

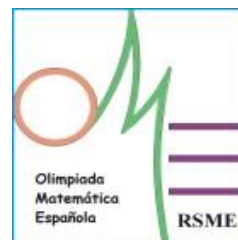


# REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## L OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

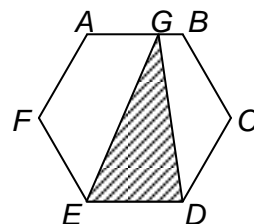
Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 29 de noviembre de 2013



- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

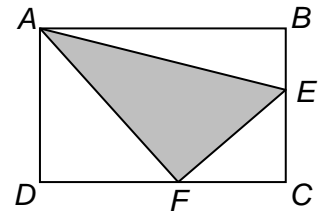
1. ¿Cuál es la cifra de las unidades de  $3^{2013}$ ?  
A) 3                      B) 9                      C) 7                      D) 1                      E) 6
2. El robot OMEMAN se mueve sobre la recta real empezando en el 0. Da un paso a la derecha llegando al 1, dos pasos a la izquierda hasta el -1, tres pasos a la derecha hasta el 2, cuatro pasos a la izquierda hasta el -2 y así sucesivamente, alternando derecha e izquierda y un paso más en cada movimiento. ¿A qué número llegará después de 2012 giros?  
A) 1007                  B) -1006                  C) 27                      D) 11                      E) 0
3. El dibujo muestra un hexágono regular dentro de un rectángulo. ¿Cuál es la suma de los cuatro ángulos marcados?  
A)  $90^\circ$                   B)  $120^\circ$                   C)  $135^\circ$                   D)  $150^\circ$   
E) Depende de la posición del hexágono respecto del rectángulo
4. Ayer fue el cumpleaños de David y de su abuela. Hoy la edad de la abuela es par y 15 veces la de David y dentro de cuatro años será el cuadrado de la edad que tenga David. ¿Cuántos años es mayor la abuela que David?  
A) 42                      B) 49                      C) 56                      D) 60                      E) 64
5. Dos lados de un triángulo miden 4 y 5 cm y el tercer lado  $x$  cm, siendo  $x$  un número entero. ¿Cuántos valores diferentes puede ser  $x$ ?  
A) 4                      B) 5                      C) 6                      D) 7                      E) 8
6. Un triángulo tiene dos lados iguales de longitud 5. ¿Qué longitud debe tener el tercer lado para que sea máxima el área de dicho triángulo?  
A) 5                      B) 6                      C)  $5\sqrt{2}$                   D) 8                      E)  $5\sqrt{3}$
7. En la figura se observa un hexágono regular  $ABCDEF$  y un triángulo  $EGD$  en el que  $G$  es un punto del lado  $AB$ . ¿Qué fracción del área del hexágono ocupa el triángulo?



8. ¿Cuántas ecuaciones de segundo grado, de la forma  $x^2 + ax + b = 0$ , con  $a$  y  $b$  diferentes, tienen por solución  $a$  y  $b$ ?

A) Infinitas      B) Ninguna      C) 4      D) 3      E) 1

9. El área del triángulo  $ABE$  es  $\frac{1}{5}$  del área del rectángulo  $ABCD$  y el área del triángulo  $EFC$  es  $\frac{1}{8}$  del área de dicho rectángulo. ¿Qué fracción de la superficie del rectángulo ocupa el triángulo sombreado  $AFE$ ?



A)  $\frac{27}{40}$       B)  $\frac{21}{40}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{19}{40}$       E)  $\frac{23}{60}$

10. Un estudio entre los hábitos alimenticios de los estudiantes de un centro escolar concluye que al 70% les gustan las peras, al 75% les gustan las naranjas, al 80% les gustan los plátanos y al 85% les gustan las manzanas. ¿Cuál es el menor porcentaje posible de estudiantes de ese centro a los que les gustan todas esas frutas?

A) 10%      B) 15%      C) 20%      D) 25%      E) 70%

11. Si los números  $x$  e  $y$  verifican que  $x + y = 20$  y que  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ , ¿cuál es el valor de  $xy^2 + x^2y$ ?

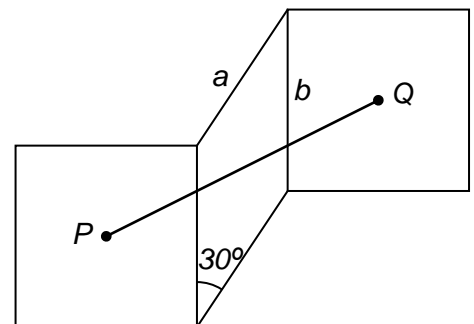
A) 80      B) 200      C) 400      D) 640      E) 800

12. En cada una de las doce casillas de la tabla de la figura hemos colocado un número de forma que la suma de los números de cada fila es la misma y también la suma de los números de cada una de las cuatro columnas es la misma. ¿Qué número representa la letra  $x$ ?

2	4		2
	3	3	
6		1	$x$

A) 4      B) 5      C) 6      D) 7      E) 8

13. Sobre los lados mayores de un paralelogramo de lados  $a$  y  $b$  y un ángulo de  $30^\circ$ , construimos dos cuadrados, hacia fuera, como muestra la figura. ¿Cuál es la distancia entre los centros,  $P$  y  $Q$ , de los cuadrados?



A)  $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$       B)  $\sqrt{b^2 - a^2 + 2ab}$   
 C)  $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$       D)  $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$   
 E)  $\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$

14. En el triángulo de vértices  $A(0, 4)$ ,  $B(-2, 0)$  y  $C(4, 0)$  inscribimos un cuadrado con un lado descansando sobre el lado  $BC$  del triángulo. Uno de los vértices del cuadrado es el punto  $P$  de coordenadas:

A) (1, 3)      B) (2, 2)      C) (1,5; 2,5)      D) (1,6; 2,4)      E) (1,8; 2,2)

15. ¿Cuál es el mayor valor de  $a$  para el que la recta  $y = 10x + 5$  es tangente a la parábola  $y = x^2 + ax + 6$ ?

A) 18      B) 16      C) 15      D) 14      E) 12

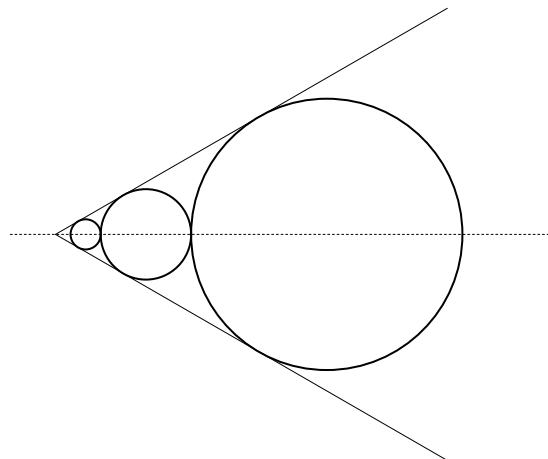
16. Si  $x$  e  $y$  son enteros positivos que verifican la ecuación  $\sqrt{x} - \sqrt{11} = \sqrt{y}$ , ¿cuál es el máximo valor de  $\frac{x}{y}$ ?

A) 2                      B) 4                      C) 8                      D) 11                      E) 44

17. En la figura se observan tres circunferencias tangentes exteriores y dos rectas tangentes a las tres. Si los radios de las circunferencias son  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ , con  $r_1 < r_2 < r_3$  y la distancia entre el centro de la pequeña y el centro de la mayor es  $16r_1$ , el cociente

$\frac{r_1}{r_2}$  es:

A)  $\frac{1}{2}$                       B)  $\frac{2}{5}$                       C)  $\frac{1}{3}$   
D)  $\frac{2}{7}$                       E)  $\frac{1}{4}$



18. En el triángulo isósceles  $ABC$ , con  $AB = AC$ , la bisectriz del ángulo de vértice  $C$  corta al lado  $AB$  en un punto  $D$ . Si  $BC = CD$ , el ángulo  $\widehat{CDA}$  es igual a:

A)  $90^\circ$                       B)  $100^\circ$                       C)  $108^\circ$                       D)  $110^\circ$                       E)  $120^\circ$

19. En una clase las chicas son más del 45% pero menos del 50%. ¿Cuál es el menor número posible de chicas en esa clase?

A) 5                      B) 7                      C) 8                      D) 9                      E) 10

20. Si  $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ , el valor de  $n$  es:

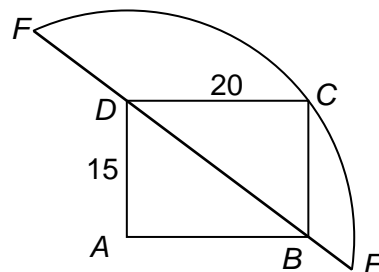
A) 13                      B) 14                      C) 15                      D) 16                      E) 17

21. Si  $a + b + c = 7$  y  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$ , ¿cuál es el valor de  $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$ ?

A)  $\frac{19}{10}$                       B)  $\frac{17}{10}$                       C)  $\frac{9}{7}$                       D)  $\frac{3}{2}$                       E)  $\frac{10}{7}$

22. En la figura se observa un rectángulo  $ABCD$  de lados 20 y 15 y un arco de la circunferencia de centro en  $A$  y radio  $AC$ . La cuerda de dicho arco pasa por  $D$  y  $B$ . ¿Cuál es la longitud de dicha cuerda?

A) 50                      B)  $2\sqrt{20 \cdot 25}$                       C)  $2\sqrt{37 \cdot 13}$                       D) 44  
E) 26



23. Para cada entero positivo  $n$  ordenamos, de mayor a menor, todos sus divisores; el primero será el propio número y el último el 1. ¿Para cuántos valores de  $n$  el segundo número de esta lista será el 91?

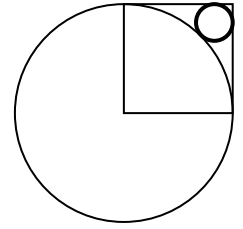
A) Infinitos                      B) 6                      C) 5                      D) 4                      E) 3

24. ¿Cuántos divisores de 4 cifras tiene el número  $102^2$ ?

A) 1                      B) 2                      C) 5                      D) 3                      E) 4

25. El cuadrado de la figura tiene lado igual a 1. ¿Cuál es el radio del círculo pequeño?

- A)  $\sqrt{2} - 1$       B)  $\frac{1}{4}$       C)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       D)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$   
E)  $(\sqrt{2} - 1)^2$

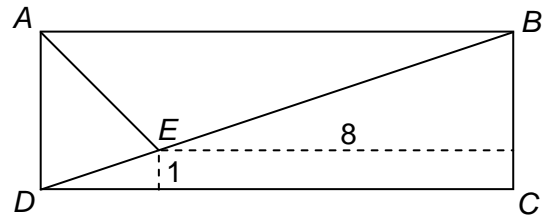


26. En un cajón hay 2 pares de calcetines negros, 3 pares de grises y 4 de azules. Yo sé que hay 3 calcetines con agujeros pero no me acuerdo de qué color eran. Si están todos revueltos y los elijo al azar, ¿cuántos calcetines debo coger, como mínimo, para estar seguro de poder ponerme dos del mismo color y sin agujeros?

- A) 2      B) 3      C) 6      D) 7      E) 8

27. En el rectángulo  $ABCD$  la bisectriz del ángulo  $\hat{A}$  corta a la diagonal  $BD$  en el punto  $E$ . Si las distancias de  $E$  a los lados  $DC$  y  $BC$  son 1 y 8, respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado  $AB$  de dicho rectángulo?

- A)  $8 + 2\sqrt{2}$       B)  $11 - \sqrt{2}$       C) 10  
D)  $3 + 3\sqrt{2}$       E)  $11 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

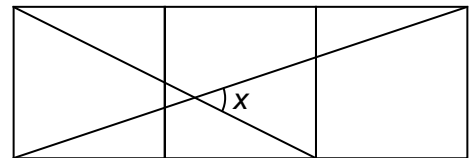


28. ¿Cuál es la última cifra, distinta de cero, del número  $2^{57} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$ ?

- A) 8      B) 6      C) 4      D) 2      E) 1

29. Se juntan tres cuadrados como se indica en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo  $x$ ?

- A)  $30^\circ$       B)  $40^\circ$       C)  $45^\circ$   
D)  $50^\circ$       E)  $60^\circ$



30. Algunos números de tres cifras verifican que si le quitas la primera cifra o si le quitas la última, obtienes, en ambos casos, un cuadrado perfecto. Por ejemplo el número 816. ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras con esta curiosa propiedad?

- A) 2016      B) 2013      C) 1993      D) 1465      E) 1177



# LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## FASE CERO-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 29 de noviembre de 2013



### Hoja de respuestas

Nombre y apellidos: ..... Tfno. ....

Centro ..... Curso ..... Fecha de nacimiento .....

1.-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2.-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3.-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
9.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
10.-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
12.-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
13.-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
14.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
15.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

16.-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
17.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19.-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
20.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21.-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
22.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
23.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
24.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
25.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
26.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
27.-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
28.-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
29.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
30.-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Espacio reservado para el equipo calificador.

CORRECTAS (5)

EN BLANCO (2)

INCORRECTAS

PUNTUACIÓN