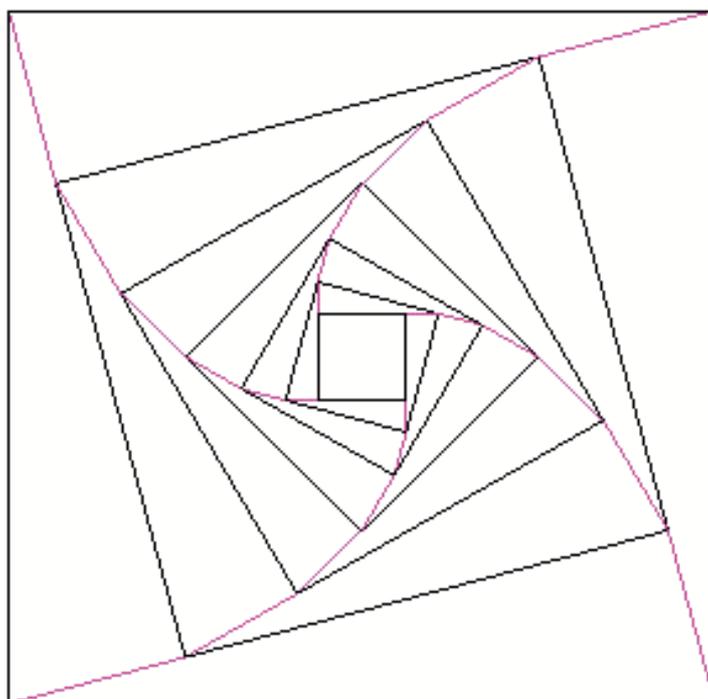


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»  
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 75  
FEBRERO DE 2007**

## ÍNDICE

	<u>Págs.</u>
Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2007 .....	4
Nota sobre la cuota anual de la Federación .....	4
XXV Concurso de Resolución de Problemas .....	5
VI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, por <i>Juan Jesús Donaire Moreno</i> y <i>Joaquín Hernández Gómez</i> .....	6
Problemas Propuestos en la Primera Fase de la XLIII Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid .....	8
Recensiones en “Zentralblatt (ZDM)” y en “Mathematical Reviews” .....	9
Nuestro sitio Web: <a href="http://www.sociedadpuigadam.es">http://www.sociedadpuigadam.es</a> , por <i>Beatriz Barrero Díaz</i> y <i>José María Sordo Juanena</i> .....	11
Extensión a 3D del teorema de Desargues, sustituyendo triángulos por tetraedros, por <i>E.Roanes Macías</i> , <i>E.Roanes Lozano</i> y <i>J.Fernández Biarge</i> .....	13
Algunas desigualdades para la función Gamma de Euler, por <i>Juan Bosco Romero Márquez</i> .....	29
Proyecciones estereográficas y Geometrías en el plano, por <i>Santiago Mazuelas Franco</i> .....	37
Una correspondencia para nuestra <i>Memoria</i> matemática: José Barinaga, Pedro Pineda, Luis Santaló y Ricardo San Juan, 1936-1939, por <i>Francisco González Redondo</i> .....	55
Sobre la colaboración de sistemas de geometría dinámica y de álgebra computacional y el nuevo sistema Geometry Expressions, por <i>Eugenio Roanes Lozano</i> .....	72
Reseña de libros .....	91
Instrucciones para el envío de originales .....	94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín .....	95
Boletín de inscripción .....	96

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecen en  
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews**

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).  
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS  
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)  
Despacho 3005  
C/ Rector Royo Villanova, s/n  
28040 - Madrid  
Teléf. y fax: 91 394 62 48  
e-mail: puigadam@mat.ucm.es  
Página web: [www.ucm.es/info/secdealg/puigadam](http://www.ucm.es/info/secdealg/puigadam)  
Nueva página web en preparación (en servicio parcial):  
<http://www.sociedadpuigadam.es>

## **JUNTA DIRECTIVA**

**Presidente:**

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

**Vicepresidentes:**

EUGENIO ROANES MACÍAS

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

**Vocales:**

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE

(Redacción de publicaciones)

ENRIQUE RUBIALES CAMINO

(Relaciones Institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO

(Gestión de publicaciones)

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

(Actividades y concursos)

**Secretario:**

JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

**Vicesecretaria:**

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

**Tesorero:**

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

**Mantenedoras página web:**

BEATRIZ BARRERO DÍAZ

CAROLINA BRAVO SANZ

# Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2007

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2007 para el sábado *día 14 de abril del 2007*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

## ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos, si procede.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

## Nota sobre la cuota anual de la Federación

Como ya saben nuestros socios, la cuota anual consta de dos partes: la de la nuestra Sociedad, que está establecida desde hace años por la Asamblea General en 21 euros anuales, y la que se abona a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Esta última ya fue elevada el pasado año de 12 a 19 euros, lo que supone automáticamente que el recibo anual que se pasa asciende a 40 euros, lo mismo que el pasado año 2006.

**La Junta Directiva**

# XXV Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

**la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y el  
Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias**

## BASES DEL CONCURSO

**Primera:** Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

- a) *Primer nivel:* alumnos de 3º de E.S.O.
- b) *Segundo nivel:* alumnos de 4º de E.S.O.
- c) *Tercer nivel:* alumnos de 1º Bachillerato

**Segunda:** Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *9 de junio del 2007* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

**Tercera:** A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

**Cuarta:** Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 9 de Mayo del 2007, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

*Prof. Javier Etayo Gordejuela  
Departamento de Algebra  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
28040-Madrid      Fax: 91 394 4662  
Correo electrónico : [jetayo@mat.ucm.es](mailto:jetayo@mat.ucm.es)*

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

**Quinta:** Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2006-2007.

# VI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

El penúltimo sábado de noviembre, al igual que en los últimos cinco años, se celebró en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense el VI Concurso Intercentros de Matemáticas, organizado por nuestra Sociedad junto a dicha Facultad.

La participación superó a todas hasta la fecha, 55 centros con un total de 330 estudiantes que, a lo largo de toda la mañana del sábado pensaron, disfrutaron e, incluso, sufrieron cuando sus compañeros de equipo no les pasaban el relevo adecuado.

El Concurso Intercentros se va consolidando a lo largo de los años. Como decíamos en el prólogo del libro que ha editado Nivola con los enunciados y soluciones desarrolladas de los problemas de los cinco primeros años, la participación es razonable para un concurso de este tipo: no es fácil encontrar 55 centros en nuestra Comunidad que dispongan en todos los niveles de ESO y Bachillerato de estudiantes buenos, con ilusión y dispuestos a sacrificar la mañana del sábado, pero lo que nos asegura que estamos en el buen camino es el entusiasmo que demuestran estos más de 300 estudiantes.

Hubo centros y chicos que destacaron especialmente. Aquí los tenéis:

## **Centros Ganadores**

1. Liceo Francés
2. Colegio Ntra Sra de Las Maravillas
3. Colegio San José del Parque

## **Estudiantes Ganadores**

### Primer Nivel (1º y 2º de E.S.O.)

Empate para el primer puesto (por orden alfabético):

1. Miguel García Bravo (2º ESO, Colegio Vedruna)
1. Jaime Mendizábal Roche (1º ESO, IES Ramiro De Maeztu)
1. Julio Teigell Tobar (2º ESO, IES San Juan Bautista)

### Segundo Nivel (3º Y 4º E.S.O.)

1. Rubén Jiménez Benito (4º ESO, IES José Hierro, Getafe)
2. Moisés Herradón Cueto (3º ESO, Colegio Brains)

### Tercer Nivel (Bachillerato)

1. Manuel López Sheriff (2º Bach, Colegio Arturo Soria)
2. Diego Izquierdo Arseguet (1º Bach, Liceo Francés)

Los enunciados de esta VI edición los podéis encontrar en nuestra página web:  
[www.sociedadpuigadam.es](http://www.sociedadpuigadam.es)

El año próximo, penúltimo sábado de noviembre, volveremos con ilusiones renovadas.

**Juan Jesús Donaire Moreno**  
**Joaquín Hernández Gómez**

# Problemas propuestos en la Fase Local de la XLIII Olimpiada Matemática Española

## Problema 1

Demostrar que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares, todos del mismo tamaño.

## Problema 2

Entre los 2007 primeros enteros positivos elegimos 1005 cualesquiera. Demostrar que seguro que hay al menos dos de estos 1005 cuya diferencia es 4.

## Problema 3

Demostrar que, en un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

## Problema 4

Consideramos un triángulo isósceles  $ABC$  con  $AC = BC$ , y un punto  $D$  fuera del triángulo tal que el ángulo  $\angle ACB$  sea el doble del ángulo  $\angle ADB$ . La recta  $AD$  corta a  $BC$  en el punto  $E$  con  $CE = 2$  y  $EB = 1$ . Calcular el producto  $AE \cdot ED$

## Problema 5

Encontrar todas las soluciones enteras posibles,  $x$  e  $y$ , de la ecuación:

$$p(x + y) = xy$$

siendo  $p$  un cierto número primo.

## Problema 6

Sea  $a_n = 1 + n^3$  la sucesión  $\{2, 9, 28, 65, \dots\}$  y  $\delta_n = \text{mcd}(a_{n+1}, a_n)$  Hallar el máximo valor que puede tomar  $\delta_n$ .

*Nota:* La Crónica con los ganadores se publicará, una vez que se haya calificado, en le próximo número del Boletín.

# Recensiones publicadas en ZDM

Vol. 38 (5) de 2006

- #3220 (sección K20) *Vertere seria ludo*, por *J.J. Etayo Miqueo*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 68 (2004) 11-16.
- #3115 (sección G90) Sobre la descripción de un sólido convexo mediante su planta, alzado y vista lateral, por *J.F. Biarge*, Boletín 68 (2004) 17-21.
- #2644 (sección A30) Bradwardine y Oresme. Dos grandes matemáticos europeos de finales de la Edad Media, por *C. Romo*, Boletín 68 (2004) 22-30.
- #2850 (sección D30) Una visión de los recursos tecnológicos para la clase de matemáticas, por *E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano, J. Cabezas*, Boletín 68 (2004) 31-53.
- #2645 (sección A30) El primer matemático, por *J. Peralta*, Boletín 68 (2004) 54-77.
- #2646 (sección A30) Pensamiento simbólico y Matemática en el Paleolítico Superior, por *F.A. González Redondo, E. Silbán*, Boletín 68 (2004) 78-93.
- #3109 (sección G73) Introduction to conics with Cabri 3D, por *H. Schumann*, Boletín 70 (2005) 18-33.
- #2851 (sección D30) Como homenaje a Miguel de Guzmán: Algunas reflexiones sobre educación matemática, por *B. Rubio*, Boletín 70 (2005) 34-46.
- #3116 (sección G90) Un método recursivo para construir cadenas de Steiner de circunferencias, por *E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano, F. Botana, J.F. Biarge*, Boletín 70 (2005) 47-64.
- #3117 (sección G90) Un problema usual de máximos y mínimos, por *J. Cabezas, M<sup>va</sup>. Vara*, Boletín 70 (2005) 65-71.
- #2752 (sección C30) El problema del tablero mutilado: una resolución a través de perspicacia (insight), por *A. Hernando, L. de Ledesma, L.M. Laíta*, Boletín 70 (2005) 72-79.

- #3155 (sección H65) Una estrategia didáctica para incorporar un programa de cálculo simbólico en el aula de Matemáticas, por *P. Ortega*, Boletín 70 (2005) 80-92.
- #2886 (sección D40) La visualización en la obra de Miguel de Guzmán, por *A. García, F. García, G. Rodríguez, A. de la Villa*, Boletín 71 (2005) 12-30.
- #3156 (sección H65) Raíz cuadrada de una matriz, por *E. Rubiales*, Boletín 71 (2005) 31-46.
- #2852 (sección D30) El proyecto Descartes: matemáticas interactivas en internet, por *A. Núñez*, Boletín 71 (2005) 47-64.
- #2647 (sección A30) El nacimiento de la geometría: los Elementos de Euclides, por *C. Romo*, Boletín 71 (2005) 65-72.
- #3034 (sección G40) La experiencia y el arte de descubrir en geometría, por *J.B. Romero*, Boletín 71 (2005) 73-82.
- #2648 (sección A30) Razones para estudiar historia de la matemática, por *R. Moreno*, Boletín 71 (2005) 83-90.
- #3118 (sección G90) Redes de Steiner de esferas, por *J.F. Biarge*, Boletín 72 (2006) 14-26.
- #3080 (sección G50) Transformación que alinea los centros de tres esferas preservando tangencias, por *E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano*, Boletín 72 (2006) 27-38.
- #3363 (sección N40) Sobre el método Monte-Carlo basado en funciones de densidad, por *J.C. Cortés y G. Calbo Sanjuán*, Boletín 72 (2006) 39-53.
- #3221 (sección K20) Una fórmula sencilla para demostrar o generar identidades combinatorias, por *Luis González*, Boletín 72 (2006) 54-63.
- #3153 (sección H60) Programa TCP para la enseñanza de las transformaciones geométricas en el plano, por *J. Fábrega, C.M<sup>a</sup> Morillo*, Boletín 72 (2006) 64-75.
- #2649 (sección A30) Sobre la noción de continuo en las matemáticas medievales, por *P. Martín Prieto*, Boletín 72 (2006) 76-88.

Nuestro sitio Web:  
<http://www.sociedadpuigadam.es>



En la Asamblea General Ordinaria, de 22 de abril de 2006 de la Sociedad, se aprobó realizar un gasto para contratar un hosting y una dirección IP, con el fin de poder crear un sitio Web. Pues bien, ya podemos decir que esta ilusión está cumplida:

<http://www.sociedadpuigadam.es>

Lo hemos dividido en cinco secciones:

### ***La Sociedad Puig Adam***

Tenemos lo relativo a la Sociedad, como pueden ser su historia, sus miembros, sus fines, quienes conforman su Junta Directiva, lo relativo a D. Pedro Puig Adam, y la inscripción de socios.

### ***El Boletín***

Por ahora podéis encontrar todo lo relativo a los boletines y sus resúmenes desde el número 50 (octubre de 1998).

## **Los concursos**

Donde figuran los concursos donde la Sociedad interviene. Entre ellos La Olimpiada Matemática, el Concurso de Primavera, el Concurso Puig Adam y el Concurso Intercentros de la Comunidad de Madrid.

## **Las noticias**

Con esta sección pretendemos, muy pronto, que los propios socios incorporen las noticias que crean convenientes al sitio Web y sea un sitio participativo y dinámico.

## **Los enlaces de interés**

Es aquí donde queremos tener todas las direcciones Web de profesores de matemáticas y de Departamentos de Matemáticas. Invitamos a todos los que tengan página Web, o un enlace de interés a alguna página en concreto, nos lo comuniquen con el fin de ser incluida.

Como el sitio Web es dinámico (PHP y MySQL) vamos a ir incorporando más interactividad y más secciones, por lo que estamos abiertos a escuchar todo tipo de propuestas que sean para la mejora del sitio

[web@sociedadpuigadam.es](mailto:web@sociedadpuigadam.es)

También queremos pedirnos un poco de paciencia ya que el trabajo de profesores no nos permite entregarnos al 100%.

Estamos seguros que este sitio Web va a ser muy bien acogido por parte de todos los socios.

**Beatriz Barrero Díaz**  
**José María Sordo Juanena**

# Extensión a 3D del teorema de Desargues, sustituyendo triángulos por tetraedros. \*

**E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano**

Sec. Dept. Algebra, Fac. Educación UCM  
{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

**J. Fernández Biarge**

Catedrático Emérito de la UPM  
jfbiarage@telefonica.net

## Abstract

*The extension to 3 dimensions of Desargues theorem, substituting triangles by tetrahedrons, is treated. Given two tetrahedrons in perspective position from a point, the homology centered in this point that applies the vertices of one of the tetrahedrons over the vertices of the other one can be considered. Then the corresponding edge-lines in this homology are intersecting lines and their six points of concurrence are coplanary and they are vertices of a complete quadrilateral. As classical 2D Desargues theorem the inverse of this theorem of homological tetrahedrons is itself. After an experimental solution of the problem using a computer algebra system, several elementary proves of the theorem obtained are shown: a synthetic proof, an analytic proof and a purely projective proof.*

## Introducción

El problema de los triángulos homológicos de Desargues, que aparece en tratados de Geometría tan dispares como [1, 2, 5, 11], es considerado generalmente como el inicio de la Geometría Projectiva.

---

\*Parcialmente subvencionado por el proyecto *MTM2004-03175* del Ministerio de Educación y Ciencia.

Posiblemente el modo más fácil de probar este teorema 2D sea considerar un tercer triángulo fuera del plano que contiene ambos triángulos homológicos. Pero este no es el problema tratado aquí.

El problema estudiado aquí consiste en extender el teorema clásico de Desargues a 3 dimensiones, substituyendo triángulos por tetraedros, usando métodos elementales.

Recientemente, los dos primeros autores hemos presentado un paquete orientado a tratar problemas relativos a teoremas de configuración en Geometría 3D a fin de analizarlos mecánicamente. Lo hemos aplicado a probar automáticamente el teorema de los tetraedros homológicos [9, 10], usando técnicas inicialmente descritas en [7, 8].

Este trabajo despertó el interés de los tres autores de este artículo por encontrar demostraciones elementales del teorema de los tetraedros homológicos y del hecho de ser también auto-dual.

El presente artículo comienza describiendo el descubrimiento experimental del teorema con la ayuda de un sistema de cómputo algebraico (SCA), pero sin usar demostración automática, como en [9, 10]). Termina mostrando varias demostraciones elementales, que suponemos originales, hasta donde conocemos).

## 1 Planteamiento del problema

Recordemos que el teorema de los triángulos homológicos de Descartes afirma que dados, en el plano, dos triángulos,  $ABC$  y  $A'B'C'$ , en posición perspectiva desde un punto  $O$ , es decir, tales que  $O, A, A'$  sean puntos colineales,  $O, B, B'$  sean colineales y  $O, C, C'$  sean colineales (triángulos homológicos), entonces las rectas que contienen a lados homólogos se cortan en puntos,  $AB \cap A'B'$ ,  $BC \cap B'C'$ ,  $CA \cap C'A'$ , que resultan ser colineales.

Parece pues natural plantearse el problema de si este resultado clásico de dimensión 2 podría, de algún modo, extenderse en dimensión 3 a tetraedros homológicos.

En el espacio proyectivo real de dimensión 3, se consideran un tetraedro,  $ABCD$ , un punto,  $O$  (no situado en ninguno de los planos-cara de  $ABCD$ ), y otro tetraedro,  $A'B'C'D'$ , tales que  $O, A, A'$  sean puntos colineales,  $O, B, B'$  sean colineales,  $O, C, C'$  sean colineales y  $O, D, D'$  sean colineales. Estos

dos tetraedros, en posición perspectiva desde  $O$ , permiten considerar la homología en la que los vértices  $A, B, C, D$  se corresponden respectivamente con los vértices  $A', B', C', D'$ . Siendo esta una configuración similar a la del teorema de los triángulos homológicos de Descartes, parece natural denominarla *configuración de los tetraedros homológicos* y denominaremos *problema de los tetraedros homológicos* al consistente en las siguientes cuestiones relativas a los tetraedros homológicos  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$ :

- 1) ¿son secantes cada recta-arista y su homóloga, es decir,  $AB$  y  $A'B'$ , ... ?
- 2) en caso afirmativo, ¿son coplanarios sus respectivos puntos de intersección?
- 3) en tal caso, ¿cuál es la configuración de tales puntos de intersección?
- 4) ¿es recíproco de sí mismo el teorema obtenido, como ocurre en 2D?

## 2 El problema directo

Comenzaremos analizando experimentalmente el problema directo, planteado en apartados 1, 2 y 3, anteriormente mencionados, para después enunciar el teorema descubierto y terminar mostrando varias demostraciones elementales: una sintética, otra analítica y otra más puramente proyectiva.

### 2.1 Análisis experimental

En el espacio proyectivo real de dimensión 3, vamos a resolver experimentalmente el problema, planteándolo en coordenadas y calculando con ayuda de un SCA. Para ello basta definir sobre el SCA procedimientos que permitan ejecutar automáticamente los siguientes cálculos, usando coordenadas homogéneas:

- lista de coordenadas de un punto definido por sus coordenadas
- ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos dados
- lista de coordenadas de un punto genérico colineal con dos dados
- punto de intersección de dos rectas (secantes) dadas
- sustitución de coordenadas de un punto en las ecuaciones de una recta

Los pasos a seguir se describen abreviadamente a continuación.

PASO 1: Determinación del tetraedro  $ABCD$ .

Eligiendo un sistema de referencia proyectivo apropiado, puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que los vértices del tetrahedron  $ABCD$  son los

puntos:  $A(1, 0, 0, 0), B(0, 1, 0, 0), C(0, 0, 1, 0), D(0, 0, 0, 1)$ . A partir de ellos se determinan las seis rectas-arista,  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$ .

PASO 2: Elección del centro de proyección.

El centro de proyección,  $O$ , ha de ser un punto no perteneciente a ninguna de las caras del tetrahedron  $ABCD$ . En consecuencia, puede suponerse que dicho punto es  $O(1, 1, 1, 1)$ .

PASO 3: Determinación del tetraedro  $A'B'C'D'$ .

Como los vértices  $A', B', C', D'$  han de estar en las rectas  $OA, OB, OC, OD$ , respectivamente, pueden ser definidos como puntos genéricos de dichas rectas, quedando pues determinados por los parámetros  $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$ , de modo que:  $A' = O + \lambda_A(A - O), B' = O + \lambda_B(B - O), C' = O + \lambda_C(C - O), D' = O + \lambda_D(D - O)$ . Cada una de las seis rectas-arista  $A'B', A'C', A'D', B'C', B'D', C'D'$  queda determinada por el par de vértices por los que pasa.

PASO 4: Configuración de los puntos de concurrencia.

Al calcular la intersección de cada par de rectas-arista homólogas, resultan ser secantes. Sus seis puntos de intersección serán denotados en adelante (in accordance with Figure 1):

$$\begin{aligned} P_{ab} &= AB \cap A'B', P_{bc} = BC \cap B'C', P_{ac} = AC \cap A'C' \\ P_{ad} &= AD \cap A'D', P_{bd} = BD \cap B'D', P_{cd} = CD \cap C'D' \end{aligned} \quad (1)$$

Se trata ahora de determinar la configuración de estos seis puntos. La recta que pasa por  $P_{ab}$  y  $P_{ac}$  resulta que también pasa por  $P_{bc}$ , pero no por los otros tres puntos. La recta que pasa por  $P_{ab}$  y  $P_{ad}$ , resulta que también pasa por  $P_{bd}$ , pero no por los otros tres puntos. La recta que pasa por  $P_{ac}$  y  $P_{ad}$ , resulta que también pasa por  $P_{cd}$ , pero no por los otros tres puntos. Y la recta que pasa por  $P_{bc}$  y  $P_{bd}$ , resulta que también pasa por  $P_{cd}$ , pero no por los otros tres puntos.

En consecuencia, los seis puntos de intersección (1) resultan ser vértices de un cuadrilátero completo, de acuerdo con la Figura 2.

*Nota 2.1.* Al mismo resultado se llega eligiendo los puntos iniciales de la configuración de modo que sean puntos propios. Por ejemplo, considerando a  $x_0 = 0$  como plano impropio y eligiendo las coordenadas de esos puntos como sigue:  $A(1, 0, 0, 0), B(1, \beta, 0, 0), C(1, 1, \gamma, 0), D(1, 1, 1, \delta), O(1, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ .

## 2.2 El teorema directo de los tetraedros homológicos

**Definición 2.2.** Los seis puntos de intersección (1), entre aristas homólogas de los tetraedros  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$ , serán denominados en adelante, “puntos de concurrencia” de ambos tetraedros homológicos.

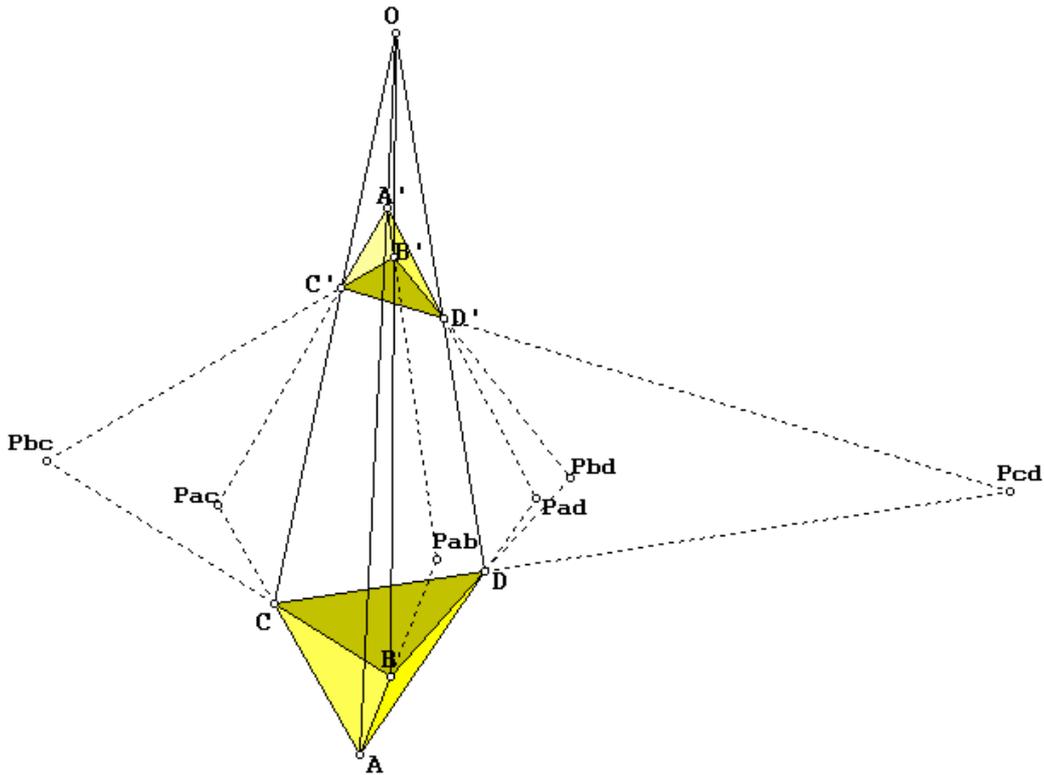


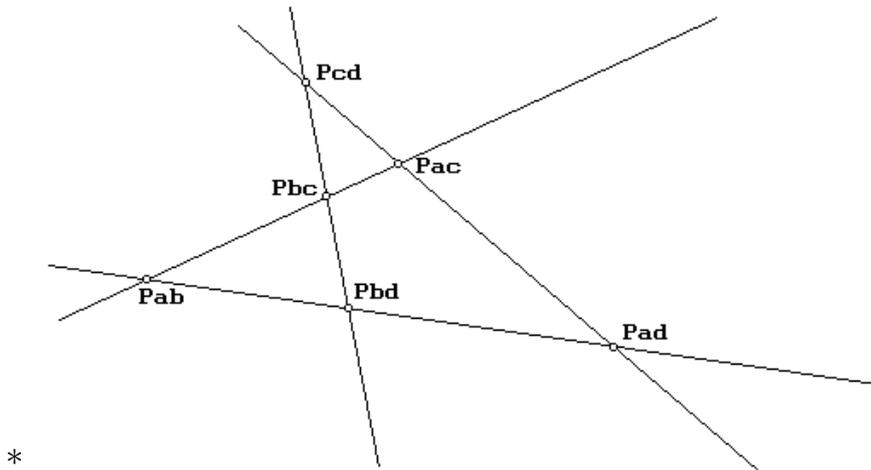
Figura 1: Configuración de los tetraedros homológicos

Los resultados obtenidos en 2.1 se resumen en el teorema siguiente.

**Teorema 2.3.** Sean  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  dos tetraedros, tales que las cuatro rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  concurren en un punto,  $O$ , no situado en ninguno de los planos-caras de  $ABCD$  (Figura 1). Entonces, cada dos rectas-aristas correspondientes son secantes y esos seis puntos de concurrencia (1) son coplanarios, siendo además vértices de un cuadrilátero completo (Figura 2).

Obviamente, los lados de dicho cuadrilátero completo son las rectas de intersección de cada par de planos-caras correspondientes de ambos tetraedros.

Además, cada tres puntos de concurrencia obtenidos intersecando rectas-aristas contenidas en un plano-cara de  $ABCD$  con sus correspondientes rectas-aristas de  $A'B'C'D'$  son colineales y cada tres puntos de concurrencia obtenido intersecando rectas-aristas incidentes con un mismo vértice de  $ABCD$  con sus correspondientes rectas-aristas de  $A'B'C'D'$  no son colineales.



\*

Figura 2: Cuadrilátero completo de los puntos de concurrencia

*Nota 2.4.* Si dos vértices homólogos coinciden, entonces los tres puntos de concurrencia procedentes de rectas-aristas incidentes con dicho vértice, también coinciden (por ejemplo, si  $A' = A$ , entonces  $P_{ab} = P_{ac} = P_{ad}$ ) y, en consecuencia, el cuadrilátero de los puntos de concurrencia tiene tres lados concurrentes. En particular, si tres de los vértices homólogos coinciden, entonces el cuadrilátero de los puntos de concurrencia degenera en un triángulo completo.

### 2.3 Demostración vía geometría sintética

Se trata ahora de resolver el problema de los tetraedros homólogos utilizando técnicas de geometría sintética, basadas en las propiedades usuales de las operaciones de incidencia e intersección de variedades lineales en la geometría proyectiva de 3 dimensiones.

Sean  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  dos tetraedros homólogos, es decir, tales que existe un punto  $O$ , tal que los vértices  $A', B', C', D'$  están en las respectivas rectas  $OA, OB, OC, OD$ . Supondremos que  $O$  no pertenece a ninguna de

las caras de  $ABCD$ . En la demostración se hará uso de la homología de centro  $O$  en que los vértices  $A, B, C, D$  se corresponden respectivamente con los vértices  $A', B', C', D'$ .

Consideremos dos rectas-arista homólogas,  $AB$  y  $A'B'$  por ejemplo. Por estar  $A'$  en la recta  $OA$  y estar  $B'$  en la recta  $OB$ , los cuatro puntos  $A, B, A', B'$  son coplanarios, y en consecuencia las rectas-arista  $AB$  y  $A'B'$  tienen, al menos, un punto común. A los puntos de concurrencia de rectas-arista homólogas los denotaremos del modo indicado en (1). En caso de coincidencia de las dos rectas-aristas homólogas, cualquiera de sus puntos será considerado como punto de concurrencia de ambas.

Consideremos ahora los puntos de concurrencia procedentes de tres rectas-arista incidentes con un vértice común, por ejemplo  $P_{ab}, P_{ac}, P_{ad}$  (procedentes de las rectas-arista  $AB, AC, DC$ , incidentes con el vértice  $A$ ). Esos tres puntos de concurrencia no son colineales, ya que, si lo fueran,  $P_{ac}$  estaría en el plano  $ABD$  (incidente con los puntos  $P_{ab}, P_{ad}$ ), luego la recta que pasa por  $A$  y por  $P_{ac}$  estaría contenida en el plano  $ABD$ , y, por ser colineales los puntos  $A, C, P_{ac}$ , el vértice  $C$  estaría en el plano  $ABD$ , luego  $ABCD$  sería un tetraedro degenerado, en contradicción con la hipótesis. Por tanto, los puntos de concurrencia procedentes de tres rectas-arista incidentes con un vértice común no son colineales.

Consideremos ahora los puntos de concurrencia procedentes de tres rectas-arista incidentes con un plano-cara común, por ejemplo  $P_{ab}, P_{bc}, P_{ac}$  (procedentes de las rectas-arista  $AB, BC, AC$ , incidentes con el plano-cara  $ABC$ ). Como  $AB, BC, AC$  están contenidas en el plano-cara  $ABC$  y sus homólogas,  $A'B', B'C', A'C'$ , están contenidas en el plano-cara  $A'B'C'$ , los puntos de concurrencia  $P_{ab}, P_{bc}, P_{ac}$  están en ambos planos-cara. Por tanto, si ambos planos-cara son distintos, entonces los puntos  $P_{ab}, P_{bc}, P_{ac}$  están en la recta intersección de ambos planos-cara, siendo pues puntos colineales. Y si, por el contrario, ambos planos-cara son coincidentes, entonces se tendría  $A' = A, B' = B, C' = C$  (ya que si, por ejemplo, fuera  $A' \neq A$ , entonces la recta  $AA'$  estaría en dicho plano común, luego  $O$  estaría también en ese plano común, en contradicción con la hipótesis de que  $O$  no está en ninguna de los planos-caras de  $ABCD$ ) y por tanto  $AB$  y  $A'B'$  coincidirían,  $BC$  y  $B'C'$  coincidirían y  $AC$  y  $A'C'$  coincidirían, luego  $P_{ab}, P_{bc}, P_{ac}$  serían cualesquiera puntos de estas tres rectas coplanarias, siendo pues puntos colineales.

Finalmente, denotemos por  $\pi$  al plano incidente con los puntos no colineales  $P_{ab}, P_{ac}, P_{ad}$ . Por ser  $P_{ac}, P_{cd}, P_{ad}$  puntos colineales, el punto  $P_{cd}$  está en la recta  $P_{ac}P_{ad}$  y, en consecuencia,  $P_{cd}$  está en el plano  $\pi$ . De modo similar, por ser  $P_{ab}, P_{bd}, P_{ad}$  colineales, el punto  $P_{bd}$  estará en el plano  $\pi$ ; y por ser  $P_{ab}, P_{bc}, P_{ac}$  colineales, el punto  $P_{bc}$  estará en el plano  $\pi$ .

En resumen, los seis puntos de concurrencia,  $P_{ab}, P_{ac}, P_{ad}, P_{bc}, P_{bd}, P_{cd}$  son coplanarios, siendo además vértices de un cuadrilátero completo (Figura 2).

## 2.4 Demostración analítica en coordenadas proyectivas

En el espacio proyectivo de dimensión 3, sea  $ABCD$  un tetraedro no degenerado y  $O$  un punto no situado en una de sus caras. El sistema de referencia proyectivo puede tomarse de modo que sea  $A(1, 0, 0, 0), B(0, 1, 0, 0), C(0, 0, 1, 0), D(0, 0, 0, 1), O(1, 1, 1, 1)$ .

Otro tetraedro  $A'B'C'D'$ , en situación perspectiva desde  $O$  con el primero, tendrá como vértices  $A'(a, u, u, u), B'(v, b, v, v), C'(w, w, c, w), D'(t, t, t, d)$ , con  $a \neq u, b \neq v, c \neq w, d \neq t$  (ya que ninguno de esos puntos debe coincidir con  $O$ ).

Las rectas-arista  $AB$  y  $A'B'$  tienen en común el punto  $P_{ab}$  de coordenadas  $(vu - va, ub - uv, 0, 0)$ . Análogamente, los demás pares de rectas-arista homólogas tienen en común los respectivos puntos  $P_{ac} = (wu - wa, 0, uc - uw, 0), P_{ad} = (tu - ta, 0, 0, ud - ut), P_{bc} = (0, wv - wb, vc - vw, 0), P_{bd} = (0, tv - tb, 0, vd - vt), P_{cd} = (0, 0, tw - tc, 0, wd - wt)$ .

Como puede comprobarse, estos seis puntos se encuentran en el plano

$$\frac{ux_0}{u-a} + \frac{vx_1}{v-b} + \frac{wx_2}{w-c} + \frac{tx_3}{t-d} = 0 \quad (2)$$

Si  $AB$  y  $A'B'$  coincidiesen ( $u = v = 0$ ), toda la recta estaría sobre el plano (2); lo mismo pasa con otras posibles coincidencias, incluso de las tres aristas de una cara con sus tres homólogas. Excluimos el caso trivial de que los dos tetraedros coincidan.

Además, los tres puntos que no tienen subíndice  $d$ , es decir  $P_{ab}, P_{bc}, P_{ac}$ , están en la recta  $x_3 = 0$  del plano (2), y otro tanto sucede con las otras ternas, por lo que estos puntos son los seis vértices de un cuadrilátero completo.

*Nota 2.5.* Este mismo razonamiento puede extenderse al espacio proyectivo real de  $n$  dimensiones, en el que dos hiper-tetraedros homológicos,  $A_0, A_1, \dots, A_n$  y  $A'_0, A'_1, \dots, A'_n$ , tienen sus rectas-arista homólogas coplanarias, estando sus  $\binom{n+1}{2}$  puntos de concurrencia en un mismo hiperplano.

## 2.5 Demostración puramente proyectiva

De acuerdo con la notación precedente, existe una única colineación que transforma  $ABCDO$  en  $A'B'C'D'O$ . Ésta tiene el punto doble  $O$ . La proyectividad inducida en la radiación de rectas de vértice  $O$  tiene dobles las cuatro rectas distintas  $OA, OB, OC, OD$  y por tanto, es la identidad.

Ahora bien, en el espacio de tres dimensiones una colineación con un punto doble con todas sus rectas dobles, es necesariamente una homología (de acuerdo con el teorema clasificación proyectiva de las colineaciones). En ella, rectas homólogas, se cortan en puntos del plano de homología.

En consecuencia, los puntos de concurrencia de rectas-arista homólogas son coplanarias. De este modo quedan probados los apartados i a iii del teorema 1.

*Nota 2.6.* La generalización natural a  $n$  dimensiones conduce al problema de los dos  $n+1$  vértices  $n$ -dimensionales en posición perspectiva desde un punto,  $O$ . La homología de centro  $O$  en que se corresponden los vértices de ambos posee un hiperplano de puntos invariantes que contiene a los puntos en que se cortan las rectas homólogas. En particular, los rectas-arista homólogas se cortan en  $\binom{n+1}{2}$  puntos, que determinan un  $(n+1)$ -hiperlátero  $(n-1)$ -dimensional completo. Este problema ya aparece implícitamente esbozado en textos clásicos como [4] o incluso [6].

## 3 El problema inverso

El teorema clásico de Desargues 2D es inverso de sí mismo: si los puntos  $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$  son colineales, entonces las rectas-lados  $AA', BB', CC'$  son concurrentes. ¿Será también auto-dual el teorema 2.3 de la sección anterior? Comencemos transcribiéndolo a una versión apropiada para ser analizado de modo similar a como se hizo en la anterior sección 2.

Sean  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  dos tetraedros tales que cada par de rectas-aristas correspondientes,  $AB$  y  $A'B'$ ,  $AC$  y  $A'C'$ , ... sean secantes y sus seis puntos de concurrencia sean vértices de un cuadrilátero completo. ¿Son entonces  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  tetraedros homológicos?

Comenzaremos analizando experimentalmente dicho problema inverso, para después enunciar el teorema descubierto y terminar mostrando dos demostraciones elementales: una sintética y otra puramente proyectiva.

### 3.1 Análisis experimental del problema inverso

Partiendo de un cuadrilátero completo, se van a generar dos tetraedros y se va a considerar una correspondencia biyectiva,  $\phi$ , entre los vértices de uno y los del otro, tal que cada par de rectas-aristas homólogas (es decir, incidentes con vértices correspondientes en  $\phi$ ) sean coplanarias y sus puntos de concurrencia sean los vértices del cuadrilátero completo dado. Se concluirá comprobando los tetraedros así generados son tetraedros homológicos.

Para ello, en el plano,  $\pi$ , del cuadrilátero completo, elegimos tres de sus vértices que sean no colineales y en dos de los lados del cuadrilátero elegimos otros dos vértices del cuadrilátero (no siendo preciso utilizar el sexto vértice que queda determinado por los otros cinco).

Ahora, comenzamos a construir uno de los dos tetraedros, eligiendo una de sus recta-arista de modo que no esté contenida en  $\pi$  y pase por uno de los cinco vértices mencionados del cuadrilátero completo. Sobre dicha recta-arista se eligen ahora dos puntos distintos que serán vértices del tetraedro. Los demás vértices del tetraedro quedan determinados por las relaciones de incidencia (1). El otro tetraedro se construye de modo análogo.

Los pasos a seguir se describen abreviadamente a continuación.

#### PASO 1: Configuración inicial del cuadrilátero completo

Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que  $\pi$  es el plano de ecuación  $x_3 = 0$  y tres de los vértices no colineales del cuadrilátero completo son  $P_{ab} = (1, 0, 0, 0)$ ,  $P_{ac} = (0, 1, 0, 0)$  y  $P_{ad} = (0, 0, 1, 0)$ . Puesto que el punto  $P_{bc}$  ha de estar en la recta que pasa por  $P_{ab}$  y  $P_{ac}$ , dicho punto puede ser definido como punto genérico colineal con aquellos, determinado por un parámetro,  $\lambda$ , tal que:  $P_{bc} = P_{ab} + \lambda(P_{ac} - P_{ab})$ . Del mismo modo, puesto que el punto  $P_{cd}$  ha de estar en la recta que pasa por  $P_{ac}$  y  $P_{ad}$ , dicho punto puede ser definido

como punto genérico colineal con aquellos, determinado por un parámetro,  $\mu$ , tal que:  $P_{cd} = P_{ac} + \mu(P_{ad} - P_{ac})$ . No es preciso considerar el sexto vértice del cuadrilátero completo, por quedar determinado por los otros cinco.

PASO 2: Determinación del tetraedro ABCD.

Puesto que la recta-arista  $AB$  ha de pasar por  $P_{ab}$ , esta recta queda determinada por otro de sus puntos,  $E$ , no incidente con el plano  $\pi$ . Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que  $E$  es el punto  $(1, 1, 1, 1)$ . Por ser  $A$  y  $B$  dos puntos, distintos ente sí, de la recta que pasa por  $P_{ab}$  y  $E$ , puede suponerse que esos dos puntos quedan determinados por dos parámetros,  $\sigma$  y  $\tau$ , tales que:  $A = P_{ab} + \sigma(E - P_{ab})$ ,  $B = P_{ab} + \tau(E - P_{ab})$ . La recta-arista  $AC$  es la recta que pasa por  $A$  y por  $P_{ac}$ , la recta-arista  $AD$  es la que pasa por  $A$  y por  $P_{ad}$  y la recta-arista  $BC$  es la que pasa por  $B$  y por  $P_{bc}$ . El vértice  $C$  es el punto intersección de las rectas-arista  $AC$  y  $BC$ . La recta-arista  $CD$  es la recta que pasa por  $C$  y por  $P_{cd}$ . El vértice  $D$  es el punto intersección de las rectas-arista  $AD$  y  $CD$ .

PASO 3: Determinación del tetraedro A'B'C'D'

Puesto que la recta-arista  $A'B'$  ha de pasar por  $P_{ab}$ , esta recta queda determinada por otro de sus puntos,  $E'$ , no incidente con el plano  $\pi$ . Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que  $E'$  es el punto  $E' = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ . Por ser  $A'$  y  $B'$  dos puntos, distintos ente sí, de la recta que pasa por  $P_{ab}$  y  $E'$ , puede suponerse que esos dos puntos quedan determinados por dos parámetros,  $\kappa$  and  $\iota$ , tales que:  $A' = P_{ab} + \kappa(E' - P_{ab})$ ,  $B' = P_{ab} + \iota(E' - P_{ab})$ . La recta-arista  $A'C'$  es la recta que pasa por  $A'$  y por  $P_{ac}$ , la recta-arista  $A'D'$  es la que pasa por  $A'$  y por  $P_{ad}$  y a recta-arista  $B'C'$  es la que pasa por  $B'$  y por  $P_{bc}$ . El vértice  $C'$  es el punto intersección de las rectas-arista  $A'C'$  y  $B'C'$ . La recta-arista  $C'D'$  pasa por  $C'$  y por  $P_{cd}$ . El vértice  $D'$  es el punto intersección de las rectas-arista  $A'D'$  y  $C'D'$ .

PASO 4: Comprobación de que son tetraedros homológicos

Comenzamos definiendo las rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ , que pasan por vértices homólogos de ambos tetraedros. Entonces, la intersección de las dos primeras,  $AA'$  y  $BB'$ , resulta ser un punto, que denotamos por  $O$ . Dicho punto  $O$  resulta ser incidente con las rectas  $CC'$  y  $DD'$ .

El resultado obtenido experimentalmente como acaba de describirse se resume en el teorema siguiente.

**Teorema 3.1.** Sean  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  dos tetraedros tales que existe una correspondencia biyectiva,  $\phi$ , entre los vértices de uno y los del otro, tal que cada par de rectas-aristas homólogas (es decir, incidentes con vértices correspondientes en  $\phi$ ) sean coplanarias y sus puntos de concurrencia sean vértices de un cuadrilátero completo. Entonces las rectas que pasan por vértices homólogos,  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ , son concurrentes, es decir,  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  son tetraedros homológicos.

### 3.2 Demostración sintética del teorema inverso

Sean  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  dos tetraedros tales que exista una correspondencia biyectiva,  $\phi$ , que verifique la hipótesis del anterior teorema 3.1. Para probar este teorema por vía sintética, vamos a aplicar el teorema directo (teorema 2.3) a dos tetraedros auxiliares,  $T$  y  $T'$ , definidos del siguiente modo a partir de los tetraedros dados,  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  (Figura 3).

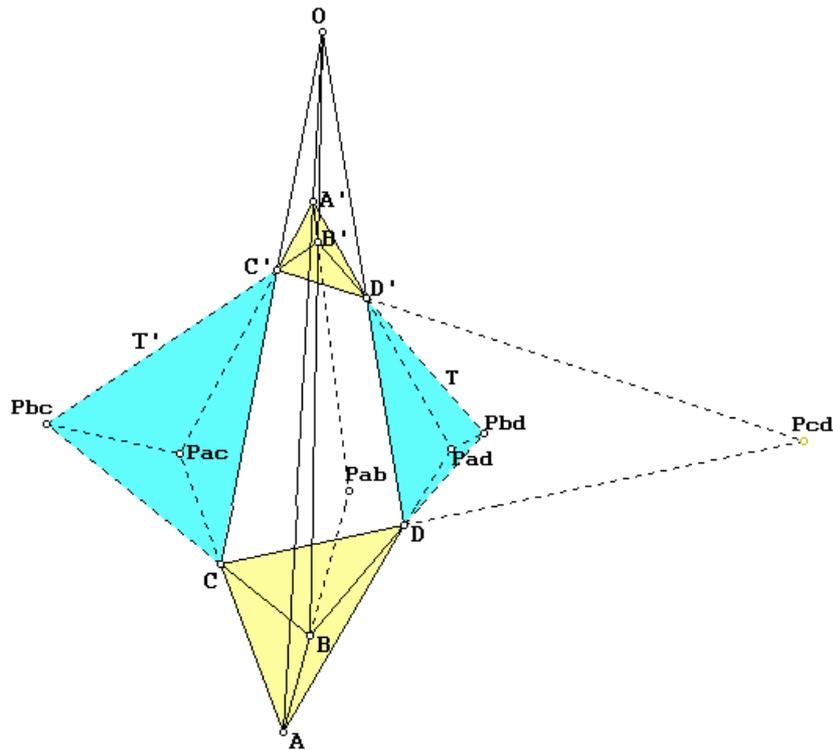


Figura 3: Configuración del teorema recíproco

Dos de los vértices de  $T$  van a ser dos vértices homólogos de los tetraedros dados,  $D$  y  $D'$  por ejemplo. Dos de los vértices de  $T'$  van a ser otros dos vértices homólogos de los tetraedros dados,  $C$  y  $C'$  por ejemplo. Los otros dos vértices de  $T$  van a ser los puntos de concurrencia con sus homólogos de las rectas-arista de los tetraedros dados que pasan por  $D$  y  $D'$ , pero que no pasan por  $C$  y  $C'$ , es decir, los puntos  $P_{ad}$  y  $P_{bd}$ . Análogamente, los otros dos vértices de  $T'$  van a ser los puntos de concurrencia con sus homólogos de las rectas-arista de los tetraedros dados que pasan por  $C$  y  $C'$ , pero que no pasan por  $D$  y  $D'$ , es decir, los puntos  $P_{ac}$  y  $P_{bc}$ .

Comencemos comprobando que  $T$  y  $T'$  son dos tetraedros homológicos (en el sentido de la definición 1) con centro de perspectividad  $P_{cd}$ , en que se corresponden los vértices  $D, D', P_{ad}, P_{bd}$  de  $T$  con los vértices  $C, C', P_{ac}, P_{bc}$  de  $T'$  (Figura 3). En efecto, de acuerdo con (1), los puntos  $C, D, P_{cd}$  son colineales y los puntos  $C', D', P_{cd}$  son también colineales. Y, por otra parte, de acuerdo con la condición iv del teorema 1, los puntos  $P_{ac}, P_{ad}, P_{cd}$  son colineales y los puntos  $P_{bc}, P_{bd}, P_{cd}$  son también colineales. En consecuencia, puede aplicarse el teorema 1 a los tetraedros auxiliares  $T$  y  $T'$ .

Por ser  $DD'$  y  $CC'$  rectas-arista homólogas de  $T$  y  $T'$ , de acuerdo con el apartado i del teorema 1, ambas son coplanarias y por tanto tienen un punto de concurrencia, que denotamos  $O$ .

Por ser  $DD', DP_{ad}, D'P_{ad}$  las rectas-arista incidentes con un plano-cara de  $T$ , sus respectivos puntos de concurrencia con las rectas-arista homólogas  $CC', CP_{ac}, C'P_{ac}$  de  $T'$ , es decir, los puntos  $O, A, A'$ , son colineales, de acuerdo con el apartado iv del teorema 1.

De modo análogo, por ser  $DD', DP_{bd}, D'P_{bd}$  las rectas-arista incidentes con un plano-cara de  $T$ , sus respectivos puntos de concurrencia con las rectas-aristas homólogas  $CC', CP_{bc}, C'P_{bc}$  de  $T'$ , es decir, los puntos  $O, B, B'$ , son colineales, de acuerdo con el apartado iv del teorema 1.

En consecuencia, las rectas  $AA', BB', CC', DD'$  son concurrentes (en  $O$ ), luego  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  son dos tetraedros homológicos.

*Nota 3.2.* El modo en que se ha desarrollado esta demostración permite afirmar que el teorema recíproco del teorema 1 sigue del propio teorema 1, esto es, que el teorema de los tetraedros homológicos es recíproco de sí mismo (como ocurre en dos dimensiones con el teorema de Desargues).

### 3.3 Demostración puramente proyectiva del teorema inverso

El teorema directo de los tetraedros homólogos puede enunciarse del modo indicado a continuación.

En el espacio proyectivo de dimensión 3, se consideran dos tetraedros,  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$ , y la correspondencia biyectiva lexicográfica usual entre sus respectivos vértices.

Si son concurrentes las rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ , que pasan por vértices homólogos, entonces son coplanarias las rectas de intersección de planos-cara homólogos,  $ABC$  y  $A'B'C'$ ,  $ABD$  y  $A'B'D'$ ,  $ACD$  y  $A'C'D'$ ,  $BCD$  y  $B'C'D'$ .

Ahora por dualidad del espacio proyectivo, si son coplanarias las rectas de intersección de planos-cara homólogos de ambos tetraedros, entonces son concurrentes las rectas que pasan por vértices homólogos.

De este modo, el teorema de los tetraedros homólogos resulta ser auto-dual.

### 3.4 Otra formulación del problema inverso

El problema inverso puede expresarse con más comodidad introduciendo un nuevo concepto.

**Definición 3.3.** Dados dos tetraedros, si existe una correspondencia biyectiva,  $\phi$ , entre los vértices de uno y los del otro, tal que cada par de rectas-aristas homólogas (es decir, incidentes con vértices correspondientes en  $\phi$ ) sean coplanarias, diremos que son tetraedros acoplados.

**Lema 3.4.** Sean dos tetraedros acoplados, cuyos vértices no sean puntos de concurrencia y cuyos planos-cara homólogos no sean coincidentes. Entonces sus puntos de concurrencia son coplanarios y vértices de un cuadrilátero completo.

*Demostración.* Sean  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  los dos tetraedros acoplados, respecto de la correspondencia biyectiva  $\phi$  entre sus vértices, tales que sus vértices no sean puntos de concurrencia y sus planos-cara homólogos no sean coincidentes.

A los puntos comunes de rectas-aristas homólogas los denotaremos del modo indicado en (1).

Consideremos los puntos de concurrencia procedentes de tres rectas-arista incidentes con un vértice común,  $A$ , por ejemplo, es decir,  $P_{ab}, P_{ac}, P_{ad}$ . Estos tres puntos son distintos del  $A$  (que, por hipótesis, no es punto de concurrencia) y son respectivamente incidentes con las rectas-arista que pasan por  $A$ , es decir, con  $AB, AC, AD$ . Por ser no coplanarias estas tres rectas-arista, los tres puntos  $P_{ab}, P_{ac}, P_{ad}$  serán no colineales y, en consecuencia, determinan un plano, que denotaremos por  $\pi$ .

Cualquier otro punto de concurrencia,  $P$ , proviene de una recta-arista incidente con dos de aquellos tres puntos de concurrencia. Si tales dos puntos fueran, por ejemplo,  $P_{ab}$  y  $P_{ac}$ , entonces  $P$  sería el punto  $P_{bc}$ . Como los tres puntos  $P_{ab}, P_{ac}, P_{bc}$  están contenidas en el plano-cara  $ABC$  y en su homólogo,  $A'B'C'$  (no coincidentes, por hipótesis), estarán contenidos en su intersección, luego son colineales y en consecuencia  $P \in \pi$ .

Repitiendo el mismo razonamiento para los restantes puntos de concurrencia de rectas-arista homólogos, se concluye que estos son vértices de un cuadrilátero completo.  $\square$

Este lema permite enunciar el siguiente corolario del anterior teorema 3.1.

**Corolario 3.5.** *Dos tetraedros acoplados, cuyos vértices no sean puntos de concurrencia y cuyos planos-cara homólogos no sean coincidentes son tetraedros homológicos.*

## Conclusión

El teorema de los tetraedros homológicos ha resultado ser recíproco de sí mismo y ha permitido probar la relación entre tetraedros acoplados y tetraedros homológicos. El interés didáctico de este estudio radica en la diversidad de técnicas utilizadas para abordar el problema y en su simplicidad.

## Agradecimientos

Deseamos mostrar nuestro agradecimiento a los profesores J.M. Aroca y J.L. Vicente Córdoba, por las referencias que nos han proporcionado sobre los precedentes del teorema tratado.

## Referencias

- [1] E. Artin (1966): *Geometric Algebra*. Interscience Publishers, Inc.
- [2] M. Berger (1987): *Geometry*. Springer-Verlag.
- [3] D. Cox, J. Little, D. O'Shea (1991): *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer.
- [4] L. Lazzeri (1893): *Trattato de Geometría analítica*. Page 363. Ed. R. Giusti Livorno.
- [5] D. Pedoe (1988): *Geometry. A comprehensive course*. Dover Publications, Inc.
- [6] J.V. Poncelet (1865): *Traité des propriétés projectives des figures*. Vol. 1, no. 582, page 363. 2<sup>nd</sup> edition. Paris.
- [7] E. Roanes M., E. Roanes L. (2000): Automatic determination of geometric loci. In: *Artificial Intelligence and Symbolic Computation*. Springer, LNCS 1930, pp. 157-173.
- [8] E. Roanes-Lozano, E. Roanes-Macías, M. Villar (2003): A Bridge Between Dynamic Geometry and Computer Algebra. *Mathematical and Computer Modelling*. Volume 37, Number 9-10, pp. 1005-1028.
- [9] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano (2004): A method for outlining 3D-problems in order to study them mechanically. Application to prove the 3D-version of Desargues theorem. En: *(L. González Vega and T. Recio eds). Actas de los Encuentros de Algebra Computacional y Aplicaciones*. University of Cantabria, pp. 237-242.
- [10] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano (2006), A Maple Package for Automatic Theorem Proving and Discovery in 3D-Geometry. En: *(F. Botana and E. Roanes-Lozano eds). Automated Deduction in Geometry*. Universidade de Vigo, Pontevedra, pp. 125-140.
- [11] A. Seidenberg. (1962): *Lectures in Projective Geometry*. Van Nostrand.

# Algunas Desigualdades para la Función Gamma de Euler

**Juan Bosco Romero Márquez**

Departamento de Análisis Matemático  
Universidad Complutense

## **Abstract**

*We present in this paper a new generalization of some of the inequalities for the Euler's Gamma Function that I proposed as problems in several journals.*

## **1. Introducción**

Existen muchos artículos en las que se prueban diversas desigualdades sobre la función Gamma de Euler, que, como sabemos, es extensión de la función factorial de un número natural. En muchas de estas desigualdades se establece una doble acotación entre dos funciones, una como cota inferior, y otra como cota superior. En dichas acotaciones intervienen distintas clases de funciones: en unas son de tipo irracional, y en otras son de tipo trascendente: estas últimas, suelen estar relacionadas con la fórmula asintótica de Stirling para el factorial de un número natural. Hoy día, es muy frecuente buscar nuevas desigualdades para la función gamma de Euler. También existen acotaciones de la función Gamma de Euler, en cuyas cotas aparece la misma función Gamma.

En nuestro artículo [8] y problemas [9] y [10] aparecidos en las revistas que se citan en la bibliografía, tenemos varios ejemplos.

## **2. Resultados**

Si  $x$  es un número real positivo, la función gamma de Euler se define usualmente como:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

En esta sección vamos a presentar diversas desigualdades en las que interviene. Comenzamos dando una generalización del resultado probado en nuestro artículo [8].

Para todas las demostraciones que siguen (aunque puede haber otras alternativas más elementales), utilizaremos la desigualdad *Sarthe-Minc-Alzer*, que presentamos en forma de lema:

**Lema (Sarthe-Minc-Alzer)**

$$\text{Si } x > 0, \text{ entonces, } \frac{1}{2x} < Lx - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} < \frac{1}{x} . \quad (1)$$

Su demostración puede verse en [1].

**Teorema 1**

**Dados los números reales a, b, c, con las condiciones**

$$c > 0, \text{ y } b \geq 1 - c, \quad a \geq c - \frac{3}{2} ,$$

para todo  $x \geq c > 0$ , se cumple la desigualdad:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x-c} \left(\frac{x}{c}\right)^{-b} \leq \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(c)} \leq \left(\frac{x}{e}\right)^{x-c} \left(\frac{x}{c}\right)^{a+1} . \quad (2)$$

La técnica de la demostración es similar a la que utilicé en [8]. Las dos desigualdades contenidas en (2) equivalen a

$$f(x) \geq 0 , \quad g(x) \geq 0 ,$$

siendo  $f$  y  $g$  las funciones (obtenidas restando los logaritmos de dos de los miembros):

$$f(x) = L\Gamma(x) - L\Gamma(c) - (x - c)(Lx - 1) + b(Lx - Lc), \quad (3)$$

$$g(x) = (x - c)(Lx - 1) + (a + 1)(Lx - Lc) - ((L\Gamma(x) - L\Gamma(c))) . \quad (4)$$

Estas dos funciones están definidas en el recinto  $I = [c, +\infty)$  y son infinitamente diferenciables en su interior. Probaremos ahora la monotonía de ambas, por medio de su derivada primera.

En cuanto a la primera, es claro que  $f(c) = 0$  y que

$$f'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \left(Lx - 1 + \frac{x-c}{x}\right) + \frac{b}{x} = \left[\frac{1}{x} - Lx + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right] + \frac{b+c-1}{x} > 0,$$

como se sigue aplicando el lema al primer sumando (entre corchetes), y teniendo en cuenta, para el segundo, las hipótesis sobre  $b$  y  $c$ . De aquí, obtenemos que  $f$  es monótona estrictamente creciente en  $I$ . Esto es:

$$\text{Si } x \geq c > 0, \quad 0 = f(c) < f(x) \quad (5)$$

con lo que queda probada la primera desigualdad de (2). Similarmente, tenemos que  $g(c) = 0$ , y que

$$g'(x) = Lx - 1 + \frac{x-c}{x} + \frac{a+1}{x} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \left[Lx - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right] + \frac{a+1-c}{x}.$$

y aplicando el lema a la expresión que está entre corchetes, y teniendo en cuenta las hipótesis sobre los coeficientes  $a, b$  y  $c$ , llegamos a que :

$$\text{Si } x \in I, \quad g'(x) > \frac{1}{2x} + \frac{2a+2-2c}{2x} = \frac{2a-2c+3}{2x} \geq 0,$$

de lo que concluimos que  $g$  es una función monótona creciente en  $I$ , por lo que:

$$\text{Si } x \geq c > 0, \quad 0 = g(c) \leq g(x). \quad (6)$$

con lo que queda probada también la segunda desigualdad de (2).

### Ejemplos

i) Si en (2) ponemos  $c = 1$ ,  $b \geq 0$ , y  $a \geq -\frac{1}{2}$ , las desigualdades (2), se convierten en el enunciado del problema que propuse en [10]. Véanse, también [5] y [6], en los que se prueba que este es un caso particular de los resultados que se establecen en estos dos artículos.

*Si  $b \geq 0$ ,  $a \geq -\frac{1}{2}$ , para todo  $x \geq 1$  se verifica la desigualdad:*

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x-1} x^{-b} \leq \Gamma(x) \leq \left(\frac{x}{e}\right)^{x-1} x^{a+1} \quad (7)$$

ii) Pongamos ahora,  $c = \frac{1}{2}$ ,  $b \geq \frac{1}{2}$ ,  $a \geq -1$  y en virtud de (2), para  $x \geq \frac{1}{2}$ , se cumplirán las desigualdades:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x-\frac{1}{2}} (2x)^{-b} \leq \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{\pi}} \leq \left(\frac{x}{e}\right)^{x-\frac{1}{2}} (2x)^{a+1}. \quad (8)$$

A partir de (8), poniendo  $b = \frac{1}{2}$ ,  $a = -1$ , tenemos que para  $x \geq \frac{1}{2}$ ,

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2x}} \leq \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{\pi}} \leq \left(\frac{x}{e}\right)^{x-\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Podemos deducir otras desigualdades que, se prueban también aplicando el mencionado lema.

## Teorema 2

a) Para  $x \geq 1$ , se verifica :

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x-1} \leq \Gamma(x) \leq \left(\frac{x}{\sqrt{e}}\right)^{x-1} \quad (10)$$

b) Para  $x \geq 2$ , se verifica:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x-1} \leq \Gamma(x) \leq \left(\frac{x}{2}\right)^{x-1} \quad (11)$$

c) Si  $a$  y  $b$  son números reales que satisfacen  $a \geq 1$ ,  $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$ , para todo  $x \geq 1$ , se cumple:

$$\left(\frac{x}{e^a}\right)^{x-1} \leq \Gamma(x) \leq \left(\frac{x}{2^b}\right)^{x-1} \quad (12)$$

d) Si  $x \geq c = 1.42$ ,  $y \quad d = \Gamma(1.42) = 0.88636$ , entonces se verifica :

$$d\left(\frac{x}{e}\right)^{x-c} \leq \Gamma(x) \leq d\left(\frac{x}{c}\right)^{x-c} \quad (13)$$

### Demostración

a) Las desigualdades (10), son equivalentes a  $\{ f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \}$ , siendo  $f$  y  $g$  las funciones definidas en el recinto  $J = [1, +\infty)$  (como diferencia de logaritmos de dos miembros de (10)) mediante

$$f(x) = L\Gamma(x) - (x-1)(Lx-1); \quad (14)$$

$$g(x) = (x-1)\left(Lx - \frac{1}{2}\right) - L\Gamma(x). \quad (15)$$

Estas funciones son infinitamente diferenciables en el interior del recinto  $J$ , siendo  $f(1) = g(1) = 0$ . Además son monótonas estrictamente crecientes en dicho recinto, ya que sus derivadas son:

$$f'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \left(Lx - 1 + \frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{x} - Lx + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad (16)$$

$$g'(x) = Lx - \frac{1}{2} + \frac{x-1}{x} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \left(Lx - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{1}{2x}\right) - \frac{x-1}{2x} \quad (17)$$

y ambas son positivas en  $J$ , según se deduce del lema. Por tanto,  $f$  y  $g$  son monótonas estrictamente crecientes en  $J$ , y como,  $f(1) = g(1) = 0$ , para  $x > 1$  será  $f(x) \geq 0$  y  $g(x) \geq 0$ , como queríamos demostrar.

b) La demostración es parecida. (Véase [9]).

c) Las desigualdades (12) son equivalentes a las  $\{ f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \}$ , siendo

$$f(x) = (x-1)(Lx - bL2) - L\Gamma(x), \quad (18)$$

$$g(x) = L\Gamma(x) - (x-1)(Lx - a) \quad (19)$$

funciones definidas en  $I = [1, +\infty)$ , infinitamente derivables en su interior, que se anulan para  $x = 1$  y cuya monotonía probaremos comprobando que sus derivadas son positivas, mediante la aplicación del lema:

$$\begin{aligned} f'(x) &= Lx - bL2 + \frac{x-1}{x} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \left( Lx - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) + 1 - bL2 - \frac{1}{x} > \\ &> \frac{1}{2x} + 1 - bL2 - \frac{1}{x} > 1 - bL2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - bL2 > b - bL2 = b(1 - L2) > 0 \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - (Lx - a + \frac{x-1}{x}) = \left( \frac{1}{x} - Lx + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) + a - 1 > 0,$$

Nuevamente, de la monotonía probada y de su anulación para  $x = 1$  se deducen las desigualdades  $\{ f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \}$ , y, en consecuencia, las (12).

Como corolario de estos resultados, podemos obtener otras muchas desigualdades para la función Gamma. Por ejemplo, poniendo  $a = 1$ , y  $b = 0$ ; o bien,  $a = 1$ ,  $b = 1/2$ .

La demostración de la parte *d)*, se hace utilizando la misma técnica y la dejamos como ejercicio.

## Referencias

- [1] Alzer, H, *Some gamma function inequalities*, Math. Comp.60, (1993), 337-346
- [2] Wendel, *Note on the gamma function*, Amer. Math.Monthly, 55(1948), 563-564
- [3] Sandor, J, *A note on certain inequalities for the Gamma Function*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume 6, Issue 3, article 61, 2005  
- *On certain inequalities for the Gamma function*,
- [4] Alzer, H, *On some inequalities for the gamma and psi function*, Mathematics of Computation, Volume 66, Number 217, January, 1997, 373-389.

- [5] Muldoon, M.E, *Some Characterizations of the Gamma Function Involving the Notion of Complete Monotonicity*, Aequationes Math.8 (1972), 212-215.
- [6] Muldoon, M.E., *Some monotonicity properties and characterizations of the gamma function*, Aequationes Mathematicae 18,(1978), 54-63.
- [7] Haagerup, U, *The best constants in the Khintchine Inequality*, Studia Math.70,(1982),231-283
- [8] Romero Márquez, Juan Bosco, *Algunos problemas de Matemáticas*, Revista escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIE, N.21, Septiembre-October, 2005
- [9] Romero Márquez, Juan B., *Problem 1651, Cotas para la función Gamma*, Mathematics Magazine, Volume,76 .N.3, June 2003, 236-237
- [10] Romero Márquez, Juan B.,*Problem 11016*, Vol.105, N.5, May,(2003)
- [11] Rao Uppuluri, V.R., *On stronger version of Wallis Formula*, Pacific Journal Mathematics, Vol.19, N.1,(1966)
- [12] Yablonsky, S.V, *Introduction to discrete Mathematics*, Mir, Publishers,1989
- [13] Gurland J, *An inequality satisfied by the gamma function*, Skandinavisk Aktuarietidskrift, (1956) 171-172
- [14] Kershaw, D., *Upper and lower bounds for a ratio involving the gamma function*, Analysis Applications, Vol,3, N.3, (2005), 293-295
- [15] Alzer Horts ,*Inequalities for the Gamma Function*, Proceeding of American Mathematical Society, V.128, N.1, (1999) 141-147
- [16] Mitrovic, D.S, *Analytic Inequalities*, Springer, Berlin, (1970)
- [17] Bracken Paul.,*Properties of certain sequences related to Stirling' approximation for the Gamma Function*, Expositiones Mathematicae, V. 21 N.2, (2003) 171-178
- [18] Bullen, P.S, *A dictionary of Inequalities and Supplement*, Pitman, New York, (1998)
- [19] Beesack , P.R *Improvement of the Stirling Formula by Elementary Methods* , Univ.Beograd Publ Elektrohn Fak.Ser.Mat.Fiz, N.274-301, 17-21(1969)
- [20] Gordon, L., *A Stochastic Approach to the Gamma Function*, AMM, V,101, November 11, 858-865 (1994)

- [21] Gautschi, W, *Inequalities for Gamma an Incomplete Gamma Function*, J.Math Phys 39(1959), 77-81
- [22] Wallis, J. *Arithmetica Infinitorum*, Oxford,1656
- [23] Chu J.T., *A modified product and some aplications*.AMM, Vol.69(1962), 402-404.
- [24] Watson, G.N, *A note on Gamma Funtion*, Proc.Edinburgh Math. Soc(2)11(1958/1959) and Edinburgh Math. Notes, N.42(1959), 7-9
- [25] Slavic, D.S., *On Inequalities for  $\Gamma(x + 1) / \Gamma(x + 1/ 2)$* ..Univ.. Beograd Publi Ser Mat.Fiz.N. 498-541(1975),17-20
- [26] Neuman E.. *Inequalities involving a logaritmically convex funtion and their applications to special functions*, JIPAM, V.7,11, 2006
- [27] Whitaker E.T and Watson G.N.,*Acourse of modern analysis*, Canbridge Univ. Press, 1969
- [28] Edwards J., *A treatise on the Integral Calculus, with applications, examples and problems*, Volume II, Chelsea Publishing Company,New.York,1922
- [29] Carlson, B.C, *Special Functions of Applied Mathematics*, Academic Press, New York, 1977
- [30] Spanier, J and Oldham, K.B, *An Atlas of Functions*, Washington, D.C, Hemisphere, 1987.
- [31] Abramovitz M, Stegun I.,*Handbook of Mathematics*, Dover, New York,(1964)
- [32] Artin, E.; *The Gamma Function*, Rinehart and Wiston, New York,1964
- [33] Godefroy, M. *La fonction Gamma, Theorie, Historie, Bbliographie*, Gauthier Villasrs, Paris, 1901
- [34] Nielsen, M., *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig,1906
- [35] Sibagaki, W., *Theory and Applications of the Gamma Function*, Iwanami System, Tokio, 1952
- [36] Andrews, G.H, Askey R., Roy, R. *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999

# Proyecciones estereográficas y Geometrías en el plano

**Santiago Mazuelas Franco**

Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología. Univ. Valladolid  
mazuelas@gco.tel.uva.es

## **Abstract**

*The classic construction by Cayley and Klein, that associates the euclidean plane with the  $\mathbb{R}$ -algebra  $\mathbb{C}$  or by stereographic projection with the quadric of points (Sphere), allow us to represent the inversive group as a matrix group.*

*In a sequence of three papers, that begins with this one, we are going to translate this classic construction, to the three types of metrics in the plane: euclidean, hyperbolic and degenerate. To do this we only have to change the  $\mathbb{R}$ -algebra and the quadric that we associate to the metric plane.*

*This first paper, is devoted to the study of stereographic projection, witch is the basic tool that connects the three geometrical objects: metric plane,  $\mathbb{R}$ -algebra and quadric.*

*a Elisa, mi madre*

**Introducción** Como es bien sabido, un plano euclídeo es un par  $(\mathbb{A}, Q)$  donde  $\mathbb{A}$  es un plano afín real de espacio vectorial asociado  $V$  y  $Q$  es una forma cuadrática definida positiva en  $V$ . Si elegimos una referencia métrica en  $(\mathbb{A}, Q)$  podemos identificar  $\mathbb{A}$  con  $\mathbb{R}^2$  y  $Q$  con la forma cuadrática  $x^2 + y^2$ , de direcciones isotropas  $(i, 1)$  y  $(-i, 1)$  i.e.  $Q(i, 1) = Q(-i, 1) = 0$ .

Por otra parte, en el plano, podemos considerar un grupo de transformaciones geométricas conformes, que es el grupo inversivo, generado por los movimientos, las homotecias y las inversiones. Clásicamente (Cayley o Klein), se asocian al plano euclídeo dos objetos geométricos que permiten representar el grupo inversivo como un grupo de matrices:

- La  $\mathbb{R}$ -álgebra  $\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}$ , que en este caso es un cuerpo y sobre la cual se puede considerar la recta proyectiva  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .  $\mathbb{A}$  se identifica a  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  a la recta afín compleja  $\mathbb{C}$  y de este modo  $\mathbb{A}$  se sumerge en la recta proyectiva compleja  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . En esta inmersión y por continuidad las transformaciones del grupo inversivo se corresponden con las transformaciones de Moebius, es decir, en proyectividades continuas de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , por lo que se pueden representar con matrices complejas  $2 \times 2$ , con el inconveniente de que las transformaciones que no conservan la orientación, se corresponden con proyectividades con automorfismo de conjugación, con lo cual su representación no es estrictamente lineal.
- Cuádrlica de puntos elípticos. Tomamos la esfera de  $\mathbb{R}^3$  sumergido en  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  y proyectamos estereográficamente dicha esfera sobre  $\mathbb{R}^2$ , así las transformaciones del grupo inversivo se corresponden vía proyección estereográfica a transformaciones de la esfera que son restricciones de transformaciones proyectivas del espacio ambiente  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ , teniendo así una representación lineal (proyectiva) del grupo inversivo.

Las construcciones anteriores, se basan esencialmente en las analogías entre la forma canónica de la métrica  $x^2 + y^2$ , la de un generador del ideal que define  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{R}[x]$ ,  $x^2 + 1$  y la ecuación canónica de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Las preguntas que podemos plantearnos son:

- 1) Hasta que punto son intrínsecas esas construcciones.
- 2) ¿Se pueden repetir cuando  $Q$  no es definida positiva?
- 3) ¿Se pueden extender a dimensión mayor que dos?

Para responder a los dos primeras cuestiones, que es el objetivo de este trabajo, debemos analizar, un poco más, la relación entre la forma canónica de la métrica, el generador del ideal de  $\mathbb{R}[x]$  que define  $\mathbb{C}$  y la ecuación de la cuádrlica que se proyecta sobre  $\mathbb{R}^2$ .

La forma cuadrática  $Q$ , que define la métrica, es un polinomio homogéneo de grado 2 en  $\mathbb{R}[x, y]$ . Puede factorizar como:

- 1) Caso definido positivo: dos rectas imaginarias (dos direcciones isótropas imaginarias conjugadas).
- 2) Caso indefinido: dos rectas reales (dos direcciones isótropas reales).
- 3) Caso degenerado: una recta real doble (una dirección isótropa real doble).

Este carácter no varía con la elección de la referencia métrica; y cada uno de los tres casos se corresponden con cada uno de los tres tipos de geometrías en el plano: euclídea, hiperbólica y degenerada.

Desde el punto de vista de las álgebras, existen 3 tipos de extensiones de grado dos de los números reales  $\mathbb{K} = \frac{\mathbb{R}[x]}{ax^2+bx+c}$  según como factoriza el polinomio  $ax^2 + bx + c$ , es decir, según como sean sus raíces:

- 1) Dos raíces imaginarias conjugadas: el anillo  $\mathbb{K}$  es isomorfo a  $\mathbb{C}$ .
- 2) Dos raíces reales distintas: el anillo  $\mathbb{K}$  es isomorfo a los números paracomplejos  $\mathbb{P}_C = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2-1}$ .
- 3) Una raíz real doble: el anillo  $\mathbb{K}$  es isomorfo a los números duales  $\mathbb{D} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2}$ .

De esta manera identificando el plano, con cada una de estas  $\mathbb{R}$ -álgebras, obtenemos una representación lineal del grupo inversivo, para cada uno de los tres tipos de métricas.

Análogamente, también existen tres tipos de cuádricas reales e irreducibles en  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ , según como sea su intersección con sus planos tangentes:

- 1) Dos rectas imaginarias: caso cuádrica de puntos elípticos.
- 2) Dos rectas reales distintas: caso cuádrica reglada.
- 3) Una recta real doble: cono real.

Así, identificando ahora el plano con cada una de estas cuádricas, vía proyección estereográfica, obtenemos la segunda representación lineal del grupo inversivo.

En esta serie de trabajos vamos a repetir la construcción clásica para la geometría euclídea descrita anteriormente, que permite dar una representación matricial del grupo inversivo; para la geometría hiperbólica (métrica  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ) y degenerada (métrica  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ).

Esta posibilidad ya fue propuesta por Klein en su artículo del *Mathematische Annalen* [4] y posteriormente en su libro *Vorlesungen über nicht euklidische geometrie* [5]. La idea de esta construcción es más antigua y se

debe a A. Cayley en [6] que no la desarrolló por falta de técnicas suficientes. La herramienta fundamental que liga esos tres objetos geométricos es la proyección estereográfica y más precisamente la familia de ciclos (familia mínima cerrada por la acción del grupo inversivo y que contiene a las rectas); que en los tres casos podemos caracterizar de forma análoga, en cada uno de los tres objetos, de la forma siguiente:

1. En  $(\mathbb{A}, Q)$ , los ciclos son las rectas y las cónicas que pasan por los puntos del infinito, dados por las direcciones isotropas de  $Q$ .
2. En  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ , los ciclos son la familia de subconjuntos dados por la ecuación

$$[\alpha, \beta, \gamma, x] \in \mathbb{R}$$

con  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  tres números de  $\mathbb{K}$  dados y los corchetes denotan razón doble.

3. En las cuádricas, los ciclos son las familias de secciones hiperplanas no degeneradas.

## 1. Proyecciones estereográficas

Normalmente se asocian las proyecciones estereográficas, con el caso particular, de la proyección de una esfera desde uno de sus puntos, sobre el plano tangente en el punto diametralmente opuesto. En esta sección vamos a dar una definición intrínseca y proyectiva de la proyección estereográfica de una cuádrica sobre un hiperplano en dimensión arbitraria, las razones de esta definición general son: primero que no requiere mayor trabajo que en dimensión tres y segundo que queda hecho para otro de nuestros objetivos, indicado en la introducción, que es generalizar estos resultados a dimensión arbitraria.

Recordemos que una cuádrica  $[Q]$  no es más que una clase de polinomios homogéneos de grado dos y que tiene asociada una cuádrica de puntos, a la que representaremos con el mismo nombre (soluciones de la ecuación  $Q(x_0, \dots, x_n) = 0$ ). Dado un punto  $P$  se puede construir su polar ( $P^\perp$ ) por las ecuaciones  $(\frac{\partial Q}{\partial x_i})_P x_i = 0$  o equivalentemente como el hiperplano ortogonal a  $P$  respecto a la forma bilineal  $F_Q$  asociada a la cuádrica. Un punto de la cuádrica se llama singular si su polar es todo el espacio o equivalentemente si

$(\frac{\partial Q}{\partial x_i})_P = 0 \forall i$ . Siguiendo la notación clásica llamaremos vértice de la cuádrica al conjunto de puntos singulares de la cuádrica.

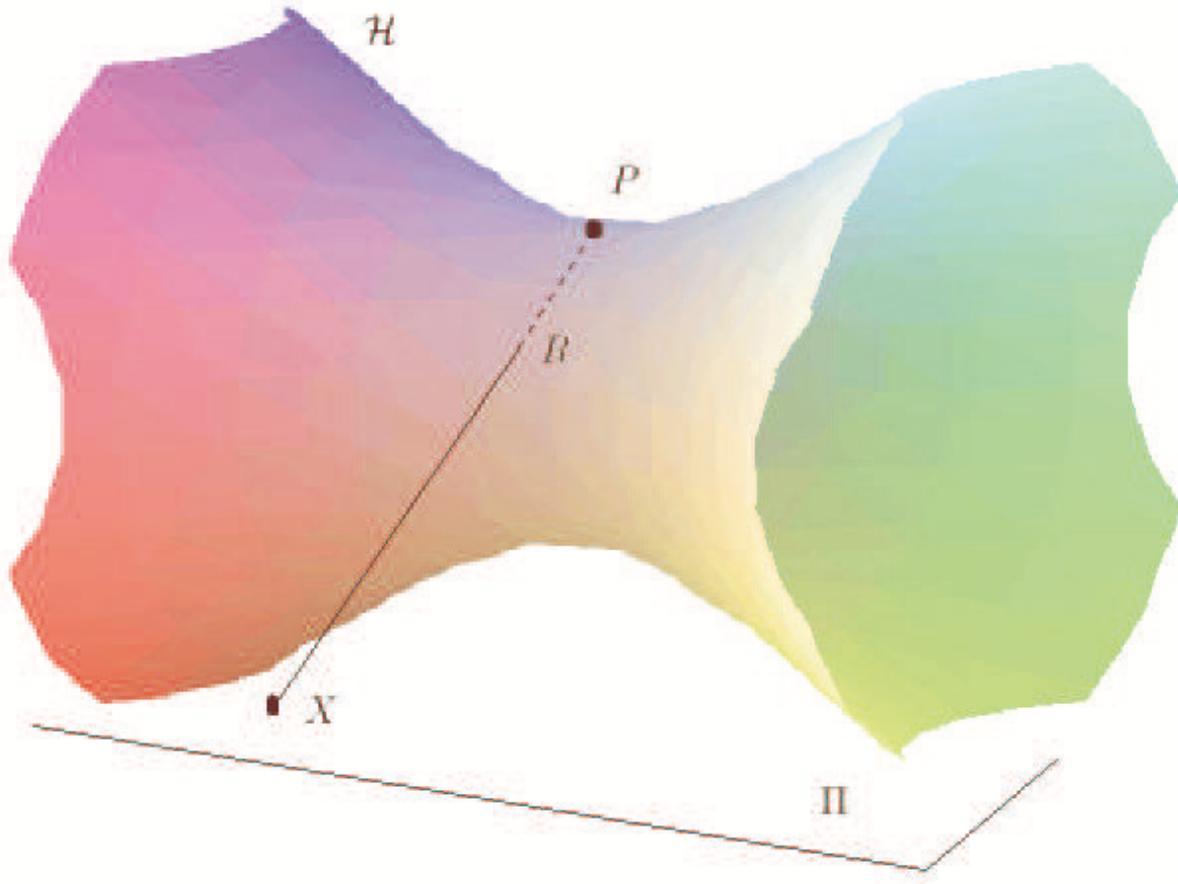


Figura 1: Proyección estereográfica

**Proposición 1** Sea  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  el espacio proyectivo real  $n$ -dimensional.  $[Q]$  una cuádrica real e irreducible de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ . Sea  $P$  un punto de la cuádrica que no esté en el vértice.  $\Pi$  un hiperplano de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  que no contiene a  $P$  y  $X$  un punto de  $\Pi$ . Entonces:

- 1)  $(P + X) \cap [Q] = P$  si y sólo si  $X \in P^\perp \setminus [Q]$ .
- 2)  $(P + X) \cap [Q] = \{P, R\}$  con  $R \neq P$ , si y sólo si  $X \notin P^\perp$ .
- 3)  $(P + X) \subset [Q]$  si y sólo si  $X \in P^\perp \cap [Q]$ .

**Demostración** Sea  $P = [\mathbf{p}]$ ,  $X = [\mathbf{x}]$  Un punto  $Y$  está en la recta  $P + X$  si  $Y = [\mathbf{y}]$ ,  $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{x}$ . Ahora  $Y \in [Q] \Leftrightarrow Q(\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\beta^2 Q(\mathbf{x}) + 2\alpha\beta F_Q(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0 \quad (*)$$

Basta con probar la suficiencia en las tres equivalencias ya que los tres casos son mutuamente excluyentes y cubren todas las posibilidades.

1) Si  $X \in P^\perp \setminus [Q]$  entonces  $F_Q(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$  y  $Q(\mathbf{x}) \neq 0$  y se cumple (\*) si  $\beta = 0 \Leftrightarrow Y = P$

2) Si  $X \notin P^\perp$ ,  $F_Q(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \neq 0$

Si  $\beta = 0$  se cumple (\*) e  $Y = P$

Si  $\beta \neq 0$  se cumple (\*) si  $\beta Q(\mathbf{x}) + 2\alpha F_Q(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$  si

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-Q(\mathbf{x})}{2F_Q(\mathbf{p}, \mathbf{x})}$$

entonces

$$\mathbf{y} = 2F_Q(\mathbf{p}, \mathbf{x})\mathbf{x} - Q(\mathbf{x})\mathbf{p}$$

Sea  $R = [\mathbf{y}]$   $R \neq P$  porque  $F_Q(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \neq 0$

3) Si  $X \in P^\perp \cap [Q]$ ,  $F_Q(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$  y  $Q(\mathbf{x}) = 0$  entonces se cumple (\*)  $\forall \alpha, \beta \Rightarrow (P + X) \subset [Q]$  ■

**Nota 1** Por el apartado 3) de la proposición, si  $R \in P^\perp \cap [Q]$  con  $R \neq P \Rightarrow P + R \subset [Q]$ .

Así pues para un  $P \in [Q] \setminus V_{[Q]}$ ,  $P^\perp \cap [Q]$  se reduce a  $P$  o es un cono con vértice  $P$ .

**Definición 1** Se llama *proyección estereográfica de  $[Q]$  sobre  $\Pi$  con polo en  $P$*  a la correspondencia

$$\alpha : [Q] \longrightarrow \Pi$$

$$\alpha(R) = (P + R) \cap \Pi$$

**Proposición 2**  $\alpha|_{[Q] \setminus P^\perp}$  es biyectiva sobre su imagen que es  $\Pi \setminus P^\perp$

**Demostración**

Esta bien definida: Si  $R \neq P$   $P + R$  es una recta que no está contenida en  $\Pi$  ( $P \notin \Pi$ ) entonces  $(P + R) \cap \Pi$  es un único punto.

Es inyectiva: Sea  $R_1, R_2 \in [Q] \setminus P^\perp$  con  $R_1 \neq R_2$ . Si  $\alpha(R_1) = \alpha(R_2)$

$$\Rightarrow (R_1 + P) \cap \Pi = (R_2 + P) \cap \Pi = X$$

$$\Rightarrow P + X = P + R_1 = P + R_2$$

entonces  $P + R_1 = P + R_2$  seria una recta con tres puntos distintos en  $[Q]$

$$\Rightarrow (P + R_1) = (P + R_2) \subset [Q]$$

$$\Rightarrow (P + R_1) = (P + R_2) \subset P^\perp$$

$$\Rightarrow R_1, R_2 \in P^\perp \text{ absurdo}$$

$$\text{Im}(\alpha|_{[Q] \setminus P^\perp}) = \Pi \setminus P^\perp: \text{ como } R \notin P^\perp$$

$$(P + \alpha(R)) \cap [Q] = \{P, R\} \Leftrightarrow \alpha(R) \notin P^\perp \text{ (Proposición 1) } \blacksquare$$

**Corolario 1**  $[Q]$  es una compactificación de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

**Demostración**  $[Q]$  es compacto porque es un cerrado dentro del compacto  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ .

$$\mathbb{R}^{n-1} \simeq \Pi \setminus P^\perp \simeq [Q] \setminus P^\perp$$

y  $[Q] \setminus P^\perp$  es un abierto denso en  $[Q]$ .

**Nota 2** La cuádrica  $[Q]$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}^{n-1}$  junto con el cono  $P^\perp \cap [Q]$ .

$$[Q] \simeq \mathbb{R}^{n-1} \sqcup (P^\perp \cap [Q])$$

### 1.1. Ecuaciones en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$

Vamos a imponer que el plano  $\Pi$  es tangente a la cuádrica simplemente para que las ecuaciones sean más simples.

### 1.1.1. Elección de Referencia

Vamos a elegir una referencia  $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3; U\}$  que sea conveniente para la escritura de las ecuaciones de la proyección estereográfica.

$P^\perp \cap \Pi$  es una recta proyectiva ya que es la intersección de dos planos distintos ( $P \notin \Pi$ ),  $(P^\perp \cap \Pi)^\perp = \Pi^\perp + P$  es una recta que pasa por  $P$  y corta a  $[Q]$  en único punto distinto de  $P$ , ( $\Pi^\perp \notin P^\perp$  ya que  $P \notin \Pi$ ), sea este punto  $R = [\mathbf{w}']$  y el punto desde el que proyectamos  $P = [\mathbf{w}]$ .

Así, sean:

$$P_0 = [\mathbf{w} - \mathbf{w}'].$$

$P_1$  y  $P_2$  una base autopolar de  $P^\perp \cap \Pi$

$$P_3 = [\mathbf{w} + \mathbf{w}']$$

La elección de  $U$  equivale a la elección de representantes para los  $P_i$ . Sea  $P_i = [\mathbf{v}_i]$ , escojo los  $\mathbf{v}_i$  para que la matriz de  $[Q]$  sea:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $\varepsilon_i \in \{1, -1, 0\}$ , (en el caso del cono el vértice está en  $P^\perp \cap \Pi$  ya que he elegido  $\Pi$  tangente a la cuádrica).

Para la cuádrica de puntos elípticos  $[\mathcal{S}]$   $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ , para la cuádrica reglada  $[\mathcal{H}]$   $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$  y para el cono real  $[\mathcal{C}]$   $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$ . Así:

$$[\mathcal{S}] = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 / -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$$

$$[\mathcal{H}] = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 / -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0\}$$

$$[\mathcal{C}] = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 / -x_0^2 + x_1^2 + x_3^2 = 0\}$$

El punto  $P = [1, 0, 0, 1]$ .

Los planos

$$\Pi = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 / x_0 + x_3 = 0\}$$

$$P^\perp = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 / x_0 - x_3 = 0\}$$

La recta

$$P^\perp \cap \Pi = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 / x_0 = x_3 = 0\}$$

Las ecuaciones de la proyección

$$\alpha : [Q] \longrightarrow \Pi$$

si  $[y_0, y_1, y_2, y_3] \neq P$

$$\alpha([y_0, y_1, y_2, y_3]) = [(y_0 - y_3), 2y_1, 2y_2, (y_3 - y_0)]$$

si  $[z_0, z_1, z_2, z_3] \notin P^\perp \cap \Pi$

$$\alpha^{-1}([z_0, z_1, z_2, z_3]) = [(-4z_3^2 - \varepsilon_1 z_1^2 - \varepsilon_2 z_2^2), 4z_3 z_1, 4z_3 z_2, 4z_3^2 - \varepsilon_1 z_1^2 - \varepsilon_2 z_2^2]$$

**Proposición 3** Sea  $[Q]$  una cuádrica de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ ,  $P \in [Q] \setminus V_{[Q]}$ , entonces:

1.  $P^\perp \cap [Q] = P$  (dos rectas imaginarias,  $r_1^{(i)}$  y  $r_2^{(i)}$ ), si  $[Q]$  es de tipo elíptico.
2.  $P^\perp \cap [Q] = \{r_1, r_2\}$ , con  $r_1$  y  $r_2$  rectas que se cortan en  $P$ , si  $[Q]$  es de tipo hiperbólico.
3.  $P^\perp \cap [Q] = \{r_0\}$ , con  $r_0$  recta que pasa por  $P$ , si  $[Q]$  es el cono real.

Eligiendo la referencia anterior

$$r_1 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 / x_1 = x_2, x_0 = x_3\}$$

$$r_2 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 / x_1 = -x_2, x_0 = x_3\}$$

$$r_0 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 / x_1 = 0, x_0 = x_3\}$$

**Nota 3** Como  $r_j \subset P^\perp \cap [Q]$  entonces  $\alpha(r_j) = r_j \cap \Pi$  es un punto que llamaremos  $I_j$ . De forma análoga llamaremos  $I_j^{(i)}$  a los puntos imaginarios  $I_j^{(i)} = r_j^{(i)} \cap \Pi$ .

Es claro que  $\Pi \setminus P^\perp \simeq \mathbb{R}^2$ , llamamos

$$\alpha_A^{-1} = \alpha^{-1}|_{\Pi \setminus P^\perp} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [Q]$$

$$\alpha_A^{-1}(x, y) = [-4 - \varepsilon_1 x^2 - \varepsilon_2 y^2, -4x, -4y, 4 - \varepsilon_1 x^2 - \varepsilon_2 y^2]$$

como  $\alpha_A^{-1}(x, y) \notin P^\perp \cap \Pi$  la 1ª o la 4ª coordenada de  $\alpha_A^{-1}(x, y)$  es distinta de 0.

## 2. Compactificaciones de $\mathbb{R}^2$

Aplicando el Corolario 1 a dimensión 2, cada uno de los tres tipos de cuádricas  $[\mathcal{S}]$ ,  $[\mathcal{H}]$  y  $[\mathcal{C}]$  son tres compactificaciones distintas de  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2 \sqcup \text{Un punto} \simeq [\mathcal{S}]$$

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2 \sqcup \text{Dos rectas} \simeq [\mathcal{H}]$$

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2 \sqcup \text{Una recta} \simeq [\mathcal{C}]$$

Mediante la proyección estereográfica vamos a ver que significado tienen los puntos que añadimos a  $\mathbb{R}^2$ .

- Caso  $\mathcal{S}$ ,  $\alpha_A^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [\mathcal{S}]$

**Proposición 4** Sea  $\{(x(t), y(t)) : -\infty < t < \infty\}$  la parametrización de una recta en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_A^{-1}(x(t), y(t)) = P$

Así pues al seguir cualquier dirección en el plano, en la esfera nos vamos siempre al punto  $P$ .

- Caso  $\mathcal{H}$ ,  $\alpha_A^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [\mathcal{H}]$

**Proposición 5** Sea  $\{(x(t), y(t))\}$  la parametrización de una recta en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_A^{-1}(x(t), y(t)) \in P^\perp \cap [\mathcal{H}] = \{r_1, r_2\}$ , además:

*Si la recta no tiene pendiente  $\pm 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_A^{-1}(x(t), y(t)) = P$*

*Si la recta tiene pendiente 1,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_A^{-1}(x(t), y(t)) \in r_1 \setminus \{P\}$*

*Si la recta tiene pendiente  $-1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_A^{-1}(x(t), y(t)) \in r_2 \setminus \{P\}$*

Así, en este caso, al seguir en el plano una recta de pendiente  $+1$  (resp.  $-1$ ), en el hiperboloide nos vamos a un punto de la recta  $r_1$  (resp.  $r_2$ ), distinto de  $P$  y determinado unívocamente por la ordenada en el origen de la recta del plano. Y si seguimos una dirección de pendiente distinta de  $\pm 1$ , en el hiperboloide nos vamos al punto  $P$ .

- Caso  $\mathcal{C}$ ,  $\alpha_A^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [\mathcal{C}]$

**Proposición 6** Sea  $\{(x(t), y(t))\}$  la parametrización de una recta o de una parábola  $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \lambda t^2 \end{cases}$  en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_A^{-1}(x(t), y(t)) \in P^\perp \cap [Q] = r_0$ .

Además si es la parametrización

- 1) de una recta que no tiene pendiente  $\infty$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_A^{-1}(x(t), y(t)) = P$$

- 2) de una recta de pendiente  $\infty$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_A^{-1}(x(t), y(t)) = I_0 \in r_0$$

- 3) de una parábola  $y = \lambda x^2$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_A^{-1}(x(t), y(t)) \in r_0 \setminus \{P, I_0\}$$

### 3. Secciones planas, ciclos

Vamos a realizar ahora un estudio sintético de las proyecciones de las secciones de  $[Q]$  por planos, que nos permitirá dar una definición geométrica de los ciclos.

**Proposición 7** Sea  $[Q]$  una cuádrica de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ ,  $P \in [Q] \setminus V_{[Q]}$ ,  $\Gamma$  y  $\Pi$  dos planos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  con  $P \notin \Pi$ ,  $S_\Gamma = \Gamma \cap [Q]$  y  $\alpha$  la proyección estereográfica de  $[Q]$  sobre  $\Pi$  con polo en  $P$ . Entonces:

1. Si  $P \in \Gamma$

- a) Si  $\Gamma = P^\perp$  entonces

$$\alpha(S_\Gamma) = \begin{cases} \{I_1^{(i)}, I_2^{(i)}\} & \text{Si } [Q] = [\mathcal{S}] \\ \{I_1, I_2\} & \text{Si } [Q] = [\mathcal{H}] \\ \{I_0\} & \text{Si } [Q] = [\mathcal{C}] \end{cases}$$

- b) Si  $r_i \subseteq \Gamma$ , para un  $i$  entonces  $\alpha(S_\Gamma)$  es una recta que pasa por  $I_i$ .

c) Si  $r_i \not\subseteq \Gamma \forall i$  entonces  $\alpha(S_\Gamma)$  es una recta menos un punto que está en  $P^\perp \cap \Pi$ .

2. Si  $P \notin \Gamma$

a) Si  $\Gamma$  es tangente a  $[Q]$  entonces

$$\alpha(S_\Gamma) = \begin{cases} \text{Un punto} & ([S]) \\ \text{Dos rectas que pasan por } I_1 \text{ e } I_2, \text{ resp.} & ([\mathcal{H}]) \\ \text{Una recta que pasa por } I_0 & ([C]) \end{cases}$$

b) Si  $\Gamma$  pasa por el vértice de  $[Q]$  (caso cuádrica degenerada), entonces  $\alpha(S_\Gamma)$  es dos rectas (reales o imaginarias) que se cortan en el vértice, que es un punto de  $P^\perp \cap \Pi$ .

c) Si  $\Gamma$  no es tangente a  $[Q]$  entonces

$$\alpha(S_\Gamma) = \begin{cases} \text{Cónica que corta a } P^\perp \cap \Pi \text{ en } I_1^{(i)} \text{ e } I_2^{(i)} \text{ (ptos. imag.)} & ([S]) \\ \text{Cónica que corta a } P^\perp \cap \Pi \text{ en } I_1 \text{ e } I_2 & ([\mathcal{H}]) \\ \text{Cónica que corta a } P^\perp \cap \Pi \text{ en } I_0 & ([C]) \end{cases}$$

**Demostración**

1. Si  $P \in \Gamma$

a) Si  $\Gamma = P^\perp$ , trivial ya que  $S_\Gamma$  se reduce a uno de los tres casos de la proposición 3.

b) si  $r_i \subseteq \Gamma$  para un  $i$  entonces  $\Gamma \cap [Q] = \{r_i, s\}$  donde  $s$  es una recta que no pasa por  $P$  (la intersección de un plano con una cuádrica es una cónica). Ahora  $\alpha(s)$  es una recta porque las rectas que pasan por  $P$  y por los puntos de  $s$  forman un plano ( $P \notin s$ ) cuya intersección con  $\Pi$  es obviamente una recta.  $\alpha(r_i) = I_i$  y  $I_i \in \alpha(s)$  porque  $I_i = \alpha(r_i \cap s) \in \alpha(s)$ , ( $r_i \cap s \neq \emptyset$  porque  $s$  y  $r_i$  están en el mismo plano). Entonces  $\alpha(S_\Gamma) = \alpha(s)$  que es una recta.

c) Si  $r_i \not\subseteq \Gamma \forall i$  entonces  $S_\Gamma$  es una cónica contenida en  $\Gamma$  que pasa por  $P$ , las rectas que unen  $P$  con los puntos de  $S_\Gamma$  son el plano  $\Gamma$  menos la recta tangente a  $S_\Gamma$  por  $P$ , esta recta está contenida en  $P^\perp$  y entonces  $\alpha(S_\Gamma)$  es una recta a la que le falta un punto que está en  $P^\perp \cap \Pi$ .

2. Si  $P \notin \Gamma$

- a) Si  $\Gamma$  es tangente a  $[Q]$  entonces por la proposición 3:
- Si  $[Q] = [\mathcal{S}]$ ,  $S_\Gamma$  es un punto distinto de  $P$  y entonces  $\alpha(S_\Gamma)$  es un punto.
  - Si  $[Q] = [\mathcal{H}]$ ,  $S_\Gamma$  es dos rectas que no pasan por  $P$ . Así, las rectas que unen  $P$  con los puntos de  $S_\Gamma$  son dos planos, entonces  $\alpha(S_\Gamma)$  es dos rectas, ahora  $I_1, I_2 \in \alpha(S_\Gamma)$  porque  $I_i = \alpha(S_\Gamma \cap r_i) \in \alpha(S_\Gamma)$ , ( $S_\Gamma \cap r_i \neq \emptyset$  porque  $\Gamma$  corta a  $r_1$  y a  $r_2$  ya que  $P \notin \Gamma$ ).
  - Si  $[Q] = [\mathcal{C}]$ ,  $S_\Gamma$  es una recta que no pasa por  $P$ . Por lo tanto,  $\alpha(S_\Gamma)$  es una recta que pasa por  $I_0$ , análogamente al caso anterior.
- b) Trivial, ya que  $\Gamma \cap [\mathcal{C}]$  es dos rectas (reales o imaginarias) que se cortan en el vértice.
- c) Si  $\Gamma$  no es tangente a  $[Q]$  entonces  $S_\Gamma$  es una cónica. Las rectas que unen  $P$  con  $S_\Gamma$  son una superficie de grado 2, entonces  $\alpha(S_\Gamma)$  es una cónica en  $\Pi$ , que pasa por  $P^\perp \cap \Pi$  en los puntos proyección de  $\Gamma \cap P^\perp \cap [Q]$  (prop 2) ■.

**Proposición 8** *Recíprocamente:*

- *La contraimagen de un recta distinta de  $P^\perp \cap \Pi$  es la sección por un plano que pasa por  $P$ , no es tangente a la cuádrica y no pasa por el vértice.*
- *La contraimagen de una cónica no degenerada que corta a  $P^\perp \cap \Pi$  en:*
  1.  $I_1^{(i)}$  e  $I_2^{(i)}$ . (Proyección desde  $[\mathcal{S}]$ )
  2.  $I_1$  e  $I_2$ . (Proyección desde  $[\mathcal{H}]$ )
  3.  $I_0$  (punto doble). (Proyección desde  $[\mathcal{C}]$ )

*es la sección por un plano que no pasa por  $P$ , no es tangente a la cuádrica y no pasa por el vértice.*

### Demostración

- Trivial
- Una cónica no degenerada queda determinada unívocamente por cinco puntos. En el enunciado ya nos dan dos, sean  $R_1, R_2, R_3$  los otros tres. Como  $R_1, R_2$  y  $R_3$  son puntos no alineados (la cónica es no degenerada) y que no están en  $P^\perp$ , entonces  $\alpha^{-1}(R_1), \alpha^{-1}(R_2)$  y  $\alpha^{-1}(R_3)$  no están alineados y por lo tanto determinan un plano que no pasa por  $P$  y por la proposición anterior la proyección de la sección por ese plano es la cónica.

**Nota 4** *En el caso del cono la proyección de una sección por un plano que contenga a  $r_0$ , de un plano tangente y de un plano que pasa por el vértice es la misma recta que pasa por  $I_0$ ; pero nosotros nos estamos fijando ahora sólo en las secciones por planos no tangentes a la cuádrica y que no pasen por el vértice.*

### 3.0.2. Definición geométrica de ciclo

**Definición 2** *Llamamos ciclos a las proyecciones de las secciones por planos no tangentes a la cuádrica y que no pasen por el vértice (caso cuádrica degenerada).*

Sea  $\mathcal{I}$  un plano de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  que contenga a la recta  $P^\perp \cap \Pi$  y que no pase por  $P$ . (Obsérvese que ese plano en el caso del cono contiene al vértice). Es claro que  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \setminus \mathcal{I} \simeq \mathbb{R}^3$  y que  $\Pi \setminus \mathcal{I} \simeq \mathbb{R}^2$ .

Así pues si nos restringimos a esta carta afín tenemos, la proyección estereográfica:

$$\alpha_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

y la recta  $P^\perp \cap \Pi$  en la que señalábamos los puntos antes, va a ser la recta del infinito para el plano afín.

### 3.1. Clasificación de los ciclos

Sea  $\mathbb{E}$  el plano euclídeo usual sumergido en el plano proyectivo, en esta sección, vamos a ver que tipo de cónicas son los ciclos definidos anteriormente, para cada uno de los tres casos. Vistos como cónicas en el plano euclídeo  $\mathbb{E}$ .

**Definición 3** Dada una cónica en  $\mathbb{E}$  real no degenerada con centro (polo de la recta del infinito), se llama diámetros a las rectas que pasan por el centro, es decir a las polares de los puntos del infinito, dos diámetros se llaman conjugados si cada uno de ellos pasa por el polo del otro. Así, los ejes son dos diámetros conjugados ortogonales.

**Proposición 9** Sea una cónica en  $\mathbb{E}$ , real no degenerada y con centro. Sus dos puntos de corte con la recta del infinito, reales o imaginarios, determinan de forma unívoca las direcciones de los ejes, así como la excentricidad de la cónica.

**Demostración** Tomando la referencia como en la sección (1.1), sea  $M = \begin{pmatrix} a_{00} & \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_0^t & M_{00} \end{pmatrix}$  la matriz de la cónica. Dos rectas que pasan por el centro de la cónica con direcciones dadas por los puntos del infinito  $[0, \alpha_1, \alpha_2]$  y  $[0, \beta_1, \beta_2]$ , son ejes de la cónica si y sólo si:

$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2)M_{00} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 & \text{Díametros conjugados} & (1) \\ (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 & \text{Ortogonales} & (2) \end{cases}$$

Así pues, sean  $A = [0, a_1, a_2]$  y  $B = [0, b_1, b_2]$  los dos puntos de corte de la cónica con la recta del infinito. Puedo suponer que  $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$ , escalando los representantes. En ambos casos los puntos  $D_1 = [0, a_1 + b_1, a_2 + b_2]$  y  $D_2 = [0, a_1 - b_1, a_2 - b_2]$  son puntos reales ya que en el caso de que los puntos iniciales fueran complejos, estos son conjugados y en  $D_2$  divido por  $i$ .

Sean  $d_1$  y  $d_2$  las rectas que pasan por el centro de la cónica y que tienen direcciones dadas por los puntos  $D_1$  y  $D_2$  respectivamente como:

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2)M_{00} \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})M_{00}(\mathbf{a} - \mathbf{b})^\top = \mathbf{a}M_{00}\mathbf{a}^\top - \mathbf{a}M_{00}\mathbf{b}^\top + \mathbf{b}M_{00}\mathbf{a}^\top - \mathbf{b}M_{00}\mathbf{b}^\top = 0 \quad (1)$$

porque  $M_{00}$  es simétrica y los puntos  $[0, \mathbf{a}]$  y  $[0, \mathbf{b}]$  son puntos de la cónica. También

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})^\top = \mathbf{a}\mathbf{a}^\top - \mathbf{a}\mathbf{b}^\top + \mathbf{b}\mathbf{a}^\top - \mathbf{b}\mathbf{b}^\top = a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 = 0 \quad (2)$$

por lo tanto las rectas  $d_1$  y  $d_2$  son dos ejes de la cónica.

Veamos ahora que los dos puntos del infinito determinan también la excentricidad de la cónica. Sea  $T$  el cambio de referencia a la referencia afín formada por el centro y los dos vectores de modulo 1  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  de los dos ejes anteriores; en esta referencia la ecuación de la cónica es

$$\left(\frac{x}{E}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{F}\right)^2 = 1$$

(+ si la cónica corta a la recta del infinito en dos puntos imaginarios). Ahora la cónica corta a la recta del infinito en los puntos  $[0, E, iF]$  y  $[0, E, -iF]$  (+) o en los puntos  $[0, E, F]$  y  $[0, E, -F]$  que son los puntos  $T(A)$  y  $T(B)$ . Los puntos  $T(A)$  y  $T(B)$ , que determinan el cociente  $\frac{F}{E}$ , que determina la excentricidad, sea cual sea el centro de la cónica serán siempre puntos de la recta del infinito (direcciones) y por lo tanto sólo dependen de los dos vectores de la referencia (ejes) por lo tanto de  $A$  y  $B$ .

Recíprocamente es fácil ver que dadas una excentricidad y un par de direcciones, estas determinan de forma única los puntos de corte con la recta del infinito, siguiendo un razonamiento inverso al anterior.

**Nota 5** *En las condiciones anteriores:*

- Si la cónica corta a la recta del infinito en los puntos complejos conjugados distintos  $A = [0, \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2]$  y  $B = [0, \alpha_1 - i\beta_1, \alpha_2 - i\beta_2]$  con  $(\alpha_1 + i\beta_1)^2 + (\alpha_2 + i\beta_2)^2 = (\alpha_1 - i\beta_1)^2 + (\alpha_2 - i\beta_2)^2$ . El cociente  $\frac{F}{E}$  de la demostración anterior, que determina la excentricidad de la cónica (elipse) es  $\sqrt{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$  (eje  $y$ /eje  $x$ ). Y las pendientes de los ejes son  $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$  y  $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ .
- Si la cónica corta a la recta del infinito en los puntos reales distintos  $A = [0, x_1, x_2]$  y  $B = [0, y_1, y_2]$  con  $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$  el cociente que determina la excentricidad de la cónica (hipérbola) es  $\sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}}$ . Y las pendientes de los ejes son  $\frac{x_2 + y_2}{x_1 + y_1}$  y  $\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}$ .

**Nota 6** *En las condiciones anteriores, si la cónica:*

- Pasa por los puntos cíclicos  $I_1^{(i)} = [0, 1, i]$  e  $I_2^{(i)} = [0, 1, -i]$  es una circunferencia.

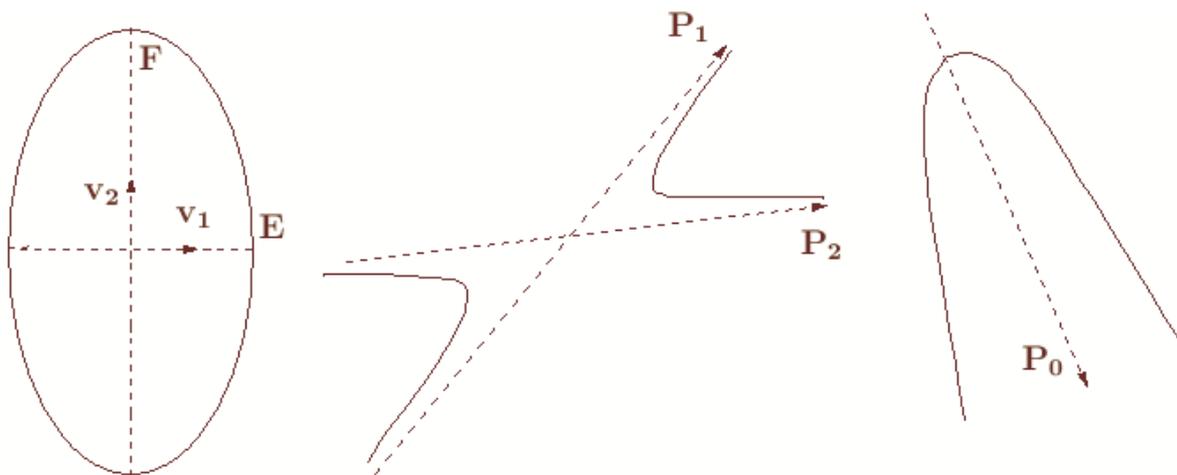


Figura 2: Ciclos que no son rectas, para cada tipo de geometría

- Pasa por los puntos  $P_1 = [0, 1, 1]$  y  $P_2 = [0, 1, -1]$  es una hipérbola equilátera.

**Proposición 10** *Las proyecciones de secciones por planos no tangentes y que no pasen por el vértice (ciclos):*

- Si el plano pasa por  $P$  son rectas.
- Si el plano no pasa por  $P$  son cónicas no degeneradas:
  1. Elipses con ejes paralelos y misma excentricidad caso  $\mathcal{S}$ .
  2. Hipérbolas con asíntotas paralelas (ejes paralelos y misma excentricidad), caso  $\mathcal{H}$ .
  3. Parábolas con ejes paralelos, caso  $\mathcal{C}$ .

**Proposición 11** *En las condiciones anteriores:*

1. Caso  $\mathcal{S}$ : Tres puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$  determinan un único ciclo.
2. Caso  $\mathcal{H}$ : Tres puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$ , tales que si dos de ellos están en una recta de pendiente dadas por  $I_1$  o  $I_2$ , el tercero también. Determinan un único ciclo.

3. *Caso C*: Tres puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$ , tales que si dos de ellos están en una recta de pendiente dada por  $I_0$ , el tercero también. Determinan un único ciclo.

**Nota 7** Si además las matrices de las cuádricas son como en la sección (1.1), en  $\mathbb{E}^3$  las cuádricas son la esfera, el hiperboloide y el cilindro. Y los ciclos en  $\mathbb{E}^2$  son

- *Caso S*: rectas y circunferencias.
- *Caso H*: rectas y hipérbolas con asíntotas de pendientes  $\pm 1$
- *Caso C*: rectas y parábolas con eje de pendiente 0.

## Bibliografía

- [1] Aroca J.M., Fdez. Bermejo M.J. *Notas de geometría proyectiva*. Preprint U.V.A 2003
- [2] Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées. *Tome III (premier volume) Fondements de la Géométrie*. Ed Jacques Gabay 1991.
- [3] Klein F. *Geometría elemental desde un punto de vista superior*. Ed CSIC Madrid 1954.
- [4] Klein F. *Über die Sogenannte nicht Euklidische Deometrie*. Math. Ann. 4, 1871. Pag 254-305.
- [5] Klein F. *Vorlesungen Über nicht Euklidische Geometrie*. Chelsea New York 1967. (Reedición).
- [6] Cayley A. *A Sixth Memoir upon Quantics*. Phil. Trans. Royal Society London 149, 1859. Pag 61-90.
- [7] Torretti R. *Philosophy of Geometry, from Riemann to Poincare*. Reidel Pub. Dordrecht 1984.
- [8] Morales M. *Métricas, compactificaciones y extensiones del cuerpo real*. Tesis doctoral UVA 1996.

# Una correspondencia para nuestra *Memoria* matemática: José Barinaga, Pedro Pineda, Luis Santaló y Ricardo San Juan, 1936-1939

**Francisco A. González Redondo**

Dpto. Álgebra. Facultad de Educación  
Universidad Complutense de Madrid  
faglezr@edu.ucm.es

## **Abstract**

*The outbreak of Spanish Civil War caused a collapse in the Nation's intellectual and scientific life. In this paper, some very special episodes in the lives and fates of such outstanding mathematicians as José Barinaga, Pedro Pineda, Luis A. Santaló and Ricardo San Juan between 1936 and 1939 will be shown. Through some of their never published previously correspondence, an important part of the state of the Spanish mathematical community during those years will be known for the first time.*

## **1. A modo de introducción**

En este trabajo se presenta parte de la correspondencia mantenida entre José Barinaga, Pedro Pineda, Luis A. Santaló y Ricardo San Juan, conservada en el Archivo de la Familia de Pedro Pineda<sup>1</sup>. Se trata de una documentación que no había visto hasta ahora la luz, y que se completa con otras cartas y documentos, también inéditos, encontrados en diferentes archivos oficiales. Con unos y otros se podrán ilustrar algunos episodios especiales en la vida y la obra de unos matemáticos que mantuvieron vivo el cultivo de su disciplina durante los trágicos años de nuestra cruenta Guerra Civil.

---

<sup>1</sup> Agradecemos a la familia de Pedro Pineda, en especial a su nieta, Myriam Pérez de Pineda, el habernos cedido esta documentación para su estudio y publicación.

Al producirse el levantamiento militar, tanto Barinaga como Pineda se encontraban de vacaciones en El Escorial [7]. Allí serían recluidos en el Monasterio por las milicias del Frente Popular hasta que se autorizó su traslado a Madrid el 18 de agosto. La capital era en aquellos entonces un hervidero, con un Gobierno republicano “legítimo” prácticamente inexistente desde que José Giral ordenara la distribución de armas al pueblo, y el poder real en manos de unos milicianos que habían desactivado el intento de golpe de estado y se aprestaban a organizar la defensa de Madrid.



*José Barinaga Mata y Pedro Pineda Gutiérrez con sus medallas como Catedráticos<sup>2</sup>*

La Universidad, en pleno período estival, permanecía prácticamente cerrada y no se vislumbraba la reapertura normal de la Facultad de Ciencias de la calle San

---

<sup>2</sup> La fotografía de Pedro Pineda pertenece al Archivo de su familia, mientras que la de José Barinaga pertenece a la Facultad de Químicas de la UCM, por lo que debemos hacer constar el agradecimiento a sus autoridades, especialmente a su Decano, el Dr. Reyes Jiménez Aparicio.

Bernardo en septiembre, ni, desde luego, que pudieran continuar las clases en octubre, con los jóvenes en edad militar luchando en los dos bandos.

La otra institución en la que se realizaban tareas docentes e investigadoras en el ámbito de la Matemática, el *Laboratorio y Seminario Matemático* de la *Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas* [1], sí parecía que podría volver a sus actividades en la calle del Duque de Medinaceli (al menos con los profesores no susceptibles de movilización), tras haberse superado un intento de incautación de toda la *Junta* por parte de la Asociación de Catedráticos del Frente Popular en ese mes de agosto<sup>3</sup>. Contaba para ello con la colaboración de la *Sociedad Matemática Española*, con la que compartía sede, dirección, biblioteca y revistas publicadas.

A las puertas del invierno de 1936, trasladado el Gobierno a Valencia, estabilizado el frente de Madrid, y encauzado el período de caos revolucionario en la capital, el *Laboratorio* emprendía su reorganización: publicación de los números pendientes de la *Revista Matemática Hispano-Americana*, y de *Matemática Elemental*, intercambio de la misma con las publicaciones extranjeras para mantener actualizada la Biblioteca, y planificación de actividades matemáticas para editar los números correspondientes al año siguiente. El personal afecto al *Laboratorio* estaba formado en esos momentos por José Barinaga (Director); Pedro Pineda, José A. Sánchez Pérez y Ricardo San Juan (Profesores); y Sixto Ríos, José Gallego y Francisco J. Herrero (Becarios). Otros matemáticos, como el Profesor Auxiliar en la Facultad de Ciencias de Madrid Luis A. Santaló [2], o el Catedrático también en Madrid Tomás Rodríguez Bachiller seguirían colaborando durante la Guerra sin estar adscritos al Centro [3].

Por otro lado, la *Sociedad Matemática Española* continuaba su vida institucional celebrando su primera sesión desde el estallido del conflicto fratricida el día 4 de enero de 1937, con José Barinaga presidiendo en funciones y poniendo “de relieve la necesidad de que todos los socios que actualmente se hallan en Madrid procuremos sostener la vida de nuestra Sociedad con la mayor normalidad posible” [4]. Para lograr estos fines, la Asamblea acordó nombrar una Junta Provisional que asumiera simultáneamente las obligaciones de la Junta Directiva y del Comité de Redacción de las dos revistas publicadas conjuntamente con el *Laboratorio*.

---

<sup>3</sup> Puede verse el *Libro de Actas* de la Junta para Ampliación de Estudios, Sesión del 24 de agosto de 1936, conservado la *Residencia de Estudiantes* (Madrid).

Esa Junta Provisional, nombrada por unanimidad de los asistentes, quedaba constituida de la forma siguiente: José Barinaga Mata (Presidente); Fernando Peña Serrano (Vice-Presidente), Sixto Cámara Tecedor, Pedro Pineda Gutiérrez, Ricardo San Juan Llosá, Tomás Rodríguez Bachiller (Vocales); y José Augusto Sánchez Pérez (Secretario-Tesorero y Habilitado). En suma, prácticamente con el profesorado del *Laboratorio y Seminario Matemático*.

Realmente sería Barinaga quien mantendría viva la actividad matemática del *Laboratorio* y la *Sociedad* a lo largo de 1937, en gran medida gracias a la colaboración de Pineda, quien ejercía prácticamente como Director-Editor de las revistas (comunicación con los autores, envío de colaboraciones, corrección de pruebas, etc.).

Llegado el 2 de agosto de 1937, y requerido por una Orden ministerial de 29 de julio, Barinaga enviaba al Secretario de la “Comisión Delegada” de la *Junta para Ampliación de Estudios* (Tomás Navarro Tomás) certificación del personal afecto al *Laboratorio Matemático* en esos momentos y de la índole de los trabajos que realizaban [3]. Se completaba unos días después con otra certificación que el propio Secretario de la JAE enviaba al Ministerio con el puesto que ocupaba cada matemático y la remuneración que recibía cada uno de ellos<sup>4</sup>:

José Barinaga (Director), Cuerpos cuadráticos reales no euclídeos.

Pedro Pineda Gutiérrez (Profesor). Fundamentos de Geometría diferencial.

Ricardo San Juan Llosa (Profesor). Métodos de Carleman en el estudio de Funciones analíticas.

José Sánchez Pérez (Profesor). Catalogación bibliográfica e Historia de la Matemática en España.

José Gallego Díaz (Becario). Problemas de Biología matemática.

María Mauriz Menéndez. Auxiliar de Catalogación y mecanografía

El panorama cambiaría con la caída de las provincias del Norte en manos de la España Nacional. Las autoridades republicanas, a la espera de que Madrid fuese a concentrar las iniciativas bélicas, decidían la evacuación de todo el personal que no resultara imprescindible para la defensa mediante órdenes de la Presidencia del Gobierno y del Ministerio de Instrucción Pública (de 6 y 23 de septiembre de 1937, respectivamente).

---

<sup>4</sup> Archivo JAE, Legajo 155/36. Expediente “Certificados y relaciones del personal de los Centros de la Junta”.

José Barinaga eludía el traslado no tanto por su condición de Director del *Laboratorio Matemático*, sino tras su nombramiento como Profesor del *Instituto Obrero* de Madrid. José Gallego Díaz recibía el nombramiento de Delegado Provincial en Madrid del Instituto de Reforma Agraria, por lo que garantizaba su estancia en la capital. Pedro Pineda consiguió justificar su permanencia en la capital durante 1937 “para cuidar de la Biblioteca y material científico de la Sección de Ciencias Exactas”, mediante Orden del Subsecretario del Ministerio de Instrucción Pública, según certificaba el Vicerrector de la Universidad Central, León Cardenal, el 20 de octubre de ese año<sup>5</sup>, pero el 24 de octubre era dado de baja en las nóminas de la Habilitación de Madrid y preparaba su traslado.

## 2. Una correspondencia inédita para nuestra *Memoria matemática*

Esta historia que se acaba de relatar es la que quedará ilustrada con documentos de primera mano que, a modo de fotogramas, proporcionarán una película de esos difíciles años.

Así, desde Barcelona, escribe Luis A. Santaló a Pedro Pineda el 8 de marzo de 1937.

*Querido D. Pedro:*

*He recibido sus cartas. Me alegro mucho de que haya encontrado la copia de mi trabajo. Recuerdo que en ella había unas correcciones en lápiz que convendría tener en cuenta al corregir las pruebas.*

*Comparto su opinión de que sería muy conveniente que continuase saliendo la “Revista” en la forma que sea y con las restricciones que fueran necesarias, por ej. asignando a un número del tamaño ordinario 3 ó 4 meses. No creo que haga falta, pero si acaso, yo les podría mandar algunas cuestiones resueltas que me parece quedaron pendientes.*

*Si se tira por fin, ya les decía que no hace falta manden las pruebas de mi trabajo, pero sí les agradecería unas cuantas separatas.*

*Recuerdos afectuosos a D. José, a D. Sixto y en general a todos de su alumno y amigo.*

---

<sup>5</sup> Archivo de la familia de Pedro Pineda.

Unos días después, 17 de marzo de 1937, Santaló volvía a escribir, ahora a Barinaga<sup>6</sup> y desde el Instituto Nacional de 2ª Enseñanza “Salmerón” de Barcelona, sito en el número 267 de la calle Muntaner.

*Querido maestro:*

*He estado en Gerona donde he recogido su carta. Ya me había insinuado D. Pedro últimamente que las dificultades económicas del Laboratorio y de la Revista aumentaban considerablemente. Por lo que a mi se refiere tiene poca importancia ya que, si bien hasta ahora no he cobrado nada más que lo que me mandaban desde Madrid (Auxiliaría y Laboratorio) parece que desde este mes me van a considerar reingresado en 2ª Enseñanza como Cursillista de 1933 en este Instituto Salmerón con 5.000 pts. anuales. Con esto ya, de momento, resuelvo el problema económico.*

*Lo que ya sentiría mucho más es que las dificultades llegaran a imposibilitar la salida de la “Revista”. Ya sé que intentarán Vdes. Todo lo posible para que esto no sea. Por pocas que sean las páginas siempre son suficientes para que no se rompa la continuidad en el intercambio. No creo que lo que falte sea origina pero si así fuese yo podría mandar algunas cuestiones o algo para llenar; en estas circunstancias lo de menos es el contenido, lo principal es llenar la Revista para salvar su vida.*

*Por aquí de matemáticas no hago naturalmente nada. He ido algún día al Laboratorio de esta Universidad pero es bastante pobre, sobre todo Revistas hay pocas. Conocí al Sr. Orts que me encargó muchos saludos.*

*Recuerdos a todos los que vayan por el Laboratorio y muchos saludos de su afmo.*

---

<sup>6</sup> En tanto que responsable de las publicaciones de la *Sociedad* y el *Laboratorio*, Pedro Pineda era quien recibía, tramitaba y conservaba estas comunicaciones entre los autores y las Revistas, razón por la cual se han podido localizar en su Archivo familiar.

Barcelona 17 marzo 1937

INSTITUTO NACIONAL  
DE 2.ª ENSEÑANZA  
"SALMERÓN"  
BARCELONA  
PROFESORADO

Muntaner 267

Pr. Dr. José Barinaga  
Madrid

Querido maestro: He estado en Gernona donde he  
recopido su carta. Ya me había informado D. Pedro última-  
mente que las dificultades económicas del Laboratorio y  
de la Revista aumentaban considerablemente. Por lo que  
a mi se refiere tiene poca importancia ya que, si bien  
hasta ahora no he cobrado nada más que lo que me man-  
daban desde Madrid (Auxiliaría y Laboratorio) parece que des-  
de este mes me van a considerar reimpresado en 2.ª En-  
señanza como Curulista del 1933 en este Instituto Salmerón con  
5000 pt. anuales. Con esto ya, de momento, resuelvo el probl-  
ma económico.  
Lo que ya sentiría mucho más es que las dificultades

*Carta de Luis Santaló a José Barinaga, 17.3.1937*

A modo de post-data, Santaló escribe algunas líneas más que aportan algunas referencias acerca de las relaciones internacionales que mantenía:

*Hace tiempo que mandó Gallego 6 ejemplares de mi Tesis. Como Blaschke me ha escrito pidiéndome algunas para sus alumnos de Hamburgo, escribí a Gallego pidiéndole unos 12 o 15 ejemplares más. No sé si recibiría la postal. Por si acaso, podrían Vds. mandármelas? Mejor si son con cubiertas de "Publicaciones del Laboratorio" no como Tesis de la Facultad.*

Unos días después, el 24 de marzo de 1937, y también desde el Instituto "Salmerón" de Barcelona, Santaló escribía a Pedro Pineda

*Querido D. Pedro:*

*Le devuelvo las pruebas. Muchas gracias por el trabajo que se tomó en corregirlas. No me extraña el gran número de erratas pues el borrador mío debía ser muy poco claro y confuso, pero ahora me parece que quedará bien. De todos modos si se hicieran unas 2<sup>as</sup> pruebas y V. les diese una ojeada se lo agradecería. También les agradeceré mucho si pueden mandarme unas separatas y el número de la Revista cuando salga.*

*Ya procuraré mandar algunas cuestiones o alguna ampliación de ellas que pueda servir de artículo. Por aquí se va siguiendo relativamente bien, y se piensa mucho en Madrid.*

*Recuerdos a D. José y disponga V. en todo de su afmo.*

Dos meses más tarde, el 12 de mayo, Santaló se dirigía de nuevo a Pineda desde el Pabellón de Oficiales del Aeródromo de Los Alcázares (Murcia).

*Querido Don Pedro:*

*He recibido su carta que me retransmiten desde mi casa. Yo ahora, desde hace unos 20 días estoy en este Aeródromo asistiendo a un cursillo para Profesores de Aviación. Calculamos que terminará a 1<sup>o</sup> de Junio y entonces veremos donde nos destinan. Me ha hecho mucha gracia lo de la pretendida incautación de la Biblioteca del Laboratorio: otro servicio inmenso que tenemos todos que agradecer a Vdes. por su permanencia en Madrid.*

*Si hubiera habido más facilidades le hubiese enviado algo más, como era mi deber, aunque últimamente también en Barcelona escaseaban muchas cosas.*

*Muchas gracias por el interés que se toma por las pruebas de mi artículo; por lo visto Bermejo sigue tan pesado como siempre.*

*Afectuosos saludos de un s.s.*

El artículo de Santaló aparecería finalmente abriendo el volumen 12, págs. 3 a 12 (1937), de la *Revista Matemática Hispano-Americana*, con el título “Curvas sobre una superficie que cumplen la condición  $dsf(k,t)ds = 0$ ”. Los esfuerzos de los matemáticos españoles durante 1937 mantenían viva la revista.

Los Alcizares 12 mayo 1937

Querido Sr. Pedro: He recibido tu carta que me retransmiten desde mi casa. Yo ahora, desde hace unos 20 días estoy en este Aeródromo asistiendo a un curso para Profesores de Aviación. Calculamos que terminará a 1<sup>er</sup> de Junio y entonces veremos donde nos destinan. Me ha hecho mucha gracia lo de la pretendida incautación de la Biblioteca del Laboratorio: esto sería un servicio inmenso que tenemos todos que agradecer a Vds. por su permanencia en Madrid. Si hubiera habido más facilidad les hubiera enviado algo más, como era mi deber, aunque últimamente también en Barcelona escaseaban muchas cosas. Muchas gracias por el interés que se toma por las pruebas de mi artículo; por lo visto Bernéjo sí fue un pasado como siempre.

Pabellón oficiales Abstinencia incluida de 2.1.  
 Aeródromo. Los Alcizares (Murcia) CA (antala)

Carta de Luis Santaló a Pedro Pineda, 12-5-1937

### 3. De la clausura del *Laboratorio Matemático* al fin de la Guerra

Las órdenes de evacuación de Madrid que mencionábamos en la Introducción tuvieron su continuación en el ámbito institucional. Así, en la Sesión de la “Comisión Delegada” de la *Junta para Ampliación de Estudios* del 27 de noviembre, primera celebrada tras su traslado a Barcelona, se ordenaba a Barinaga su adscripción a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia y la clausura del *Laboratorio*. Con esa decisión desaparecían las dotaciones económicas de la *JAE*

para remunerar al Director y los profesores colaboradores y para sufragar las publicaciones, aunque Barinaga volvía a eludir la evacuación por su pertenencia al Claustro del *Instituto Obrero* de Madrid.

Recibidas las oportunas notificaciones, un disciplinado Barinaga, daba por concluido un período muy singular en nuestra historia matemática, clausurando el *Laboratorio*. Así, evacuado Pineda a Valencia el 24 de noviembre de 1937, Barinaga le ponía al día de la situación aprovechando para felicitarle con motivo de su 46 cumpleaños (D. Pedro había nacido el 2 de diciembre de 1891).

*Querido Pineda: ante todo felicidades por tu casi semicentenario.*

*Te escribo desde tu casa, a donde tengo que acudir para saber de ti. ¿Qué os pasa? Nadie me escribe, nada me cuentan, y por tanto nada sé de vuestra vida, ni de vuestras actividades. Dadme noticias de la Univ., de sus clases, de sus Profs., del nº de sus alumnos. En fin, no me olvidéis en absoluto.*

*Ayer he clausurado “de orden superior” el Laboratorio de la Junta. Recordarás que te comuniqué hace tiempo el temor que sentía por tal medida. Llegó. “No hay plazo que no se cumpla...”. Por cierto que el Sr. Santullano me dice están sin despachar las nóminas de Octubre y noviembre últimos. Que para ello es preciso justificar la autorización para permanecer en Madrid o en otro caso justificar también, el estar fuera de la Capital. Para mí no hay problema, puesto que he disfrutado de la autorización correspondiente hasta ayer. Pero tanto tú como San Juan, tenéis que solicitar de esa Univ. el certificado de vuestra residencia en esa. Para ahorrar tiempo podéis remitirlo directamente a Barcelona (al Sr. Santullano) y decirle que lo hacéis por indicación mía. Y que os lo abonen en esa, o, si lo preferís, que lo remitan a Madrid para que lo perciba la persona a quien designéis. Ya me diréis vuestra decisión.*

*Que me escribas. Saludos de los colegas y para ti 46 abrazos de amigo y compañero,*

El 3 de enero de 1938 volvía Pineda a Madrid, utilizando para ello la certificación que le expedía José Gallego Díaz (becario del *Laboratorio* además de Delegado del Instituto de Reforma Agraria): “se traslada a esta Capital con el fin de realizar trabajos de estadística en esta Delegación provincial”<sup>7</sup>. En realidad el viaje estaba concebido para reunirse con su familia y trasladarse todos el 29 de

---

<sup>7</sup> Archivo de la familia de Pedro Pineda.

enero de 1938 a su nueva residencia en la calle Heroicos Milicianos de Burjasot (Valencia). Allí le escribía Barinaga el 10 de febrero.

*Querido Pineda:*

*Os supongo acomodados después de corteses codazos en vuestra nueva residencia. Nosotros, por aquí, a puñetazo limpio con los garbanzos y el pan. He desarrollado, como ya te indiqué, el plan ofensivo para la reapertura del Laboratorio, que culmina con el escrito de que te adjunto copia. Por una carta del Sr. Santullano a San Juan, y por otra de Corpus Barga a mí, tengo muy buenas impresiones sobre el asunto, aun cuando no confío demasiado en el éxito completo. Dime si has cobrado tus haberes de la Junta correspondientes a diciembre y enero.*

*Convendría que la copia que te remito se la entregues al Dr. Puche para que esté informado con anterioridad a la reunión de la Comisión Delegada en la cual ha de tratarse. Si puedes hablar con él, mejor; y si no, déjasela en un sobre con unas líneas tuyas diciéndole lo haces por encargo mío.*

*Ya advertí a Bustos lo de los fascículos de la "Zentralblatt". Infórmate si hay alguno más en las mismas condiciones.*

*Espero que, poco a poco, irás haciendo algo para la revista. Orts me ha enviado un trabajo. Ahora trato de apoderarme de un "stock" de papel que he descubierto en los sótanos del Ministerio. Confío en que Miranda me ayudará.*

*Muchos recuerdos a Peña, saludos a los colegas, expresiones cariñosas a Anita, besos a las niñas y para ti el afecto sincero de tu buen amigo y comp<sup>o</sup>.<sup>8</sup>*

Las circunstancias del conflicto y las incertidumbres acerca del futuro del *Laboratorio* desaniman a Pineda, quien decide renunciar a colaborar, desde la distancia, en los esfuerzos de Barinaga para mantener vivo el centro. En todo caso, éste le escribía el 4 de marzo de 1938 a Valencia.

*Mi querido amigo:*

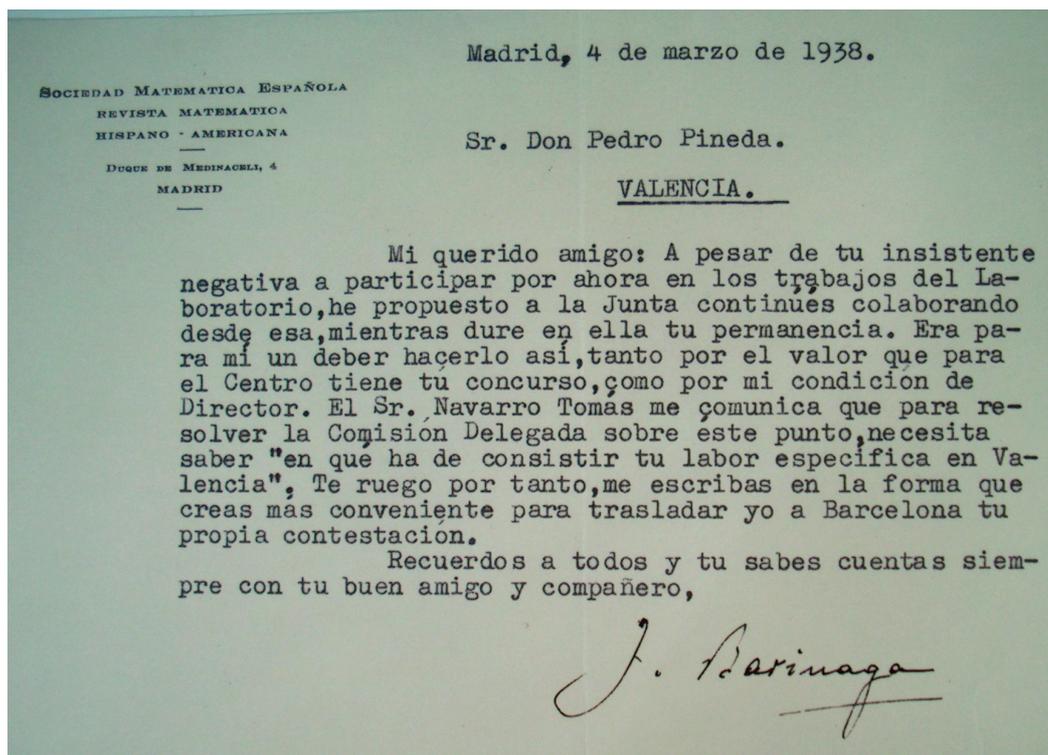
*A pesar de tu insistente negativa a participar por ahora en los trabajos del Laboratorio, he propuesto a la Junta continúes colaborando desde esa, mientras dure en ella tu permanencia. Era para mí un deber hacerlo así, tan-*

---

<sup>8</sup> Miranda era en esos momentos Secretario de la Universidad Central de Madrid y Delegado en Madrid del Ministerio de Instrucción Pública; mientras que Peña [Fernando Peña Serrano] era Catedrático en la Escuela de Ingenieros de Montes y vivía en la misma Residencia que Pineda.

to por el valor que para el Centro tiene tu concurso, como por mi condición de Director. El Sr. Navarro Tomás me comunica que para resolver la Comisión Delegada sobre este punto, necesita saber "en qué ha de consistir tu labor específica en Valencia". Te ruego, por tanto, me escribas en la forma que creas conveniente para trasladar yo a Barcelona tu propia contestación.

Recuerdos a todos y tú sabes cuentas siempre con tu buen amigo y compañero.



Carta de José Barinaga (Madrid) a Pedro Pineda (Valencia), 4.3.1938

Mientras Pedro Pineda se desmarcaba de una tarea que podía reportarle una importante ayuda económica en esos momentos del conflicto en cuanto se decidiese la reapertura del *Laboratorio*, Ricardo San Juan se mostraba deseoso de colaborar y contribuía con un trabajo que tenía bastante avanzado. Lo hacía mediante una carta enviada a Barinaga el 6 de marzo de 1938<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Archivo de la JAE, Legajo 109/32. Por razones que desconocemos, esta carta no se conserva en el expediente institucional del *Laboratorio Seminario Matemático*, ni en el personal de Barinaga o San Juan, sino en el de Julio Palacios, Catedrático de Termología

*Respetable colega: Atendiendo sus indicaciones expongo a continuación los títulos y el estado actual de los trabajos de Análisis matemático en que he venido ocupándome el curso actual.*

*I. Derivación e integración de series asintóticas y sus aplicaciones a la teoría de la aproximación asintótica óptima (Dispuesto para su publicación y cuya copia le remito a la mayor brevedad).*

*II. Definida una clase  $C_A$  de funciones cuasiasintóticas mediante sus cotas  $A_m$  que cumplen la condición de Carlemann, ¿se pueden elegir otras cotas  $B_m \leq A_m$  que cumplan la condición más restringida de Deujoy. Hemos demostrado que esto es posible cuando las funciones son periódicas y estamos estudiando qué acontece en el caso general.*

*III. Condiciones necesarias y suficientes para que coincidan dos clases de funciones cuasiasintóticas  $C_A$  y  $C_{A'}$  (Iniciado a propuesta de M. le Prof. S. Mandelbrojt).*

*IV. Condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una sucesión de números positivos  $M_n$  para que exista una función real  $f(x)$  de variable real indefinidamente derivable cuyas derivadas sucesivas  $f^n(x)$  tengan como valores máximos de sus módulos  $|f^n(x)|$  en un intervalo  $(a, b)$  dichos números  $M_n$ , esto es, sea*

$$|f^n(x)| \leq M_n \text{ para todo punto de } (a, b)$$

$$|f^n(\xi)| = M_n \text{ para un punto al menos de } (a, b)$$

*(Pendiente de una consulta hecha al Prof. M. S. Mandelbrojt de la Universidad de Clermont-Ferrand).*

*A su disposición queda incondicionalmente su discípulo*

Esa entrega “incondicional” del “discípulo” se transformaba profundamente una vez llegado el infame proceso de depuración al que fue sometido todo el profesorado tras la Guerra, entre ellos San Juan. Allí se verá obligado a poner por escrito lo que los depuradores le exigían: “El único trabajo que he publicado du-

---

en la Universidad Central, quien también permaneció en Madrid a lo largo de la Guerra y que al terminar ésta jugará un papel decisivo en la readmisión sin sanción de San Juan y el retorno a España de Esteban Terradas Illa y Julio Rey Pastor.

rante el dominio rojo ha sido una nota en la R.M.H.A. que firmé con iniciales (cambiadas éstas por mi nombre) coaccionado por el director del Laboratorio”<sup>10</sup>.

Es verdad que los conflictos bélicos, sobre todo si son fratricidas, también permiten conocer lo mejor de cada persona. Así, podemos comprobar la altura de científicos como Barinaga atendiendo algunas situaciones personales delicadas. Así, una vez reabierto el *Laboratorio*, en mayo de 1938 acogía en el mismo a Emilio Pajares, tal como éste declararía el 17 de Agosto de 1939 ante el Juez Depurador de la Universidad Central<sup>11</sup>.

*Emilio Pajares Díaz, mayor de edad, domiciliado en la calle de la Santísima Trinidad, 21, delineante-proyectista del Instituto Nacional de Física y Química, declaro solemnemente:*

*Que a primeros de mayo de 1938 en que fui expulsado del centro de enseñanza de la C.N.T. denominado “Instituto Ferrer” por mi filiación derechista, me presenté a Don José Barinaga Mata, director del Laboratorio de Matemática, sito en Medinaceli, nº 4, a quien expuse mi calidad de perseguido y mi apurada situación económica por ser padre de cinco hijos de corta edad y carecer de todo medio y de bienes.*

*Que dicho señor D. José Barinaga se ofreció incondicionalmente para favorecerme en cuanto le fuera posible y a tal efecto me expidió un certificado de trabajo como Auxiliar de la Biblioteca del Laboratorio Matemático y de la Sociedad Matemática Española, encargándome de la “conservación del Material Científico” para poder presentarlo íntegro el día de la liberación.*

*Que económicamente también me favoreció en varias ocasiones y por último alcanzome una Beca en el citado Laboratorio la cual cobré hasta el mes de febrero de 1939.*

*Que estas manifestaciones quedan consignadas en declaración jurada presentada al Ministerio de Educación Nacional fecha 15 de mazo de 1939, y otra en el Instituto Nacional de Física y Química con fecha posterior y por fin en instancia declaratoria pidiendo el percibo de haberes presentada el 23 de septiembre último.*

---

<sup>10</sup> Nota incluida en el Expediente de depuración de José Barinaga. AGA, Legajo 31/15047-4.

<sup>11</sup> Declaración incluida en el Expediente de depuración de José Barinaga. AGA, Legajo 31/15047-4.

*Y para que conste donde convenga al interesado expido la preste declaración en Madrid a diez y nueve de noviembre de mil novecientos treinta y nueve. Año de la Victoria.*

Realmente, las actividades del *Laboratorio* continuaban a comienzos de 1939, aunque para sus integrantes los temas científicos debían pasar a un segundo plano cuando de la propia supervivencia se trataba en unos momentos en los que la Guerra parecía que podía llegar a su fin. Así, Barinaga escribía a Pineda el 9 de enero sobre temas bien prosaicos.

*Querido Pineda: ayer recibí tu postal del 3. Llegaron las naranjas y los albaricoques. A Rodríguez Sanz le envié un [¿?] a tu nombre que creo contiene dos cajas vacías. Ya buscaré más, así como las cuerdas y el lacre. El [¿?] tiene que estar ahí, pues el cuñado de Rodríguez me asegura lo expidió. Yo se lo entregué el 1 de diciembre.*

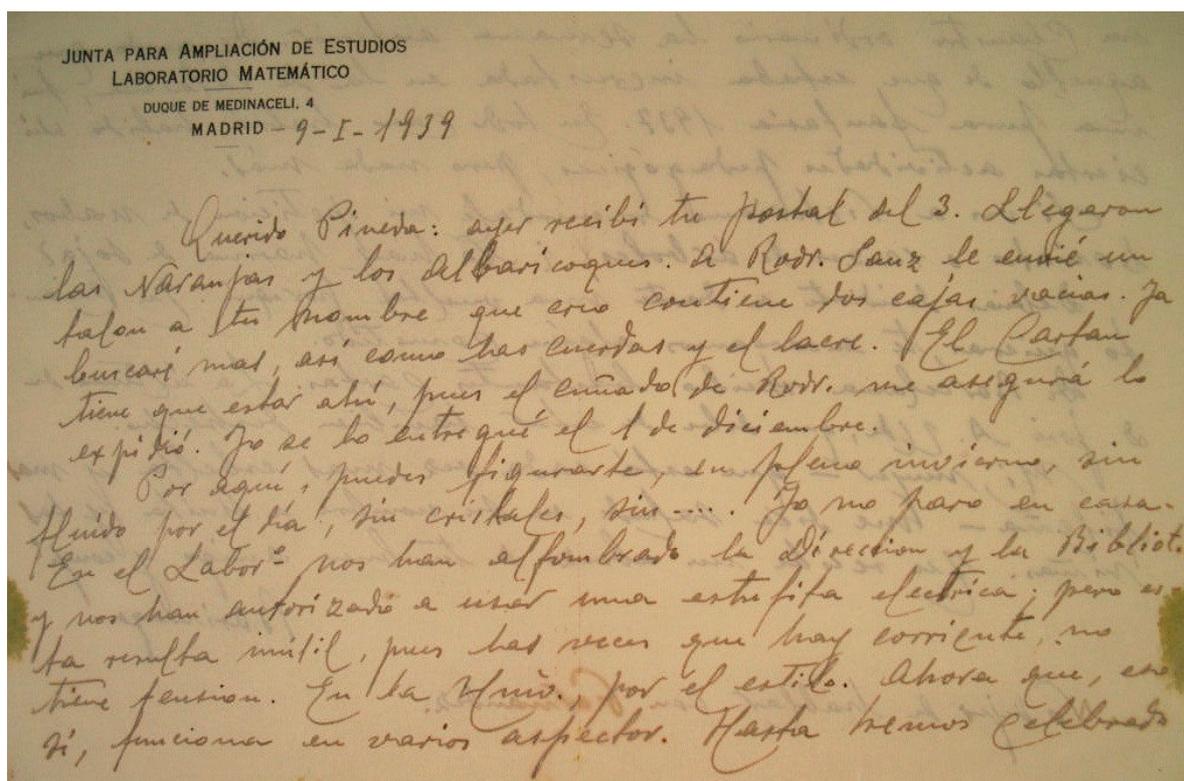
*Por aquí, puedes figurarte, en pleno invierno, sin fluido por el día, sin cristales, sin ... Yo no paro en casa. En el Labr<sup>o</sup> nos han alfombrado la Dirección y la Biblioteca y nos han autorizado a usar una estufa eléctrica; pero ésta resulta inútil, pues las veces que hay corriente, no tiene tensión. En la Univ., por el estilo. Ahora que, eso sí, funciona en varios aspectos. Hasta hemos celebrado un Claustro ordinario la semana anterior. De modo que aquello de que estaba incrustada en la de Valencia, fue pura fantasía 1937. En todo caso habrá habido ahí ciertas actividades pedagógicas, pero nada más.*

*Si ves a Victoriano recuérdale mi petición de nabos, boniatos o raíces de árboles! ¿No hay harina de soja?*

*Deberías decidirte a dar una vuelta por aquí. En cuanto quieras, te encargamos algún cometido.*

*De Barcelona recibo bastantes cartas. La última de D. José A. Ude, que debe estar también deshecho.*

*Mi mujer -que está cada vez más esbelta y marfileña- me dice saludes en su nombre a Anita y las niñas. Tu recibe un abrazo de tu buen amigo y comp<sup>o</sup>*



Carta de José Barinaga a Pedro Pineda, 9.1.1939.

Y es que, efectivamente, en esos momentos la situación no era la más adecuada para el cultivo de nuestra disciplina... claro que tampoco lo sería para muchos de nuestros colegas en los meses siguientes con procesos de depuración y exilios... pero esa es otra parte de nuestra *Memoria*.

## Bibliografía complementaria

Aunque el objeto de este trabajo consistía, básicamente, en presentar la correspondencia inédita (debidamente contextualizada e interrelacionada), entre Barinaga, Pineda, Santaló y San Juan, existe hoy una importante colección de trabajos publicados que permiten obtener una visión de conjunto más completa acerca de todo que lo que acaba de exponerse. Los más próximos al tema que nos ocupa son los siguientes:

- [1] Ausejo, E. y Millán, A. (1989): "La organización de la investigación matemática en España en el primer tercio del siglo XX: el Laboratorio y Semi-

- nario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas”, *Llull*, Vol. 12, 261-308.
- [2] Durán, X. (2001): *Lluís Santaló*. Collecció de Biografies de la Fundació Catalana per a la Recerca, num. 7.
- [3] González Redondo, F. A. (2001): “La actividad del Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios durante la Guerra Civil”. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 4 (nº 3), 675-686, 2001.
- [4] González Redondo, F. A. (2002a): “La vida institucional de la Sociedad Matemática Española entre 1929 y 1939”, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 5 (nº 1), 229-244.
- [5] González Redondo, F. A. (2002b): “La reorganización de la Matemática en España tras la Guerra Civil. La possibilitación del retorno de Esteban Terradas y Julio Rey Pastor”. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 5 (nº 2), 463-490.
- [6] González Redondo, F. A. (2002c): “La Matemática en el panorama de la Ciencia española, 1852-1945”. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* Vol. 5 (nº 3), 779-809.
- [7] González Redondo, F. A. (2005): El “oficio de matemático” en España en el siglo XX: Pedro de Pineda y Gutiérrez”. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* Vol. 8 (nº 3), 837-868.
- [8] González Roldán, G. (2001): *El nacimiento de la Universidad franquista: la depuración republicana y franquista de los Catedráticos de Universidad*. Tesis Doctoral. Facultad de Geografía e Historia, UNED, Madrid.
- [9] Sánchez Ron, J. M. (coord.) (1988): *La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones científicas 80 años después*. Madrid: CSIC.
- [10] Sánchez Ron, J. M. (1999): *Cinzel, martillo y piedra. Historia de la Ciencia en España (siglos XIX y XX)*. Madrid: Taurus.

# Sobre la colaboración de sistemas de geometría dinámica y de álgebra computacional y el nuevo sistema *Geometry Expressions*

**Eugenio Roanes Lozano**

Depto. Algebra, Universidad Complutense de Madrid  
eroanes@mat.ucm.es

## **Abstract**

*The author has studied and developed software for the dynamic geometry system (DGS) - computer algebra system (CAS) collaboration problem. The state of the art of this collaboration is discussed in the introduction. In 2006, an exciting new DGS, denoted “Geometry Expressions”, was presented by the company Saltire Software. It has the usual capabilities of DGS plus a small algebraic engine (allowing to internally perform algebraic computations) and the possibility to export data to some CAS. But its key capability is yet another one: for the first time, as far as we know, the possibility to add constraints (computed internally or externally to the DGS) that change the geometric configuration after it has been drawn, is included. This new DGS is also reviewed in the article.*

*Keywords:* dynamic geometry systems, computer algebra systems.

## **1 Introducción**

### **1.1 Sobre los sistemas de cómputo algebraico**

Los sistemas de cómputo algebraico (CAS), como *Maple*, *Mathematica*, *Derive*, *MuPad*, *Reduce*, *Axiom*, *Maxima*..., tienen dos características que los distinguen

de los lenguajes informáticos habituales (*C, Fortran, Pascal, Basic...*) y hacen que se clasifiquen en una clase propia:

- pueden trabajar en aritmética exacta (además de en coma flotante)
- pueden manejar variables sin asignación.

El trabajar en aritmética exacta quiere decir que no se producen redondeos en las cifras decimales (por ejemplo de los racionales periódicos y de los irracionales), ni de los números muy grandes. Esto es, se trabaja como es habitual en matemáticas, en lugar de considerar un cierto número de cifras fijo para representar todos los números (lo cual es mucho más conveniente y rápido para el ordenador o calculadora, aunque a costa de la exactitud e incluso veracidad de los cálculos [1]). Ejemplos de cálculo en aritmética exacta son:

$$1/2 + 1/3 = 5/6$$

$$6 - 3 \cdot 2 = 0$$

$$70! = 119785716699698917960727837216890987364589381425 \\ 4642585755536286462800958278984531968000000000000000$$

El poder manejar variables sin asignación quiere decir que pueden realizar cálculos con variables en el *sentido matemático*, en lugar de en el sentido habitual en informática. En cualquier lenguaje informático se puede calcular  $x^2 + y^2$  para cualesquiera valores numéricos concretos de  $x$  e  $y$ , pero sólo los CAS pueden realizar una simplificación general como:

$$x + x + x = 3 \cdot x \cdot y$$

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4 \cdot x \cdot y$$

(sin asignar previamente valores numéricos a  $x$  e  $y$ ). La posibilidad de realizar manipulaciones simbólicas, de mayor nivel de abstracción que realizar *cuentas numéricas*, es la clave para que los CAS ofrezcan posibilidades como: cálculos polinómicos, derivación simbólica, integración simbólica (cálculo de primitivas), cálculos con funciones trigonométricas, lógica..., que hacen que el ordenador sea una herramienta utilísima en áreas como álgebra conmutativa, geometría algebraica, lógica, astronomía, física de altas energías... y, por supuesto, educación matemática.

## 1.2 Sobre los sistemas de geometría dinámica

Por otra parte, los sistemas de geometría dinámica (DGS) se desarrollaron con un propósito didáctico: permitir que el usuario *explorara* la geometría de regla y compás. El adjetivo *dinámica* proviene del hecho de que, una vez se ha realizado la construcción, los primeros objetos dibujados (puntos) pueden ser arrastrados con el ratón, cambiando subsecuentemente toda la construcción.

Existen ya muchos DGS: *The Geometer's Sketchpad* [2], *Cabri Geometry II* [3], *GeoGebra* [4,5], *Cinderella* [6], *Euklid Dynageo* [7], *Euklides* [8], *Dr. Geo* [9], *WinGeom* [10]...

*Cinderella* presentó la novedad de tratar geometrías no euclídeas y de realizar los cálculos en (lo que evita que parte de una construcción se desvanezca en casos excepcionales, algo habitual en los demás DGS) [11,12].

Finalmente, existen DGS como *Calques 3D* [13] y *Cabri 3D* [14] que permiten realizar algo similar en dimensión 3 (representando la construcción geométrica en perspectiva en la pantalla).

Volviendo a los DGS habituales (2D), éstos pueden exportar:

- una construcción geométrica *viva*, en el sentido de que puede seguir completándose o alterándose, pero que sólo puede ser interpretado por ese DGS concreto (el DGS es a veces accesible vía Internet –tal es el caso de *Java Geometry Expert* o *webDiscovery*, comentados más abajo–)
- el *algoritmo geométrico* que ha permitido realizar la construcción (que sería el equivalente al programa en programación tradicional), denotado *script*, *macro*, *construction text*... y sólo interpretable por ese DGS en concreto
- una imagen gráfica *fija*, en los estándares gráficos habituales (EPS, JPG, GIFF...).

Además, algún DGS como *The Geometer's Sketchpad v.4* también permite exportar una construcción geométrica *fija* en formato *HTML*, que puede visualizarse con cualquier explorador de Internet con algunos aditamentos (*JavaSketchpad*). La construcción es fija en el sentido de que no puede completarse ni alterarse, aunque sigue siendo dinámica pues se puede cambiar la posición de los objetos iniciales).

## 2 Colaboración de DGS y CAS

### 2.1 Necesidades

Desafortunadamente, aunque varios CAS ofrecen paquetes específicos para tratar la geometría euclídea (por ejemplo *Derive* [15] o *Maple* [16]), ningún CAS ha incorporado ni posibilidades de dibujo con el ratón, ni capacidades dinámicas.

Por otra parte, ninguno de los “grandes” DGS mencionados al principio de la Sección 2 puede trabajar con variables sin asignación. En algunos de ellos se puede exportar en formato de ciertos CAS, o en *LaTeX*, o en *HTML*... las ecuaciones de un objeto geométrico concreto (por ejemplo las coordenadas del punto  $A=(3,4)$ , o la ecuación de la recta  $r, y=2x$ ). Pero ninguno devuelve como coordenadas de un punto definido simplemente como yaciendo en el eje  $x$ , algo de la forma  $(a,0)$ , donde  $a$  es un parámetro. Consecuentemente, tampoco pueden obtener una ecuación dependiente de un parámetro, como la de la recta paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes por  $(a,0)$ , esto es,  $y=x-a$ .

Esta falta de colaboración es sorprendente en casos como el de la calculadora *TI-92*, *TI-89* y *Voyage 2000* [17], en las que ambas tecnologías están disponibles simultáneamente.

### 2.2 Precedentes de la colaboración de DGS y CAS

La necesidad de colaboración de los DGS con los CAS fue ya subrayada hace años por Tomás Recio en el libro [18]. La idea de Tomás Recio fue desarrollada en una comunicación [19] y las diferentes formas en que se podría implementar una colaboración de este tipo se analizan en detalle en una conferencia plenaria [20].

El software *The Algebraic Geometer*, de *Saltire Software* [21] fue anunciado durante un tiempo como capaz de manejar parámetros en la forma en que se indica en el párrafo precedente, pero parece ser que nunca llegó a comercializarse.

### 2.3 Posibles soluciones

Básicamente, existen tres distintas estrategias para solventar esta descoordinación, que podríamos clasificar así [20]:

- desarrollar un nuevo sistema que integra un nuevo DGS así como un nuevo CAS (ejemplo: *Geometry Expert*)

- desarrollar un nuevo DGS diseñado para poder comunicarse con CAS existentes (ejemplos: *GEOTHER* & *Epsilon*, *GDI/Lugares/Discovery/LXP/GDI/webDiscovery*)
- desarrollar un traductor externo que permita al DGS comunicarse con CAS existentes (ejemplo: *paramGeo*).

*Geometry Expert* [22,23] está orientado principalmente a la demostración automática de teoremas geométricos [24-29] y permite elegir entre distintos métodos de demostración (bases de Gröbner, metodo de Wu, del área, del ángulo completo...). Ahora existe una nueva versión escrita en *Java* accesible por Internet, *Java Geometry Expert* [30,31] (Figura 1).

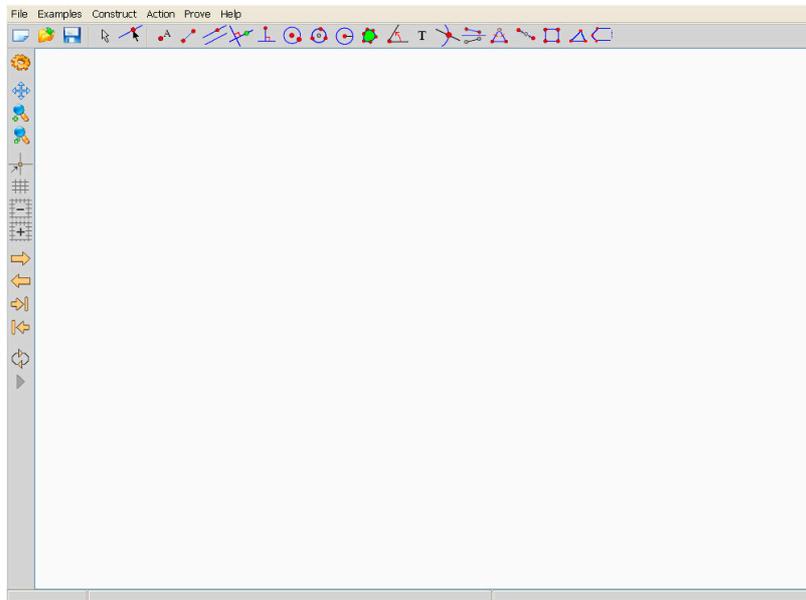


Figura 1: La GUI de *Java Geometry Expert*.

*Epsilon* [32] es una librería de funciones implementadas en *Maple* para eliminación y descomposición polinómica, que extiende las posibilidades proporcionadas por este CAS. *GEOTHER* [33,34] es un DGS orientado a la demostración automática y diseñado para que pueda utilizar la librería *Epsilon*.

Los DGS *GDI*, *Lugares*, *Discovery*, *LXP*, *GDI*, y *webDiscovery* [35-37] han sido desarrollados en *visual-Prolog* y llaman a los CAS *CoCoA* y *Mathematica* para determinar lugares geométricos, realizar demostración automática de teoremas geométricos y descubrimiento de teoremas geométricos (esto último sig-

nifica encontrar nuevas hipótesis que hagan que un teorema pase a ser cierto) [38-39].

*webDiscovery* [40] es una aplicación web desarrollada en *webMathematica* por los mismos autores, que recurre al núcleo de *Mathematica* o a *CoCoA* para realizar los cálculos simbólicos, y permite realizar demostración y descubrimiento automático en geometría elemental (Figura 2). *webDiscovery* acepta construcciones geométricas con regla y compás exportadas desde *GDI* y también desde un importante subconjunto de *JavaSketchpad*. El código está siendo revisado para que las construcciones geométricas descritas en *OpenMath* [41] sean aceptables por *webDiscovery*, de forma que, en el futuro, cualquier DGS con capacidad de exportar en formato *OpenMath* pueda acceder a *webDiscovery*.

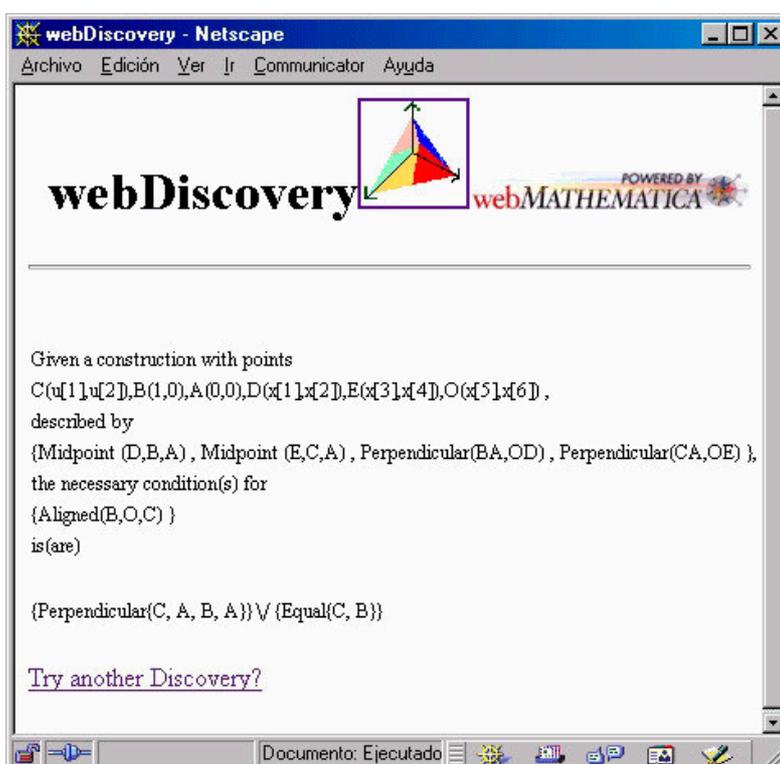


Figura 2: Descubrimiento con *webDiscovery* de las condiciones para que el circuncentro de un triángulo pertenezca a uno de sus lados.

En el caso de *paramGeo* la estrategia es diferente: tratamos de aprovechar software ya existente y muy experimentado. Así pues, construimos un puente [42] entre los DGS *The Geometer's Sketchpad* (versiones 3 y 4) [2,43,44] y los CAS

*Maple* [16] y *Derive* [15] (Figura 3). Elegimos *The Geometer's Sketchpad 3* por ser un DGS muy amigable y porque sus *scripts* (descripciones en lenguaje natural de las construcciones) eran susceptibles de ser fácilmente traducidos a código para un CAS. En el caso de la versión 4, los *scripts* han sido sustituidos por las llamadas *tools*, que pueden ser mostradas en pantalla en modo legible (►► *Show Script View*), pero que no pueden ser guardados en disco. Por ello en este caso usamos la posibilidad que tiene esta versión de guardar un *sketch* en un archivo *HTML* para *JavaSketchpad*.

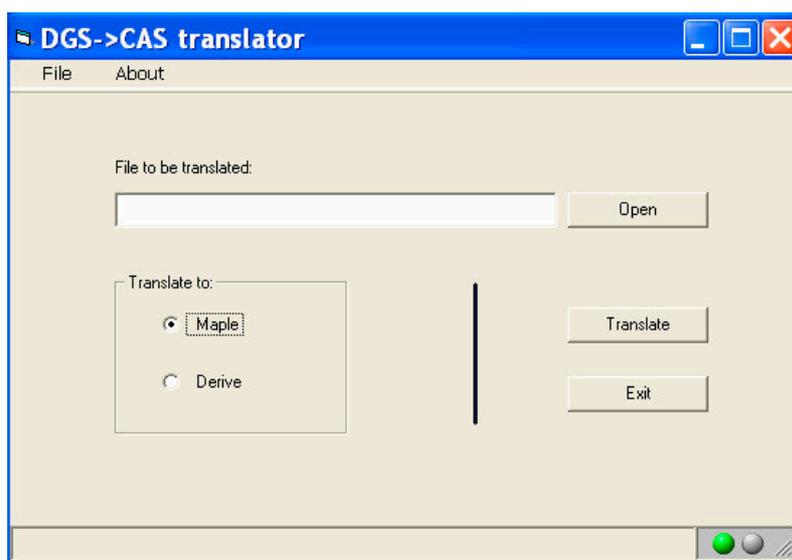


Figura 3: GUI de *paramGeo*.

### 3 Sobre *Geometry Expressions*

#### 3.1 Primeros pasos con *Geometry Expressions*

La introducción de datos a *Geometry Expressions* es muy similar a la de otros DGS como *The Geometer's Sketchpad*, *Cinderella*...

Tanto en la barra gris de menús como en el menú de iconos de la parte derecha de la pantalla, se encuentra el submenú *Draw* (Figura 4).

Con el icono de la flecha podemos seleccionar un objeto u objetos (en este último caso manteniendo pulsada la tecla de mayúsculas), y los demás permiten dibujar un punto, segmento, recta, semirrecta, polígono, circunferencia, texto o expresión matemática.

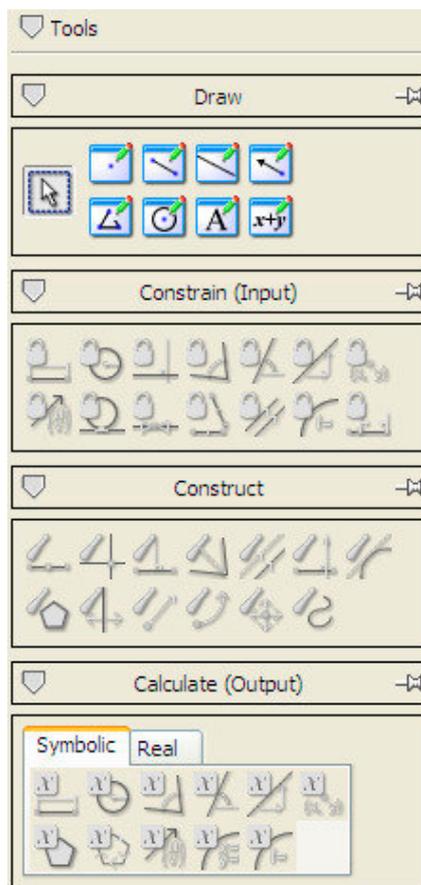


Figura 4: Submenú *Draw*.

Una vez se han dibujado los objetos iniciales, podemos seleccionar algunos de ellos, y, en el submenú *Construct* de la barra gris de menús (Figura 5) o en el menú de iconos de la parte derecha de la pantalla (Figura 4)<sup>1</sup>, podemos realizar las operaciones geométricas más usuales (estarán disponibles –aparecerán resaltadas– aquellas que tengan como entrada exactamente los objetos previamente seleccionados).

Así pues, es muy sencillo construir, por ejemplo, la circunferencia circunscrita a un triángulo (Figura 6), al igual que ocurre en *The Geometer's Sketchpad*, *Cinderella*... Basta:

- i) dibujar tres puntos

---

<sup>1</sup> Por brevedad, en lo sucesivo no explicitaremos si están en la barra gris de menús y también en el menú de la derecha de pantalla mostrado en la Figura 4.

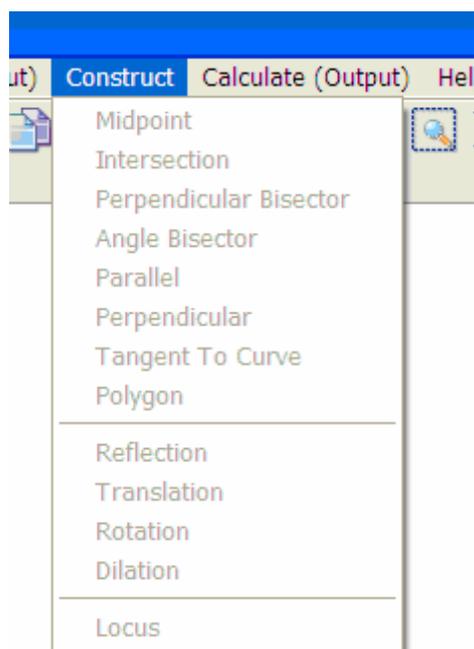


Figura 5: Menú *Construct*

- ii) unirlos con segmentos
- iii) seleccionar cada segmento (uno a uno) y construir sus mediatrices (directamente con *Construct/Perpendicular bisector* o, paso a paso, con *Construct/ Midpoint* y *Construct/Perpendicular*)
- iv) intersecar dos de las mediatrices (*Construct/Intersection*)
- v) dibujar la circunferencia de centro el punto de intersección de mediatrices y que pasa por un vértice.

Es típico de los DGS el poder *explorar* problemas geométricos. En la construcción anterior podemos, por ejemplo, arrastrar uno de los vértices hasta que el circuncentro pertenezca a uno de los lados. Si medimos el ángulo opuesto a ese lado, obtenemos que eso ocurre cuando el triángulo es rectángulo (Figura 7)<sup>2</sup>. En este DGS se pasa de medir los ángulos en radianes (lo que hace por defecto) a medirlos en grados en *Edit / Settings... / Math / Math / Angle Mode*.

---

<sup>2</sup> Observemos que hay un pequeño error de redondeo al calcular una función trigonométrica inversa.

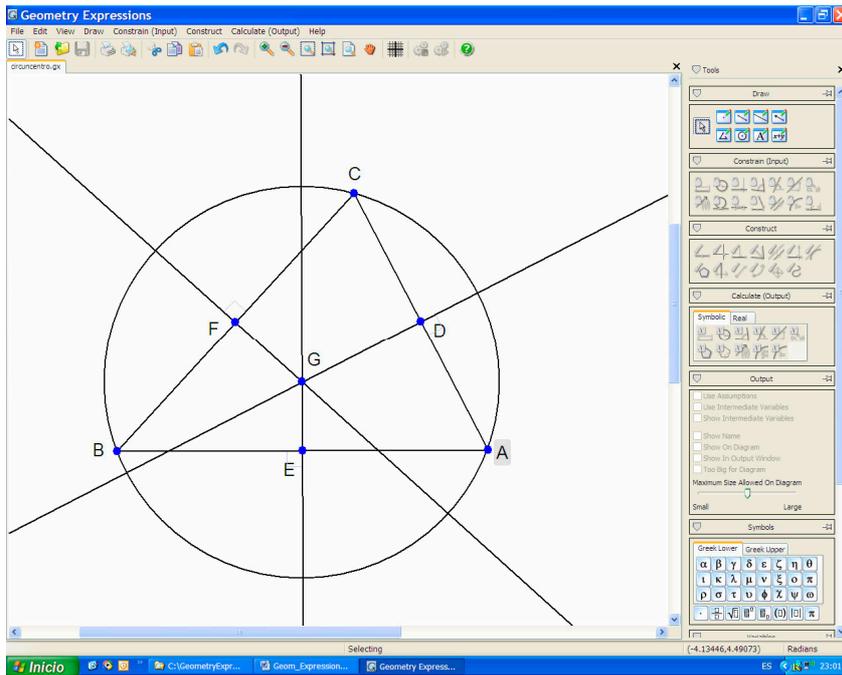


Figura 6: Circunferencia circunscrita a un triángulo

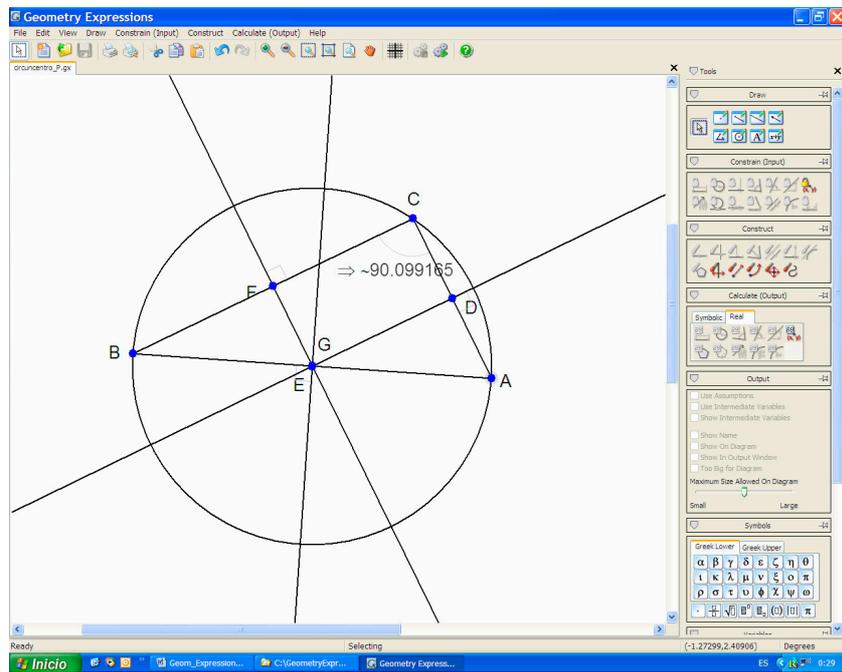


Figura 7: ¿Cuándo yace el circuncentro en un lado del triángulo?

### 3.2 Introducción de parámetros en *Geometry Expressions*

Como se ha comentado en la sección 2.1, ninguno de los “grandes” DGS ofrece la posibilidad de manejar parámetros no asignados (deducidos de la construcción geométrica realizada).

En *Geometry Expressions* este tipo de parámetros se pueden introducir y también aparecen de modo natural.

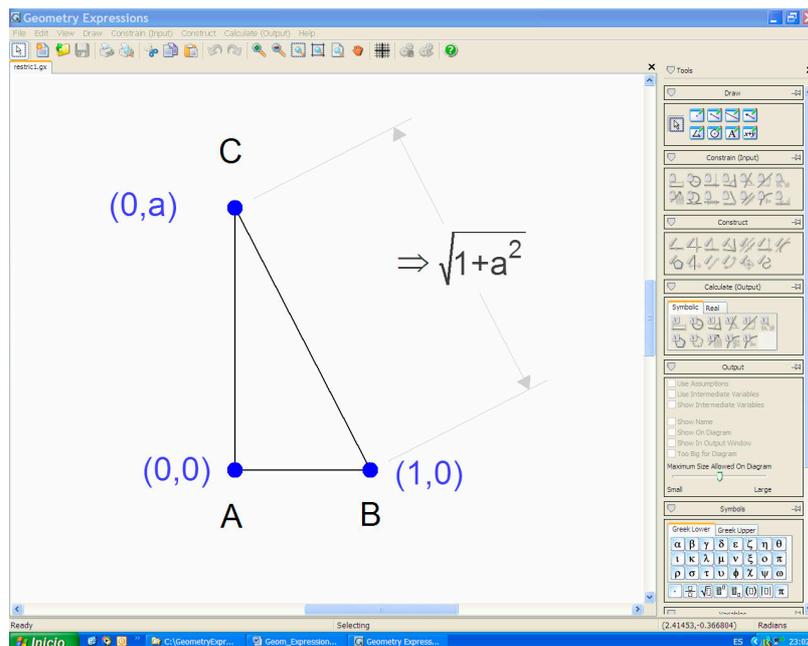


Figura 8: Un sencillo ejemplo con introducción de parámetros

Consideremos la construcción de la Figura 8. Hemos dibujado un punto hacia el centro de pantalla y, después de seleccionarlo, hemos elegido *Constraint (Input) / Coordinate* para imponer sus coordenadas:  $(0,0)$ . Los ejes de coordenadas se han movido consecuentemente (para mostrarlos u ocultarlos, seleccionar: *View / Axes*). A continuación hemos hecho lo mismo con otro punto para que sea el  $(1,0)$ . *Geometry Expressions* lo desplaza de forma que quede a la derecha del  $(0,0)$ . Finalmente, dibujamos un punto al que imponemos que sus coordenadas sean  $(0,a)$ . *Geometry Expressions* lo desplaza de forma que quede en la vertical de  $(0,0)$ . Si ahora calculamos la medida de la diagonal del triángulo rectángulo seleccionando el segmento y pidiendo *Calculate(Output) / Distance*, el sistema nos devuelve el valor (¡dependiente de  $a$ !).

Notemos que, aunque el ejemplo es una trivial aplicación del teorema de Pitágoras, se ha podido comprobar como este DGS cuenta con un pequeño CAS interno (algo imprescindible para poder realizar manipulaciones simbólicas).

Como se aprecia en la Figura 8, señala en pantalla qué distancia se está midiendo en la forma habitual en los planos.

### 3.3 Aparición de parámetros en *Geometry Expressions*

Consideremos ahora la construcción de la Figura 9. El punto  $A$  es el origen de coordenadas,  $B$  es el punto  $(1,0)$  y  $E$  es un punto libre: el sistema le asigna las coordenadas  $(u_0, v_0)$ . Si ahora construimos la perpendicular a la recta  $AB$  por  $E$ , y elegimos *Calculate(Output) / Implicit Equation*, obtenemos la ecuación de la recta, que depende del parámetro “abscisa de  $E$ ”. Si movemos  $E$ , la ecuación de la recta no cambia. Esto es sumamente interesante para realizar demostración automática en geometría.

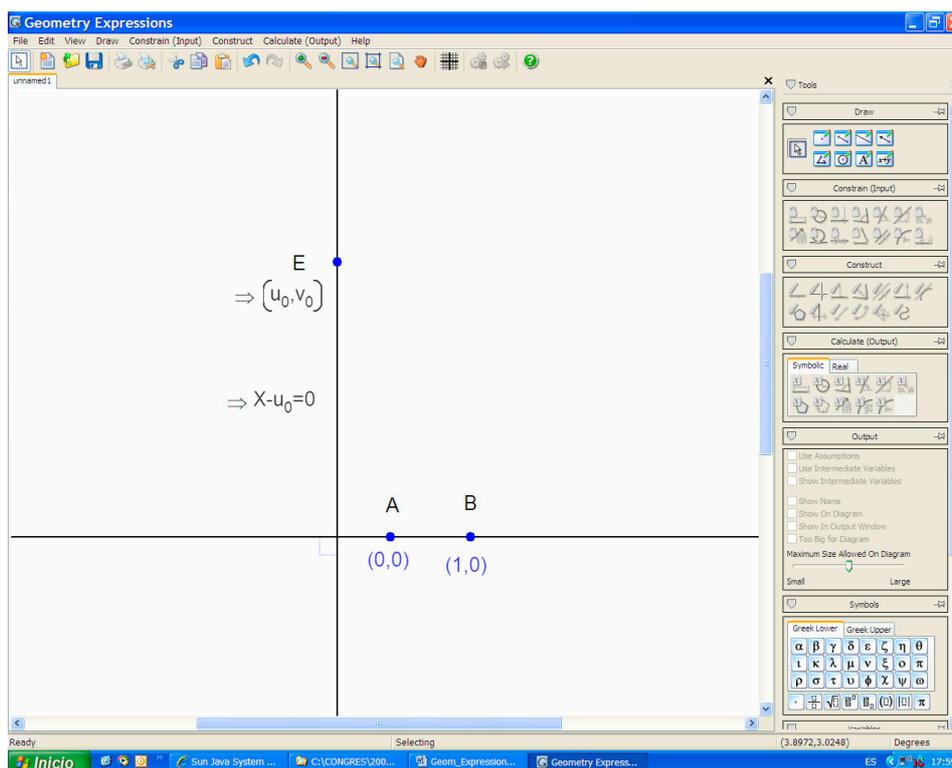


Figura 9: Un sencillo ejemplo en que aparecen parámetros.

### 3.4 Coordenadas dependientes de parámetros y numéricas en *Geometry Expressions*

Por ejemplo, en el caso de que el objeto sea una recta dada por dos puntos libres, si seleccionamos la recta, *Calculate(Output) / Implicit Equation* devuelve algo como:

$$\Rightarrow \left( u_0 + d_0 \cdot \cos(\theta_0), v_0 + d_0 \cdot \sin(\theta_0) \right)$$

donde  $(u_0, v_0)$  son las coordenadas del primer punto,  $d_0$  es la distancia del primer al segundo punto y  $\theta_0$  es el ángulo que forma la recta con la horizontal. Si se arrastran los puntos, ni sus coordenadas, ni la ecuación de la recta, cambiarán.

Sin embargo, si elegimos *Calculate(Output) / Real Measurement / Implicit Equation*, entonces devuelve algo como

$$\Rightarrow -0.16070753 + 0.5547002 \cdot X - 0.83205029 \cdot Y = 0$$

pues a los puntos les asigna las coordenadas numéricas que tienen en ese instante. Si se arrastran los puntos, tanto sus coordenadas, como la ecuación de la recta, cambiarán.

### 3.5 Demostrando un teorema con *Geometry Expressions*

Como *Geometry Expressions* cuenta con un pequeño CAS interno, podemos demostrar (no sólo comprobar) teoremas geométricos con él. Por ejemplo, podemos demostrar que la distancia del baricentro a un vértice del triángulo correspondiente es doble que la distancia al punto medio del lado opuesto. Para ello podemos simplemente obtener la expresión general de ambas distancias y resulta evidente que una es doble que la otra... (Figura 10).

### 3.6 Restricciones en *Geometry Expressions*

La introducción de restricciones permite realizar de modo muy diferente las construcciones geométricas.

Por ejemplo, para dibujar un triángulo equilátero en un DGS clásico, procederíamos como es habitual con regla y compás.

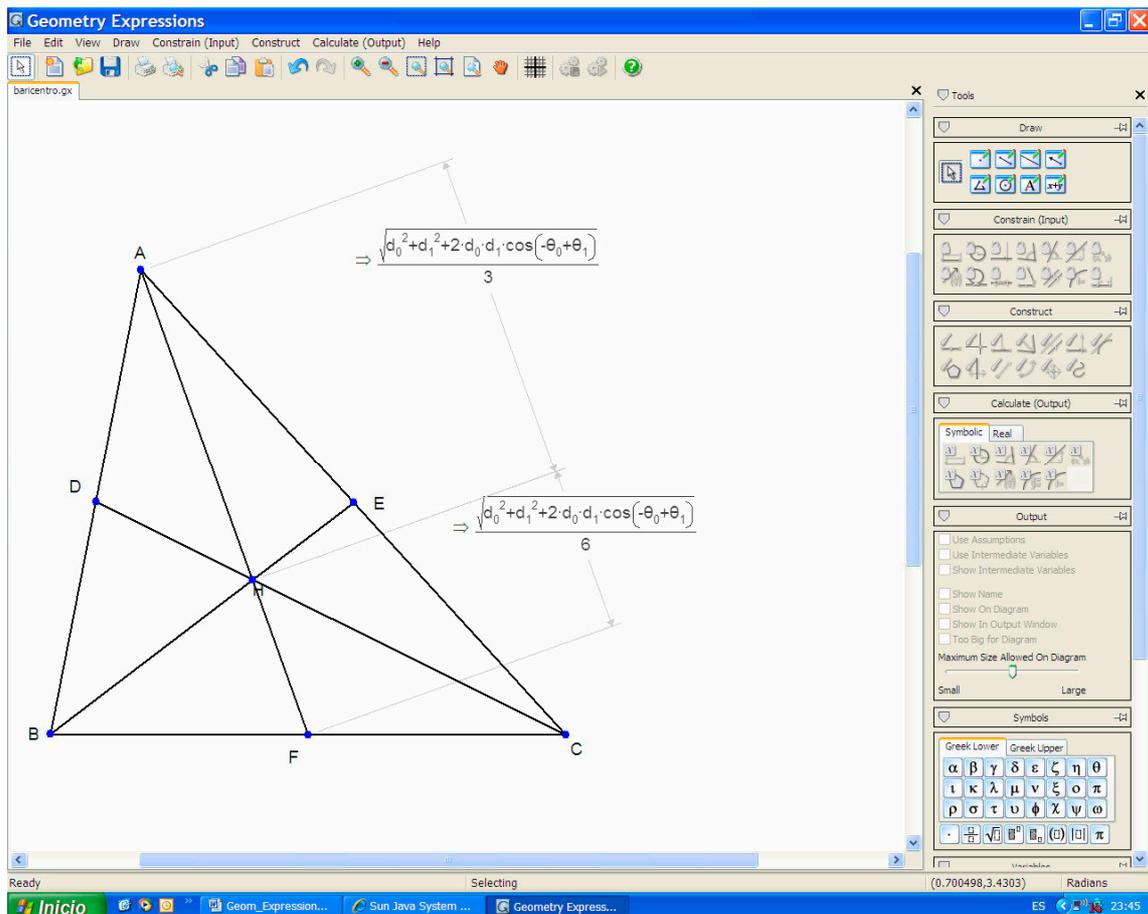


Figura 10: Distancias del baricentro de un triángulo a los extremos de una de sus medianas

Como *Geometry Expressions* admite imponer restricciones, podemos, alternativamente, hacer lo siguiente:

- i) dibujar un triángulo
- ii) seleccionar uno de los segmentos lados
- iii) medirlo (en modo simbólico)
- iv) seleccionamos dicha medida y, después de pulsar el botón derecho del ratón, elegir la opción *Convert to Constraint (Input)*, con lo que la variable medida pasa a ser  $a$
- v) seleccionar uno de los otros dos lados y elegir *Constraint (Input) / Distance-Length*

- vi) poner a la variable de este otro lado el mismo nombre ( $a$  en nuestro caso) y pulsar “Intro”; con ello el triángulo inicial se transforma en un triángulo isósceles
- vii) repetir los dos pasos anteriores para el tercer lado: el triángulo isósceles se transforma entonces en un triángulo equilátero, que, por supuesto, puede alterarse dinámicamente en la forma usual (ver Figura 11).

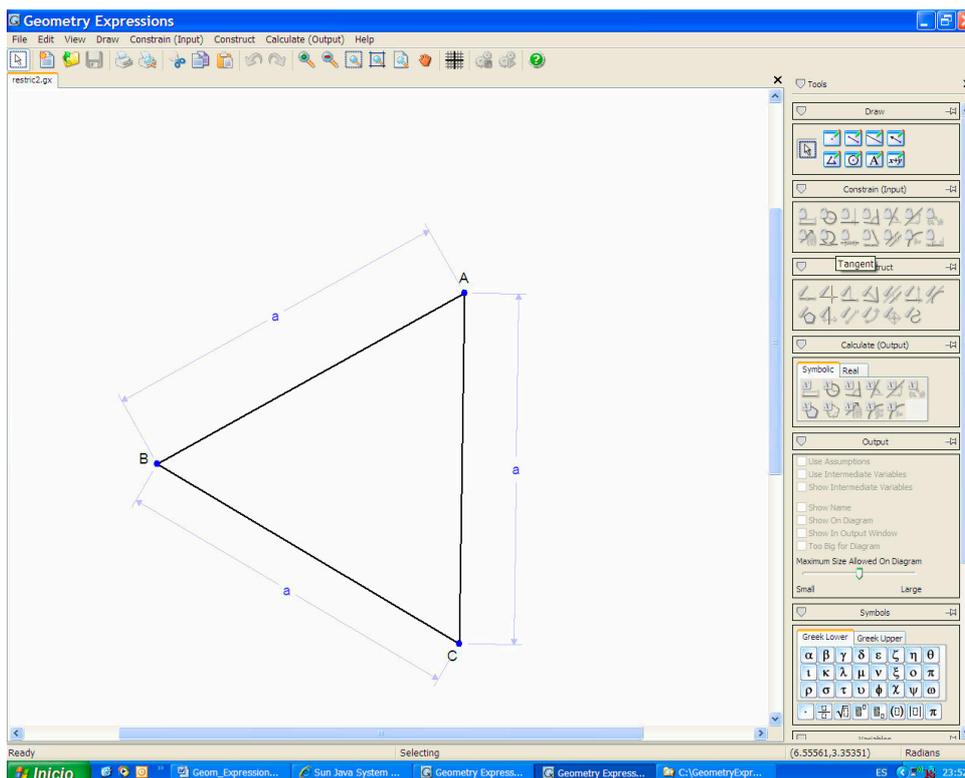


Figura 11: Un triángulo equilátero obtenido imponiendo restricciones.

### 3.7 Demostración automática y descubrimiento automático con *Geometry Expressions*

No todos los teoremas son tan sencillos de probar como el visto en la Sección 3.5. Pero este DGS permite seleccionar una medida y exportarla (con *Edit / Copy As*) en formato *MathML*, como entrada para *Maple* o como entrada para *Mathematica*. Así pues, una vez planteado el teorema, es inmediato obtener las ecuaciones del mismo para:

- ser demostrado con uno de los métodos típicos (por ejemplo bases de Gröbner o método de Wu) [24-29]
- ser completadas sus condiciones de hipótesis [38-39]

usando *Maple* o *Mathematica*.

Además, un resultado obtenido en el CAS externo puede cortarse y pegarse como se ha hecho en la sección anterior como una nueva restricción para un objeto geométrico. Así por ejemplo, una nueva condición de hipótesis encontrada mediante descubrimiento automático puede ser añadida “a posteriori” a la configuración geométrica realizada en el DGS (una vez realizados los cálculos pertinentes con el CAS).

### 3.8 Otras posibilidades de *Geometry Expressions*

Por supuesto, y como es habitual en los “grandes” DGS, es posible mostrar los ejes y/o una cuadrícula, hacer “zooms”, aplicar transformaciones del grupo equiforme, dibujar lugares geométricos, realizar animaciones...

Además, se puede elegir que los menús aparezcan en inglés, francés, alemán y español, aunque, por ahora, no hay ayuda en español.

## 4 Conclusiones

En el momento actual, *Geometry Expressions* supone un punto y aparte en lo que a sistemas de geometría dinámica se refiere: las posibilidades que tiene de manejar parámetros y el que se pueda comunicar con sistemas de cómputo algebraico bidireccionalmente, de modo que las nuevas restricciones alteren la construcción original, lo hacen único.

El sistema puede adquirirse en la página web [45] o a través de cualquier representante de *Maple* o *Mathematica* (en el caso de España, *Addlink Software Científico* [46]). El precio de una licencia individual es, aproximadamente, doble que el de *The Geometer's Sketchpad* o *Cabri Geometry II*. Corre sobre un simple P-III y se anuncia ya el próximo lanzamiento de las versiones para *Linux* y *Mac OS*. De [45] puede descargarse una “demo” funcional durante 30 días.

## Bibliografía

- [1] E. Roanes Lozano, Precisión Indefinida y Matemática Elemental, Bol. Soc. "Puig Adam" 31 (1992) 33-52.

- [2] URL: <http://www.keypress.com/x5521.xml>
- [3] URL: [http://education.ti.com/educationportal/sites/US/productDetail/us\\_cabri\\_geometry.html](http://education.ti.com/educationportal/sites/US/productDetail/us_cabri_geometry.html)
- [4] URL: <http://www.geogebra.org/cms/>
- [5] K. Fuchs, M, Hohenwarter. Combination of Dynamic Geometry, Algebra and Calculus in the Software System GeoGebra. En: *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference 2004*. Pecs, Hungary, 2005.
- [6] URL: <http://cinderella.de/tiki-index.php>
- [7] URL: <http://www.dynageo.com/eng/index.html>
- [8] URL: <http://www.eukleides.org/>
- [9] URL: <http://www.offset.org/en/drgeo>
- [10] URL: <http://math.exeter.edu/rparris/winggeom.html>
- [11] U. Kortenkamp: *Foundations of Dynamic Geometry* (PhD. Thesis), Swiss Fed. Inst. Tech. Zurich, 1999.
- [12] URL: <http://doc.cinderella.de/tiki-index.php?page=Theoretical%20Background>
- [13] URL: <http://uk.geocities.com/nicolas.vanlabeke@btinternet.com/index.html>
- [14] URL: <http://www.cabri.com/v2/pages/es/index.php>
- [15] B. Kutzler: *Introduction to DERIVE for Windows*. Ed . B. Kutzler, 1996.
- [16] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: *Cálculos Matemáticos con Maple V.5*. Ed. Rubiños, 1999.
- [17] URL: [http://education.ti.com/educationportal/sites/US/productCategory/us\\_graphing.html](http://education.ti.com/educationportal/sites/US/productCategory/us_graphing.html)
- [18] T. Recio: *Cálculo Simbólico y Geométrico*. Ed . Síntesis, 1998.
- [19] E. Roanes Lozano., E. Roanes Macías: How Dinamic Geometry could Complement Computer Algebra Systems (Linking Investigations in Geometry to Automated Theorem Proving). En: *Proceedings. of the Fourth*

*Intl. Derive/TI-89/TI-92 Conference* (CD-ROM). BK-Teachware, Hagenberg, Austria, 2000.

- [20] E. Roanes Lozano: Boosting the Geometrical Possibilities of Dynamic Geometry Systems and Computer Algebra Systems Through Cooperation. En: M. Borovcnik, H. Kautschitsch (editores), *Technology in Mathematics Teaching. Proceedings of ICTMT-5*. öbv & hpt, Schrifrenreihe Didaktik der Mathematik 25, Viena, 2002 (pp. 335-348).
- [21] URL<sup>3</sup>: [www.saltire.com/paraprts.html](http://www.saltire.com/paraprts.html)
- [22] URL: <http://www.mmrc.iss.ac.cn/gex/>
- [23] X.S. Gao, J.Z. Zhang, S.C. Chou: *Geometry Expert*. Nine Chapters Publishers, 1998.
- [24] B. Buchberger: Applications of Gröbner Bases in non-linear Computational Geometry. En: J.R. Rice (editor), *Mathematical Aspects of Scientific Software*. Springer-Verlag, 1988 (pp. 59-87).
- [25] C. Chou: *Mechanical Geometry Theorem Proving*. Reidel, 1988.
- [26] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: *Nuevas Tecnologías en Geometría*. Editorial Complutense, Madrid, 1994.
- [27] E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías: Automatic Theorem Proving in Elementary Geometry with Derive 3. *The Intl. Derive J.* 3/2 (1996) 67-82.
- [28] Wu Wen-Tsun: On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary Geometry. *A.M.S. Contemporary Mathematics* 29 (1984) 213-234.
- [29] Wu Wen-Tsun: Some recent advances in Mechanical Theorem-Proving of Geometries. *A.M.S. Contemporary Mathematics* 29 (1984) 235-242.
- [30] URL: <http://www.cs.wichita.edu/~ye/>
- [31] S. C. Chou, X. S. Gao, and Z. Ye, Java Geometry Expert, Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics, 2005 (pp. 78-84).

---

<sup>3</sup> Se accedió a todas las páginas web citadas excepto esta el 27-I-2007. El contenido a que se hace referencia en la Sección 2.2 era el que tenía esta página a finales de los '90 (el 27-I-2007 sigue citando a *The Algebraic Geometer* pero, aparentemente, sus objetivos han sido recogidos por *Geometry Expressions*, producto de la misma compañía).

- [32] URL: <http://www-calfor.lip6.fr/~wang/epsilon>
- [33] URL: <http://www-calfor.lip6.fr/~wang/GEOTHER/>
- [34] D. Wang: GEOTHER 1.1: Handling and Proving Geometric Theorems Automatically. En F. Winkler (editor), *Automated Deduction in Geometry*, LNAI 2930, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004 (pp. 194-215).
- [35] F. Botana, J.L. Valcarce: A dynamic-symbolic interface for geometric theorem discovery. *Computers and Education* 38/1-3 (2002) 21-35.
- [36] F. Botana, J.L. Valcarce: A software tool for the investigation of plane loci. *Mathematics and Computers in Simulation* 61/2 (2003) 141-154.
- [37] F. Botana, J.L. Valcarce: Automatic determination of envelopes and other derived curves within a graphic environment. *Mathematics and Computers in Simulation* 67/1-2 (2004) 3-13.
- [38] D. Kapur, J.L. Mundy: Wu's method and its application to perspective viewing. En: D. Kapur, J.L. Mundy (editores), *Geometric Reasoning*. MIT Press, Cambridge MA, 1989 (pp. 15-36).
- [39] T. Recio, M.P. Vélez: Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry. *Journal of Automated Reasoning* 23 (1999), 63-82.
- [40] F. Botana: A web-based resource for automatic discovery in plane geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 8/1 (2003) 109-121.
- [41] URL: <http://www.openmath.org>
- [42] E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías, M. Villar Mena: A Bridge Between Dynamic Geometry and Computer Algebra. *Mathematical and Computer Modelling* 37/9-10 (2003) 1005-1028.
- [43] --: *The Geometer's Sketchpad User Guide and Reference Manual v.3*. Key Curriculum Press, Berkeley, CA, 1995.
- [44] --: *The Geometer's Sketchpad Reference Manual v.4*. Key Curriculum Press, Emeryville, CA, 2001.
- [45] URL: <http://www.geometryexpressions.com/>
- [46] URL: <http://www.addlink.es/>

## Reseña de libros

JOAQUÍN HERNÁNDEZ, JUAN JESÚS DONAIRE: *Concurso Intercentros de Matemáticas. Problemas resueltos de los cinco primeros años*. Editorial NIVOLA. Madrid, 2006. ISBN 10:84-96566-22-6. Páginas: 175.

Una de las constantes de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas es su interés en proporcionar a todos los estudiantes y profesores de Matemáticas de Institutos y Colegios ocasiones en las que unos puedan disfrutar del sano ejercicio de competir y otros tengan la satisfacción de preparar a sus estudiantes para que desarrollen ese ejercicio en las mejores condiciones posibles.

En esa línea, organizó hace ya cinco años un concurso algo distinto a los que ya organizaba o colaboraba hasta ese momento: un concurso en el que la participación por equipos, representando a los Institutos y Colegios, fuera la característica predominante.

Los miembros de nuestra Sociedad en los que delegamos la responsabilidad de organizarlo, Juan Jesús Donaire y Joaquín Hernández, han recopilado en este pequeño libro los enunciados y soluciones desarrolladas de los problemas que han aparecido en las cinco primeras ediciones del Concurso.

Los autores, que tienen una gran experiencia en concursos y que llevan ya más de 30 años en la Enseñanza Secundaria, en la que se nota que disfrutan, han escrito un libro para los estudiantes, para que éstos, cuando se atasquen en algún problema, miren la solución y la entiendan sin ninguna dificultad; con esa idea, en los problemas destinados a estudiantes de primer ciclo de ESO, por ejemplo, huyen de cualquier formalismo o técnicas impropias para esa edad.

Los problemas suelen ser fáciles, pero con algún atractivo; en casi ningún momento hay problemas puramente rutinarios. Por otra parte, abundan problemas de Geometría; una geometría más “amable” que la de demostrar que tales puntos están alineados o que tales rectas son concurrentes, pero en la que los estudiantes tienen que pararse un poco a esbozar algún tipo de razonamiento.

Quiero comentar, finalmente, que la estructura del libro, primero los enunciados, luego unas páginas centrales con las respuestas y finalmente el desarrollo de las mismas, facilita extraordinariamente el fin que se han propuesto los autores

del mismo: hacer que los estudiantes intenten por sí mismo resolver los problemas y proporcionarles, en última instancia, una solución de los mismos.

Como matemático que soy, no me queda sino agradecer a la Editorial Nivola su disposición para que nuestros colegas y nuestros estudiantes disfruten de este libro y animar a sus autores a que continúen en esta importante tarea de divulgación.

**E. Roanes Macías**

BALDOMERO RUBIO: *Números y Convergencia. Primeros pasos en el análisis matemático*. Publicado por el autor: c/ Leopoldo Alas Clarín, 4, Madrid-20035. Correo electrónico: baldomero.rubio@gmail.com ISBN: 84-934918-0-2. Depósito Legal: M-9800-2006. Páginas: 277.

El autor es catedrático de análisis matemático en la Facultad de CC, Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, de la que fue Decano. Ha publicado varios libros de análisis, unos en colaboración con el tan recordado Miguel de Guzmán y otros como autor único. Al comienzo de su carrera profesional fue catedrático de Bachillerato y esa doble actividad justifica su interés por el propósito del presente libro.

El propósito de este libro es presentar de manera original los contenidos de un primer curso de análisis matemático, poniendo especial interés en el aspecto didáctico, de forma que sirva de puente desde el Bachillerato, pero sin abandonar la precisión y el rigor.

El capítulo primero, partiendo de una breve definición de las nociones elementales de teoría de conjuntos, introduce los números naturales (con la axiomática de Peano), los enteros y los racionales, incluyendo la numerabilidad de estos últimos.

En el capítulo segundo se introducen los números reales, a partir de la representación decimal de los racionales, lo que es muy interesante desde un punto de vista utilitario. Para ello se hace uso de las sucesiones de dichos números y de la noción de convergencia (lo que justifica el título del libro).

En el capítulo tercero se profundiza en la idea de convergencia (construcción de los reales a partir de las sucesiones de Cauchy) y se introducen los resultados fundamentales de las sucesiones y series de números reales: teoremas de Bolzano-

Weierstrass, de Borel, de Dirichlet y de Abel. Ello se completa con una buena colección de problemas con indicaciones que facilitan su resolución.

En el capítulo cuarto se introducen los números complejos. Para ello se hace uso de consideraciones de tipo geométrico, en aras del aspecto didáctico, pero sin abandonar la precisión y el rigor. La notación de Euler es usada para extender al campo complejo las funciones exponencial y logarítmica. En realidad, se llegan a introducir todas las funciones elementales.

Tiene especial interés la amplia reseña biográfica de los matemáticos más influyentes en la generación de las ideas desarrolladas en el libro. En orden alfabético: Abel, Arquímedes, Bolzano, Borel, Cantor, Cauchy, Dedekind, Dirichlet, Euler, Fibonacci, Peano, Raabe, Stolz, Tartaglia y Weierstrass. El conocimiento de la faceta humana de los creadores incentiva el interés por el estudio de sus aportaciones, lo que incrementa el interés didáctico de la obra.

Finalmente, un índice alfabético muy completo ayuda a localizar cómodamente conceptos y resultados.

Como comentario personal, tuve la suerte de ser alumno de Baldomero Rubio en la asignatura de Análisis I allá por el curso 1979-80, aprendiendo de él no sólo resultados y demostraciones (que pueden encontrarse en muchos buenos libros), sino también la importancia que tiene presentar las ideas de modo que despierten el interés de los alumnos. Recordar estos contenidos me ha traído muy gratos recuerdos de mi etapa como alumno de la UCM.

Considero que el libro puede ser muy útil, no sólo a los alumnos que van a incorporarse a carreras universitarias de Ciencias, sino también a profesores de matemáticas de Bachillerato que deseen actualizar la orientación de sus cursos.

**E. Roanes Lozano**

## **Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín**

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

### **Formato**

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTeX. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: “Problema número (Boletín número)”, tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo “article” y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTeX, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

### **Envío de las copias en papel**

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

### **Envío del fichero o ficheros en formato electrónico**

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

### **Selección de originales**

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

## **Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín**

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

**35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,**

**56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65,66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74 y 75.**

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

**Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004**

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.

## **BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN EN LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**

D. .... Teléf.: .....  
Dirección: .....  
Ciudad: ..... Cod. Postal: ..... E-mail: .....  
Centro de trabajo: .....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco: .....  
Dirección de la Sucursal: .....  
para que cargue en mi cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... / .....  
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 2006-2007 y siguientes.

Fecha: ..... de ..... de 2007

Firma:

La cuota anual está actualmente establecida en 40 euros (de ellos, 21 euros como cuota de la Sociedad «Puig Adam» y 19 euros como cuota de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, por la que se recibe la revista SUMA).

Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS  
c/. Carranza, 5 - 28004 Madrid  
cc. 3025-0006-24-1400002948

### ORDEN DE DOMICILIACIÓN EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha: ..... BANCO: .....  
Sucursal o Agencia: ..... en: .....  
Dirección de esta: .....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... / .....  
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad “Puig Adam”, de profesores de Matemáticas hasta nueva orden. Les saluda atentamente:

Firma:

Nombre y Apellidos: .....  
Dirección: .....

**Remítanse ambas partes (toda esta página) a nuestra sede:**

Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas  
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)  
C/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.