



# REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## LII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

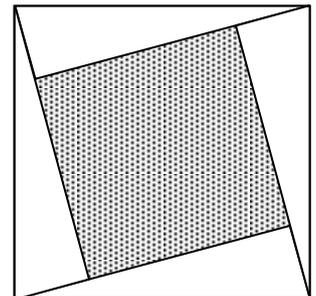
Comunidad de Madrid



FASE CERO: viernes 27 de noviembre de 2015

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta.
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 1 punto y cada respuesta errónea 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

1. ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?  
A)  $44 \cdot 777$       B)  $55 \cdot 666$       C)  $77 \cdot 444$       D)  $88 \cdot 333$       E)  $99 \cdot 222$
2. Javier tarda 16 minutos en llegar desde casa al Instituto. Sus pasos son de 75 cm cada uno y da 90 pasos por minuto. Su hermano Santiago va por el mismo camino, da 100 pasos por minuto pero cada paso es de solo 60 cm. ¿Cuántos minutos tarda Santiago en llegar al Instituto?  
A) 14      B) 16      C) 18      D) 20      E) 22
3. Al simplificar  $\left(\sqrt[6]{27} - \sqrt{\frac{27}{4}}\right)^2$  obtenemos:  
A)  $\frac{3}{4}$       B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$       D)  $\frac{3}{2}$       E)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
4. Si  $\frac{b}{a} = 2$  y  $\frac{c}{b} = 3$ , ¿cuál es el cociente  $\frac{a+b}{b+c}$ ?  
A)  $\frac{1}{3}$       B)  $\frac{3}{8}$       C)  $\frac{3}{5}$       D)  $\frac{2}{3}$       E)  $\frac{3}{4}$
5. Si  $p$ ,  $q$  y  $r$  son primos diferentes, ¿cuál de los siguientes números es el menor cubo perfecto que tiene a  $n = p \cdot q^2 \cdot r^4$  como uno de sus divisores?  
A)  $p^8 \cdot q^8 \cdot r^8$       B)  $(p \cdot q^2 \cdot r^2)^3$       C)  $(p^2 \cdot q^2 \cdot r^2)^3$       D)  $p^3 \cdot q^3 \cdot r^6$       E)  $4 \cdot p^3 \cdot q^3 \cdot r^3$
6. Si  $8^m = 27$ , ¿cuál es el valor de  $4^m$ ?  
A) 3      B) 4      C) 9      D) 13,5      E) No existe ese  $m$
7. En el interior de un cuadrado dibujamos cuatro triángulos rectángulos de hipotenusa el cuádruple de la altura sobre ella, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el cociente entre la longitud del lado del cuadrado sombreado y el lado del cuadrado inicial?  
A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C)  $\frac{3}{4}$   
D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       E)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$



8. ¿Cuál es el área de un sector circular cuyo perímetro coincide con la longitud de la circunferencia a la que pertenece si el área del círculo correspondiente es 1?

- A)  $\frac{\pi-1}{\pi}$       B)  $\frac{1}{\pi}$       C)  $\frac{\pi}{360}$       D)  $\frac{1}{3}$       E)  $\frac{1}{2}$

9. En la caja A hay  $a$  monedas de 1 € y en la B,  $b$  monedas también de 1 €. Los números  $a$  y  $b$  son impares y  $a > b$ . ¿Cuál es el menor número de monedas que hay que pasar de la caja A a la B para que en la caja B haya más monedas que en A?

- A)  $\frac{b-a+2}{2}$       B)  $\frac{a-b+2}{2}$       C)  $\frac{b+a-2}{2}$       D)  $\frac{a-b-2}{2}$       E)  $\frac{a+b+2}{2}$

10. Ali y Bea juegan un cierto número de partidas de un determinado juego. Por cada partida jugada (no hay empates) el ganador recibe 2 puntos y el perdedor recibe 1 punto. Al final, Ali ganó 4 partidas y Bea obtuvo 10 puntos. ¿Cuántas partidas jugaron?

- A) 5      B) 6      C) 7      D) 8      E) No es posible determinarlo

11. Después de ir paseando durante 8 km a una velocidad de 4 km/h, Isa empieza a correr a una velocidad de 8 km/h. ¿Cuántos minutos debe estar corriendo para que la velocidad media a lo largo de todo el recorrido sea de 5 km/h?

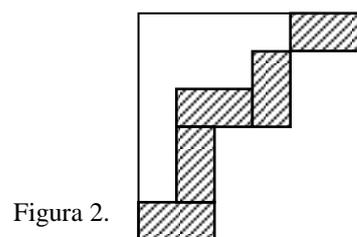
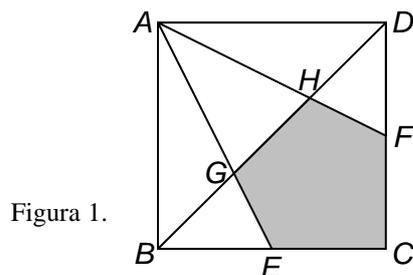
- A) 15      B) 20      C) 30      D) 35      E) 40

12. Si la media de dos números positivos es el 30 % menor que el mayor, ¿qué porcentaje será mayor que el menor?

- A) 75%      B) 70%      C) 30%      D) 25%      E) 20%

13. En el cuadrado de la figura 1,  $E$  y  $F$  son los puntos medios de los lados a los que pertenecen. ¿Qué fracción del área del cuadrado representa el pentágono  $GECFH$ ?

- A)  $\frac{1}{3}$       B)  $\frac{2}{5}$       C)  $\frac{3}{7}$       D)  $\frac{5}{12}$       E)  $\frac{4}{15}$



14. En el interior de un cuadrado de 24 cm de lado dibujamos cinco rectángulos iguales, como muestra la figura 2. ¿Cuál es el área, en  $\text{cm}^2$ , de cada uno de ellos?

- A) 12      B) 16      C) 18      D) 24      E) 32

15. El volumen de un paralelepípedo recto de  $32 \text{ cm}^2$  de área total es  $8 \text{ cm}^3$ . Si las tres dimensiones están en progresión geométrica, la suma, en cm, de las longitudes de todas las aristas es:

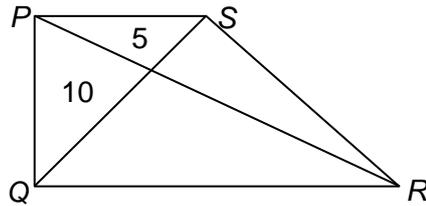
- A) 28      B) 32      C) 36      D) 40      E) 44

16. Si lanzamos un dado normal seis veces consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número mayor o igual que 5 al menos cinco veces?

- A)  $\frac{13}{729}$       B)  $\frac{12}{729}$       C)  $\frac{2}{729}$       D)  $\frac{3}{729}$       E) Nada de lo anterior

17. ¿Cuántos números podemos escribir como suma de dos enteros positivos distintos, si cada uno de ellos debe ser menor o igual que 100?
- A) 196      B) 197      C) 198      D) 199      E) 200
18. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos una cifra repetida?
- A) 62·72      B) 52·72      C) 52·82      D) 42·82      E) 42·92
19. Dos coches, A y B, recorren la misma distancia. El coche A recorre la mitad de la distancia a  $k$  km/h y la otra mitad a  $v$  km/h. El coche B va la mitad del tiempo a  $k$  km/h y la otra mitad a  $v$  km/h. Si la velocidad media de A ha sido  $x$  km/h y la de B  $y$  km/h, entonces:
- A)  $x \leq y$       B)  $y \leq x$       C)  $x = y$       D)  $x < y$       E)  $x > y$
20. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $|x - |2x + 1|| = 3$  ?
- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4
21. En el lado  $BC$  del triángulo  $ABC$  marcamos un punto  $D$  tal que  $\hat{C}AD = \hat{D}AB = 60^\circ$ . Si  $AC = 3$  y  $AB = 6$ , la longitud de  $AD$  es:
- A) 2      B) 2,5      C) 3      D) 3,5      E) 4
22. Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  no están alineados, ¿cuál es el valor mínimo del área del triángulo  $ABC$  si  $A(0, 0)$ ,  $B(36, 15)$  y las coordenadas de  $C$  son números enteros?
- A)  $\frac{1}{2}$       B) 1      C)  $\frac{3}{2}$       D)  $\frac{13}{2}$       E) No existe tal mínimo
23. Si  $|x| + x + y = 10$  y  $x + |y| - y = 12$ ,  $x + y$  es igual a:
- A) -2      B) 2      C)  $\frac{18}{5}$       D)  $\frac{22}{3}$       E) 22
24. Si  $\operatorname{tg}\alpha$  y  $\operatorname{tg}\beta$  son las soluciones de la ecuación  $x^2 - px + q = 0$  y  $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$  y  $\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$  son las soluciones de la ecuación  $x^2 - rx + s = 0$ ,  $r \cdot s$  es necesariamente igual a:
- A)  $p \cdot q$       B)  $\frac{1}{p \cdot q}$       C)  $\frac{p}{q^2}$       D)  $\frac{q}{p^2}$       E)  $\frac{p}{q}$
25. En la sucesión 1, 3, 2, -1, -3, ... en la que cada término, después de los dos primeros, es igual al anterior menos el anterior al anterior, es decir,  $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$  para  $n > 2$ . ¿Cuál es la suma de los 100 primeros términos de esta sucesión?
- A) 5      B) 4      C) 2      D) 1      E) -1
26. En un rectángulo de lados 6 y 11, trazamos las bisectrices de cada uno de los ángulos en los extremos de uno de los lados de longitud 11. Dichas bisectrices dividen al otro lado de longitud 11 en tres partes. Las longitudes de estas partes son:
- A) 1, 9, 1      B) 6, 1, 6      C) 3, 5, 3      D) 4, 3, 4      E) 5, 1, 5
27. Si  $p$  es primo y las dos raíces de la ecuación  $x^2 + px - 444p = 0$  son enteros, entonces:
- A)  $1 < p \leq 11$       B)  $11 < p \leq 21$       C)  $21 < p \leq 31$       D)  $31 < p \leq 41$       E)  $41 < p \leq 51$

28. En el trapecio rectángulo  $PQRS$  trazamos las diagonales, siendo 5 y 10 las áreas de dos de los triángulos que determinan, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del trapecio?



- A) 60      B) 45      C) 40      D) 35      E) 30
29. María escribió varios enteros positivos distintos, ninguno mayor que 100, tales que su producto no era divisible por 18. ¿Cuántos escribió como mucho?
- A) 5      B) 17      C) 68      D) 69      E) 90
30. ¿Cuál es el valor de la suma  $[\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \dots + [\log_2 1023] + [\log_2 1024]$ ?
- A) 8192      B) 8204      C) 9218      D)  $[\log_2(1024!)]$       E) Nada de lo anterior

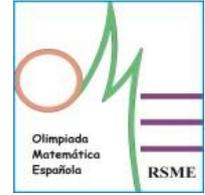
(Recuerda.  $[x]$  representa la parte entera de  $x$ ).



# LII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## FASE CERO-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 27 de noviembre de 2015



### Hoja de respuestas

Nombre y apellidos: ..... Tfno. ....

Centro ..... Curso ..... Fecha de nacimiento .....

1.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	16.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
2.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	17.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
3.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	18.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
4.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	19.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
5.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	20.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
6.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	21.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
7.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	22.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
8.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	23.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
9.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	24.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
10.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	25.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
11.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E	26.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
12.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	27.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
13.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	28.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
14.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E	29.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
15.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	30.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E

Espacio reservado para el equipo calificador.

CORRECTAS (5)

EN BLANCO (1)

INCORRECTAS

PUNTUACIÓN