextos mucho más amplios.

El teorema más importante caracteriza a las curvas aritméticamente normales como las que están ligadas a una intersección completa: Las primeras son curvas para las que se pueden estudiar con más facilidad las superficies que las contienen, cuestión importante para la clasificación de las curvas algebraicas. Las segundas son curvas que se obtienen al intersecar dos superficies y por tanto tienen también muy buenas propiedades. Dos curvas que forman la intersección completa de dos superficies están ligadas elementalmente. Gaeta demostró que mediante una serie de ligaduras elementales podemos pasar de una curva aritméticamente normal a una intersección completa y este resultado caracteriza al primer tipo de curvas.

Por sus investigaciones sobre la teoría de “liaison” y otros problemas clásicos, como por ejemplo, las formas asociadas a variedades algebraicas, Federico Gaeta pudo comprobar con orgullo que era el único español citado en las listas de referencias de libros tan importantes como “Intersection Theory” de W. Fulton (1984) o “Commutative Algebra with a view Toward Algebraic Geometry” de D. Eisenbud (1994).

En etapas posteriores de su vida académica publicó varios artículos relacionados con el Problema de Riemann – Schottky, funciones theta, problemas de eliminación o teoría de invariantes.

No tuvo pereza para viajar y asistir a congresos, hasta el final siguió trabajando y procurando estar al día de los avances más recientes de las Matemáticas, sobre todo en los temas que mejor conocía. Su biblioteca particular es una recopilación valiosísima de libros y artículos que marcan la trayectoria de una persona dedicada a la investigación.

Federico Gaeta no dirigió ninguna tesis doctoral y en ese sentido los que hoy nos referimos a él somos sus “alumnos indirectos”, que coincidimos con él durante su estancia, ya de senior, en las universidades de Barcelona y Complutense. Nos queda su investigación y la referencia de una persona dedicada con vocación inequívoca a la ciencia matemática.

Descanse en paz.

Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro
Profesora Titular del Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM

Acciones Formativas de Posgrado en Educacion Matematica

Curso 2007-08

Organizadas por la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid

Directora: Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro (Departamento de Álgebra)

Se ofrecerán cursos de 30 horas (3 créditos) para licenciados en Matemáticas o una carrera técnica o de Ciencias. Previa petición a la directora de los cursos se podrán autorizar otras situaciones.

El objetivo general es la actualización científica y didáctica de licenciados, que en su mayoría son profesores de Enseñanza Secundaria y Bachillerato o van a serlo en un futuro próximo.

Durante los meses de julio y agosto aparecerá información detallada sobre horarios, contenidos, plazo de matrícula etc. en la página `www.mat.ucm.es`

He aquí un primer avance de los cursos que se ofrecerán:

1. Las Matemáticas en Secundaria: un enfoque distinto del habitual. *Joaquín Hernández* (IES "San Juan Bautista" y UCM)
2. Introducción a la Filosofía de la Ciencia y a la Teoría de la Relatividad. *José Mendoza* (UCM) y *Eduardo Aguirre* (UCM)
3. Aplicaciones informáticas para la interiorización de la Matemática en la Enseñanza Secundaria. *Francisco Javier Crespo* (UCM) e *Ignacio Fábregas* (UCM)
4. Estadística y Probabilidad. *María Jesús Ríos* (UCM)
5. Problemas de Máximos y Mínimos: una aproximación a la investigación operativa. *Teresa Ortuño* (UCM) y *Begoña Vitoriano* (UCM)

6. Sistema GPS: Fundamentos matemáticos y aplicaciones prácticas. *Gracia Rodríguez* (UCM)
7. Algunas cuestiones de geometría: estudio y representación de curvas planas. *Domingo García* (UCM)
8. Resolución de problemas y competencias básicas. *Inés Gómez Chacón* (UCM)

Los distintos usos de la palabra "espacio"

Julio Fernández Biarge
Profesor emérito de la Universidad Politécnica de Madrid
jfbiarge@telefonica.net

Abstract

The use of the word "space" with different meanings has caused many misunderstandings, among them to some groundless critics to the philosophy of Kant. In this article we analyze the different meanings of the word "space" used in the development of the sciences.

1. Los variados significados de la palabra "espacio"

En este mismo Boletín publiqué un artículo titulado *"¿Geometría del Espacio?"* [1], en el que los signos de interrogación eran indicativos de la ambigüedad que encerraba la palabra "espacio". Ahora insistiré en la confusión que se da frecuentemente entre las distintas acepciones que cabe distinguir en esa palabra, con resultados muy lamentables. Es realmente desalentador tratar de encontrar alguna ayuda consultando en el diccionario de la RAE las palabras "espacio" o "geometría". Sería deseable disponer de palabras distintas para los distintos conceptos a que hacemos referencia cuando hablamos de "espacio", pero me abstendré de proponer neologismos que tendrían remotas posibilidades de ser adoptados. En este artículo, me limitaré a anteponer una letra a la palabra, que distinga sus distintos usos.

Así, llamaré *G-espacios* a los utilizados por los geómetras griegos, especialmente a partir de Euclídes, *K-espacios* a los empleados por Kant en su crítica de la razón pura [3], *M-espacios* a los variadísimos espacios definidos libremente y estudiados por los matemáticos y *F-espacios* a los empleados como base para desarrollar las distintas teorías físicas. Nos referiremos a los lamentables malentendidos que han surgido en la historia al confundir unos y otros.

2. El espacio de los geómetras griegos, desde Euclides

Euclides fue el primero en crear un M-espacio, con su construcción axiomática de la Geometría: el "espacio euclídeo". No caeremos en la torpeza de criticar, a la luz de los conocimientos actuales, las definiciones y demostraciones que dan lugar a su geometría. Pero, en cambio, resaltaremos un hecho, que para muchos será sorprendente: *¡El G-espacio que los griegos utilizaron a partir de Euclídes no era euclídeo!*. Aclararemos esta afirmación. La geometría de Euclides, era una construcción abstracta en la que cabía la medición de una longitud, tomando otra como unidad. Incluso cabía definir un "compás abstracto", que permitía "transportar" longitudes y también "trazar" circunferencias. Pero para los geómetras griegos, Euclides incluido, esa geometría iba acompañada de una fe absoluta en que sus resultados se referían a propiedades reales de figuras trazadas en la superficie de una piedra pulimentada o en otro medio, usando reglas, escuadras y compases materiales reales, no abstractos y, en definitiva, en que en esas figuras se podía "meter la mano o el pié" e incluso utilizar estas extremidades para introducir unas unidades (podrían ser pulgadas, codos o pies), que de ninguna manera podrían ser definidas en forma abstracta a partir de los postulados de Euclides.

Los griegos sabían muy bien que su geometría era una abstracción de las groseras figuras que eran capaces de dibujar; en esa abstracción se eliminaba el grosor de los puntos, el espesor de las líneas, etc. (se podía "razonar bien sobre figuras mal hechas"), pero estaban absolutamente convencidos de que sus postulados hacían referencia a propiedades de los objetos materiales y de que el razonamiento lógico aplicado a ellos, conducía a conclusiones comprobables en esos mismos objetos materiales. Pero en la geometría construida a partir de los postulados de Euclides no se podía hablar de "un cuadrado de un estadio de lado", si previamente no se había introducido un "segmento de un estadio" en el espacio.

Pero debemos notar que una geometría euclídea en la que se ha añadido una unidad de medida extrínseca, deja de ser euclídea. El M-espacio euclídeo admite un grupo de transformaciones de semejanza que se pierde en cuanto se introduce una unidad de medida. Es interesante recordar el hecho bien conocido de que en el espacio euclídeo no es preciso introducir una unidad extrínseca de medidas angulares, pues un llano o un recto pueden definirse dentro de la propia geometría, pero esto no ocurre con las medidas lineales. Llegamos así a la conclusión de que el G-espacio no coincide con el M-espacio euclídeo, sino con el que resulta de introduir en éste una unidad extrínseca de medida.

Durante siglos se estuvo utilizando exclusivamente, en todas las aplicaciones, este G-espacio, por supuesto que como algo inseparable del paradigma vigente, que no era sometido a discusión. Normalmente, además, se olvidaba su diferencia con el único M-espacio conocido, que era el euclídeo. La incipiente Física desarrollada por los científicos (Aristóteles, Arquímedes,...) tenía sus leyes expresadas con auxilio de longitudes, volúmenes, etc., tomados del G-espacio. La concepción atómica de la naturaleza, sostenida por Demócrito, estaba desarrollada en el G-espacio y en ella era imprescindible apartarse del M-espacio euclídeo, pues la misma estructura atómica establecía una unidad natural de medida, de tal modo, que no eran concebibles átomos de tamaños arbitrarios. Las medidas se efectuaban con "sólidos rígidos", cuyo tamaño quedaba determinado por un cierto número de átomos. El F-espacio requerido para el desarrollo de su Física, no era otro que el G-espacio.

Descartes introdujo el método de las coordenadas o geometría analítica, pero sin que por ello quedase ampliado el repertorio de M-espacios, ya que su geometría analítica era estrictamente euclídea. El método era inmediatamente aplicable al G-espacio, con sólo adoptar una unidad de medida. No obstante, Descartes dejó la puerta abierta para considerar espacios euclídeos de más de tres dimensiones, cuyas propiedades podían estudiarse con facilidad. Ello fue motivo de sorpresa. ¿por qué el espacio euclídeo de 3 dimensiones tenía su "realización" en la naturaleza y el de 4, igualmente perfecto en su construcción matemática, no? No hubo tiempo para que este problema hiciese cambiar los planteamientos científicos generales, pues pronto se acumularon otros hechos más preocupantes todavía.

3. El espacio "a priori" de Kant

En el siglo XVIII, Kant razonó maravillosamente sobre las ideas que subyacían a la de "espacio". Para Kant, el espacio *"es una necesaria representación a priori que sirve de base a todas las representaciones"* y dice también: *"el espacio no representa ninguna propiedad inherente a los objetos mismos"*. El espacio constituye un conocimiento a priori mediante el cual el hombre puede tener percepciones externas: éstas *"presuponen el espacio, no lo crean"*.

Llamaremos K-espacio a este "espacio" de que nos habla Kant. Por supuesto que él lo identificó con el que nosotros hemos llamado G-espacio, por la sencilla razón de que no podía conocer otro. Más que identificarlo explícitamente, podríamos decir que "lo confundió" con él. De los axiomas de Euclides, dice que *“son principios sintéticos a priori, puesto que son inmediatamente ciertos”.* Tomadas estas palabras en el sentido que les damos hoy día, esta afirmación es una insensatez y esto ha motivado una fuente de críticas a la filosofía de Kant, que no afectan a lo fundamental de sus ideas, sino a la injustificada identificación del K-espacio con el G-espacio.

No se le escapó a Kant, en cambio, la dificultad planteada por los espacios euclídeos de más de tres dimensiones. Pero en sus *Prolegómenos* [2], dice *“Que todo el espacio tiene tres dimensiones y que, en absoluto, no puede tener más, será construido sobre el juicio de que sobre un punto no puede trazarse más que tres líneas en ángulo recto, pero esta proposición no puede ser probada por conceptos, sino que se funda inmediatamente en la intuición, y en la intuición pura a priori, porque es apodícticamente cierta.”*

No debemos confundir este K-espacio con el F-espacio de las teorías físicas aceptadas por Kant. Cuando él afirma que este K-espacio es “a priori”, tampoco asegura que esté codificado en nuestros genes; simplemente que es anterior *lógicamente* a la misma creación de las categorías, incluida la consideración de “objetos” o “cosas”, que han de servir para formular las leyes sobre ellas que han de constituir una teoría física. Este K-espacio tiene ciertas características como las de ser contínuo, homogéneo, isótropo, metrizable (en cierto sentido que no hay que confundir con el que las matemáticas dan a éstas), tridimensional e ilimitado (no confundir esta característica de carecer de límites con la de ser infinito, como se ha hecho repetidas veces en la historia). Sería interesante un estudio más profundo de este espacio, pero, desde luego no tiene por qué ser identificado inmediatamente con el G-espacio.

Mayor conmoción que la consideración de los espacios de más de tres dimensiones, causó la introducción entre los M-espacios de los correspondientes a las geometrías no euclídeas. Estaban tan sólidamente construidos, desde el punto de vista lógico, como el euclídeo, pero eran incompatibles con él. Los que entendieron que el K-espacio estaba identificado inevitablemente con el euclídeo, anunciaron el fracaso de la crítica de Kant. Los que aceptaban que el F-espacio de la Física aceptada era el euclídeo, o su derivado G-espacio, se vieron obligados a cuestionarlo e incluso a diseñar procedimientos experimentales que lo justificasen o falsasen.

4. La determinación experimental de la naturaleza del espacio

Lo más grave era que había muchos espacios no euclídeos diferentes. Entre ellos, los más sencillos, que hoy designaríamos como de curvatura constante, se podían clasificar en elípticos e hiperbólicos. ¿Podría diseñarse algún experimento que determinase si el F-espacio en cuya teoría física se llevase a cabo, era de uno de esos dos tipos o bien euclídeo? En teoría, sí: para la física dominada por la mecánica de Newton, el F-espacio adoptado era simplemente el G-espacio. En él se pueden considerar triángulos definidos por tres puntos de objetos materiales reales y se pueden medir sus ángulos; si el espacio es euclídeo, la suma de esos ángulos será de dos rectos, si es elíptico, será menor y si es hiperbólico, mayor.

Pero las cosas se complican; en realidad no hay tres opciones entre las que deba elegirse una, sino una infinidad, en la que hay espacios elípticos e hiperbólicos que, en una región limitada, se asemejan a uno euclídeo tanto como se desee. Como la región en que podemos realizar las mediciones es efectivamente muy limitada, y la precisión con que podemos realizarlas también lo es, una decisión que aparentemente confirme que es euclídeo, no es concluyente.

A primera vista, parece que si se obtiene una suma que coincide con los dos rectos dentro de los límites de error de nuestros instrumentos, podemos afirmar que el F-espacio es "casi euclídeo" y olvidar el "casi", siempre que no nos salgamos de la región limitada en que hacemos las mediciones. Ello es cierto, pero nos impide aplicar con seguridad a nuestro F-espacio, atributos que conocemos del euclídeo, como el de ser infinito.

En la primera mitad del siglo XIX, Gauss intentó llevar a cabo la experiencia, midiendo los ángulos del triángulo (plano) determinado por tres cumbres del macizo de Harz, en el norte de Alemania. El resultado fue que la suma de los tres ángulos coincidía con el valor de dos rectos dentro de los límites de error de los aparatos empleados para las mediciones. Claro que la medida, realizada con métodos geodésicos, no podía ser absolutamente directa, sino auxiliada con razonamientos basados en la geometría euclídea. Ello hizo que el experimento no fuese debidamente entendido y que sufriese críticas que se han prolongado hasta hoy, llegando a decirse que no sólo no probaba nada, sino que no podía hacerlo. En el reciente artículo de Erhard Scholz [4], se hace un esclarecedor y brillante análisis de esas experiencias y de la tortuosa historia de su interpretación posterior.

5. ¿Existe una unidad "intrínseca" de medida?

Considerados los M-espacios eucídeo, elíptico e hiperbólico, la decisión sobre si el F-espacio en el que realizamos nuestras mediciones debe asimilarse a alguno de ellos, tiene consecuencias importantes desde el punto de vista de los fundamentos, ya que el euclídeo es el único en el que no es posible definir una unidad de medida intrínseca para las longitudes (como sí se hace para los ángulos); tanto en los elípticos como en los hiperbólicos (de curvatura constante) queda definida una unidad que, en una interpretación conveniente, se asimila al radio de curvatura del espacio. En esas geometrías no existen transformaciones que jueguen un papel análogo al de las semejanzas en la euclídea.

Resulta así, como dije en el citado artículo [1], que *la geometría euclídea es la menos adecuada para la descripción del mundo físico*, ya que éste se caracteriza por tener en cualquier punto, un "patrón" que determina el tamaño de las partículas elementales, de los átomos y de las moléculas y es esto lo que permite la consideración de "sólidos rígidos", con los que llevar a cabo físicamente las mediciones.

6. La existencia del espacio

La física en la que Newton vino a poner orden por medio de las matemáticas, que él mismo contribuyó a crear, se desarrolló durante siglos en el G-espacio, o sea en un espacio creado con los axiomas de Euclídes, en el que se introduce una unidad de medida inalterable. Es decir, hasta el siglo XX, el F-espacio de las teorías físicas era simplemente el G-espacio. Esto llevaba al convencimiento de que el G-espacio "existía" y en él se desarrollaban los fenómenos que estudiaba la física.

La "existencia" de ese espacio no es un concepto claro. Sobre el uso en las ciencias de la palabra "existir" tiene unos inteligentísimos comentarios Eddington en su libro *"La Filosofía de la Ciencia Física"* (Capítulo X: El concepto de existencia) [5] en el que comienza declarando: *"Me resulta difícil entender libros de Filosofía porque en ellos se habla mucho de la existencia y no sé lo que se quiere decir con eso. ..."*. No sabría hacer un análisis más brillante de lo que suponen las afirmaciones científicas sobre existencia de la que sigue a las palabras citadas.

En cualquier caso, ya Kant nos previene contra la aceptación de la existencia del G-espacio como un resultado experimental. La discusión sobre si el espacio es euclídeo o no, no atañe al K-espacio. En el libro *"Kant y la Matemática",* de Lorenzo [6] arroja mucha claridad sobre el tema. Dice, por ejemplo: *"..podría argumentarse* *que Kant no dota de estructura a dicho espacio, por lo cual el espacio, en esa forma pura, ni es métrico euclídeo ni métrico no-euclídeo, ni siquiera métrico o no métrico. ...*[el espacio] *no es un concepto sino una forma de intuición ...".*

Cada nueva teoría física introduce su propio F-espacio y suele decirse que los fenómenos ocurren "en" ese espacio, estableciendo implícitamente la "existencia" previa de ese espacio. Es simplemente un modo de hablar. Sería más apropiado decir que la teoría explica o describe los fenómenos valiéndose de ese espacio, sin implicaciones ontológicas. Así, si aceptamos determinada teoría de cuerdas y decimos que "el espacio tiene 11 dimensiones", queremos decir simplemente que la teoría se formula haciendo uso de un F-espacio de 11 dimensiones.

Los que sostienen una concepción platónica de las matemáticas, pensando que éstas no se crean, sino que se van descubriendo en un mundo "platónico" en el que eran pre-existentes, entienden un tipo de "existencia" distinto de aquel a que se refieren, en forma algo confusa, los físicos, para sus F-espacios. En realidad, todos los M-espacios tienen cabida en el mundo platónico para los partidarios de éste, pero sólo algunos son seleccionados como F-espacios por los físicos.

Sobre esta última cuestión, son muy esclarecedores las consideraciones contenidas en los libros de *Roger Penrose*, especialmente los [7] (Capítulos 5 y 10) y [8] (Capítulo 1).

Insistiendo en el riesgo de atribuir existencia a un F-espacio, sólo porque resulte satisfactorio su uso en la teoría física que se acepta, podemos considerar un ejemplo: si para una teoría física resulta adecuado el G-espacio, aceptamos la validez de la geometría métrica euclídea (con una unidad de medida) para desarrollarla; pero es sabido que la geometría proyectiva tridimensional, mediante la selección de un "plano impropio" y un "círculo absoluto" da lugar a una geometría cuyos elementos "propios" constituyen un espacio euclídeo. Una física que se desarrolla en el G-espacio, podría desarrollarse exactamente igual en el espacio proyectivo antedicho (con la selección conveniente del plano impropio, del círculo absoluto y de la unidad de medida) y no por ello deduciríamos la "existencia" de los puntos del infinito y del imaginario circulo absoluto.

Nos puede parecer deseable terminar de una vez con estas elucubraciones, averiguando cual es el espacio de la realidad en que vivimos, al que podríamos llamar *R-espacio*, pero no vemos cómo podríamos hacerlo. ¿Habría que someterlo a la experiencia? Pero las experiencias, sólo pueden concebirse dentro de una teoría física previamente aceptada, y entonces se trataría de uno de los F-espacios considerados. Por muy convencidos de la bondad de una teoría física determinada hay que ser muy cautos a la hora de atribuir a su F-espacio el calificativo de real y a sus elementos el atributo de "existentes".

7. El tiempo

Difícilmente se puede encontrar un concepto más escurridizo que el de "tiempo". Para Kant se trataba de otra de las intuiciones puras (podíamos hablar del K-tiempo), pero su intento de relacionarlo con las sucesiones de las matemáticas o con la aritmética de los números naturales, no hace hoy sino desconcertarnos.

Para el espacio (concretamente para el G-espacio y para los F-espacios hasta el siglo XIX), conseguimos llegar a los conceptos de medición y de unidad de medida, y materializarlos mediante el uso de "sólidos rígidos" y de "patrón", hasta el punto de convertir la longitud en una magnitud. En cambio, para el tiempo no disponemos de nada que nos permita "transportar" un intervalo de tiempo hacia otro del pasado o del porvenir, para compararlo con él, o materializar un patrón de tiempo para conservarlo en París, en la Oficina de Pesas y Medidas. No sabemos "sumar" intervalos de tiempo no consecutivos. Lo que llamamos medida del tiempo se basa en una "regularidad" observada (aunque difícil de definir sin caer en círculos viciosos) de ciertos fenómenos físicos y en la confianza en que sabemos apreciar la "simultaneidad" de los acontecimientos que tratamos de estudiar con otros de los que se muestran regulares. No se trata, por tanto, de la medida de una magnitud, sino de la comparación con una escala, ofrecida por alguna de esas regularidades (con la dificultad añadida de definir la simultaneidad de sucesos que ocurren en distintos puntos del espacio).

Lo malo es que hay distintos fenómenos "regulares": Por un lado, los que nos proporciona la mecánica, con los movimientos de los astros (origen de los calendarios) o las oscilaciones de mecanismos o corriente eléctricas (origen de los relojes mecánicos o eléctricos) y por otro lado, los fenómenos disipativos (origen de los relojes atómicos). Unos y otros muestran una inexplicada concordancia experimental que nos permite usarlos indistintamente. Pero queda en pie la duda de si esa concordancia es absoluta y permanente y en el fondo, de si tiene sentido hablar del tiempo para describir fenómenos que ocurrieron antes de que hubiese astros en el sistema solar o incluso núcleos atómicos independientes. Más adelante nos referiremos también a los problemas ocasionados por la dificultad de definir la simultaneidad antes citada.

Además, el tiempo, a diferencia del espacio, cuya isotropía admitimos sin discusión (al menos localmente), tiene un sentido determinado, lo que constituye la “flecha del tiempo” que distingue netamente el pasado del futuro. Eso hace diferentes los relojes mecánicos (que podrían marchar hacia atrás) de los basados en fenómenos disipativos, en los que la flecha del tiempo se hace evidente.

8. El espacio-tiempo

La teoría de la relatividad, con su análisis profundo del concepto de simultaneidad de eventos para distintos observadores, hizo imposible estudiar por separado el espacio y el tiempo y exigió la consideración del espacio-tiempo; cualquier evento observado debía ser identificado por cuatro coordenadas, tres espaciales y una temporal y debían establecerse las transformaciones que era preciso aplicar a esas coordenadas cuando el evento era identificado por otro observador, con su propio sistema de coordenadas.

La mecánica de Newton se describía así en el G-espacio y en un tiempo independiente, con las propiedades de los números reales, que juntos constituían un F-espacio-tiempo que llamaremos G-espacio-tiempo. La relatividad, en cambio, con su análisis de la simultaneidad, exigió la consideración de un F-espacio-tiempo, con 4 dimensiones, en el que no era posible una distinción neta entre las espaciales y la temporal que fuese independiente del observador. Se introdujo además el principio de constancia de la velocidad de la luz, cuyo valor, *c,* intervenía en las transformaciones aplicables a las coordenadas cuando se cambiaba de observador.

Una consecuencia importante de ello era que si se había admitido una unidad universal de medida de longitud, ya no era preciso introducir otra independiente para el tiempo, pues podía usarse el tiempo empleado por la luz en recorrer esa unidad de longitud.

La citada constancia de la velocidad de la luz, ampliamente comprobada por la experiencia, se refiere a su independencia de la dirección del espacio y del movimiento del observador, pero no se entiende bien su significado cuando se intenta aplicar a asegurar que esa velocidad es la misma en la actualidad que lo fue en otra época. Puede llegarse incluso a pensar que carece de sentido plantearse la pregunta de si ello es cierto o no, o bien la afirmación es tautológica, con un oscuro significado.

La relatividad general exigió la consideración de un F-espacio-tiempo propio, que aprovechó los M-espacios desarrollados anteriormente por *Riemann* en el que la integración mutua del espacio y del tiempo era aún más profunda. En estos F-espacio-tiempos no era preciso introducir desde el exterior una unidad de medida de longitudes (ni de tiempo), ya que en cada punto (salvo excepciones) se dispone del "radio de curvatura" del espacio que puede hacer su papel. *Eddington* llamó la atención sobre el sorprendente hecho de que el que la métrica del espacio se establezca a partir de su propia curvatura (es decir, el tensor g_{ij} se deduzca del tensor de Ricci R_{ij}, obtenido por contracción de índices del de Riemann-Chirtoffel), implica toda la teoría relativista de la gravitación. Lo expuso en el delicioso libro *"La expansión del Universo"* [9] y en el [5] ya citado.

La Relatividad General, a pesar de su convincente planteamiento y de las incuestionables comprobaciones experimentales, presentaba inconvenientes: aunque daba buena cuenta de los fenómenos gravitatorios, al prescindir del concepto de "fuerza" no permitía la introducción de las atracciones eléctricas, magnéticas o de otro tipo; además era excesivamente determinista y se mostraba incompatible con la Mecánica Cuántica, que apareció con poca diferencia de tiempo.

Muy pronto, por iniciativa del mismo *Einstein*, se comenzaron a buscar extensiones de la teoría que incluyesen el electromagnetismo y otros campos. Ello se consiguió, pero a costa de exigir nuevos F-espacio-tiempos, cuyo número de dimensiones fue aumentando rápidamente. Afortunadamente, los matemáticos proporcionaban una enorme variedad de M-espacios entre los que elegir. La compatibilidad con los fundamentos de la Mecánica Cuántica se resistió más y todavía están en pleno desarrollo las "teorías del todo", entre las que destacan las de las cuerdas y las supercuerdas. Un libro de grata lectura sobre estos temas es el de *Brian Greene "El universo elegante"* [10]. Estas teorías están desarrolladas valiéndose de F-espacio-tiempos con complicadas estructuras y 11 o más dimensiones.

Aún no se ha llegado a una "teoría del todo" universalmente aceptada, pero se han logrado éxitos parciales muy brillantes. No obstante, las afirmaciones sobre "cómo es realmente nuestro espacio" o si "existen realmente" las dimensiones citadas, no forman parte de esas teorías o se reducen simplemente a modos de hablar sobre sus conclusiones.

Referencias

[1] Julio Fernández Biarge (1989), *¿Geometría del Espacio?* Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, nº 21.

[2] Inmanuel Kant, *Prolegómenos ...*

[3] Inmanuel Kant**,** *Crítica de la razón pura.* Traducción de Pedro Rivas. Alfaguara (Madrid).

[4] Erhard Scholz (2005)**,** *Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría.* La Gaceta de la RSME, vol 8, nº 3, págs. 683-712.

[5] Arthur Eddington (1944), *La Filosofía de la Ciencia Física.* Ed. Sudamericana (Buenos Aires).

[6] Javier de Lorenzo (1992), *Kant y la Matemática.* Ed. Tecnos (Madrid).

[7] Roger Penrose (1991), *La nueva mente del emperador.* Mondadori (Madrid)

[8] Roger Penrose (2006), *El camino a la realidad*. Mondadori-Debate (Madrid)

[9] Arthur Eddington (1933), *La expansión del Universo*. Revista de Occidente.

[10] Brian Greene (2001), *El universo elegante.* Crítica – Planeta (Barcelona)

Determinación de lugares geométricos, vía sintética y computacional, aplicada a lugares de tipo cisoide.*

E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano
Sec. Dept. Algebra, Fac. Educación UCM
{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

Abstract

An automatic method for determining geometric loci directly from its geometric construction is applied to obtain several loci of the type cissoid. This method uses, successively: a Dynamic Geometry System, to draw the geometric configuration with the mouse and to obtain a constructive geometric algorithm; an external translator (developed by the authors), to convert the geometric algorithm into a Computer Algebra System (CAS) syntax; an Euclidean Geometry package (denoted paramLoc, also developed by the authors), that allows the CAS to interpret the translated code and the capabilities of the CAS (to obtain the parametric and implicit equations of the locus and to plot the locus curve). The method is applied: to an original locus that lead to the usual cissoid curve; to a 1-parametric family of loci of the type cissoid; to the classic Newton's cissoid locus and to Diocles' cissoid locus. This type of loci was chosen because the standard difficulties that users of this automatic method can find, show up in these examples. Comparisons with classic methods that use techniques from Synthetic Geometry techniques are included.

Introducción

Los autores han estudiado durante bastante tiempo el problema de la determinación de lugares geométricos automáticamente usando métodos algebraicos

*Parcialmente subvencionado por los proyectos: *MTM2004-03175* del Ministerio de Educación y Ciencia y *UCM2005-910563* de la Comunidad de Madrid - Universidad Complutense de Madrid, grupo de investigación *ACEIA*).

y herramientas para resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas a los que el problema conduce (Roanes et al., 2001a; Roanes et al., 2001b; Roanes et al., 2002b).

El método de determinación de lugares geométricos presentado aquí abarca el proceso completo, desde el planteamiento del problema hasta la obtención de las ecuaciones, conectando Geometría Sintética y Geometría Analítica elemental. Es similar al de Botana y Valcarce's *Lugares* (Valcarce et al., 2001), al de Fu *MathXP* (Fu et al., 2002) o al de Gao *Geometry Expert* (Gao et al., 1998), pero deja al usuario un grado de control mayor. Mas aun, al contrario que aquellos, se basa en la cooperación entre un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) y un Sistema de Cómputo Algebraico (SCA) ya existentes (Roanes, 2002), como también se hace en (Schumann, 2002).

Como SGD hemos elegido *The Geometer's Sketchpad 3*, porque sus *scripts* son muy apropiados para ser traducidos a código SCA. La más reciente version *The Geometer's Sketchpad 4* es también válida para ello. Esta última produce salida .HTM para *JavaSketch* en vez de *scripts*. Como SCA hemos elegido dos, *Maple* y *Derive*, por su difusión a nivel universitario y de enseñanza secundaria, respectivamente.

La herramienta principal que usamos es un paquete de Geometría Euclídea, desarrollado por los autores, denominado *paramLoc*. Dicho paquete permite al SCA interpretar el código que devuelve el *traductor* construido ad-hoc, al traducir el algoritmo geométrico creado por el SGD.

Se trata de la evolución del método que ya publicamos en este Boletín (Roanes et al., 2002d), cuya fundamentación algebraica también habíamos publicado en este Boletín (Roanes, 2001c).

En realidad, el paquete paramétrico *paramLoc* es una adaptación para lugares de un paquete previo, denominado *paramGeo*, también desarrollado por los autores para efectuar demostración automática de teoremas de Geometría Elemental. Una versión de *paramGeo* para *Maple* fue presentada al ACA'2002 (Roanes et al., 2002a) y una versión para *Derive* fue presentada en Visit-Me'2002 International Derive Conference (Roanes et al., 2002c).

La generación original de la cisoide, como lugar geométrico, que presentamos aquí, permite aislarla de la línea espuria que aparece ligada a ella en las generaciones obtenidas mediante los lugares geométricos clásicos de Newton y de Diocles (Botana et al., 2003) o en la usada en (Schumann, 2002).

1 Herramientas utilizadas

1.1 Descripción del paquete *paramLoc*

El paquete *paramLoc* de Geometría paramétrica permite asignar coordenadas paramétricas a los puntos iniciales de la configuración, tratando con estos parámetros en todos los cálculos subsiguientes. Describimos algunos de sus comandos:

`point`(A_x, A_y) devuelve la lista $[A_x, A_y]$ de coordenadas del punto (A_x, A_y)

`line`(A, B) devuelve la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B, previamente definidos

`segment`(A, B) devuelve la lista: [ecuación de la recta $AB, [A_x, A_y], [B_x, B_y]$]

`midpoint`(s) devuelve la lista de coordenadas del punto medio del segmento s. Este comando también puede aplicarse a los dos puntos extremos del segmento en la forma `midpoint`(A, B)

`onLine`$([A, B], r)$ devuelve el punto dado por por la expresión afín $A + r(B - A)$, donde $r \in \mathbb{R}$. Este comando también puede aplicarse a un segmento, con la sintaxis `onLine`(s, r), donde $s = \overline{AB}$

`parallel`(s, A) devuelve la ecuación de la paralela a la recta/segmento s por el punto A

`perpendicular`(s, A) devuelve la ecuación de la perpendicular a la recta/segmento s por el punto A

`circumCP`(O, A) devuelve la ecuación de la circunferencia de centro O y que pasa por A

`circumCR`(O, s) devuelve la ecuación de la circunferencia de centro O y cuyo radio es el segmento s

`intersection`(ϕ, ψ) devuelve los puntos de intersección de las rectas/circunferencias ϕ y ψ `pointOnObject`(R_x, R_y, ϕ) se usa para definir (R_x, R_y) como un punto arbitrario de la recta/circunferencia de ecuación $\phi(x, y) = 0$, devolviendo $[R_x, R_y]$ y agregando el polinomio $\phi(R_x, R_y)$ a la lista de relaciones `LREL` (inicialmente `LREL` es la lista vacía)

..... (más adelante, cuando sea preciso, se describirán otros comandos).

1.2 Descripción del Traductor a código SCA

Notemos que el algoritmo geométrico se obtiene automáticamente a partir del dibujo de la construcción geométrica hecha sobre *The Geometer's Sketchpad 3* o *4*. Si se usa la versión *3*, el archivo .TXT viene de un *script* y si se usa la versión *4*, el archivo .HTM viene de un *sketch* (salvado en formato *JavaSketch*). Dicho archivo .TXT o .HTM es convertido en código SCA (*Maple* o *Derive*(según elija el usuario) por el *traductor* automático, implementado por los autores. El código resultante es interpretado por el SCA, una vez cargado el paquete *paramLoc*.

2 Definición de un lugar que conduce a la Cisoide

La definición del siguiente lugar, original de los autores, está inspirado en la curva podaria de la parábola. La configuración aparece en la Fig. 1.

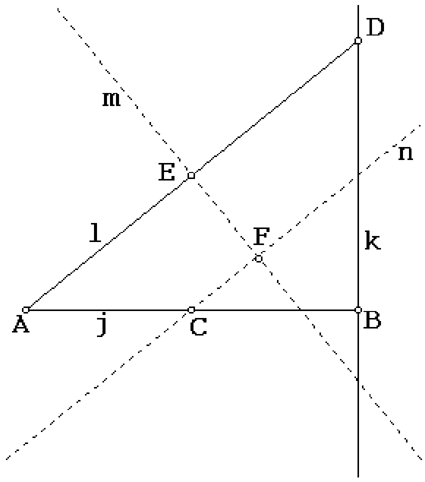


Figura 1: *Una configuración que permite obtener la cisoide*

Lugar #1: *Dados dos puntos, A y B, distintos entre sí, sea C el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y sea k la perpendicular a la recta AB por el punto B. Considerando ahora un punto arbitrario, D, sobre la recta k, sea m la mediatriz del segmento $\overline{AD}$ y sea F la proyección ortogonal de C sobre la recta m. Se trata del lugar del punto F, cuando D se mueve sobre la recta k.*

2.1 Determinación del Punto del Lugar, de los Tipos de Puntos y de las Condiciones del Lugar

Antes de implementar el problema de este lugar, vamos a hacer una adaptación del mismo y ciertas precisiones.

Determinación del Punto del Lugar: En el planteamiento del Lugar #1, el punto del lugar, F, se define como la *proyección ortogonal del punto C sobre la recta m.* Pero esta relación no permite obtener expresiones algebraicas para las coordenadas de F (a fin de reconocer la ecuación del lugar). Para evitar este inconveniente, F puede ser definido alternativamente así:

- F es un punto arbitrario del objeto m
- F está en la recta n (siendo n la perpendicular a la recta m por C).

Tipos de Puntos: En el planteamiento del Lugar #1, pueden distinguirse distintos tipos de puntos:

- A, B son *puntos libres* (introducidos sin condiciones entre ellos)
- D, F son *puntos sobre objetos* (están en objetos definidos previamente)
- F es el *punto del lugar.*

Todos los demás puntos considerados quedan determinados por aquellos.

Condiciones del Lugar (LC): Tratando el problema de este modo, se obtienen las tres condiciones del lugar siguientes:

- $LC1$) D es un punto arbitrario sobre la recta k (punto sobre objeto)
- $LC2$) F es un punto arbitrario sobre la recta m (punto sobre objeto)
- $LC3$) el punto F está en la recta n (condición final del lugar).

2.2 Generación del Algoritmo Geométrico con el SGD

Si la construcción del lugar #1 descrita se dibuja con *The Geometer's Sketchpad 3*, este SGD genera el siguiente algoritmo geométrico (*script*):

```
Given:
  Point A
  Point B
Steps:
  1. Let [j] = Segment between Point A and Point B.
```

```
2. Let [C] = Midpoint of Segment [j].
3. Let [k] = Perpendicular to Segment [j] through Point B.
4. Let [D] = Random point on Line [k].
5. Let [l] = Segment between Point [D] and Point A.
6. Let [E] = Midpoint of Segment [l].
7. Let [m] = Perpendicular to Segment [l] through Midpoint [E]
8. Let [F] = Random point on Line [m].
9. Let [n] = Perpendicular to Line [m] through Point [C].
```

Supondremos que este *script* se guarda en el archivo `Locus1.txt`

2.3 Conversión del algoritmo geométrico en código SCA

El archivo `Locus_1.txt` se convierte automáticamente en código *Maple* con el *traductor*, obteniendo el siguiente archivo (`Locus_1.mpl`):

```
# Sketchpad to Maple automatic translation
# Locus_1.txt -> Locus_1.mpl
#Given:
A:=point(A_x, A_y);
B:=point(B_x, B_y);
#Steps:
j:=segment(A, B);
C:=midpoint(j);
k:=perpendicular(j, B);
D_:=pointOnObject(D_x,D_y,k);
l:=midpoint(l);
E:=midpoint(l);
m:=perpendicular(l, E);
F:=pointOnObject(F_x, F_y, m);
n:=perpendicular(m, C);
```

2.4 Cálculos en Maple paso a paso con el paquete paramLoc

A fin de ejecutar los cálculos, para determinar el lugar, usando nuestro paquete *paramLoc.mpl* bajo *Maple*, efectuamos sucesivamente las operaciones siguientes:

• Abrir una *sesión de Maple* y cargar el paquete `paramLoc.mpl` :

```
> read(‘c:/nombre_Directorio/paramLoc.mpl‘):
```

• Renombrar las coordenadas de los puntos libres, para simplificar cálculos:

```
> A_x:=-a:  A_y:=0:  B_x:=a:  B_y:=0:
```

• Renombrar las coordenadas del punto del lugar, a fin de reconocer más fácilmente la ecuación del lugar:

```
> F_x:=X:  F_y:=Y:
```

• Renombrar las coordenadas de los otros puntos sobre objetos, a fin de manejar nombres más breves:

```
> D_x:=s:  D_y:=t:
```

(Observemos que todos los demás objetos tienen coordenadas y ecuaciones dependientes de aquellos).

• Cargar el archivo traducido:

```
> read(‘c:/nombre_Directorio/Locus_1.mpl‘);
```

Entonces, las líneas de código se ejecutan mientras son leídas. De este modo, las coordenadas de los puntos y las ecuaciones de todos los demás objetos considerados son devueltos como output, como se muestra a continuación:

$$A := [-a, 0]$$

$$B := [a, 0]$$

$$j := [y = 0, [-a, 0], [a, 0]]$$

$$C := [0, 0]$$

$$k := x - a = 0$$

$$D\_ := [s, t]$$

$$l := [(-a - s)y + at + tx = 0, [s, t], [-a, 0]]$$

$$E := [-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}s, \frac{1}{2}t]$$

$$m := (-a - s)(x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}s - t(y - \frac{1}{2}t)$$

$$F := [X, Y]$$

$$n := -tx - (-a - s)y = 0$$

Durante la ejecución, las condiciones del lugar $LC1$ y $LC2$, indicadas en 2.1, son alojadas automáticamente en la lista `LREL`, como puede comprobarse:

```
> LREL;
```

$$[s-a,(-a-s)(X+\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}s)-t(Y-\tfrac{1}{2}t)]$$

• Asignar (manualmente) estas condiciones a las variables $LC1$ y $LC2$:

```
> LC1:=op(1,LREL);
```

$$LC1 := s-a$$

```
> LC2:=op(2,LREL);
```

$$LC2 := (-a-s)(X+\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}s)-t(Y-\tfrac{1}{2}t)$$

• Definir (manualmente) la condición final del lugar $LC3$ de la section 2.1, $(F \in n)$, guardándola en la variable $LC3$:

```
> LC3:=subs(x=F[1],y=F[2],lhs(n));
```

$$LC3 := -tX-(-a-s)Y$$

• Aplicar el comando `solve` de *Maple* para resolver el sistema de las condiciones del lugar con respecto de las coordenadas del lugar y del parámetro s (como incógnitas), a fin de obtener las *ecuaciones paramétricas* del lugar:

```
> solve({LC1=0,LC2=0,LC3=0},{X,Y,s});
```

$$\{s=a\ ,\ X=\frac{t^2a}{(t^2+4a^2)}\ ,\ Y=\frac{1}{2}\frac{t^3}{(t^2+4a^2)}\} \tag{1}$$

• Alojar la lista de ecuaciones paramétricas en la variable *eqsParam*:

```
> eqsParam:=[eval(X,%),eval(Y,%)];
```

$$eqsParam := [\ \frac{t^2a}{(t^2+4a^2)}\ ,\ \frac{1}{2}\frac{t^3}{(t^2+4a^2)}\ ] \tag{2}$$

• Aplicar el comando `eliminate` del paquete `linalg` de *Maple* para eliminar los parámetros s,t en el sistema de condiciones del lugar, a fin de obtener la *ecuación implícita* del lugar:

```
> with(linalg):
> eliminate({LC1,LC2,LC3},{s,t});
```

$$[\ \{s=a\ ,\ t=2\frac{Ya}{X}\}\ ,\ \{-a(-X^3-Y^2X+Y^2a)\}\ ] \tag{3}$$

• Finalmente, alojar la ecuación implícita del lugar en la variable *eqImplic*:

```
> eqImplic:=op(op(2,%))/a;
```

$$eqImplic := X^3 + Y^2 X - Y^2 a$$

Observemos que, para $a = 1$, esta es la ecuación usual de la curva *cisoide*.

2.5 Obtención automática de las ecuaciones del lugar

Los cálculos de la sección 2.4 pueden ser automatizados. Las ecuaciones paramétricas e implícita del lugar pueden obtenerse aplicando los procedimientos `locusPar` y `locusImp` de nuestro paquete `paramLoc` a los argumentos siguientes (en este orden):

- el punto del lugar, F
- el objeto, n, que contiene a F, como condición final del lugar
- el conjunto de puntos libres, A,B.

Entonces, las expresiones paramétricas (1) se obtienen automáticamente así:

```
> locParam(F, n, {A,B});
```

$$[\ \{s = a\ ,\ t = 2\frac{Y a}{X}\}\ ,\ \{-a(-X^3 - Y^2 X + Y^2 a)\}\ ]$$

y la expresión implícita (3) se obtiene automáticamente con sólo ejecutar:

```
> locusImp(F, n, {A,B});
```

$$X^3 + Y^2 X - Y^2 a$$

2.6 Representación de la curva del lugar

Haciendo uso del paquete `plots` de *Maple*, puede representarse la curva del lugar, junto con los objetos geométricos involucrados en su generación (rectas j, k, l, m, n).

La curva del lugar, dada por sus ecuaciones paramétricas (2), obtenidas en la sección 2.4, se representan para $a = 1$, junto con las rectas j, k, l, m, n, todas ellas particularizadas para valor $t = 1.8$ de este parámetro (Fig. 2).

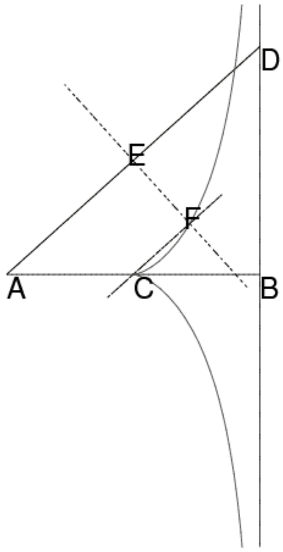


Figura 2: *Generación para a=1*

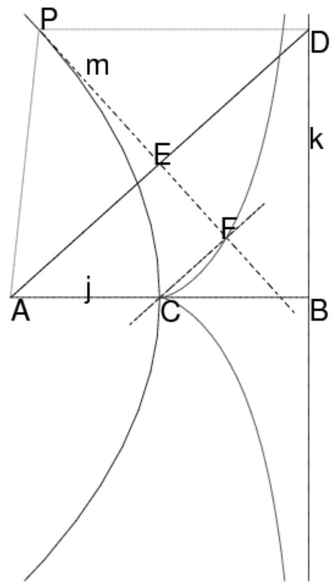


Figura 3: *Demostración vía sintética*

2.7 Determinación de este lugar vía Geometría Sintética

Tratemos de encontrar este Lugar con técnicas de Geometría Sintética y comparemos con el método descrito anteriormente.

Sea P el punto de intersección de la recta m con la paralela a la recta j por el punto D (Fig. 3). Como m es la mediatriz del segmento $\overline{AD}$, los triángulos rectángulos PEA y PED son iguales. Por tanto, los segmentos PA y PD son iguales y en consecuencia P está en la parábola de foco A y directriz k. Como la recta tangente a esta parábola en el punto P es la bisectriz del ángulo APD, la recta m es esa tangente. De este modo, el punto F es la proyección ortogonal del vertice, C, de esta parábola sobre la recta tangente en el punto P a esta parábola. Como consecuencia, el lugar del punto F, cuando D se mueve sobre la recta k, es la curva *podaria* de esta parábola. Pero, como es bien sabido, la podaria de la parábola es curva cisoide. Con lo cual finaliza la demostración sintética.

Pensando en estas demostraciones sintéticas, como la que se acaba de realizar, se observa que estas técnicas clásicas son más elegantes y rápidas de describir. Pero, por otra parte, hemos de admitir que aquellas técnicas computacionales no requieren de sus usuarios la necesidad de encontrar la feliz idea que resuelve el problema hasta encontrar la ecuación del lugar.

3 Otros lugares de tipo cisoide

A fin de mostrar cómo adaptar el método presentado en la sección 2 a algunos otros problemas de lugares, vamos a analizar otros lugares de tipo *cisoide*.

3.1 Familia uniparamétrica de lugares de tipo cisoide

Volvamos sobre el problema de lugar propuesto en la sección 2.1, donde se consideraba el lugar del punto F, proyección ortogonal del punto medio C del segmento $\overline{AB}$ (Fig. 1). Pero, ¿qué ocurre si C es otro punto de la recta AB, en vez del punto medio de $\overline{AB}$?

Para precisar la posición del punto C sobre la recta AB, puede considerarse la relación vectorial $\overrightarrow{AC} = r \cdot \overrightarrow{AB}$, donde $r \in \mathbb{R}$. Fijado r, queda determinado el punto del lugar F. Podemos ya proponer el siguiente problema.

<u>**Lugar #2:**</u> *Dados dos puntos, A y B, y un número real, r, sea C el punto de la recta AB, tal que $\overrightarrow{AC} = r \cdot \overrightarrow{AB}$. Sea k la perpendicular a la recta AB por el punto B. Considerando ahora un punto arbitrario, D, de la recta k, sea m la mediatriz del segmento AD y sea F la proyección ortogonal de C sobre la recta m. ¿Cuál es el lugar del punto F, cuando D se mueve sobre k?*

Se trata pues de determinar una r-familia de lugares, dependientes del valor del parámetro $r \in \mathbb{R}$. Para ello, vamos a hacer uso del procedimiento `onLine` del paquete `paramLoc`. Al aplicar `onLine` a un segmento $\overline{PQ}$ o a un par de puntos $[P, Q]$, como primer argumento, y a una expresión numérica, r, como segundo argumento, se obtiene como output el punto R, de la recta PQ, determinado por la expresión afín $R = P + r \cdot \overrightarrow{PQ}$. En particular, al ejecutar `onLine(PQ,1/2)`, se obtiene el punto medio del segmento PQ. De este modo, el lugar considerado a lo largo de la sección 2 sería la curva de este haz correspondiente a $r = \frac{1}{2}$.

Notemos que ahora podemos omitir la construcción geométrica y el script, operando directamente con `paramLoc`, sin más que introducir cambios menores en el código considerado en la sección 2.3, bastando sustituir la asignación `C:=midpoint(j)` por la asignación `C:=onLine(j,r)`. El archivo así modificado lo salvamos como `Locus_2.mpl`.

Abriendo ahora una nueva hoja de trabajo sobre *Maple*, cargamos el paquete `paramLoc.mpl` (que reinicia la lista `LREL` de condiciones del lugar). Entonces, al cargar el archivo `Locus_2.mpl`, se ejecutan sus líneas de código mientras es leído, obteniéndose las coordenadas y ecuaciones siguientes:

$$A := [-a, 0]$$

$$B := [a, 0]$$

$$j := [y = 0, [-a, 0], [a, 0]]$$

$$C := [2ar - a, 0]$$

$$k := x - a = 0$$

$$D_{\_} := [s, t]$$

$$l := [(-a - s)y + at + tx = 0, [s, t], [-a, 0]]$$

$$E := [-\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}s, \tfrac{1}{2}t]$$

$$m := (-a - s)(x + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}s - t(y - \tfrac{1}{2}t)$$

$$F := [X, Y]$$

$$n := -t(x - 2ar + a) - (-a - s)y = 0$$

Calculando ahora como en la sección 2.5, se obtienen automáticamente las ecuaciones paramétricas de la r-familia de lugares:

$$[\ 2\frac{t^2ar}{(t^2 + 4a^2)}\ ,\ -\frac{1}{2}\frac{t(-t^2 + 8a^2r - 4a^2)}{(t^2 + 4a^2)}\ ] \tag{4}$$

y su ecuación implícita:

$$X^3 - 4X^2ar + 2aX^2 + 4Xa^2r^2 - 4Xa^2r + Xa^2 + Y^2X - 2Y^2ar = 0$$

Las correspondientes curvas de lugar para los r-valores $\frac{-3}{4}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}$, junto con la recta j, aparecen en la Fig. 4 (de izquierda a derecha). Todas las curvas de la $r-$familia pasan por el punto $(0, 0)$ y tienen como eje de simetría la recta j. La recta k es la tangente en (0,0) a todas ellas, excepto para $r = \frac{1}{2}$. Para $r = \frac{1}{2}$, la curva del lugar es la de la Fig. 2, de la cual $(0, 0)$ es punto de retroceso. En particular, para $r = 0$ la curva del lugar es la misma recta k. Para $r < 0$ la curva del lugar está en el semiplano de la izquierda respecto de la recta borde k y para $r > 0$ está en el semiplano de la derecha. Para $r < \frac{1}{2}$, el lugar consiste en una curva suave, y para $r > \frac{1}{2}$ aparece un punto singular sobre la recta j (con dos tangentes distintas).

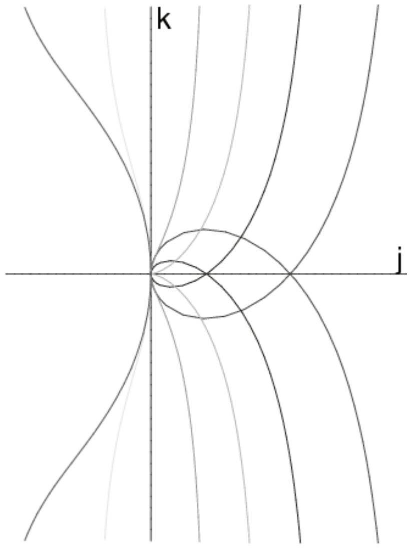


Figura 4: *Familia uniparamétrica de cisoides*

3.2 Método de Newton para generar la cisoide

Este método de generación se detalla en el siguiente Lugar #3.

Lugar #3: *Dados dos puntos, A y B, sea k la perpendicular a la recta AB por el punto B (Fig. 5) y sea D un punto arbitrario sobre k. Consideremos ahora el punto V, tal que $\widehat{AVD}$ sea ángulo recto y $\overline{VD} = \overline{AB}$. Se trata del lugar del punto medio F del segmento $\overline{DV}$, cuando D se mueve sobre k.*

Esta definición sugiere la configuración mostrada en la Fig. 6. Notemos que para cada posición de D sobre la recta k, el punto V está en la circunferencia de centro D y radio $\overline{AB}$ y V también está en la circunferencia de diámetro $\overline{AD}$, ya que $\widehat{AVD}$ es ángulo recto. El lugar del punto medio F del segmento $\overline{DV}$, cuando D se mueve sobre k, es la cisoide de Newton.

Como las dos circunferencias mencionadas tienen dos puntos comunes, V y W (Fig. 6), el punto medio F se mueve sobre una rama de la curva del lugar y el punto medio G se mueve sobre la otra rama de la curva del lugar, al moverse D sobre k. Como los puntos V y W quedan determinados por intersección de dos circunferencias, las coordenadas de F y G, que serán usadas más adelante, pueden contener expresiones radicales, lo que dificulta su manipulación.

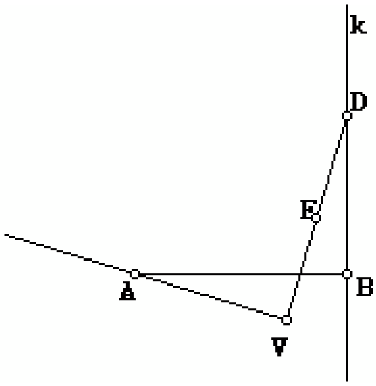


Figura 5: *Método de Newton*

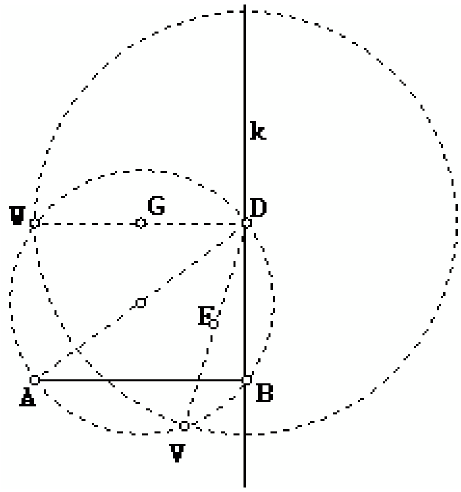


Figura 6: *Justificación del método*

Para evitar este inconveniente, hemos adaptado el método de Newton, como se detalla en el siguiente Lugar #4, de acuerdo con la configuración que muestra la Fig. 7.

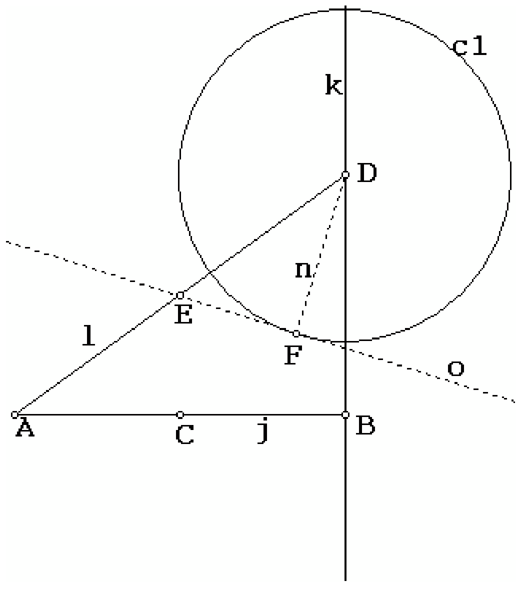


Figura 7: *Adaptación del método de Newton*

Lugar #4: *Dados dos puntos, A y B, sea C el punto medio del segmento $\overline{AB}$, sea k la perpendicular a la recta AB por el punto B, sea D un punto arbitrario sobre k, sea E el punto medio del segmento $\overline{AD}$ y sea $c1$ la circunferencia de centro D y radio $\overline{AC}$. Consideremos ahora un punto F sobre c1, tal que las rectas FD y FE sean perpendiculares. Se trata del lugar del punto F, al moverse D sobre k.*

La equivalencia de las definiciones del Lugar #4 y el Lugar #3 sigue de considerar que la imagen del segmento $\overline{FE}$ en the homotecia de centro D y razón 2 es el segmento $\overline{VA}$ de la Fig. 5 o Fig. 6.

Esta adaptación del problema permite dar valores arbitrarios a las coordenadas del punto del lugar F, bajo la condición de que F esté en la circunferencia $c1$. Planteando el problema de este modo, se obtienen las siguientes condiciones.

<u>*Condiciones del lugar*</u> (para Lugar #4)

LC1) D está en la recta k (punto sobre objeto)

LC2) F está en la circunferencia c1 (punto sobre objeto)

LC3) E está en o, siendo o la recta perpendicular a FD por F (Fig. 7).

A partir de estas consideraciones, el Lugar #4 puede tratarse del mismo modo que se hizo para el Lugar #1 en la section 2. Notemos LC1 y LC2 quedarán incluidas en la lista `LREL` y LC3 es la condición final del lugar, que ha de añadirse a aquellas dos, para completar el sistema de ecuaciones cuya solución proporciona las ecuaciones del lugar. Por brevedad, se omiten los cálculos, obteniéndose finalmente

$$X(X^3 + Y^2X - Y^2) = 0 \qquad (6)$$

como ecuación implícita del Lugar #4 (en vez de $X^3 + Y^2X - Y^2 = 0$, que se obtuvo en la sección 2 para el Lugar #1). Por tanto, el Lugar #4 consiste en la cisoide junto con la recta p (perpendicular a AB por el punto C).

Observemos finalmente que, al moverse D sobre la recta k, el punto F (Fig. 6) se mueve sobre la rama superior de la cisoide (por encima de la recta AB) y sobre la semirrecta inferior de p (por debajo de la recta AB), mientras que el punto G (Fig. 6) se mueve sobre la rama inferior de la cisoide (por debajo de la recta AB) y sobre la semirrecta superior de p (por encima de la recta AB).

3.3 Método de Diocles para generar la cisoide

La cisoide de Diocles es quizás el ejemplo más antiguo (alrededor de 180 a.C.) de curva con singularidad. Su nombre viene de su punto de retroceso, que recuerda la hoja de *hiedra* (*cissoid* en Griego clásico), como se cita en (Brieskoern et al., 1981). Diocles resolvió el problema de Delos, de la duplicación del cubo (Bold, 1982) haciendo uso de la generación de la cisoide descrita en el siguiente Lugar #5.

<u>**Locus #5**</u>: *Dados dos puntos, A y B, sea C el punto medio del segmento $\overline{AB}$, sea* c1 *la circunferencia de centro C que pasa por A y sea k la perpendicular a la recta AB por el punto C (Fig. 8). Considerando ahora un punto arbitrario D sobre el segmento $\overline{AB}$, sea l la paralela a la recta k por D y sea E uno de los puntos de intersección de l y* c1*. Se trata del lugar del punto G, de intersección del segmento $\overline{EA}$ y la imagen de l en la reflexión de eje la recta k, al moverse D sobre $\overline{AB}$.*

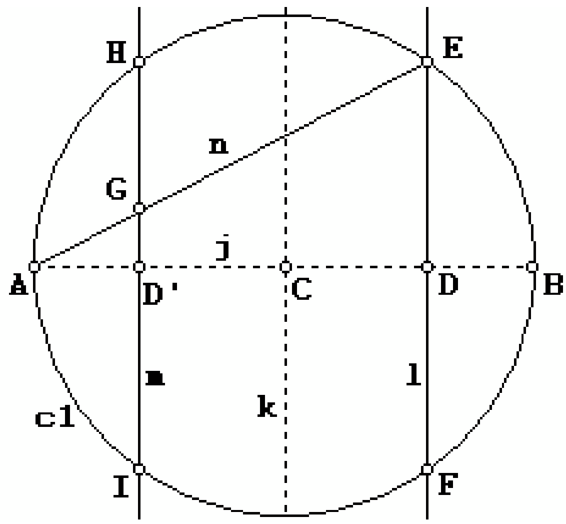


Figura 8: *Método de Diocles*

Notemos que, puesto que l y c1 se cortan en dos puntos, E y F (Fig. 8), el punto E puede sustituirse por el F. Por otra parte, como la recta

l puede sustituirse por su imagen, m, en la reflexión de eje la recta k, los puntos E y F pueden sustituirse por los puntos H e I, a fin de generar otras ramas de la curva del lugar. Juntando todas estas ramas, se obtiene el mismo lugar definido por la ecuación (6). Pero observemos que, como los puntos E, F, H, I se obtienen por intersección de circunferencia con rectas, las coordenadas de estos puntos pueden contener expresiones radicales, lo que dificulta su manipulación.

4 Cómo usar nuestro método automático

El método automático utilizado en las secciones 2 y 3 puede aplicarse en la determinación de muchos lugares. Para describir su aplicación, enumeremos sus pasos sucesivos:

Paso 1. Precisar punto del lugar, tipos de puntos y condiciones del lugar

El problema ha de ser definido con precisión, distinguiendo claramente:

- los *puntos libres*, que son inicialmente introducidos sin condiciones
- el *punto del lugar* cuyas posibles posiciones se tratan de determinar
- las *condiciones del lugar*, que definen los puntos que yacen sobre objetos previamente definidos.

La ecuación del lugar puede simplificarse bastante haciendo uso de una descripción apropiada. Por ejemplo, en caso de un punto, P, que sea intersección de dos objetos geométricos, $obj1$ y $obj2$, P puede ser definido como un punto arbitrario sobre $obj1$, que verifica la condición de lugar: $P \in obj2$. Es preferible proceder de este modo, por ejemplo, cuando al menos uno de los objetos que se intersecan en P sea una circunferencia (de otro modo, coordenadas que contienen expresiones irracionales son arrastradas en los cálculos subsiguientes).

Paso 2. Generación del *Algoritmo Geométrico* con el SGD

El algoritmo geométrico creado con *The Geometer's Sketchpad* se guarda en formato `.TXT` o `.HTM` (de acuerdo con la versión de este SGD utilizada). Supongamos se aloja en el archivo `Lugar.txt` (o `Lugar.htm`)

Paso 3. Traducción automática a código SCA

Una vez arrancado nuestro *traductor* y cargado el archivo `Lugar.txt` (o `Lugar.htm`), se selecciona el SCA de destino (*Maple* o *Derive*) y haciendo click sobre el botón *Translate*, el archivo traducido es automaticamente creado con el nombre `Lugar.mpl` (o `Lugar.mth`, de acuerdo con el SCA elegido).

Paso 4. Ejecución de cálculos con el paquete *paramLoc* sobre *Maple*

Para ejecutar los cálculos, realizamos las operaciones siguientes:

• Iniciamos una sesión en *Maple* y cargamos el paquete `paramLoc.mpl`.

• Renombramos las coordenadas de los puntos libres, para sencillez de los cálculos.

• Renombramos las coordenadas del punto del lugar como (X, Y), para reconocer fácilmente ecuación del lugar.

• Renombramos las coordenadas de los demás puntos (sobre objetos), a fin de utilizar nombres sencillos.

• Cargamos el archivo traducido `Lugar.mpl` (o `Lugar.mth`). Como este archivo se ejecuta mientras se carga, las coordenadas y ecuaciones se obtienen como output. Más aun, todas las condiciones del lugar, excepto la condición final, son incluidas automáticamente en la lista `LREL`).

• Si, como suele suceder, la condición final del lugar es de la forma $P \in obj$, entonces las ecuaciones paramétricas del lugar se obtienen ejecutando `locParam(P, obj, {Free});` siendo `{Free}` el conjunto de puntos libres. Su ecuación implícita se obtienen ejecutando `locImplic(P, obj, {Free});`

La ecuación implícita obtenida de este modo resulta ser una expresión algebraica en las coordenadas del punto del lugar, (X, Y), siendo sus coeficientes expresiones racionales en las coordenadas de los puntos libres. Las ecuaciones paramétricas que se obtienen son expresadas como funciones de un parámetro, que es una de las coordenadas de uno de los puntos sobre objetos (excluyendo el lugar del punto), siendo sus coeficientes del tipo mencionado anteriormente.

Notemos que, en la mayoría de lugares, la condición final del lugar puede expresarse en la forma $Punto\_del\_lugar \in Objeto$. Por ejemplo, la condición para que dos rectas, r y s, sean paralelas, puede sustituirse por considerar dos puntos $R, R' \in r$, definir la recta s', paralela a s por R y considerar la nueva condición $R' \in s'$. Pero la condición final del lugar no siempre es de este modo, por no depender directamente del punto del lugar.

Por otra parte, en la mayoría de lugares, el sistema de condiciones del lugar puede ser resuelto aplicando el comando *solve* de *Maple* (usado en el procedimiento `locParam`). Si este comando no fuera capaz de resolverlo, habrían de utilizarse métodos de basados en bases de Groebner o en seudodivisiones, descritos en (Roanes et al., 2001a; Roanes et al., 2001b).

Conclusiones

El modo original de definir el lugar de la cisoide presentado aquí, conduce a la curva cisoide, aislada de la línea espuria que aparece junto a ella en las definiciones clásicas de Newton y de Diocles o en la usada en (Schumann, 2002).

El método de determinación automática de lugares descrito aquí puede aplicarse a una gran variedad de problemas de lugares. En la mayoría de ellos se puede aplicar directamente, sin consideraciones previas para adaptar al método, pero a veces es preciso o, al menos, conveniente plantear adaptando el planteamiento a nuestro método, como se hizo en las sección 3.2 para generar la cisoide por el método de Newton.

A veces, es innecesario realizar la construcción geométrica y traducir el *script*, siendo suficiente operar directamente con nuestro paquete `paramLoc`, como en el caso considerado en la sección 3.1.

Finalmente, deseamos hacer notar que no pretendemos desterrar los métodos clásicos de determinación de lugares con técnicas de Geometría Sintética, que suelen requerir una idea feliz que resuelve el problema. Pero, en ciertos casos, la curva del lugar no es sencilla de describir (como una recta o una circunferencia), siendo preciso determinarla mediante su ecuación. En tales casos las técnicas estándar mostradas aquí pueden ser muy útiles.

Referencias

[1] Bold, B. (1982). *Famous Problems of Geometry and How to Solve them.* New York, Dover Pub.

[2] Botana, F., Valcarce, J.L. (2003). A software tool for the investigation of plane loci. *Mat. Comp. in Simulation*, **61-2**, pp. 139-152.

[3] Brieskoern, E., Knoerrer, H. (1981) *Plane Algebraic Curves*. Basel, Birkhäuser.

[4] Fu, H., Zeng, Z. (2002). A New Dynamic Geometry Software with a Prover and a Solver. In *Proceedings of Visit-Me Intl. Conference 2002*. Hagenberg, Austria. BK-Teachware (published in CD-ROM).
URL: `http://www.acailab.com/english/mathxp.htm`

[5] Gao, X.S., Zhang, J.Z., Chou, S.C. (1998). Geometry Expert. Taiwan, Nine Chapters Pub.
URL: `http://www.mmrc.iss.ac.cn/~xgao/gex.html`

[6] Roanes-Macías, E., Roanes-Lozano, E. (2001a) Automatic determination of geometric loci. 3D-extension of Simson-Steiner's Theorem. In: Campbell, J.A., Roanes-Lozano, E. (eds.). *Proceedings of AISC'2000*, pp. 157-173. Berlin, Springer-Verlag, LNAI 1930.

[7] Roanes-Macías, E., Roanes-Lozano, E. (2001b). Computational determination of geometric loci by an iterative method. In Coll, N., Sellares, J.A. (eds.). *Actas de los IX Encuentros de Geometría Computacional*, pp. 147-156. Girona, Spain, Universitat de Girona.

[8] Roanes-Macías, E. (2001c). Lugares geométricos encontrados con ayuda del Algebra y la Computación. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **57**, 62-79.

[9] Roanes-Lozano, E. (2002). Boosting the geometrical possibilities of Dynamic Geometry Systems and Computer Algebra Systems through cooperation. In: Borovcnik, M., Kautschitsch, H. (eds.). *Technology in Mathematics Teaching. Proceedings of ICTMT'5*, Band 25, pp. 335-348. Vienna, öbv & hpt.

[10] Roanes-Lozano, E., Roanes-Macías, E. Villar-Mena, M. (2002a). Obtaining Proofs Automatically from Sketches: Linking The Geometer's Sketchpad v.3 & 4 with Maple 7 and Derive 5. In *Abstracts of the 8th Conf. on Appls. of Comp. Alg.*. pp. 116-118. University of Thessaly and Wilfrid Laurier University.

[11] Roanes-Macías, E., Roanes-Lozano, E. (2002b) Geometric Determination of Spheres which Are Tangent to Four Given Ones. In: Peter M.A. Sloot, P.M.A., C.J. Kenneth Tan, C.J., Dongarra, J.J., Hoekstra (eds.), *Proceedings of ICCS 2002*, pp. 52-61. Springer-Verlag, LNCS 2330.

[12] Roanes-Lozano, E., Roanes-Macías, E., Villar-Mena, M. (2002c). Linking The Geometer's Sketchpad 3 & 4 with Derive 5. In *Proceedings of Visit-Me Intl. Conference 2002*. Hagenberg, Austria, BK-Teachware (published in CD-ROM).

[13] Roanes-Macías, E., Roanes-Lozano, E., Laita, L.M., Villar Mena, M. (2002d). Un método paramétrico para demostrar automáticamente y determinar lugares a partir de las construcciones geométricas. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **62**, 34-71.

[14] Schumann, H. (2004). A dynamic approach to "simple" algebraic curves (I). *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **66**, 22-38.

[15] Valcarce, J.L., Botana, F. (2001). *Lugares. Manual de Referencia.* Vigo, Spain, Universidad de Vigo.
URL: `http://rosalia.uvigo.es/sdge/`

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 76 (Junio 2007)

Algunas Sumas Alternadas

Jose María Fernández Cristóbal

Profesor de Matemáticas del I.E.S. "Mata Jove".Gijón

jfern114@chopo.pntic.mec.es

Abstract

From the beta function, the values of some alternate numerical sums are derived.

Introducción

La función beta B está definida a partir de la denominada *función gamma* por la expresión

$$B(r,s)=\frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

siendo $\Gamma(z)$ *la función gamma,* definida para $\mathrm{Re}\, z > 0$, como

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty dx\ e^{-x}x^{z-1}$$

Esta función verifica la propiedad

$$\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1)$$

para $\mathrm{Re}\, z > 1$. Para valores $\mathrm{Re}\, r > 0$ y $\mathrm{Re}\, s > 0$, la función beta admite una representación integral de la forma (ver [1]):

$$B(r,s)=\int_0^1 dx\ x^{r-1}(1-x)^{s-1} \qquad (1)$$

Su valor para *n* , *m* naturales, como sabemos, es (ver [1]):

$$B(n,m) = \int_0^1 dx\ x^{n-1}(1-x)^{m-1} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \qquad (2.1)$$

o bien

$$\int_0^1 dx\ x^n (1-x)^m = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{1}{n+m+1}\frac{1}{\binom{n+m}{n}} \qquad (2.2)$$

Obviamente, puesto que el valor de la integral depende de la suma $n+m$ y teniendo en cuenta la igualdad de los números combinatorios complementarios y que la integral es invariante bajo el cambio

$$x \to 1-x$$

$$n \leftrightarrow m$$

se ve claramente que esta función verifica la *propiedad de simetría:*

$$B(n, m) = B(m, n) \qquad (3)$$

En este artículo haremos uso de la igualdad (2.2), para deducir el valor de algunas sumas alternadas.

1. Primeras sumas

Desarrollando el integrando de *B(n, m)* por el binomio de Newton:

$$\int_0^1 dx\ x^n (1-x)^m = \int_0^1 dx\ x^n \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k} x^k = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k}\int_0^1 dx\ x^{n+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k}\frac{1}{n+k+1}$$

Por tanto de la igualdad (2.2) se deduce de forma inmediata:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{n+k+1}=\frac{1}{n+m+1}\frac{1}{\binom{n+m}{n}} \qquad (4)$$

Dado que, como puede verse de forma obvia,

$$(n+1)\binom{n+m+1}{n+1} = (n+m+1)\binom{n+m}{n}$$

podemos poner la igualdad (4) en la forma:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{n+k+1}=\frac{1}{n+1}\frac{1}{\binom{n+m+1}{n+1}} \qquad (5)$$

o bien de forma más sencilla:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n\binom{n+m}{n}} \qquad (6)$$

Como casos particulares se obtienen†:

a) n = 1 , m = n $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{n+1} \qquad (7.1)$$

b) n = m $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\frac{1}{\binom{2n}{n}} \qquad (7.2)$$

Restando (7.2) de (7.1), se obtiene, obviamente,

---

† Se mantiene ahora la notación en k+1 para evitar el problema con k=0

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{(n+k)(k+1)}=\frac{1}{(n-1)}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n\binom{2n}{n}}\right] \qquad (7.3)$$

2. Segundas sumas

Si hacemos el cambio de variable $x \to \sqrt[n]{x}$ en la integral (2.1), ésta queda en la forma

$$\int_0^1 dx\frac{1}{n}\left(1-\sqrt[n]{x}\right)^{m-1}$$

El valor de esta integral es, según (2.1),

$$\frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

Por tanto, se obtiene trivialmente la igualdad:

$$\int_0^1 dx\left(1-\sqrt[n]{x}\right)^m=\frac{n!m!}{(n+m)!}=\frac{1}{\binom{n+m}{n}} \qquad (8)$$

Obviamente, de la propiedad de igualdad de los números combinatorios complementarios, se deduce a partir de (8) la igualdad:

$$\int_0^1 dx\left(1-\sqrt[n]{x}\right)^m=\int_0^1 dx\left(1-\sqrt[m]{x}\right)^n \qquad (9)$$

Podemos hacer un desarrollo por el binomio de Newton en el integrando de (8) de dos formas distintas. De la primera obtenemos de forma sencilla:

$$\int_0^1 dx\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}x^{k/n}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\int_0^1 dx\ x^{k/n}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{n}{n+k}$$

A partir de la igualdad (8) se deduce obviamente la igualdad (6) ya obtenida anteriormente :

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n\binom{n+m}{n}} \qquad (10)$$

Es por tanto más interesante hacer el desarrollo de Newton intercambiando los términos:

$$\int_0^1 dx\ \left(1-\sqrt[n]{x}\right)^m = \int_0^1 dx\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\binom{m}{k}x^{m-k/n} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\binom{m}{k}\int_0^1 dx\ x^{\frac{m-k}{n}} =$$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\binom{m}{k}\frac{n}{n+m-k}$$

Obtenemos a partir de (8):

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{m+n-k}=(-1)^m\frac{1}{n\binom{m+n}{n}} \qquad (11)$$

Como caso particular se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{2n-k}=(-1)^n\frac{1}{n\binom{2n}{n}} \qquad (12)$$

3. Otras sumas

A partir de las relaciones obtenidas y operando con las mismas podemos obtener los valores para otras interesantes sumas. Así, por ejemplo, sumando (12) y (7.2), se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{(n+k)(2n-k)}=\frac{1}{3n^2\binom{2n}{n}}\left[1+(-1)^n\right] \qquad (13.1)$$

Obviamente, si $n \neq \dot{2}$, la suma es nula idénticamente.

Si restamos (7.2) de (12), se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{2k-n}{(n+k)(2n-k)}=\frac{1}{n\binom{2n}{n}}\left[(-1)^n-1\right] \qquad (13.2)$$

que obviamente es nula si $n = \dot{2}$.

Ahora bien la anterior igualdad lleva a la siguiente :

$$2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{k}{(2n-k)(n+k)}-n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{(2n-k)(n+k)}$$
$$=\frac{1}{n\binom{2n}{n}}\left[(-1)^n-1\right]$$

Por tanto, se obtiene de forma trivial, dado que conocemos el valor del segundo término del miembro de la izquierda:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{k}{(2n-k)(n+k)}=\frac{1}{3n\binom{2n}{n}}\left[2(-1)^n-1\right] \qquad (14)$$

Referencias

[1] J. Mathews, R.L. Walker (1979), *Matemáticas para físicos.* Ed. Reverté.

La Matemática en la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas

Francisco A. González Redondo
Dpto. Álgebra. Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
faglezr@edu.ucm.es

Abstract

At the beginning of 20th century, universities in Spain were not able to give Society the necessary scientific and cultural regeneration needed after 1898 "disaster". Once institutionalized Spanish mathematics activities through the Sociedad Matemática Española (1911), original mathematical research and teaching innovation found their place at the Junta para Ampliación de Estudios. This institution, whose first centenary is being celebrated during 2007, gave birth in 1915 to what was to be known as the Laboratorio Seminario Matemático, the first mathematical centre in our country.

1. El espíritu regeneracionista

La progresiva decadencia española experimentada desde nuestro "glorioso" siglo XVI, culminada con el "desastre" de 1898, dio lugar durante las últimas décadas del siglo XIX a diferentes iniciativas que se acabaron resumiendo en lo que se conoce como "regeneracionismo", un deseado renacimiento nacional que solamente se concebía mediante la apertura de España a la Ciencia y la Educación europeas.

La primera actuación correspondió a un pequeño grupo de catedráticos, herederos del sentimiento más ilustrado e imbuidos del pensamiento krausista, quienes, separados de sus puestos por no plegarse a las restricciones a la libertad de cátedra impuestas en 1875, concibieron un mundo universitario privado *al margen* del sistema, la *Institución Libre de Enseñanza*. Pero sus propósitos regeneracionistas fundacionales se fueron diluyendo, hasta concretarse únicamente en un centro de Educación primaria y secundaria y un espíritu, el "institucionismo", que animará todas las reformas posteriores.

La segunda vía de regeneración por la Educación, en este caso *dentro* de y *para* el sistema, la emprendieron los conservadores presididos por Francisco Silvela con la creación del *Ministerio de Instrucción Pública* en 1900. Aquí el encuentro con la Ciencia internacional se confiaba a la Universidad ya existente, pero con nuevas estructuras, mayores atribuciones y mejores dotaciones que se irían concretando en los años siguientes.

La tercera se gestaría cuando los institucionistas, especialmente Francisco Giner de los Ríos, se decidieron a influir *desde* el "sistema"; germinaría en diciembre de 1906 con la inclusión de la partida correspondiente en el Presupuesto de Instrucción Pública para 1907 en los momentos finales del gobierno liberal de Antonio de Aguilar; y fructificaría un mes después en la *Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas*.

Efectivamente, el 11 de enero de 1907 nacía esta entidad pública autónoma, dedicada a la investigación y la enseñanza superior… pero al margen y sin las obligaciones de las universidades existentes. Con Santiago Ramón y Cajal como Presidente y José Castillejo en la Secretaría, contemplaba una Junta Directiva con 21 vocales… que Giner consideraba un "voluminoso cuerpo decorativo", delegando en el personalismo de Castillejo la necesaria continuidad en la labor emprendida de encuentro cultural y científico con los países más avanzados de nuestro entorno tras siglos de ensimismamiento y autocomplacencia.

Las funciones que explicitaba el Decreto eran: 1º el servicio de ampliación de estudios dentro y fuera de España; 2º las delegaciones en congresos científicos; 3º el servicio de información extranjera y relaciones internacionales en materia de enseñanza; 4º el fomento de los trabajos de investigación científica; y 5º la protección de las instituciones educativas en la enseñanza secundaria y superior. Además, en su desarrollo se le concedían unas facultades hasta entonces inexistentes o reservadas a las Universidades: creación de "centros de actividad investigadora y de trabajo intenso", residencias de estudiantes, "cajas de investigaciones científicas" para difundir los trabajos de los pensionados, etc.

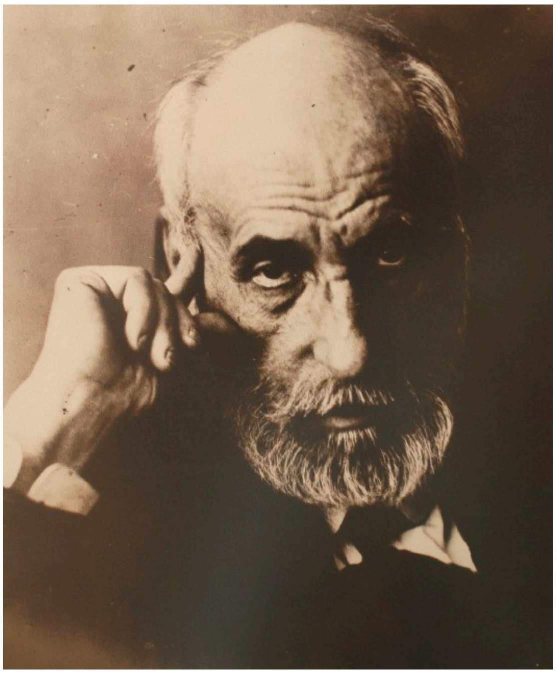
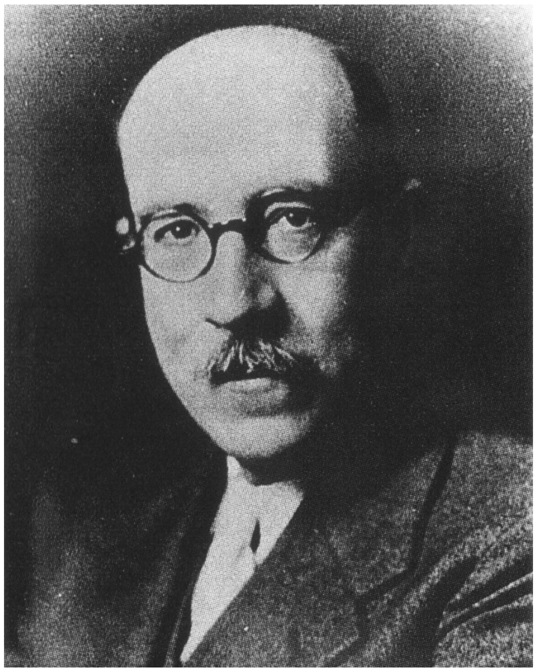
 

Figura 1. Santiago Ramón y Cajal y José Castillejo Duarte.

Las pensiones estaban destinadas tanto a recién titulados como a profesores en ejercicio, y permitían el contacto directo con las más significativas personalidades internacionales de las distintas ramas del saber. En particular, los pensionados formados en el extranjero recibían a su vuelta certificados de suficiencia que les habilitaban "como Auxiliares numerarios para el efecto de tomar parte en las oposiciones a catedráticos en el turno reservado a éstos", privilegio que proporcionaría varias generaciones de profesores a la Universidad.

2. Investigación y Ampliación de estudios en la *Junta*

Después de los tres primeros años de difícil andadura, con unas actividades limitadas a las pensiones, la *Junta* fue creando diferentes centros para realizar las investigaciones científicas y las ampliaciones de estudios que le daban nombre.

El primero de ellos, el *Centro de Estudios Históricos*, nacía por Decreto de 18 de marzo de 1910. Realmente se trató del más "español" de los establecimientos de la *Junta*. En él, importadas, aprendidas y desarrolladas las técnicas y los métodos historiográficos europeos, científicos españoles podían emprender la ingente tarea de determinar el *ser* de España, a través de su Historia, su Arte, su Lengua y su Derecho, para poder contárselo a los propios españoles. Y es que, como decía Unamuno en su *En torno al casticismo*, "España está por descubrir, y sólo la descubrirán españoles europeizados".

El profesorado del *Centro* organizó en secciones los trabajos de seminario y las investigaciones: *Filología* (dirigida por Menéndez Pidal); *Arqueología* (Gómez Moreno); *Instituciones sociales y políticas de León y Castilla* (Hinojosa); *Metodología de la Historia* (Rafael Altamira); *Filosofía árabe* (Miguel Asín Palacios); *Instituciones árabes* (Julián Ribera); *Filosofía contemporánea* (José Ortega y Gasset); *Arte* (Elías Tormo); *Estudios Medievales* (Claudio Sánchez Albornoz); *Estudios semíticos* (Abraham S. Yahuda); *Derecho Civil* (Felipe Clemente de Diego); *Archivo de Literatura contemporánea* (Pedro Salinas); y *Estudios hispanoamericanos* (Américo Castro).

Un nuevo Decreto de 27 de mayo de 1910 dio vida al segundo gran centro de la *Junta*, el *Instituto Nacional de Ciencias Físico-Naturales*, con Santiago Ramón y Cajal de Presidente y Blas Cabrera Felipe de Secretario. Se incorporaban algunos establecimientos ya existentes antes de 1907, como el *Museo Nacional de Ciencias Naturales*, el *Museo de Antropología,* el *Jardín Botánico*, la *Estación de Biología Marina de Santander* y el *Laboratorio de Investigaciones Biológicas* del propio Cajal, que conservaron su personalidad e independencia científica y económica.

Las nuevas dependencias que se crearon en 1910 dentro del *Instituto* fueron el *Laboratorio de Investigaciones Físicas* y la *Estación Alpina de Guadarrama*. A ellos se agregaría en 1912 la *Comisión de investigaciones paleontológicas y prehistóricas*, y el *Laboratorio y Seminario Matemático* en 1915.

El más importante de todos ellos, el *Laboratorio de Investigaciones Físicas*, se organizó en cuatro secciones a medida que los profesores responsables regresaron de sus respectivas pensiones para poner en marcha los métodos aprendidos en Francia, Suiza, Alemania y Holanda: *Electricidad y Magnetismo* (Blas Cabrera), *Espectroscopía* (Ángel del Campo), *Química-Física* (Enrique Moles) y *Termología y Rayos X* (Julio Palacios). *En y desde* España, en pocos años y en esos ámbitos físico-químicos concretos, los grupos coordinados por Blas Cabrera alcanzaron niveles próximos a los de sus colegas europeos.

El *Centro* y el *Instituto* supusieron un gran impulso para la realización de investigaciones originales al modo europeo, tanto en Letras como en Ciencias. También para el ensayo y desarrollo de unas nuevas enseñanzas teórico-prácticas inéditas en las Universidades. Así, a la vez que los Planes de estudio iban adaptando sus materias a las novedades que se introducían a través de la *Junta*, los profesores formados en sus establecimientos iban copando las plazas docentes… con los agravios y conflictos que cabe imaginarse.

3. El Laboratorio Seminario Matemático

En el caso de la Matemática el ámbito de actuación de la *Junta* estuvo reducido en los primeros años a la concesión de pensiones en el extranjero. Así, Julio Rey Pastor viajaba a Alemania en enero de 1914, al poco tiempo de ser nombrado Catedrático de Análisis Matemático en la Universidad Central.

Sin embargo, al desencadenarse en agosto de 1914 la I Guerra Mundial, el Gobierno suspendió todas las pensiones en países de Europa, y utilizó los fondos para intensificar sus tareas dentro de España, recogiendo a los pensionados de Ciencias que vieron interrumpidos sus trabajos en el extranjero. Así, en enero de 1915 encomendaba a Julio Rey Pastor (con la colaboración de Sixto Cámara Tecedor), la organización de Trabajos de investigación y ampliación de Matemáticas en el seno del *Instituto Nacional de Ciencias Físico Naturales*

Así lo hacía contar la JAE en su *Memoria correspondiente a los años 1914 y 1915*, (Madrid, 1916, p. 192):

> *"El grupo, ya considerable, de Laboratorios de Ciencias que la Junta había ido formando en años anteriores, se ha enriquecido en el año 1915 con una importante aportación. El profesor de la Universidad Central D. Julio Rey Pastor, que había hecho su preparación en el extranjero, como pensionado, accedió, invitado por la Junta, a dirigir una Sección de Matemáticas que ha comenzado sus trabajos con éxito [...] Ha recibido alojamiento provisional en uno de los locales de la Junta en el Centro de estudios históricos, hasta que pueda tener su laboratorio propio".*

Esta nueva presencia institucional de la Matemática obligaba, incluso, a que en octubre de 1916 la *Junta* tuviera que adaptar el nombre de la institución que reunía a los Centros científicos, cambiando el de *Instituto Nacional de Ciencias Físico Naturales* por el más general de *Instituto Nacional de Ciencias*, "teniendo en cuenta que existen ya en él y aumentarán cada día más los Laboratorios y cursos de química y matemáticas sostenidos por la Junta". Ese año se incorporó como Director de Trabajos José G. Álvarez Ude, y, al año siguiente, José Mª Plans Freyre, completando el plantel del *Seminario*.

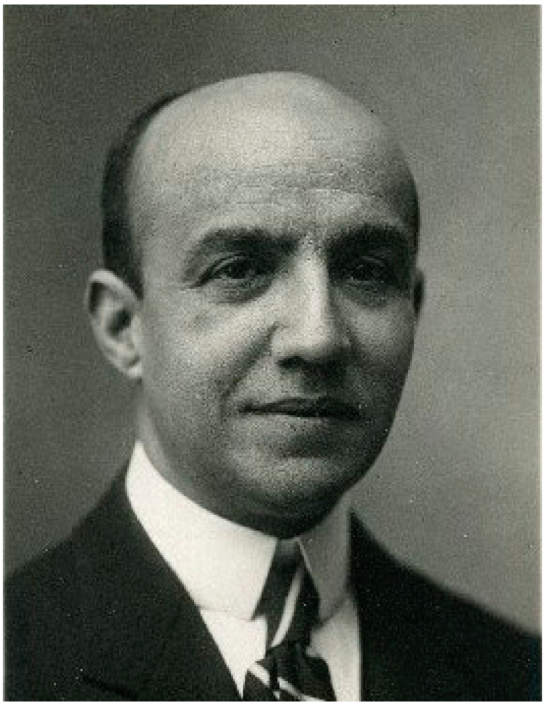


Figura 2. Julio Rey Pastor y José G. Álvarez Ude.

Otras dos instituciones de la *Junta* constituyeron ensayos educativos singulares. La *Residencia de Estudiantes* se creó en mayo de 1910, y, aunque al citarla todos evocamos la estancia en ella de García Lorca, Buñuel y Dalí, sus casi tres décadas de vida estuvieron centradas en otras muchas actividades de carácter bastante más docente y científico que la asemejaron a un verdadero College inglés: acogida de profesores extranjeros, difusión de la cultura científica, investigaciones desarrolladas desde sus numerosos laboratorios, etc.

El *Instituto-Escuela*, nació en mayo de 1918, como "ensayo pedagógico, en el que se aplicarán nuevos métodos de educación y planes de estudios y se ensayarán al mismo tiempo sistemas prácticos para la formación del personal docente, adaptables a nuestro país". Compartía muchos ideales educativos de la *Institución Libre de Enseñanza*, aunque estaba sufragado con los fondos del Estado, y su profesorado era seleccionado con total libertad por la *Junta* entre Catedráticos con plazas en otros institutos. Junto a ellos, los "aspirantes al magisterio" compartían las funciones docentes y otorgaban al *Instituto* la función complementaria de escuela profesional para el profesorado secundario.

5. La Junta entre la Dictadura y la República

Siendo la *Junta* una obra del turno de partidos, la Dictadura de Primo de Rivera intentó ejercer un mayor control sobre sus actividades, imponiendo el nombramiento de parte de sus Vocales. Sin embargo, puede considerarse que esos años fueron verdaderamente fructíferos para los centros. Tras numerosas gestiones realizadas entre 1925 y 1926 se lograría que el *International Education Board* de la Fundación Rockefeller donase los fondos para la construcción del *Instituto de Física y Química* más avanzado de Europa. Complementariamente, entre 1927 y 1928 aprovecharía su situación para adquirir en subasta el Palacio del Hielo y el Automóvil para ubicar el *Centro de Estudios Históricos*, las oficinas de la *Junta*, y el *Laboratorio y Seminario Matemático*. Aquí, ante las ausencias de Rey Pastor (en Argentina la mayor parte del año) y dedicado Álvarez Ude a otros menesteres, sería Plans el encargado de dirigir el centro, con la ayuda de Esteban Terradas una vez que se le concedió una Cátedra en Madrid.

Si durante el Gobierno provisional de la II República la atención prioritaria en Instrucción Pública se centró en la Enseñanza primaria, la llegada de Fernando de los Ríos al Ministerio supuso una época dorada para la *Junta*. En especial, el 6 de febrero de 1932, tras asumirse presupuestariamente el compromiso adquirido por el Estado español con la Fundación Rockefeller en plena Dictadura, se inauguraba oficialmente el *Instituto Nacional de Física y Química*. Con él la *Junta* culminaba el proceso de convergencia científica con Europa que se propuso en 1907. A partir de entonces, serían los investigadores alemanes, franceses, etc., los que vendrían a España para aprender Física y Química con Blas Cabrera, Enrique Moles, Julio Palacios, Miguel Catalán o Antonio Madinaveitia. El objetivo parecía alcanzado.

Nuestros investigadores matemáticos, por el contrario, se encontraban faltos de una dirección establecida en el Laboratorio. Rey Pastor fue prácticamente expulsado de la Cátedra por las autoridades republicanas, poco dispuestas a tolerar sus prolongadas ausencias y la desatención consiguiente de sus obligaciones; Terradas había sido desposeído de su Cátedra madrileña y suspendido en el posterior concurso para cubrirla debidamente mediante oposición, por lo que volvió a su puesto en la Universidad de Barcelona; y, para complicar el panorama, José María Plans enfermaba gravemente.

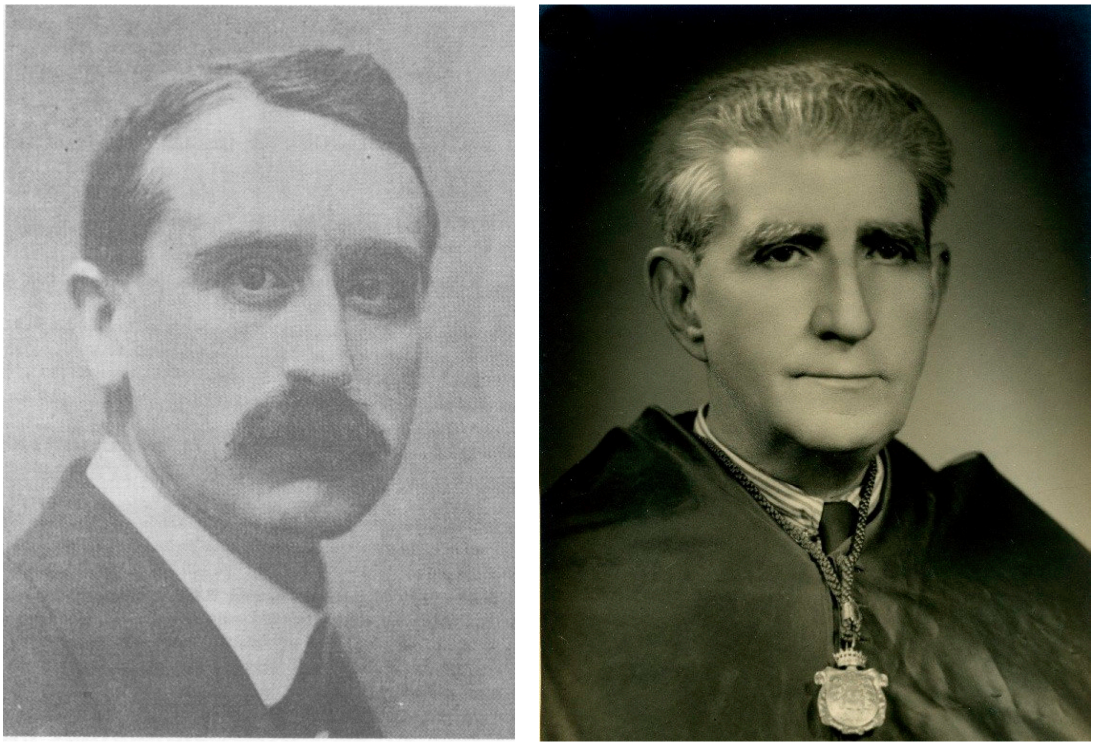


Figura 3. José Mª Plans Freyre y José Barinaga Mata.

Fallecido Cajal en 1934, asumió la Presidencia de la *Junta* Ignacio Bolívar Urrutia, mientras Castillejo era sustituido en la Secretaría por Ramón Prieto Bances, Catedrático institucionista en Oviedo, Subsecretario y Ministro de Instrucción Pública durante el también republicano bienio radical-cedista. Ese año también falleció Plans, haciéndose cargo de la dirección del *Laboratorio Matemático* José Barinaga, con la colaboración de Pedro Pineda, que había obtenido recientemente la Cátedra en Madrid tras varios años en la Universidad de Zaragoza. Todos esos cambios afectaron poco al conjunto de la JAE, una institución para entonces perfectamente consolidada e integrada en el sistema educativo nacional, mientras que en el caso de nuestros matemáticos el panorama institucional parecía clarificarse. Pero el 18 de julio de 1936 y la Guerra Civil no tardaron en llegar.

Durante la contienda, la *Junta*, dirigida desde una "Comisión Delegada" radicada, sucesivamente, en Valencia (entre octubre de 1936 y octubre de 1937) y Barcelona (a partir de entonces y hasta principios de 1939), realizó un esfuerzo extraordinario manteniendo activos muchos de sus centros de investigación. Especialmente significativa fue la tarea desarrollada durante esos años en el *Laboratorio Matemático* de la JAE dirigido por Barinaga… pero esas cuestiones ya las hemos ilustrado en las páginas del número 75 de este *Boletín*.

Referencias bibliográficas

[1] AUSEJO, E. Y MILLÁN, A. (1989): "La organización de la investigación matemática en España en el primer tercio del siglo XX: el Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (1915-1938)". *Llull*, Vol. 12, 261-308.

[2] GAMERO MERINO, C. (1988): *Un modelo europeo de renovación pedagógica: José Castillejo*. Madrid, C.S.I.C.-Instituto de Estudios Manchegos.

[3] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2001): "La actividad del *Laboratorio Seminario Matemático* de la Junta para Ampliación de Estudios durante la Guerra Civil". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* Vol. 4 (nº 3), págs. 675-686.

[4] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2007): "Una correspondencia para nuestra Memoria matemática: José Barinaga, Pedro Pineda, Miguel A. Santaló y Ricardo San Juan". *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* nº 75, 55-71.

[5] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2007): "La Junta para Ampliación de Estudios". *Historia de Iberia Vieja* nº 24, 74-77.

[6] SÁNCHEZ RON, J. M. (coord.) (1988): *La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas 80 años después. 1907-1987*. 2 Vols. Madrid: C.S.I.C.

[9] SANCHEZ RON, J. M. (coord.) (1988): *La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones científicas 80 años después*. Madrid: CSIC.

[10] SÁNCHEZ RON, J. M. (1999): *Cincel, martillo y piedra. Historia de la Ciencia en España (siglos XIX y XX)*. Madrid: Taurus.

Un proyecto para el uso del sistema de cómputo algebraico *Maxima* en Educación Secundaria

E. Roanes Lozano[a], J. Cabezas Corchero[b], P. Ortega Pulido[c], E. Roanes Macías[a], C. Romo Santos[d], M. de la Vega Vara[e]

[a] Sec. Dept. Algebra, Facultad de Educación, UCM
{eroanes,roanes}@mat.ucm.es

[b] Profesor de Matemáticas de Educación Secundaria
justocabezas@terra.es

[c] I.E.S. Celestino Mutis de Madrid y
Dpto. Análisis Económico: Economía Cuantitativa, UAM
pedro.ortega@uam.es

[d] Dpto. Algebra, Facultad de Matemáticas, UCM
romosan@mat.ucm.es

[e] I.E.S. Sierra de San Pedro, La Roca de la Sierra, Badajoz
vegava10@hotmail.com

Abstract

An innovative project supported by the regional government has transformed all classrooms of all high schools (12-18 year old students) in Extremadura (Spain) into computer labs, with a personal computer for every two students running a local version of Linux (gnuLinEx). Only free software is allowed to be used in these classrooms. The local government also organizes free courses to introduce the different pieces of software to the teachers (some of them taught by these authors). Despite the situation described can be considered "ideal", the percentage of teachers that really use computer tools in their classes is low. Moreover, among those who use them, the number of lessons treated with the computer is also low. Regarding the use of computer algebra systems, we try to fill this surprising gap by developing a collection of completely finished applications for Maxima that fit in the curricula and can be directly used in such an ideal environment.

1. Introducción

En 2002 la Junta de Extremadura decide migrar todas las actividades informáticas educativas que dependen de ella a software libre [1], desarrollando incluso una versión propia del sistema operativo *Linux*, denominada *gnuLinEx*. En *gnuLinEx* están muy desarrolladas las aplicaciones ofimáticas generales y específicas.

Pero en educación pensamos que existen ciertas facetas que pueden desarrollarse más. Así sucede en enseñanza de las matemáticas. En esta disciplina existen o han existido excelentes sistemas de software libre para diversas áreas (a los que suelen acompañar los habituales manuales de usuario estándar):

- álgebra y análisis (sistemas de cómputo algebraico –CAS–): *Axiom, CoCoA, Singular, Maxima, MuPad Light, YACAS, xcasfr, GAP…*
- cálculo numérico: *Octave*
- geometría (sistemas de geometría dinámica –DGS–): *GeoGebra, DrGeo, Lugares/GDI, Calques3d…*

Pero, aunque es relativamente fácil comenzar a manejar un DGS, no es tan sencillo acercarse por primera vez a un CAS, en especial si queremos llegar a programar aplicaciones. Por supuesto, la formación inicial de cualquier matemático lo capacita para utilizar lenguajes computacionales, pero puede carecer del conocimiento específico necesario para desarrollar las posibilidades de un CAS, en especial como mediador de su actividad en el aula.

Quizás la razón de la dificultad de manejo que presentan los CAS radica en que comienzan a desarrollarse a finales de los '60 (!) para aplicarlos en astronomía y física de altas energías (*Reduce*, *Macsyma*), no en matemáticas y menos aún en educación matemática, por lo que la prioridad no fue inicialmente su facilidad de manejo.

En nuestra opinión, centrándonos en lo que serían los CAS, existe una brecha por rellenar entre el conocimiento del software y su aplicación a la educación matemática, puesto que lo ofrecido a los profesores de Secundaria son:

- herramientas genéricas de software matemático libre muy potente
- manuales de usuario
- cursos de introducción al manejo de la herramienta

y no aplicaciones directas a la práctica docente.

Esta brecha se cubriría, pues, si se proporcionara una colección de aplicaciones ya desarrolladas y directamente aplicables en la praxis educativa, que sirvieran

- de guía para el profesor que posee una mínima experiencia (por ejemplo, que maneja otras aplicaciones o que ha asistido a un curso de introducción a un CAS) y desea sacar provecho de los CAS en su clase de Secundaria

- de punto de partida para que el profesor más experimentado los adaptara o evolucionara o los utilizara como modelo para desarrollar otros materiales.

Ya tenemos experiencia en este tipo de desarrollos, pues algunos investigadores de este proyecto han impartido durante años, dentro de un *Master en Educación Matemática* de la Universidad Complutense de Madrid, un curso semestral de aplicaciones educativas de *Maple* para profesores de Secundaria. En dicho curso se utilizan los textos [2,3].

De la utilidad de un libro del tipo del propuesto da idea el que el libro de introducción a Maple [2] fue, en 2003-2004, uno de los 400 libros más prestados por las bibliotecas de la Universidad Complutense (sin ser libro de texto de ninguna asignatura troncal u obligatoria).

2. Sobre los sistemas de cómputo algebraico

Los sistemas de cómputo algebraico (CAS) [4,5], como *Maple*, *Mathematica*, *Derive*, *MuPad*, *Reduce*, *Axiom*, *Macsyma/Maxima/wxMaxima*…, tienen dos características que los distinguen de los lenguajes informáticos habituales (*C*, *Fortran*, *Pascal*, *Basic*…) y hacen que se clasifiquen en una clase propia [6]:

- pueden trabajar en aritmética exacta (además de en coma flotante): no se producen redondeos en las cifras decimales (por ejemplo de los racionales periódicos y de los irracionales), ni de los números muy grandes; se trabaja como es habitual en matemáticas (con fracciones, raíces, valores trigonométricos, etc.), en lugar de considerar un cierto número de cifras fijo para representar todos los números

- pueden manejar variables sin asignación: pueden realizar cómputos con variables en el *sentido matemático*, en lugar de en el sentido habitual en informática, por ejemplo

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

sin asignar previamente valores numéricos a x e y.

Matlab no ofrece estas posibilidades, esto es, no se puede catalogar como un CAS a menos que se adquiera además la *Symbolic Toolbox*, que incluye el *kernel* de una antigua versión de *Maple*, como hacen *Scientific Notebook* o *Scientific Workplace*.

La posibilidad de realizar manipulaciones simbólicas, de mayor nivel de abstracción que realizar *cuentas numéricas,* es la clave para que los CAS ofrezcan posibilidades como: cálculos polinómicos, derivación simbólica, integración simbólica (cálculo de primitivas), cálculos con funciones trigonométricas, lógica…, que hacen que el ordenador sea una herramienta utilísima en áreas como álgebra conmutativa, geometría algebraica, lógica, astronomía, física de altas energías… y, por supuesto, en educación matemática.

Simplificando el reparto del mercado, los tres CAS más difundidos son *Mathematica*, *Maple* y *Derive* (*Mathematica* es posiblemente el más difundido a nivel de empresas, *Maple* a nivel de universidad y *Derive* a nivel de Secundaria y diplomaturas técnicas). Considerando que se trata de software científico, cuentan con una muy amplia difusión: *Mathematica* y *Maple* hablan de cientos de miles de usuarios en todo el mundo (por ejemplo las Universidades Politécnica y Complutense de Madrid poseen "licencias de campus", esto es, para todos los ordenadores del campus, de *Maple*).

Posiblemente el CAS más sencillo de manejar y para el que hay desarrolladas mayor número de aplicaciones educativas es *Derive* [7-9] (de hecho, dos de los investigadores de este proyecto realizaron su tesis doctoral en la aplicación de *Derive* en Educación Secundaria), pero es un software comercial sobre sistema operativo comercial y, sorprendentemente, está a punto de desaparecer (sustituido por *TI-Nspire*). Desde principios de los `90 [10,11] se lleva a cabo una interesantísima experiencia en Austria, donde las autoridades educativas nacionales adquirieron una licencia nacional de *Derive* para todos los centros de Secundaria del país [12] (algo parecido a lo que hizo con *Logo* el *Proyecto Atenea* en los '80 en España).

3. Sobre los sistemas de cómputo algebraico no comerciales

Entre los sistemas de cómputo algebraico no comerciales actualmente disponibles: *Axiom, Maxima/wxMaxima, Asir, YACAS, GAP, xcasfr*… es posiblemente *wxMaxima* el más amigable. Además es multiplataforma, pudiendo utilizarse tanto en *Linux/gnuLinEx* como en el sistema operativo más difundido (algo importante, pues puede que sea este último el que el alumno tenga instalado en el ordenador de su casa).

Maxima [13] presenta una interfaz similar a las de *Maple*, *Mathematica*, *MuPad*…, con una hoja de trabajo en la que se alternan las líneas de *input* (en este caso numeradas y precedidas de `%i)` y las de *output*, con el mismo número que la correspondiente línea de *input*, y precedidas de `%o` (Figura 1). Ello requiere que se conozcan los comandos a utilizar (aunque, por supuesto hay disponible una ayuda electrónica). Un breve manual en español se puede descargar de [14], estando disponible a través de [13] una amplía documentación.

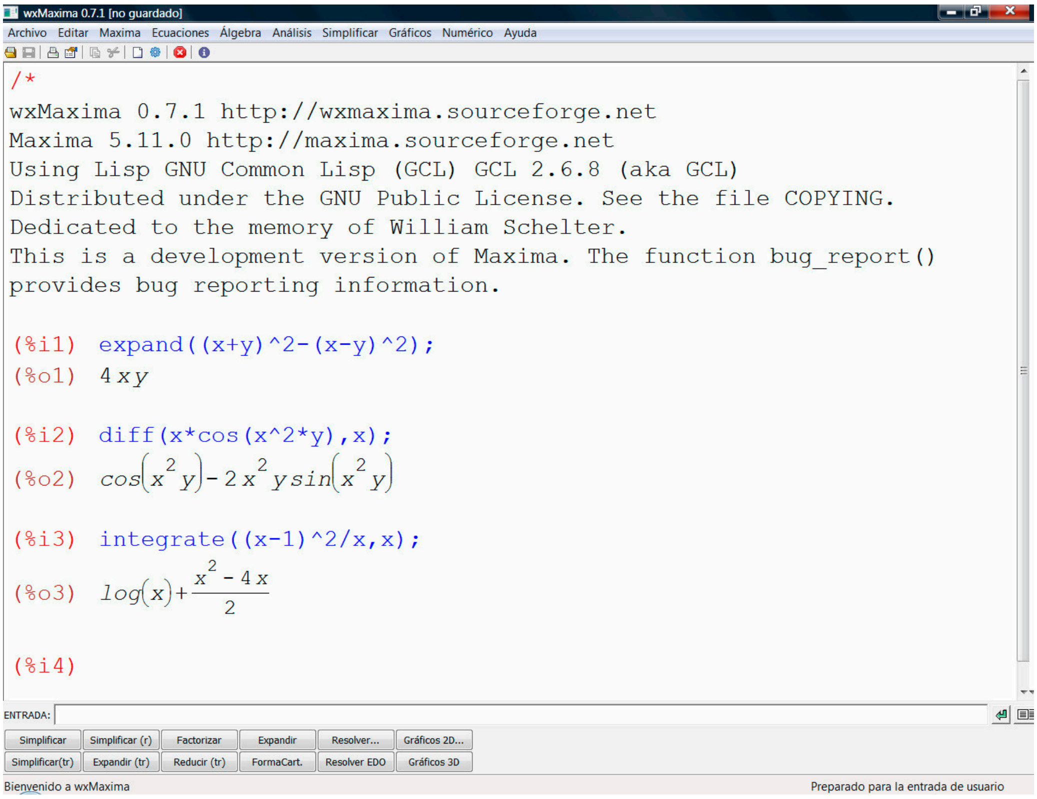


Figura 1: Interfaz de *Maxima*.

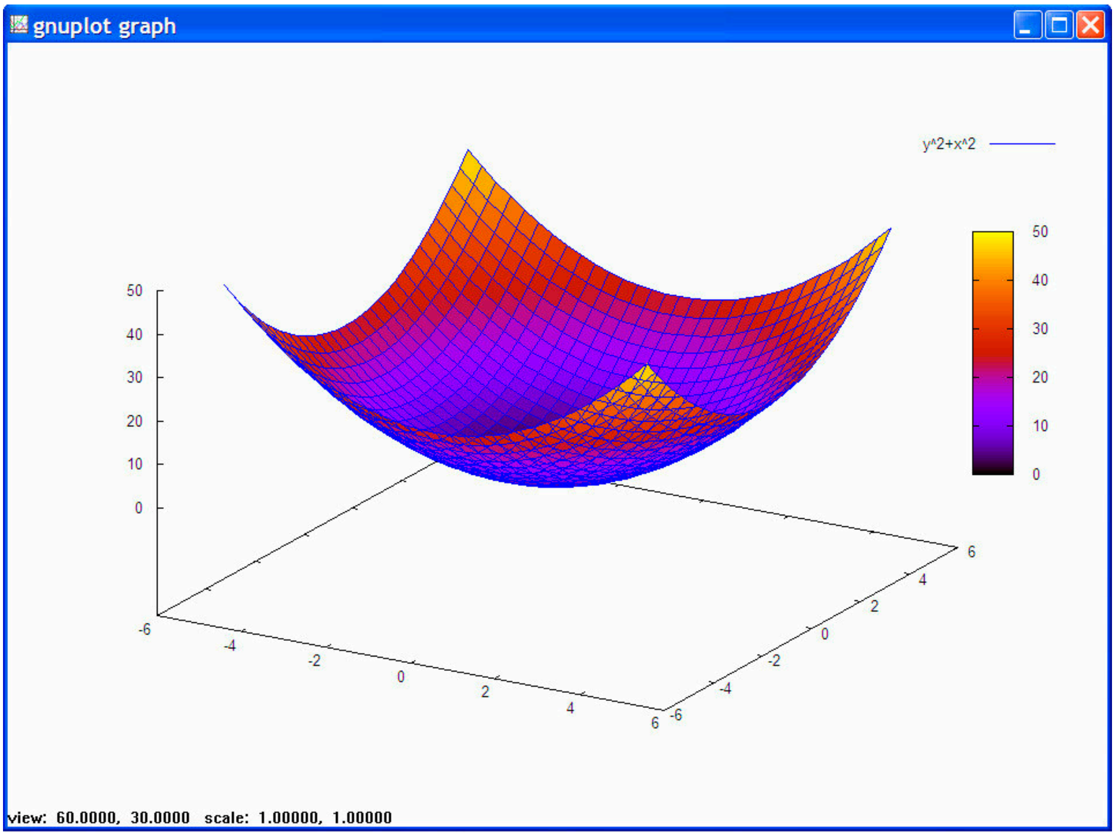


Figura 2: Ejemplo de superficie dibujada por *gnuPlot* por encargo de *Maxima.*

Existe además la posibilidad de representar gráficas 2D y 3D desde *Maxima* mediante el uso de comandos que llaman al paquete *gnuPlot* (Figura 2).

Mientras, la interfaz de *wxMaxima* [15] (Figura 3) parece inspirada en la de *Derive* (*for Windows*) [16], con una "línea de *input*" abajo y una hoja de trabajo encima, y con "paletas" similares a las de *Maple* (Figura 4). Así pues, como ocurre en *Derive*, en *wxMaxima* no hace falta conocer los comandos para poder realizar cómputos (al poder seleccionarse las acciones a realizar en el menú de debajo de la línea de *input* o en la barra gris de la parte superior de pantalla).

Maxima deriva del paquete comercial *Macsyma* y fue mantenido por William Schelter desde 1982 hasta su fallecimiento en 2001. Desde entonces ha seguido siendo desarrollado por un grupo de usuarios y desarrolladores. Ya en 1998 Schelter obtuvo permiso para lanzarlo bajo licencia *GNU General Public License* (*GPL*).

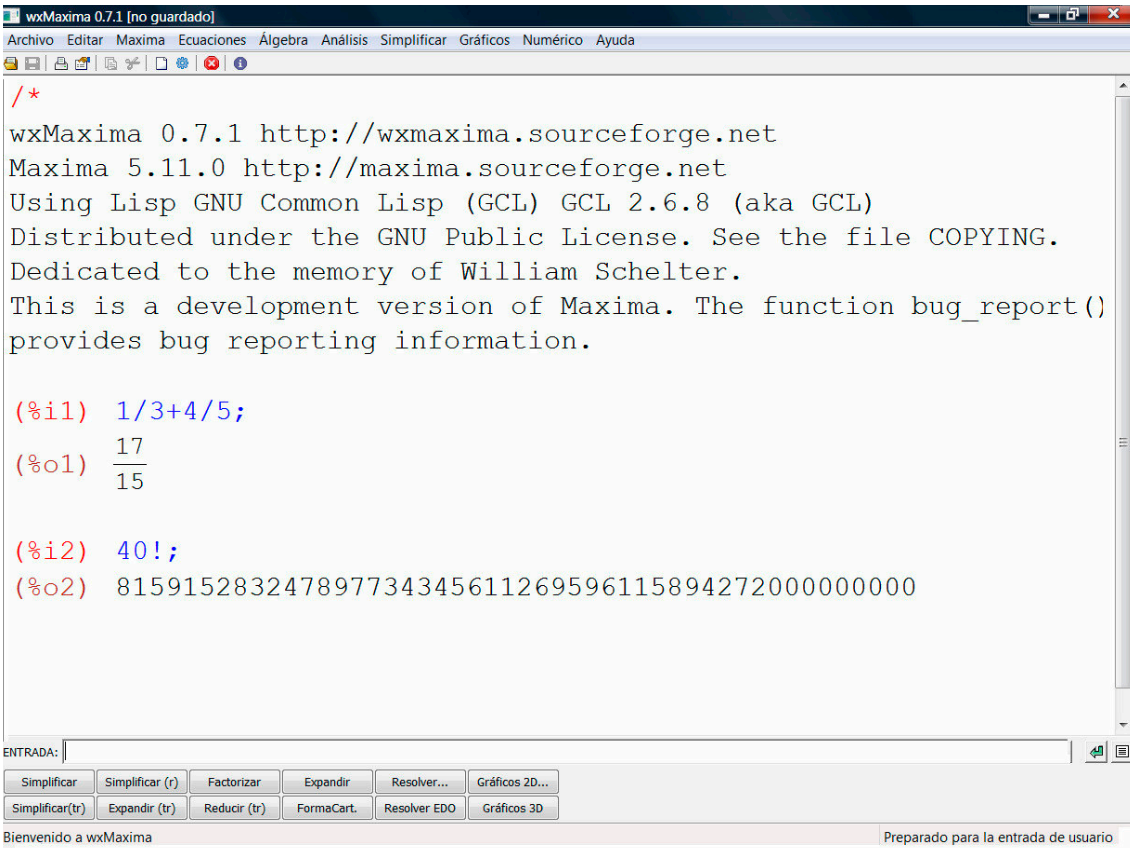


Figura 3: Interfaz de *wxMaxima.*

4. Objetivos y detalles del proyecto

Estamos desarrollando un conjunto de logicales para Secundaria, directamente implementados en el CAS *Maxima* (o en *wxMaxima*), que tratan los temas que consideramos más susceptibles de ser explicados en este nivel con un CAS (desarrollados como materiales para el aula, de forma que sean directamente aplicables en la praxis educativa), que constituirán finalmente un libro.

Tanto el código fuente de los logicales realizados como el libro explicativo serán, una vez desarrollados, software libre. Estos logicales no son homogéneos desde el punto de vista de su extensión o temática, sino que se eligen de acuerdo con la adecuación, interés o novedad que representa la introducción del CAS.

Una condición imprescindible es que puedan ser integrados en el currículum de los centros de Secundaria de la Comunidad Autónoma de Extremadura, por entrar directamente en el currículo oficial o por poder ser enmarcados en la concreción al aula específica del centro o profesor.

Figura 4: Paleta de *wxMaxima* para el comando `plot3d` .

En cuanto a su extensión podríamos distinguir tres tipos de logicales:

- **actividades puntuales** para ser intercaladas en una lección tradicional (un ejemplo podría ser una cuestión sobre grandes números en cuarto de ESO en que hace falta trabajar en aritmética exacta en lugar de en aritmética en coma flotante para visualizar intuitivamente el tamaño de los números manejados)
- **cuestiones concretas** que pueden ocupar más o menos una sesión (un ejemplo de primero de Bachillerato es el cálculo de probabilidades en variable continua)
- **temas que ocupan varias sesiones** (un ejemplo, también de primero de Bachillerato, es la representación de funciones, no usando un comando de dibujo, sino analizando, gracias a las capacidades simbólicas del CAS, máximos, mínimos, puntos de inflexión, asíntotas…)

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente subvencionado por el proyecto de la Junta de Extremadura *Desarrollo de logicales educativos para enseñanza de matemáticas en Educación Secundaria sobre sistemas de cómputo algebraico de software libre*, cuyos investigadores son los autores de este artículo.

Desearíamos expresar nuestro sincero agradecimiento a Carlos Castro Castro, Director General de la Sociedad de la Información (Consejería de Infraestructuras y Desarrollo Tecnológico, Junta de Extremadura) y a Francisco Huertas Méndez, Director del Centro de Nuevas Iniciativas (Consejería de Infraestructuras y Desarrollo Tecnológico, Junta de Extremadura), por su decidido apoyo a este proyecto.

Conclusiones

Las iniciativa de la Junta de Extremadura de transformar todas las aulas de los centros públicos de Secundaria en aulas informáticas ha creado, a nuestro entender, un entorno educativo excelente desde el punto de vista tecnológico. La decisión de que el software usado sea libre ha permitido centrar el presupuesto en la compra de hardware. Se están realizando además cursos de formación en las herramientas informáticas seleccionadas y creemos que, trabajos como el aquí comentado permitirán difundir el uso de las nuevas tecnologías, en este caso del sistema de cómputo algebraico *Maxima*, en las clases de matemáticas de Secundaria.

Bibliografía

[1] URL: `http://linux.slashdot.org/article.pl?sid=06/08/02/0029235&from=rssURL:`

[2] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: *Cálculos Matemáticos con Maple V.5*. Editorial Rubiños, 1999.

[3] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: *Nuevas Tecnologías en Geometría.* Editorial Complutense, 1994.

[4] M.J. Wester (editor): *Computer Algebra Systems: A Practical Guide*. John Wyley, 1999.

[5] T. Recio: *Cálculo Simbólico y Geométrico*. Ed . Síntesis, 1998.

[6] E. Roanes Lozano, Precisión Indefinida y Matemática Elemental, *Bol. Soc. "Puig Adam"* **31** (1992) 33-52.

[7] URL: `http://www.upv.es/derive/english.htm`

[8] URL: `http://www.chartwellyorke.com/deriveb1.html`

[9] J. Cabezas, E. Roanes Lozano: Towards the Abandonment of Statistical Tables, *Pro Dialog* (Journal of the Polish Information Processing Society) **12** (2001) 67-76.

[10] J. Birhm (editor): *Teaching Mathematics with DERIVE , Proceedings of the International School on the Didactics of Computer Algebra* (April 27-30, 1992, Krems, Austria), Chartwell-Bratt Ltd, 1992.

[11] H. Heugl, B. Kutzler (editors): *DERIVE in Education, Proceedings of the Second International Conference on the Didactics of Computer Algebra* (September, 1993, Krems, Austria). Chartwell-Bratt Ltd, 1993.

[12] URL: `http://www.acdca.ac.at/english/index.htm`

[13] URL: `http://maxima.sourceforge.net/`

[14] URL: `http://www.guadalinex.org/modules/mydownloads/viewcat.php?cid=4`

[15] URL: `http://wxmaxima.sourceforge.net/`

[16] URL: B. Kutzler: *Introduction to DERIVE for Windows*. Ed . B. Kutzler, 1996.

Indice de los artículos publicados en los números 51 al 75 de este Boletín (1998-2007)

(El índice de los 50 primeros números fue publicado
en el número 51, de Febrero de 1999)

Nota: La elaboración de este índice ha sido realizada por **Beatriz Barrero Díaz**, mantenedora de la página web de nuestra Sociedad.

Reseña de libros

BALDOMERO RUBIO*: Funciones de variable real.* ISBN: 84-934918-1-0. Depósito Legal: M-52705-2006. Páginas: 354. Publicado por el autor, cuya dirección es: c/ Leopoldo Alas Clarín, 4, Madrid-20035. Su correo electrónico es: baldomero.rubio@gmail.com

Como es sabido, el autor es catedrático de análisis matemático en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, de la que fue Decano.

"Funciones de variable real" puede ser considerado como continuación o segunda parte del libro del mismo autor titulado *"Números y Convergencia. Primeros pasos en el Análisis Matemático*", reseñado en el número anterior de este Boletín.

Esta segunda parte requiere ser puesto en conexión con el primer libro antes mencionado. Efectivamente, el conjunto de los dos ofrece la teoría de funciones de una variable real partiendo de la construcción de los números, desde los naturales hasta los complejos, y de los procesos de convergencia de sucesiones y series, así como productos infinitos. Se llega también a la noción de convergencia uniforme y a los teoremas de Weierstrass, Dirichlet y Abel.

Ya en esta primera etapa se establece la definición de las funciones elementales, e incluso se incorpora el estudio de las funciones racionales reales mediante el teorema constructivo de descomposición de éstas, que no suele encontrarse en los textos habituales de este nivel. La materia de este primer libro constituye el fundamento para el desarrollo en el segundo del Cálculo Infinitesimal de una variable real, imprescindible para iniciarse en el Análisis Matemático.

Con el referido punto de partida puede observarse que el estudio de límites, continuidad, integración y derivadas se realiza con agilidad y elegancia.

Aunque "Funciones de variable real" trata principalmente con las de valores reales, en el último capítulo se consideran asimismo las de valores complejos, para ofrecer también resultados importantes sobre curvas planas; incluso se hace una introducción de la teoría para variable compleja que permite terminar el libro con un estudio detallado de la función exponencial, el teorema fundamental del Álgebra, y series trigonométricas y de Fourier.

Es de destacar que los conceptos fundamentales se establecen inicialmente en el contexto más simple. Así, por ejemplo, la integral se introduce para las funciones continuas, y además se presenta antes que la derivada para independizarla de ésta: sólo después del teorema fundamental del Cálculo aparece la conexión entre ambas nociones, y se tienen entonces los recursos para profundizar en la integración con la teoría de Riemann, integrales en intervalos no compactos, desigualdades integrales y aplicaciones.

A las derivadas se dedica todo el interés que la noción requiere. Merecen ser destacadas la formulación ágil y elegante de los teoremas de L' Hopital (cuya imagen aparece en la portada del libro) y de Taylor. En todo el texto, pero especialmente en el capítulo cuarto, se incluyen muchos ejemplos, ejercicios resueltos y comentarios oportunos. ....

También hay una atención especial a las sucesiones y series de funciones y, en particular, a las series de potencias. Que el contenido del libro es suficientemente completo se pone de manifiesto porque permite incluir en él las pruebas de resultados tan importantes como los teoremas de Wallis y Stirling, la construcción de una función continua que no tiene derivadas, la irracionalidad del número "pi", y los teoremas de Riemann-Lebesgue y Stone-Weierstrass.

El conjunto de ambos textos constituye un material riguroso y original extraordinariamente útil a quienes se inician en el estudio del Análisis Matemático. No es fácil encontrar en una sola obra pruebas precisas de todos los resultados que conforman un primer curso completo de Análisis.

El autor manifiesta su experiencia en la metodología utilizada en la exposición. Huyendo de rigorismos estériles, se mezcla la precisión con la claridad en una composición difícil de hallar en este tipo de publicaciones.

Finalmente, un índice alfabético completo ayuda a localizar cómodamente conceptos y resultados.

El libro puede ser muy útil, no sólo a los alumnos de primer curso de Análisis Matemático, sino también a profesores de matemáticas que deseen actualizar la orientación de sus cursos.

E. Roanes Macías

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65,66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75 y 76.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia.*

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN EN LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

D. .... Teléf.: ....
Dirección: ....
Ciudad: .... Cod. Postal: .... E-mail: ....
Centro de trabajo: ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco: ....
Dirección de la Sucursal: ....
para que cargue en mi cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 2006-2007 y siguientes.

Fecha: .... de .... de 2007

Firma:

La cuota anual está actualmente establecida en 40 euros (de ellos, 21 euros como cuota de la Sociedad «Puig Adam» y 19 euros como cuota de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, por la que se recibe la revista SUMA).
Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/. Carranza, 5 - 28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

ORDEN DE DOMICILIACIÓN EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha: .... BANCO: ....
Sucursal o Agencia: .... en: ....
Dirección de esta: ....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam", de profesores de Matemáticas hasta nueva orden. Les saluda atentamente:

Firma:

Nombre y Apellidos: ....
Dirección: ....
Remítanse ambas partes (toda esta página) a nuestra sede:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matematicas
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.