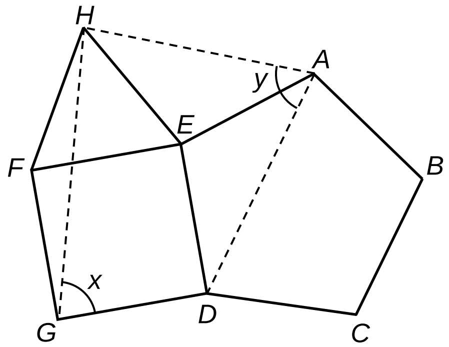
XV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

21 de noviembre de 2015

<u>PRUEBA POR EQUIPOS</u> 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. La figura muestra un pentágono regular, *ABCDE*, un cuadrado, *DEFG*, y un triángulo equilátero, *EFH*.
¿Cuál es la diferencia entre los ángulos $D\hat{G}H = x$ y $H\hat{A}D = y$?



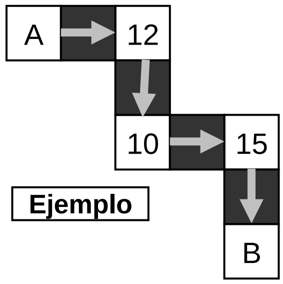
$H\hat{F}G = 90º + 60º = 150º$. FGH isósceles $F\hat{G}H = \dfrac{180º - 150º}{2} = 15º \Rightarrow x = 90º - 15º = 75º$

$A\hat{E}D = 108º \Rightarrow E\hat{A}D = \dfrac{180º - 108º}{2} = 36º$ $H\hat{E}A = 360º - (108º + 90º + 60º) = 102º \Rightarrow E\hat{A}H = \dfrac{180º - 102º}{2} = 39º$

Entonces y = 36º + 39º = 75º y la diferencia $x - y$ = 0º

2. En la cuadrícula de la figura se parte del cuadradito A y se llega al B. En cada movimiento solo se puede avanzar hacia la derecha o hacia abajo. Por cada cuadradito que se pasa se suma una cantidad, 5 puntos si es negro o el número que aparece si es blanco.
En el camino del ejemplo se sumaría, 5 + 12 + 5 + 10 + 5 + 15 + 5, en total 57.
¿Cuántos caminos hay que sumen 51? Márcalos sobre la figura.

A		12		10
	11		11	
10		10		15
	11		14	
10		13		B



Siempre se pasa por 4 cuadraditos negros que son 20 puntos. Para sumar los 31 puntos restantes se necesitarían dos de 10 y uno de 11 que no es posible ya que para llegar a B, obligatoriamente hay que pasar por un 13, 14 o 15. No hay ninguno.

3. La suma de cuatro números primos diferentes es también un número primo. La suma de alguna pareja de esos cuatro, también es un número primo y la suma de alguna terna de esos números, también es un número primo. ¿Cuáles han de ser esos cuatro números primos para que cumplan las condiciones anteriores y la suma de los cuatro sea la menor posible?

El 2 debe estar obligatoriamente para que existan dos de los cuatro cuya suma sea primo. La suma de los otros tres primos, que evidentemente serán impares, debe ser un número primo y éste más 2 también ha de ser primo.
Parejas de primos que se diferencian en dos unidades a partir del 7 encontramos: 11, 13; 17, 19; 29, 31;
Esta pareja, 29 y 31, es la primera que cumple las condiciones.
Las soluciones posibles, cuyas sumas son las menores de todas, son:
a) **2, 3, 7 y 19**, ya que 2 + 3 = 5 es primo, 3 + 7 + 19 = 29 es primo y además 2 + 3 + 7 + 19 = 31 es primo.
b) **2, 5, 11 y 13**, ya que 2 + 5 = 7 es primo, 5 + 11 + 13 = 29 es primo y además 2 + 5 + 11 + 13 = 31 es primo.
c) **2, 5, 7 y 17**, ya que 2 + 5 = 7 es primo, 5 + 7 + 17 = 29 es primo y además 2 + 5 + 7+ 17 = 31 es primo.
La suma en todos los casos es **2 + 3 + 7 + 19 = 2 + 5 + 11 + 13** = **2 + 5 + 7+ 17** = **31.**

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. Marco escribe varios enteros positivos en la pizarra de forma que sólo dos de ellos son múltiplos de 2. Sin embargo hay exactamente trece que son múltiplos de 13. Si M es el mayor de todos, ¿cuál es el menor valor posible de M?

Habrá dos múltiplos de 13 pares y los restantes impares. Los menores posibles son: 13, 13·2 = 26, 13·3 = 39, 13·4 = 52, 13·5 = 65, 13·7 = 91,…, y 13·21 = **273** que es el mayor de los trece y el menor posible

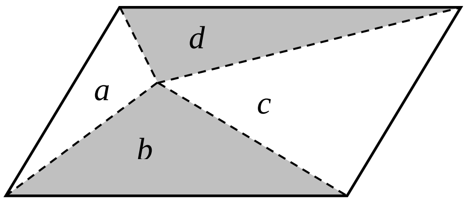
2. Encuentra una fracción $\frac{m}{n}$, con $m \neq n$, tal que las seis fracciones $\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n+1}, \frac{m+2}{n+2}, \frac{m+3}{n+3}, \frac{m+4}{n+4}, \frac{m+5}{n+5}$ puedan simplificarse.

Si tomamos m y n pares ya tenemos tres fracciones simplificable por 2. Si m = 2 entonces m + 3 = 5. Si tomamos n + 3 que sea un múltiplo de 5 de manera que n + 2 sea múltiplo de 7 y n – 2 múltiplo de 3 ya tenemos resuelto el problema. La primera fracción que cumple las dos primeras condiciones es $\frac{5}{75}$ ya que $\frac{7}{77}$ se puede simplificar por 7, pero $\frac{3}{73}$ no se puede simplificar por 3. Sumando 70 al denominador se conservan las dos condiciones pero n – 2 = 143 no es múltiplo de 3. Sumamos otra vez 70 y resulta que $\frac{m+3}{n+3} = \frac{5}{215}$.

Las seis fracciones pueden ser: $\frac{2}{212}, \frac{3}{213}, \frac{4}{214}, \frac{5}{215}, \frac{6}{216}, \frac{7}{217}$.

También podrían haber sido $\frac{2}{7!+2}, \frac{3}{7!+3}, \frac{4}{7!+4}, \frac{5}{7!+5}, \frac{6}{7!+6}, \frac{7}{7!+7}$ y si queremos obtener k fracciones consecutivas con estas condiciones, $\frac{2}{(k+1)!+2}, \frac{3}{(k+1)!+3}, \frac{4}{(k+1)!+4}, \ldots, \frac{k+1}{(k+1)!+(k+1)}$

3. Desde un punto, elegido al azar en el interior de un paralelogramo, trazamos segmentos a cada uno de sus vértices formando los triángulos a, b, c y d como muestra la figura.
Prueba que Área (a) + Área (c) = Área (b) + Área (d).

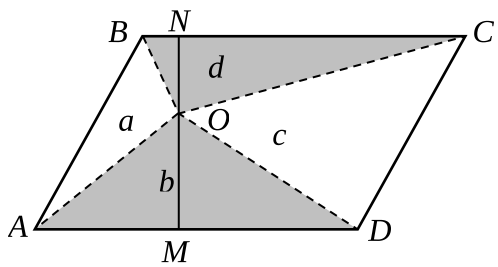


Trazando el segmento MN perpendicular a AD y que pasa por O tenemos:

$$Área(ABCD) = AD \cdot MN$$

$$Área(b) + Área(d) = \frac{1}{2}AD \cdot MO + \frac{1}{2}BC \cdot ON = \frac{1}{2}(AD[MO+ON]) = \frac{1}{2}(AD \cdot MN) = \frac{1}{2}Área(ABCD$$

Por lo tanto también $Área(a) + Área(c) = \frac{1}{2}Área(ABCD = Área(b) + Área(d)$



PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. Bea y Carlos desarrollan el siguiente juego: Ambos eligen, alternativamente, un número de la lista 1, 2, 3, 4,…, 31. Empieza Bea y luego, cada uno elige un número que no haya sido elegido con anterioridad. El perdedor es aquel que tiene que elegir un número que no sea primo con alguno de los ya elegidos. Escribe un número que pueda elegir Bea con el que siempre va a ganar, independientemente de cómo se desarrolle el juego y justifica por qué ganaría.

Consideramos los siguientes subconjuntos A ={1}, B = {2, 4, 6,…, 30} = $\dot{2}$, C = $\dot{3}$, D = $\dot{5}$, E = $\dot{7}$, F = $\dot{11}$, G = $\dot{13}$, H = $\dot{17}$, I = $\dot{19}$, J = $\dot{23}$, K = $\dot{29}$, L = $\dot{31}$

Como hay 12, par, Bea debe elegir un número de dos subconjuntos para dejar otro número par, pero de forma que Carlos no pueda elegir otro número de dos subconjuntos. Ese número puede ser: 6,12, 18 o 24 que eliminan dos subconjuntos, el B y el C. A partir de ahora irán diciendo alternativamente un número de cada subconjunto y Bea elegirá el último de ellos, de manera que Carlos deberá elegir otro número de alguno de los subconjuntos ya elegidos.

No valdría el 10 que pertenece a B y D porque Carlos podría elegir 21 que elimina dos subconjuntos.

Tampoco el 14 porque Carlos podría elegir el 15 y lo mismo ocurre con otros casos.

2. En el cuadrado mágico de la figura cada fila columna o diagonal suman lo mismo. Si *a, b, c, x, y, z* son números positivos, determina el producto *x·y·z* en términos de *a, b* y *c*. (Todos los logaritmos que aparecen están en base 10)

lg a	lg b	lg x
p	lg y	lg c
lg z	q	r

lg$a$ + lg$b$ + lg$x$ = lg$z$ + lg$y$ + lg$x$ $\Rightarrow \lg(ab) = \lg(zy) \Rightarrow ab = zy \Rightarrow z = \dfrac{ab}{y}$

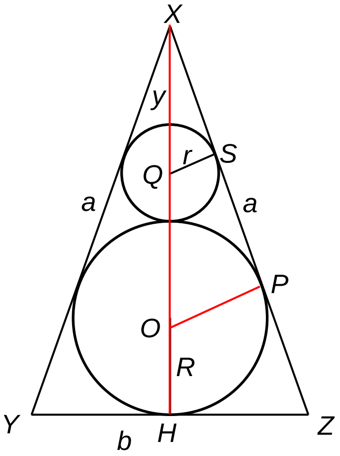
lg$a$ + p + lg$z$ = p + lg$y$ + lg$c$ $\Rightarrow \lg(az) = \lg(yc) \Rightarrow az = yc \Rightarrow z = \dfrac{cy}{a}$

Igualando ambas expresiones se obtiene $\dfrac{ab}{y} = \dfrac{cy}{a} \Rightarrow y^2 = \dfrac{a^2b}{c}$

lg$a$ + lg$y$ + r = lg$x$ + lg$c$ + r $\Rightarrow \lg(ay) = \lg(xc) \Rightarrow ay = xc \Rightarrow x = \dfrac{ay}{c}$

Ahora calculamos el producto $x·y·z$. $x \cdot y \cdot z = \dfrac{ay}{c} \cdot y \cdot \dfrac{cy}{a} = y^3 = \left(y^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{a^2b}{c}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\dfrac{a^6b^3}{c^3}}$

3. En el interior del triángulo isósceles *XYZ* con *XY* = *XZ* = *a*, *YZ* = *b* y *b* < 2ª, dibujamos dos circunferencias, de radios *R* y *r*, tangentes entre sí y tangentes al triángulo como muestra la figura. Escribe una expresión para $\dfrac{R}{r}$ en términos de *a* y *b*.



Los triángulos XSQ, XPO y XHZ son semejantes y por lo tanto,

$\dfrac{y+r}{r} = \dfrac{a}{b/2} = \dfrac{y+2r+R}{R}$. De la primera igualdad $y = \dfrac{2ar}{b} - r$.

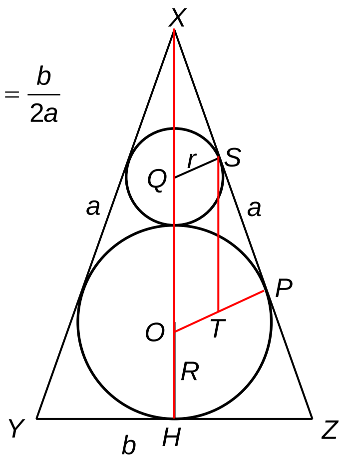
Sustituimos en la segunda igualdad y resulta, $\dfrac{a}{b/2} = \dfrac{\dfrac{2ar}{b} - r + 2r + R}{R}$.

Operando llegamos a: 2aR = 2ar – br + 2br + Rb y de aquí,

2aR – Rb = 2ar + br $\Rightarrow R(2a-b) = r(2a+b) \Rightarrow \dfrac{R}{r} = \dfrac{2a+b}{2a-b}$

$$\boxed{\dfrac{R}{r} = \dfrac{2a+b}{2a-b}}$$

Es mucho más elegante y rápido si trazamos el segmento ST.



Los triángulos TPS y ZHX son semejantes, luego $\frac{TP}{TS} = \frac{HZ}{XZ} \Rightarrow \frac{R-r}{R+r} = \frac{\frac{b}{2}}{a} = \frac{b}{2a}$

$2aR - 2ar = bR + br \Rightarrow 2aR - bR = 2ar + br \Rightarrow R(2a-b) = r(2a+b)$

Por lo tanto $\frac{R}{r} = \frac{2a+b}{2a-b}$

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. En el triángulo *ABC* el ángulo $\hat{B}$ es el 25 % mayor que el ángulo $\hat{C}$ y el 50 % mayor que el ángulo $\hat{A}$. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\hat{B}$?

$\hat{B} = \frac{125}{100}\hat{C} = \frac{5}{4}\hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \frac{4}{5}\hat{B}$. También $\hat{B} = \frac{150}{100}\hat{A} = \frac{3}{2}\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{2}{3}\hat{B}$.

Sumando los tres $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \frac{2}{3}\hat{B}+\hat{B}+\frac{4}{5}\hat{B} = \frac{37}{15}\hat{B} = 180^o \Rightarrow \hat{B} = \frac{15\cdot 180^o}{37} = 72^o\ 58'\ 22{,}7''$

2. Nueve helados cuestan 11 € y *a* céntimos y 13 helados cuestan 15 € y *b* céntimos, siendo *a* y *b* números enteros positivos menores que 100. ¿Cuál es el precio de cada helado?

Al dividir 11€ + *a* céntimos entre 9 nos dará 1€ y algunos céntimos. Sea *x* esa cantidad de céntimos.
Al multiplicar *x* por 9 debe dar una cantidad entre 2 y 3 euros y al multiplicar *x* por 13 también debe dar una cantidad entre 2 y 3 euros.

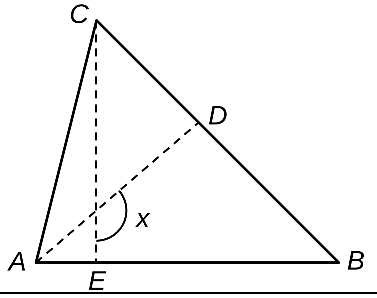
Escribiendo en céntimos (*c*): 200 *c* < 9*x c* < 300 *c* y 200 *c* < 13*x c* < 300 *c*, es decir, $\frac{200}{9} < x < \frac{300}{9}$ y $\frac{200}{13} < x < \frac{300}{13}$ la $\frac{200}{9} = 22{,}22... < x < \frac{300}{13} = 23{,}07...$ El único número entero que cumple las desigualdades es x = 23.
El helado costará 1 euro y 23 céntimos.

3. Si los números *a, b* y *c* verifican las ecuaciones *a* + *b* + *c* = 500, 3*a*+ 2*b* + *c* = 1000, ¿cuál es el valor de 3*a*+ 4*b* + 5*c*?

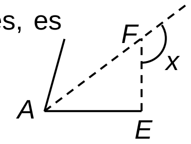
Buscamos unos números adecuados para que al multiplicarlos por las dos ecuaciones y sumarlas, su primer miembro sea 3*a* + 4*b* + *c*.
Esos números son 6 y (–1) pues 6·(*a* + *b* + *c* = 500) – 1(3*a*+ 2*b* + *c* = 1000) = 3*a*+ 4*b* + 5c = 2000.
Si no los "vemos" mediante un tanteo, podemos buscarlos con los coeficientes de dos de las incógnitas.

Por ejemplo con los de *b* y *c*. $\left.\begin{array}{l} 1\cdot x + 2\cdot y = 4 \\ 1\cdot x + 1\cdot y = 5 \end{array}\right\}$ Restando se obtiene que *y* = –1 y sustituyendo, *x* = 6.

4. En el triángulo *ABC* de la figura, *AD* es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ y *CE* es la altura desde *C*. Si el ángulo *x* es el doble del ángulo $\hat{A}$, ¿cuántos grados mide el ángulo *x*?



En el triángulo *AEF* el ángulo exterior *x* es igual a la suma de los dos no adyacentes, es decir, $x = 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$ y como *x* = 2Â resulta $2\hat{A} = 90^o + \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow 3\hat{A} = 180^o \Rightarrow \hat{A} = 60^o$
Por lo tanto *x* = 120º.

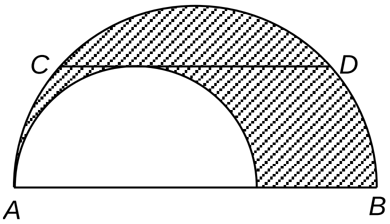


5. Los enteros positivos *a, b* y *c* son todos diferentes y ninguno de ellos es un cuadrado perfecto. Sin embargo *a*·*b*, *a*·*c* y *b*·*c*, los tres son cuadrados perfectos. ¿Cuál es el menor valor posible de *a* + *b* + *c*?

Si tomamos el menor valor posible de *a*, *a* = 2, *b* y *c* han de tener una potencia de 2 de exponente impar y a lo sumo otro factor que sea cuadrado perfecto.
Las posibilidades primeras son: *a* = 2, *b* = 2^3 y *c* = 2^5 o bien, *a* = 2, *b* = $2\cdot 2^2$ y *c* = $2\cdot 3^2$.
En el primer caso *a* + *b* + *c* = 2 + 8 + 32 = 42. En el segundo, *a* + *b* + *c* = 2 + 8 + 18 = 28 que es el menor valor posible.

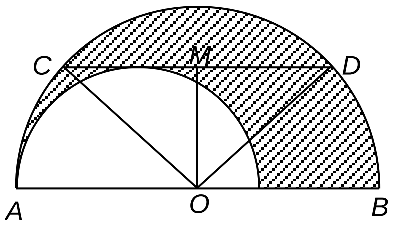
PRUEBA INDIVIDUAL **3º y 4º de E.S.O.**

1. El dibujo muestra dos semicircunferencias. La cuerda *CD*, paralela a *AB*, es tangente a la semicircunferencia pequeña y tiene una longitud de 32 cm. Calcula el área de la región rayada.

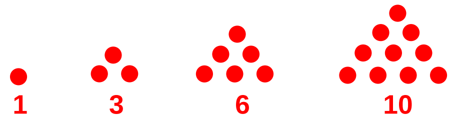


Como $OC = OD$ el triángulo *OCD* es isósceles, por lo tanto $MD = 16$.
En el triángulo *OMD*, rectángulo, $OM = r$ y $OD = R$.
Se verifica que $16^2 = R^2 - r^2$.

El área pedida es $S = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{\pi}{2}\cdot 16^2 = 128\pi$



2. ¿Cuántos, de los 2015 primeros números triangulares, son múltiplos de 5? (Recuerda. Los números triangulares son: 1, 3, 6, 10,…

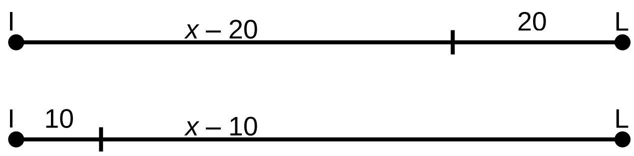


Los números triangulares son los términos de la sucesión $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ y serán múltiplos de 5 cuando $n(n + 1)$ sea múltiplo de 10. Como n o $(n + 1)$ es par entonces basta con exigir que el número n termine en 4, 5, 9 ó 0, es decir, 4 de 10 posibilidades. En total habrá, $\dfrac{2015}{10}\cdot 4 = 806$

Otra forma de verlo es la siguiente:

Los números triangulares son: 1, 3, 6, $\boxed{10, 15}$, 21, 28, 36, $\boxed{45, 55}$,… cada cinco hay dos múltiplos de 5, consecutivos en la sucesión. En total habrá, $\dfrac{2015}{5}\cdot 2 = 806$

3. Isa y Luisa salen a correr a la vez de cada uno de los extremos de una pista rectilínea. Las dos corren a velocidad constante, pero Isa es más rápida que Luisa. Cuando llegan al extremo opuesto de la pista se dan la vuelta y siguen corriendo a la misma velocidad, cruzándose repetidas veces. La primera vez que se cruzan lo hacen a 20 m del extremo del que partió Luisa y la segunda vez a 10 m del otro extremo. ¿Qué longitud tiene la pista?



Sea x la longitud de la pista. Hasta el primer cruce Luisa ha recorrido 20 m mientras que Isa ha recorrido $(x - 20)$ m. Como el tiempo es el mismo podemos escribir: $\dfrac{x-20}{v_I} = \dfrac{20}{v_L} \Rightarrow \dfrac{v_I}{v_L} = \dfrac{x-20}{20}$.

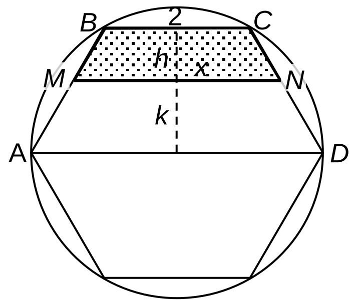
Hasta el segunde cruce, pues según el enunciado hay varios cruces antes de que ocurra un "adelantamiento", Luisa ha recorrido $(x + 10)$ m mientras que Isa ha recorrido $x + (x - 10)$ m.

Por lo tanto $\dfrac{2x-10}{v_I} = \dfrac{x+10}{v_L} \Rightarrow \dfrac{v_I}{v_L} = \dfrac{2x-10}{x+10}$. Con ambas ecuaciones obtenemos $\dfrac{2x-10}{x+10} = \dfrac{x-20}{20}$ cuya solución es $x = 50$. La pista tiene 50 metros.

4. Calcula los enteros *m* y *n* que verifican la igualdad $2^{m+1}+2^m=3^{n+2}-3^n$.

$2^{m+1}=2\cdot 2^m$ y $3^{n+2}=3^2\cdot 3^n$, por lo tanto la igualdad es $2\cdot 2^m+2^m=9\cdot 3^n-3^n \Leftrightarrow 3\cdot 2^m=8\cdot 3^n$.
Como las potencias de 2 y de 3 no tienen divisores comunes $3=3^n \Rightarrow n=1$ y $2^m=2^3 \Rightarrow m=3$.

5. Cortamos un hexágono regular de 2 cm de lado en dos trozos mediante un segmento paralelo a uno de los lados. Si el cociente entre las áreas de estos dos trozos es $\frac{1}{5}$. Calcula la longitud del segmento.



En un triángulo equilátero de lado *a*, su altura es $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ y su área $S=\frac{1}{2}\left(a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

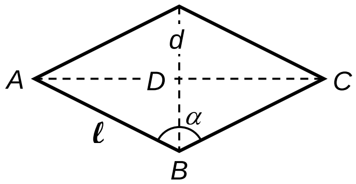
El área del hexágono regular de lado *a* es $S=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. En este caso como *a* = 2 su área es $S=6\sqrt{3}$. El área del trapecio *AMND* será $2\sqrt{3}$ y la del trapecio *MBCN* será $\sqrt{3}$.

$$S_{AMND}=\frac{4+x}{2}k=2\sqrt{3} \quad S_{MBCN}=\frac{2+x}{2}h=\sqrt{3} \quad \text{y} \quad h+k=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3} \ \text{ luego}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{2+x}+\frac{4\sqrt{3}}{4+x}=\sqrt{3}\Rightarrow\frac{2}{2+x}+\frac{4}{4+x}=1\Rightarrow 8+2x+8+4x=(2+x)(4+x)\Rightarrow x^2=8\Rightarrow x=2\sqrt{2}\text{ cm}$$

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Bachillerato

1. La longitud de cada uno de los lados de un rombo es igual a la media geométrica de las longitudes de las diagonales. Calcula la medida del ángulo mayor del rombo.
(Recuerda. La media geométrica de a y b es $\sqrt{a\cdot b}$)



El área del rombo es $S=\frac{D\cdot d}{2}$ pero también es el doble del área del triángulo ABC. $S=2\cdot\left(\frac{1}{2}l^2 sen\alpha\right)=l^2 sen\alpha$.

Como $l^2=D\cdot d \Rightarrow \frac{l^2}{2}=l^2 sen\alpha \Rightarrow sen\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=30^{o}\\ \alpha_2=150^{o}\end{cases}$.

El mayor es $\alpha_2=150^{o}$

2. La sucesión creciente $\{a_n\}$ = {1, 3, 4, 9, 10, 12, 13,…} está formada por los números que, o son potencia de 3 o son suma de dos o más potencias diferentes de 3. ¿Cuál es el término a_{70}?

La sucesión que tenemos es esta:
$3^0,\ 3^1,\ 3^1+3^0,\ 3^2,\ 3^2+3^0,\ 3^2+3^1,\ 3^2+3^0+3^1,\ 3^3,\ 3^3+3^0,\ 3^3+3^1,\ 3^3+3^0+3^1,\ 3^3+3^2,\ 3^3+3^2+3^0,\ 3^3+3^2+3^1,$
$3^3+3^2+3^0+3^1,\ 3^4,\ldots$

Si las agrupamos así:

1: **1**
2: **3**, 4
4: **9**, 10, 12, 13
8: **27**, 28, 30, 31, 36, 37, 39, 40
16: **81**, 82, 84, 85, 90, 91, 93, 94, 108, 109, 111, 112, 117, 118, 120, 121
32: **243**, 244, 246, 247,…
64: **729**, 730, 732, 733,…

El término 70 de la sucesión será el séptimo del último recuadro, que lo constituyen:

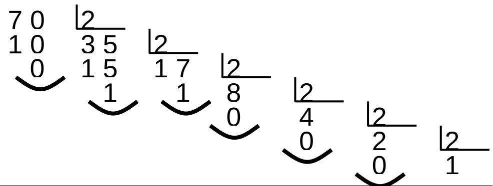
$3^6,\ 3^6+3^0,\ 3^6+3^1,\ 3^6+3^0+3^1,\ 3^6+3^2,\ 3^6+3^2+3^0,\ 3^6+3^2+3^1,\ldots$

Por lo tanto $a_{70}=3^6+3^2+3^1=729+9+3=741$.

Otro método. Si escribimos la sucesión en base 3 tendremos: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001,…

Si consideramos esta sucesión como números escritos en base 2 el término a_{70} será el número 70 escrito en base 2.

70 = $1000110_{(2}$ que en base 3 es: 0 + 3 + 3^2 + 3^6 = 741.



3. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 Marta escribe todos los números de siete dígitos que no tienen ningún dígito repetido. Los escribe en una larga lista ordenándolos de menor a mayor. Si parte la lista por la mitad, ¿cuál es el último número de la primera mitad?

En total hay 7! = 5040 números posibles. El último de la primera mitad ocupará el lugar 2520.
Empiezan por 1 un total de 6! = 720, por 2 otros 720, por 3 otros 720 y ya llevamos 3·720 = 2160.
El buscado empezará por 4 y será el último de la primera mitad de los que empiezan por 4.
La siguiente cifra tiene que ser un 3 y ser el último de los que empiezan por 43, es decir, **4376521.**

4. Encuentra el único número real x tal que $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=x$.

Si nos damos cuenta de que $\sqrt{108}+10=6\sqrt{3}+10$ y que $6\sqrt{3}+10=\left(\sqrt{3}+1\right)^3$ puesto que,
$\left(\sqrt{3}+1\right)^3=\left(\sqrt{3}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot 1+3\cdot\sqrt{3}\cdot 1^2+1^3=3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1=6\sqrt{3}+10$ .De igual forma
$\sqrt{108}-10=6\sqrt{3}-10=\left(\sqrt{3}-1\right)^3$. Por lo tanto,
$x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3}=\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)=2$

Otro método.

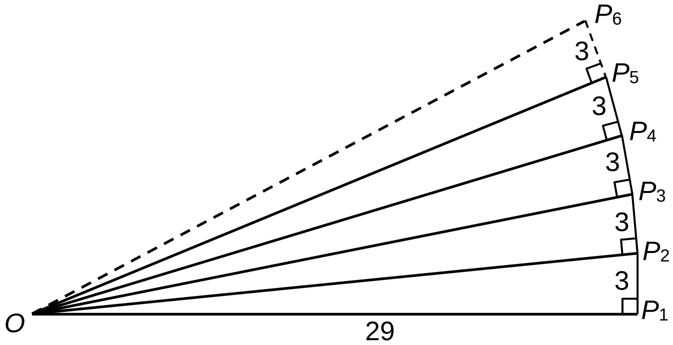
Si elevamos al cubo la expresión $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=x$ obtenemos,

$$x^3=\sqrt{108}+10-3\sqrt[3]{\left(\sqrt{108}+10\right)^2\left(\sqrt{108}-10\right)}+3\sqrt[3]{\left(\sqrt{108}+10\right)\left(\sqrt{108}-10\right)^2}-\left(\sqrt{108}-10\right)=$$

$$=20-3\sqrt[3]{\left(\sqrt{108}+10\right)\cdot 8}+3\sqrt[3]{\left(\sqrt{108}-10\right)\cdot 8}=20-6\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}+6\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=20-6x$$

Resolvemos la ecuación $x^3+6x-20=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+10)=0$ cuya única solución real es $x = 2$.

5. El dibujo muestra una sucesión de puntos, P_1, P_2, P_3,… describiendo una espiral en torno al punto O. El segmento que une cada punto P_n con el siguiente, P_{n+1}, es perpendicular a OP_n y tiene longitud 3.
Si $OP_1 = 29$, ¿cuál es el siguiente valor de n para el que OP_n es un número entero?



La sucesión es: 29, $\sqrt{29^2+9}$, $\sqrt{29^2+18}$, $\sqrt{29^2+27}$,... El OP_n es, $OP_n=\sqrt{29^2+(n-1)\cdot 9}$.

Para que sea un número entero $29^2+(n-1)\cdot 9=x^2 \Rightarrow x^2-29^2=(n-1)\cdot 9 \Rightarrow (x+29)(x-29)=(n-1)\cdot 9$

No es posible que (x + 29) y (x – 29) sean simultáneamente múltiplos de 3 ya que su diferencia es 58 que no es múltiplo de 3.

Una posibilidad sería que $x - 29 = 9$ y $x + 29 = n - 1$ de donde $x = 38$ y $n = 68$, pero no es el siguiente valor de n. Hay antes otro.

Los siguientes cuadrados perfectos a 29^2 se obtienen sumando sucesivamente 59, 61, 63, 65,… y queremos que esa suma sea múltiplo de 9. (no es necesario sumar esos números, basta sumar sus restos al dividir entre 9).

Como 5 + 7 + 0 + 2 + 4 = 18 es múltiplo de 9, sería $(29 + 5)^2 = 34^2$.

En este caso $34^2 - 29^2 = (n - 1)\cdot 9 \Rightarrow n = 36$ y $OP_n = 34$.

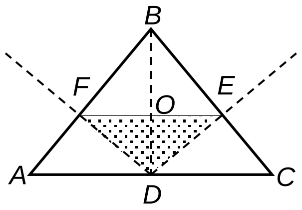
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

Relevo A.-

1A.- ¿Cuántos kilómetros son 25 millones de milímetros?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

25 000 000 mm = 25 000 m = 25 km.

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
En el triángulo isósceles *ABC* los lados *AB* y *BC* miden 5*T* cada uno y el lado *AC* mide 6*T*. Si *D* es el punto medio del lado *AC* y *E* y *F* son los pies de las perpendiculares desde *D* a *BC* y *BA*, respectivamente. Calcula el área del triángulo *DEF*.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)



T = 25. *AB* = *BC* = 125, *AC* = 150.

$BD = \sqrt{(5T)^2 - (3T)^2} = \sqrt{16T^2} = 4T = 100.$

Por semejanza de los triángulos *BDC, BED, DEC, EOD* se deduce:

$\frac{125}{75} = \frac{100}{DE} \Rightarrow DE = 60$. La razón de semejanza entre los triángulos *BDC* y *EOD* es $k = \frac{BC}{DE} = \frac{125}{60} = \frac{25}{12}$. Luego $OE = 100 \cdot \frac{12}{25} = 48$ y $OD = 75 \cdot \frac{12}{25} = 36$.

El área pedida es $S = \frac{1}{2} FE \cdot OD = \frac{1}{2} 2 \cdot 48 \cdot 36 = 1728$

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A y $n = \sqrt[3]{T}$. Los enteros positivos *b* y *c* verifican que las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + bx + c$ difieren en 2*n*. Encuentra el menor valor posible para *b* + *c*.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

$n = \sqrt[3]{T} = \sqrt[3]{1728} = 12$. Las raíces de este polinomio son: x_1 y $(x_1 + 24)$

Hallamos sus raíces. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8c}}{4}$.

La diferencia entre las dos raíces es: $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8c}}{4} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 8c}}{4} = \frac{\sqrt{b^2 - 8c}}{2} = 24 \Rightarrow$

$\sqrt{b^2 - 8c} = 48 \Rightarrow b^2 - 8c = 48^2$. Como *b* y *c* son enteros positivos, b^2 es un cuadrado perfecto mayor que 48^2 y la diferencia entre b^2 y 48^2 un múltiplo de 8.

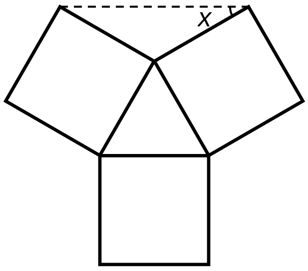
Lógicamente b^2 tiene que ser par para que la diferencia sea par. $50^2 - 48^2 = (50 + 48)(50 - 48) = 196$ que no es múltiplo de 8. $52^2 - 48^2 = (52 + 48)(52 - 48) = 400 = 50 \cdot 8$, que sí es múltiplo de 8.
Cuanto más grande sea *b* más grande será *c*. Por lo tanto *b* = 52 y *c* = 50 serán los menores y su suma es, *b* + *c* = 102.

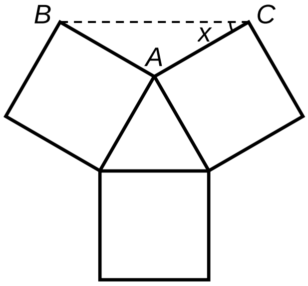
Relevo B.-

.

2B.- Sobre cada lado de un triángulo equilátero se construye un cuadrado como muestra la figura. ¿Cuánto mide el ángulo x?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)





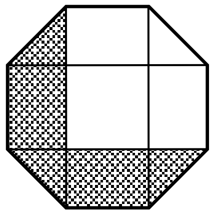
En el triángulo isósceles ABC el ángulo $\hat{A} = 360º – (90º + 90º + 60º) = 120º$.

Por lo tanto $x = \frac{1}{2}(180º – 120º) = 30º$

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B

La figura adjunta representa un octógono regular de lado T dividido en varias zonas por cuatro diagonales. Cinco de ellas están sombreadas y cuatro no. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la zona en blanco y el área de la zona sombreada

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)



T = 30 que es el lado del octógono.

Los lados de lo triángulos rectángulos de la figura son: $30, 15\sqrt{2}, 15\sqrt{2}$ y su área $S = \frac{1}{2}\left(15\sqrt{2}\right)^2 = 225$

El área del cuadrado central es $30^2 = 900$. La diferencia entre las áreas que se pide es el área del cuadrado central y la de dos triángulos, es decir, 900 – 2·225 = 450.

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B y $n = \sqrt{\frac{T}{2}}$.

¿Cuántos subconjuntos de {1, 2, 3,…, n} tienen exactamente uno o dos números primos? .

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

T = 450 de donde $n = \sqrt{\frac{450}{2}} = 15$.

En el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} hay 6 números primos, 2, 3, 5, 7, 11 y 13 y 9 que no son primos.

Hay que tener en cuenta que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ que es el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos.

Subconjuntos con un número primo: $6 \cdot 2^9$.

Subconjuntos con dos números primos: $\binom{6}{2} \cdot 2^9 = 15 \cdot 2^9$.

En total hay: $2^9(6 + 15) = 10\,752$.

Relevo C.-

3C.- ¿Cuántas semanas hay en 8! minutos?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

$8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ Número de semanas: $\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7\cdot24\cdot60} = 4$

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

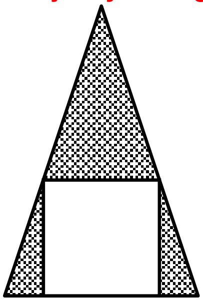
Si aumentamos la base de un triángulo un $\dfrac{100}{T}$ % y disminuimos la altura en un *p* % el área no varía. ¿En qué porcentaje, *p*, ha disminuido la altura?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

$T = 4$, $\dfrac{100}{4}\,\% = 25\,\%$. La altura se convierte en $\dfrac{125}{100}h = \dfrac{5}{4}h$.

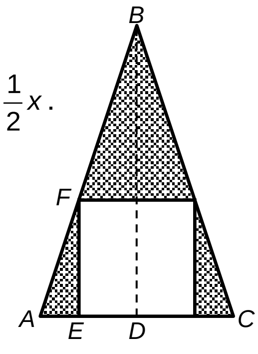
Como el área no varía, $S = \dfrac{1}{2}h\cdot b = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{4}h\right)b' \Rightarrow b' = 0{,}8b = \dfrac{80}{100}b$. Ha disminuido un 20 %.

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.

En el triángulo isósceles de altura $\dfrac{3}{4}T$ y base $\dfrac{1}{2}T$ inscribimos un cuadrado como se observa en la figura. Calcula el área de la zona sombreada.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



$T = 20$. Por lo tanto la altura $BD = \dfrac{3}{4}20 = 15$ y la base $AC = \dfrac{1}{2}20 = 10$.



Si llamamos *x* a la medida del lado del cuadrado, $EF = x$, $ED = \dfrac{1}{2}x$, $AE = 5 - \dfrac{1}{2}x$.

Los triángulos *AEF* y *ADB* son semejantes por lo tanto:

$\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{EF}{AE}$, es decir, $\dfrac{15}{5} = \dfrac{x}{5 - \frac{1}{2}x} \Rightarrow 15 - \dfrac{3}{2}x = x \Rightarrow x = 6$

El área de la zona sombreada es: $S = \dfrac{1}{2}10\cdot15 - 6^2 = 75 - 36 = 39$.