



# REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## LI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

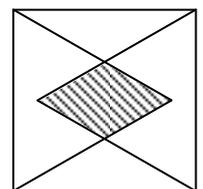
Comunidad de Madrid



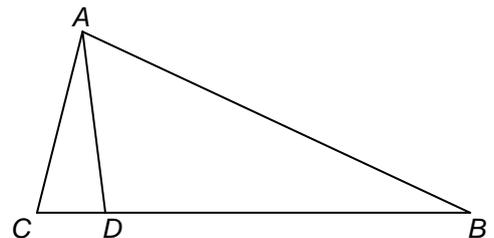
FASE CERO: jueves 20 de noviembre de 2014

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

1. La media de los cinco enteros consecutivos  $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4$  es  $b$ . ¿Cuál es la media de los cinco enteros consecutivos  $b, b + 1, b + 2, b + 3, b + 4$ ?  
A)  $a + 3$       B)  $a + 4$       C)  $a + 5$       D)  $a + 6$       E)  $a + 7$
2. Dos rectas perpendiculares se cortan en el punto  $A(6, 8)$ . Si las ordenadas en el origen (corte con el eje  $Y$ ) de ambas rectas suman cero, ¿cuál es el área del triángulo de vértices  $A$  y dichos cortes con el eje  $Y$ ?  
A) 45      B) 48      C) 54      D) 60      E) 72
3. Si  $A > B > 0$  y  $A$  es el  $x\%$  mayor que  $B$ ,  $x$  es igual a  
A)  $100 \cdot \frac{A-B}{B}$       B)  $100 \cdot \frac{A+B}{B}$       C)  $100 \cdot \frac{A+B}{A}$       D)  $100 \cdot \frac{A-B}{A}$       E)  $100 \cdot \frac{A}{B}$
4. Lanzamos al aire cuatro dados de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos tres de ellos muestren la misma cara?  
A)  $\frac{1}{36}$       B)  $\frac{7}{72}$       C)  $\frac{1}{9}$       D)  $\frac{5}{36}$       E)  $\frac{1}{6}$
5. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a  $10^{1002} - 4^{501}$ ?  
A)  $2^{1002}$       B)  $2^{1003}$       C)  $2^{1004}$       D)  $2^{1005}$       E)  $2^{1006}$
6. ¿Para cuántos enteros  $x$  se verifica que el número  $x^4 - 51x^2 + 50$  es negativo?  
A) 8      B) 10      C) 12      D) 14      E) 16
7. Los enteros positivos  $a$  y  $b$  verifican que las rectas  $y = ax + 5$ ,  $y = 3x + b$  cortan al eje de abscisas en el mismo punto. ¿Cuál es la suma de todas las posibles abscisas de este punto de intersección?  
A) -20      B) -18      C) -15      D) -12      E) -8
8. En el interior de un cuadrado de lado  $2\sqrt{3}$  dibujamos dos triángulos equiláteros como muestra la figura. ¿Cuál es el área del rombo intersección de los dos triángulos?  
A)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$       B)  $\sqrt{3}$       C)  $2\sqrt{2} - 1$       D)  $8\sqrt{3} - 12$       E)  $\frac{3}{2}$



9. ¿Cuántos enteros positivos  $x \leq 100$  verifican que  $x^2 + x^3$  es un cuadrado perfecto?  
 A) 6                      B) 7                      C) 8                      D) 9                      E) 10
10. Dividimos un círculo de radio 12 en dos sectores, el menor de  $120^\circ$ , utilizando cada uno de ellos para formar la cara lateral de un cono. ¿Cuál es el cociente entre los volúmenes del cono pequeño y del mayor?  
 A)  $\frac{3}{8}$                       B)  $\frac{3}{4}$                       C)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$                       D)  $\frac{\sqrt{5}}{6}$                       E)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$
11. En el rectángulo  $ABCD$ , con  $AB = 6$  y  $AD = 30$ , sea  $G$  el punto medio de  $AD$ . Prolongamos desde  $B$  el lado  $AB$  hasta el punto  $E$ , con  $BE = 2$ , y sea  $F$  el punto de intersección de  $ED$  con  $BC$ . ¿Cuál es el área del cuadrilátero  $BFDG$ ?  
 A)  $\frac{183}{2}$                       B) 67                      C)  $\frac{135}{2}$                       D) 68                      E)  $\frac{137}{2}$
12. Si la nota de cada uno de los chicos de una clase hubiera sido 4 puntos más, la media de toda la clase habría subido 1 punto. ¿Qué porcentaje de chicas había en la clase?  
 A) 40%                      B) 50%                      C) 75%                      D) 80%                      E) 60%
13. Esteban y Joaquín comienzan simultáneamente a caminar desde dos puntos distintos  $A$  y  $B$ , en sentido opuesto, por un mismo sendero y se cruzan al cabo de 3 horas. Esteban llega al punto desde el que salió Joaquín 2 horas y media antes de que Joaquín llegue al punto desde el que salió Esteban. ¿Cuántas horas duró la excursión de Joaquín?  
 A) 6                      B) 6,5                      C) 7                      D) 7,5                      E) 8,5
14. Programamos un ordenador para que transmita una cierta sucesión de cinco dígitos, ceros y unos, cinco veces. Una de las cinco veces lo hizo correctamente, otra vez tuvo un error, otra vez dos, otra vez tres y la otra vez cuatro errores. Las cinco respuestas son las que se proponen a continuación. ¿Cuál fue la correcta?  
 A) 00001                      B) 00100                      C) 01100                      D) 10010                      E) 10011
15. ¿Cuál es la longitud del lado  $AB$  del triángulo  $ABC$  sabiendo que  $AC = 3$ ,  $AD = 3$ ,  $BD = 8$  y  $CD = 1$ ?  
 A) 8                      B) 8,75                      C) 9  
 D) 9,25                      E) 9,5



16. ¿Cuál es el mayor entero  $k$  para el que  $85!$  es divisible entre  $42^k$ ?  
 A) 2                      B) 13                      C) 41                      D) 81                      E) 135
17. En un concurso de televisión hay un premio guardado en una de cinco cajas  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  con la misma probabilidad en cada una. El concursante elige la caja  $A$ . El realizador del concurso, que sabe en qué caja está el premio, abre dos de las otras cuatro, la  $B$  y la  $C$ , en las no está el premio. ¿Cuál es la probabilidad de que el premio esté en la caja  $D$ ?  
 A)  $\frac{1}{5}$                       B)  $\frac{1}{3}$                       C)  $\frac{2}{5}$                       D)  $\frac{3}{5}$                       E)  $\frac{2}{3}$
18. Considera el conjunto de todas las soluciones enteras  $(x, y)$  de la ecuación  $x^2 = y^4 + 671$ . ¿Cuál es la suma de todos los valores,  $y$ , del conjunto de soluciones?  
 A) 0                      B) 5                      C) 36                      D) 41                      E) 1296

19. ¿Cuál es el mínimo valor de la expresión  $\sqrt{4+y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (2-y)^2} + \sqrt{(4-x)^2 + 1} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ ?

- A) 3                      B)  $3+2\sqrt{2}$                       C) 5                      D)  $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$                       E)  $2+\sqrt{5}+\sqrt{2}$

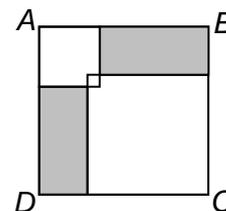
20. El dominio de la función  $f(x) = \lg_1 \left\langle \lg_4 \left\{ \lg_1 \left[ \lg_4 \left( \lg_{16} \left( \lg_{\frac{1}{16}} x \right) \right) \right] \right\} \right\rangle$  es un intervalo de longitud  $\frac{m}{n}$  con  $m$  y  $n$  primos entre sí. ¿Cuál es el valor de  $m+n$ ?

- A) 19                      B) 31                      C) 271                      D) 319                      E) 511

21. Si  $P(x)$  es un polinomio de tercer grado con  $P(0) = k$ ,  $P(1) = 2k$  y  $P(-1) = 3k$ , ¿cuál es el valor de  $P(2) + P(-2)$ ?

- A) 0                      B)  $k$                       C)  $6k$                       D)  $7k$                       E)  $14k$

22. En el interior del cuadrado  $ABCD$  de área 196 hay dos cuadrados que se solapan como muestra la figura. Si el área del mayor de los dos es el cuádruple de la del menor y el área de la región común a ambos es 1, ¿cuál es el área de la región sombreada?



- A) 64                      B) 72                      C) 76                      D) 80                      E) 84

23. En el dibujo se observan dos semicírculos iguales y tres cuadrados. ¿Cuál es el cociente entre las áreas de las regiones sombreadas?



- A)  $\frac{1}{2}$                       B)  $\frac{2}{3}$                       C)  $\frac{3}{4}$                       D)  $\frac{4}{5}$                       E)  $\frac{5}{6}$

24. El mayor número primo conocido, formado solamente por ceros y unos es el número  $\frac{10^{641}(10^{640}-1)}{9} + 1$ . ¿Cuántas cifras tiene?

- A) 640                      B) 641                      C) 1280                      D) 1281                      E) 640-641

25. Si  $x, y, z$  son enteros positivos menores que 10 tales que  $(100x+10y+z)^2 = (x+y+z)^5$ , ¿Cuál es el valor de  $x^2 + y^2 + z^2$ ?

- A) 21                      B) 23                      C) 29                      D) 33                      E) 37

26. ¿Para cuántos enteros positivos  $n$ , resulta que  $3^n + 81$  es un cuadrado perfecto?

- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4

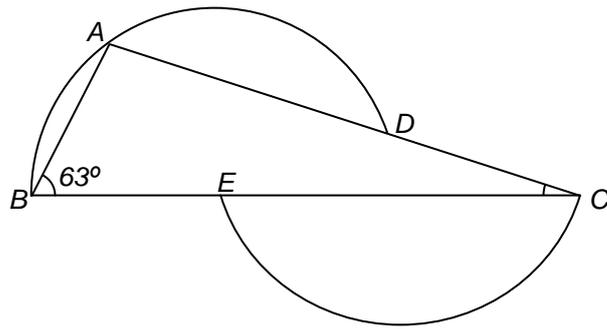
27. ¿Para cuántos enteros positivos  $n$ , se verifica que el resto de la división de 1 000 063 entre  $n$  es 63?

- A) 29                      B) 37                      C) 39                      D) 49                      E) 79

28. ¿Cuál es el resto de la división de  $P(x) = x^{200} - 2x^{199} + x^{50} - 2x^{49} + x^2 + x + 1$  entre  $(x-1)(x-2)$ ?

- A)  $2x-1$                       B) 7                      C)  $2x+3$                       D) 1                      E)  $6x-5$

29. En la figura que observas,  $E$  es el centro de la circunferencia que pasa por  $A$ ,  $B$  y  $D$ . El centro de la circunferencia que pasa por  $E$  y  $C$  es  $D$ . Si el ángulo en  $B$  es de  $63^\circ$ , el valor del ángulo en  $C$  es:



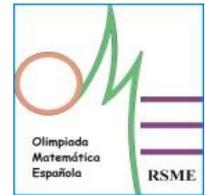
- A)  $18^\circ$       B)  $20^\circ$       C)  $22^\circ$       D)  $24^\circ$       E)  $26^\circ$
30. Si  $x \geq 3$ , definimos  $f(x) = \lg_2(\lg_3 x) - \lg_3(\lg_2 x)$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
- A)  $f(x) > 0 \quad \forall x \geq 3$       B)  $f(x) < 0 \quad \forall x \geq 3$       C)  $f(x) = 0 \quad \forall x \geq 3$
- D)  $f(x) = 0$  para un único valor de  $x \geq 3$       E)  $f(x) = 0$  para más de un valor de  $x \geq 3$



# LI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## FASE CERO-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, jueves 20 de noviembre de 2014



### Hoja de respuestas

Nombre y apellidos: ..... Tfno. ....

Centro ..... Curso ..... Fecha de nacimiento .....

1.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	16.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
2.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	17.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
3.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	18.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
4.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	19.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
5.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	20.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
6.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	21.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
7.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E	22.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
8.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	23.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
9.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	24.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
10.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	25.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
11.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	26.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
12.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	27.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
13.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	28.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
14.-	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	29.-	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
15.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E	30.-	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E

Espacio reservado para el equipo calificador.

CORRECTAS (5)

EN BLANCO (1)

INCORRECTAS

PUNTUACIÓN